

Material de estudo

@ivansnpmaster

10 de Fevereiro de 2019

1 Álgebra linear

1.1 Autovalores e autovetores

Seja $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Dizemos que um valor $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de A se o sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

tiver uma solução não nula. Para um tal autovalor λ , cada solução de (1) será chamada de autovetor de A associado a λ (ou simplesmente, um autovetor de A).

Notação: Se λ for um autovalor de uma matriz A , indicamos por $V(\lambda)$ ao conjunto de todos os autovetores de A associados a λ (isto é, o conjunto solução do sistema (1)).

Exemplo: Considere uma matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

Queremos encontrar um valor $\lambda \in \mathbb{R}$ (se isso for possível) tal que o sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

tenha soluções não nulas. Observe que podemos escrever

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Daí, a relação (2) pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -2 \\ -2 & \lambda + 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

Nosso problema se reduz a encontrar um valor $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que o sistema (3) tenha uma solução não nula. Existe um teorema que diz que um tal sistema homogêneo tem solução não nula se e somente se o determinante de sua matriz de coeficientes for zero. Com isto, existirá um λ como queremos se e somente se

$$0 = \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -2 \\ -2 & \lambda + 4 \end{pmatrix} = (\lambda + 1) \cdot (\lambda + 4) - 2 \cdot 2 = \lambda(\lambda + 5)$$

isto é, quando $\lambda = 0$ ou $\lambda = -5$. Esses valores serão os autovalores de A . Para cada autovalor deve-se achar os autovetores correspondentes. Substitui-se o respectivo valor de λ encontrado em (3) e resolve-se os sistemas correspondentes.

Para $\lambda = 0$, o sistema (3) será:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Como a 2ª equação é a 1ª multiplicada por -2, a solução do sistema é a resolução da 1ª equação. Não é difícil ver que o conjunto solução desse sistema é $\{(2a, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

Para $\lambda = -5$, o sistema (3) será:

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

que tem conjunto solução igual a $\{(a, -2a) : a \in \mathbb{R}\}$.

1.2 Polinômio característico

Um autovalor real de uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$, é um valor $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que o sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

tenha uma solução não nula. Inicialmente, observe que

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Com isso, tem-se que (4) é equivalente a

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

A matriz de coeficientes do sistema (5) pode então ser escrita como $(\lambda \cdot I - A)$ que obviamente pertence a $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. O sistema (5) terá uma solução não nula se e somente se $\det(\lambda \cdot I - A) = 0$.

O polinômio característico de uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é o polinômio $p_a(t) = \det(t \cdot I - A)$.

O problema de encontrar os autovalores de uma matriz A transforma-se em achar as possíveis raízes do polinômio $p_a(t)$. Como sabe-se que um polinômio de grau n possui no máximo n raízes distintas, conclui-se que uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ possui no máximo n autovalores distintos. Uma vez encontradas as raízes de $p_a(t)$, o cálculo dos autovetores associados a elas se reduz à solução de sistemas lineares.

Exemplo: Calcule os autovalores e os autovetores da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Primeiramente, seu polinômio característico:

$$\begin{aligned} p_a(t) &= \det \begin{pmatrix} t+1 & -3 & 0 \\ 3 & t-5 & 0 \\ -1 & -1 & t-2 \end{pmatrix} = (t+1) \cdot (t-5) \cdot (t-2) - [-9 \cdot (t-2)] = \\ &= (t-2) \cdot [(t+1) \cdot (t-5) + 9] = (t-2) \cdot (t^2 - 5t + t - 5 + 9) = \\ &= (t-2) \cdot (t^2 - 4t + 4) = (t-2) \cdot (t-2)^2 = (t-2)^3 \end{aligned}$$

Logo, o único autovalor da matriz A é 2 (pois 2 é a raiz tripla de $p_a(t)$). Agora, calcula-se os autovetores associados a 2, isto é, a solução do sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, tem-se:

$$\begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ -6y = 0 \end{cases}$$

O que implica em $x = y = 0$.

Observa-se que qualquer valor de $z \in \mathbb{R}$ induz uma solução do sistema do tipo $(0, 0, z) = z(0, 0, 1)$. Logo, os autovetores associados a 2 são os múltiplos de $(0, 0, 1)$.

Exemplo: Considere uma matriz quase idêntica à do exemplo anterior (a diferença está no valor a_{31}).

