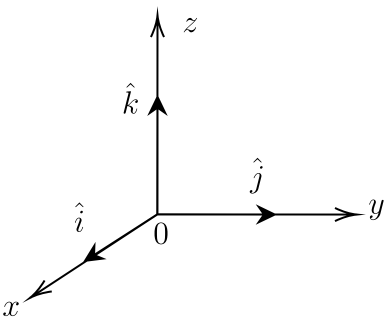
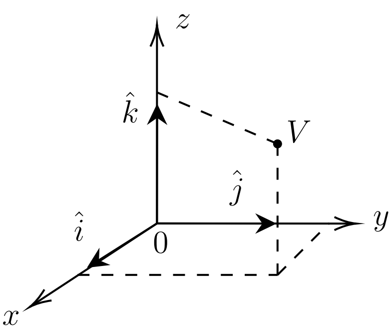
1 Notação utilizada



A partir do comum sistema de coordenadas acima, $\mathbb{R}^3$, temos que $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ são vetores unitários, valendo a igualdade de seus módulos:

$$\|\hat{i}\| = \|\hat{j}\| = \|\hat{k}\| = 1$$

Se tomarmos um ponto V qualquer, podemos escrevê-lo a partir dos vetores unitários $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$.



$$\overline{0V} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}, \quad \forall\ a,\ b \text{ e } c \in \mathbb{R}$$

Para fins de notação, substituiremos $\hat{i}$ por $\underset{\sim}{e_1}$, $\hat{j}$ por $\underset{\sim}{e_2}$ e $\hat{k}$ por $\underset{\sim}{e_3}$. De forma similar, substituiremos x por x_1, y por x_2 e z por x_3. Assim, podemos reescrever o vetor $\overline{0V}$ como

$$\underline{x} = x_1\underset{\sim}{e_1} + x_2\underset{\sim}{e_2} + x_3\underset{\sim}{e_3}$$

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i\underset{\sim}{e_i} \tag{1}$$

1.1 Convenção indicial

Verificaremos formas mais compactas de se escrever um sistema de equações lineares. Por exemplo, o sistema abaixo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Advém do produto entre uma matriz A com um vetor $\underline{x}$, da forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}}_{\underline{b}}$$

Entretanto, ambas as formas acima podem ser reescritas de uma forma mais compacta, assim

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i, \text{ para } i = 1,\, 2 \text{ e } 3$$

Acima, o índice i representa o **número de equações**. Podemos simplificar ainda mais introduzindo um somatório no índice restante

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j = b_i, \text{ para } i = 1,\, 2 \text{ e } 3$$

A notação de Einstein remove o somatório acima, atribuindo um tipo para os índices conforme a quantidade de aparições que ele possui em um termo, sendo

$$a_{ij}x_j = b_i$$

$$\begin{cases} i = \text{ índice livre} \\ j = \text{ índice mudo (somatório)} \end{cases}$$

Como o índice i apareceu apenas uma vez, ele é chamado de índice livre. Já o índice j é chamado de índice mudo, representando implicitamente um somatório.

Assim, podemos também reescrever de uma forma muito mais compacta a Equação (1) a partir da notação de Einstein, sendo

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \underset{\sim}{e_i} = x_i \underset{\sim}{e_i}$$

Por exemplo, como poderíamos simplificar um somatório duplo como o abaixo?

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}b_{ij}$$

Como os índices i e j se repetem duas vezes cada no mesmo termo, eles são índices mudos e indicam um somatório. Podemos reescrevê-los com a notação indicial de Einstein sem perda de significado:

$$a_{ij}b_{ij}$$

Expandindo o somatório acima,

$$\overbrace{\underbrace{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13}}_{\text{j=1, 2 e 3}}}^{\text{i=1}} + \overbrace{\underbrace{a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23}}_{\text{j=1, 2 e 3}}}^{\text{i=2}} + \overbrace{\underbrace{a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} + a_{33}b_{33}}_{\text{j=1, 2 e 3}}}^{\text{i=3}}$$