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Seu polinômio característico é (também) $p_a(t) = (t - 2)^3$. Já que na multiplicação nas diagonais onde está o a_{31} existe o número zero. Logo, 2 é o único autovalor de A . Para o cálculo dos autovetores, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

É fácil ver que o conjunto solução do sistema será o conjunto solução da equação $x - y = 0$, o que implica que $x = y$. De novo, o valor de z pode ser

qualquer e portanto, tem-se que os autovetores de A são vetores do tipo $(x, x, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1)$, com $x, z \in \mathbb{R}$.

2 Cálculo diferencial e integral

2.1 Teorema do Valor Médio

Em um intervalo aberto (a, b) em uma função contínua f existe um número c onde $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$. A reta tangente em c é paralela à reta que liga os pontos $f(b)$ e $f(a)$.

2.2 Regra de l'Hôspital

Quando o limite de um quociente resultar em uma indeterminação tipo $0/0$ ou ∞/∞ , a Regra de l'Hôspital diz que o limite dessa indeterminação é também o limite de suas derivadas:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Essa ideia se baseia em dar um *zoom* no ponto a , de forma que as curvas de f e g pareçam cada vez mais como retas, indicando a veracidade do limite do quociente das funções ser igual ao limite do quociente de suas derivadas.

2.3 Produtos indeterminados

Quando $f(x) \rightarrow 0$ e $g(x) \rightarrow \infty$ (ou $-\infty$) quando $x \rightarrow a$, o limite do produto $f \cdot g$ é considerado indeterminado do tipo $0 \cdot \infty$.

Há uma disputa entre as funções e precisamos saber quem ganhará. Se f ganhar, o limite é 0, se g ganhar, o limite é ∞ (ou $-\infty$). Podendo ainda haver um equilíbrio e o limite tender a um número específico.

Podemos resolver reescrevendo

$$\lim_{x \rightarrow a} f \cdot g$$

como

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{1/g} \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g}{1/f}$$

Isso converte o produto indeterminado em outro do tipo $0/0$ ou ∞/∞ , fazendo com que seja possível aplicar a Regra de l'Hôpital.

2.4 Diferenças indeterminadas

Quando $f(x) \rightarrow \infty$ e $g(x) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow a$, o limite da diferença $f - g$ é considerado indeterminado do tipo $\infty - \infty$.

Há uma disputa entre as funções e esse tipo de indeterminação geralmente acontece em quocientes. O primeiro passo para resolução do limite é encontrar um denominador em comum e realizar simplificações para posterior tentativa de utilização da Regra de l'Hôpital.

2.5 Potências indeterminadas

Existem três casos possíveis de indeterminação em limites de funções potência, do tipo

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $f(x) \rightarrow 0$ e $g(x) \rightarrow 0$, caso 0^0
2. $f(x) \rightarrow \infty$ e $g(x) \rightarrow 0$, caso ∞^0
3. $f(x) \rightarrow 1$ e $g(x) \rightarrow \infty$, caso 1^∞

Sua resolução pode ser feita de duas formas. Pode-se tomar o logaritmo natural em ambos os lados de $y = [f(x)]^{g(x)}$, deixando a função na forma $\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$. Isso causa uma mudança no limite, deixando-o na forma indeterminada do tipo $0 \cdot \infty$. A partir daí, pode-se deixar a função como um quociente

(produto indeterminado) para posterior aplicação da Regra de l'Hôpital ou podemos reescrever a função $[f(x)]^{g(x)}$ como $e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$, já que $x = e^{\ln x}$ e calculamos o limite dessa nova função, sendo:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \ln f(x)}$$

1. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{\ln x})^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x} = e^0 = 1$$

2. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} [1 + \sin(4x)]^{\cot x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [1 + \sin(4x)]^{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x \cdot \ln[1 + \sin(4x)] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln[1 + \sin(4x)]}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{4 \cdot \cos(4x)}{1 + \sin(4x)}}{\sec^2 x} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln y} = e^4$$

2.6 Esboço de curvas

a. **Domínio:**

É interessante saber onde a função está definida para sabermos quais intervalos analisar nas etapas seguintes.

b. **Simetria:**

Quando $f(x) = f(-x)$, a função é par, ou seja, possui simetria em relação ao eixo y . Quando $f(x) = -f(-x)$, a função é ímpar, ou seja, possui simetria rotacionando a função em 180° em torno da origem. É interessante saber se uma função possui simetria, pois o trabalho em descobrir o comportamento da função é menor.

c. **Assíntotas:**

Para verificar se a função possui assíntotas horizontais, devemos checar como ela se comporta quando tende aos infinitos. Em outras palavras, se

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$$

Para verificar se a função possui assíntotas verticais, é interessante verificar pontos próximos do local onde a função não está definida (extremos do domínio). Em outras palavras, se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ ou } -\infty$$

Uma função pode ter uma assíntota vertical quando se aproxima de um número a pela esquerda ou pela direita (ou ambos).

d. Intervalos de crescimento/caimento e números críticos:

Os intervalos de crescimento e caimento de uma função $f(x)$ são obtidos quando $f'(x) = 0$. Quando isolamos a variável independente, encontramos onde a inclinação é 0 e podemos dividir o domínio de f com base nos desses pontos. Ao fazer isso, podemos testar pontos contidos nesses intervalos em f' para verificar seu crescimento/caimento com base no sinal de f' .

Os pontos onde $f'(x) = 0$ são números críticos (c), indicando possíveis máximos ou mínimos locais.

O ponto c será um máximo local quando $f'(x) > 0$ em $x \rightarrow c^-$ e quando $f'(x) < 0$ em $x \rightarrow c^+$. De forma análoga, c será um mínimo local quando $f'(x) < 0$ em $x \rightarrow c^-$ e quando $f'(x) > 0$ em $x \rightarrow c^+$.

Para sabermos qual número c_n nos possíveis n pontos críticos de f é um máximo ou mínimo absoluto, devemos encontrar $f(c_n)$ e verificar qual número c resultou num maior número y (máximo absoluto) e menor y (mínimo absoluto).

e. Concavidade e pontos de inflexão:

A concavidade de uma função $f(x)$ é definida pelo sinal de $f''(x)$. Os pontos onde $f''(x) = 0$ são chamados de pontos de inflexão e são neles onde ocorre a mudança de concavidade de f . Encontrar a variável independente quando $f''(x) = 0$ divide o domínio de f nos pontos onde ocorre a inflexão da curva.

2.7 Derivação implícita

Consiste na derivação de ambos os lados da equação em relação a x e, então, na resolução da equação isolando y' ou $\frac{dy}{dx}$.

1. Calcular $\frac{dy}{dx}$ para $x^2 + y^2 = 25$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}25$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

2. Encontre uma equação da tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto $(3, 4)$

No ponto $(3, 4)$, tem-se $x = 3$ e $y = 4$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$$

Ou

$$3x + 4y = 25$$

3. Calcular y' para $x^3 + y^3 = 6xy$ (Fólio de Descartes)

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

$$3x^2 + 3y^2y' = 6(xy' + y \cdot 1)$$

$$x^2 + y^2y' = 2xy' + 2y$$

$$y^2y' - 2xy' = 2y - x^2$$

$$y'(y^2 - 2x) = 2y - x^2$$

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

4. Calcular y' para $\sin(y + x) = y^2 \cos x$

$$\sin(y + x) = y^2 \cos x$$

$$\cos(y + x)(y' + 1) = y^2(-\sin x) + \cos x \cdot 2yy'$$

Agrupando termos semelhantes

$$\cos(y + x) + y^2 \sin x = \cos x \cdot (2yy') - \cos(y + x)y'$$

$$\cos(y + x) + y^2 \sin x = y'(\cos x \cdot 2y - \cos(y + x))$$

$$y' = \frac{\cos(y + x) + y^2 \sin x}{\cos x \cdot 2y - \cos(y + x)}$$

5. Calcular y'' para $x^4 + y^4 = 16$

$$x^4 + y^4 = 16$$

$$4x^3 + 4y^3y' = 0$$

$$y' = -\frac{4x^3}{4y^3} = -\frac{x^3}{y^3}$$

Derivando y' pela Regra do Quociente:

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(-\frac{x^3}{y^3} \right) = - \left(\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 3y^2y'}{(y^3)^2} \right)$$

Substituindo y' na equação acima:

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 3y^2 \left[-\frac{x^3}{y^3} \right]}{y^6} \right) \\ & - \frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = - \frac{3x^2(y^4 + x^4)}{y^7} \end{aligned}$$

Podendo ainda ser simplificada, pois $x^4 + y^4 = 16$

$$- \frac{3x^2(16)}{y^7} = - \frac{48x^2}{y^7}$$