

---

@ivansnpmaster

---

MATERIAL DE ESTUDO - RECORTE DE LIVROS

SOARES, I. R.

ivansnpmaster@gmail.com

20 de Fevereiro de 2019

# 1 Álgebra linear

## 1.1 Autovalores e autovetores

Seja  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . Dizemos que um valor  $\lambda \in \mathbb{R}$  é um autovalor de  $A$  se o sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

tiver uma solução não nula. Para um tal autovalor  $\lambda$ , cada solução de (1) será chamada de autovetor de  $A$  associado a  $\lambda$  (ou simplesmente, um autovetor de  $A$ ).

**Notação:** Se  $\lambda$  for um autovalor de uma matriz  $A$ , indicamos por  $V(\lambda)$  ao conjunto de todos os autovetores de  $A$  associados a  $\lambda$  (isto é, o conjunto solução do sistema (1)).

**Exemplo:** Considere uma matriz  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

Queremos encontrar um valor  $\lambda \in \mathbb{R}$  (se isso for possível) tal que o sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

tenha soluções não nulas. Observe que podemos escrever

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Daí, a relação (2) pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \left[ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -2 \\ -2 & \lambda + 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

Nosso problema se reduz a encontrar um valor  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que o sistema (3) tenha uma solução não nula. Existe um teorema que diz que um tal sistema homogêneo tem solução não nula se e somente se o determinante de sua matriz de coeficientes for zero. Com isto, existirá um  $\lambda$  como queremos se e somente se

$$0 = \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -2 \\ -2 & \lambda + 4 \end{pmatrix} = (\lambda + 1) \cdot (\lambda + 4) - 2 \cdot 2 = \lambda(\lambda + 5)$$

isto é, quando  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = -5$ . Esses valores serão os autovalores de  $A$ . Para cada autovalor deve-se achar os autovetores correspondentes. Substitui-se o respectivo valor de  $\lambda$  encontrado em (3) e resolve-se os sistemas correspondentes.

Para  $\lambda = 0$ , o sistema (3) será:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Como a 2ª equação é a 1ª multiplicada por -2, a solução do sistema é a resolução da 1ª equação. Não é difícil ver que o conjunto solução desse sistema é  $\{(2a, a) : a \in \mathbb{R}\}$ .

Para  $\lambda = -5$ , o sistema (3) será:

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

que tem conjunto solução igual a  $\{(a, -2a) : a \in \mathbb{R}\}$ .

## 1.2 Polinômio característico

Um autovalor real de uma matriz  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $n \geq 1$ , é um valor  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que o sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

tenha uma solução não nula. Inicialmente, observe que

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Com isso, tem-se que (4) é equivalente a

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

A matriz de coeficientes do sistema (5) pode então ser escrita como  $(\lambda \cdot I - A)$  que obviamente pertence a  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . O sistema (5) terá uma solução não nula se e somente se  $\det(\lambda \cdot I - A) = 0$ .

O polinômio característico de uma matriz  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  é o polinômio  $p_a(t) = \det(t \cdot I - A)$ .

O problema de encontrar os autovalores de uma matriz  $A$  transforma-se em achar as possíveis raízes do polinômio  $p_a(t)$ . Como sabe-se que um polinômio de grau  $n$  possui no máximo  $n$  raízes distintas, conclui-se que uma matriz  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  possui no máximo  $n$  autovalores distintos. Uma vez encontradas as raízes de  $p_a(t)$ , o cálculo dos autovetores associados a elas se reduz à solução de sistemas lineares.

**Exemplo:** Calcule os autovalores e os autovetores da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Primeiramente, seu polinômio característico:

$$\begin{aligned} p_a(t) &= \det \begin{pmatrix} t+1 & -3 & 0 \\ 3 & t-5 & 0 \\ -1 & -1 & t-2 \end{pmatrix} = (t+1) \cdot (t-5) \cdot (t-2) - [-9 \cdot (t-2)] = \\ &= (t-2) \cdot [(t+1) \cdot (t-5) + 9] = (t-2) \cdot (t^2 - 5t + t - 5 + 9) = \\ &= (t-2) \cdot (t^2 - 4t + 4) = (t-2) \cdot (t-2)^2 = (t-2)^3 \end{aligned}$$

Logo, o único autovalor da matriz  $A$  é 2 (pois 2 é a raiz tripla de  $p_a(t)$ ). Agora, calcula-se os autovetores associados a 2, isto é, a solução do sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, tem-se:

$$\begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ -6y = 0 \end{cases}$$

O que implica em  $x = y = 0$ .

Observa-se que qualquer valor de  $z \in \mathbb{R}$  induz uma solução do sistema do tipo  $(0, 0, z) = z(0, 0, 1)$ . Logo, os autovetores associados a 2 são os múltiplos de  $(0, 0, 1)$ .

**Exemplo:** Considere uma matriz quase idêntica à do exemplo anterior (a diferença está no valor  $a_{31}$ ).

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Seu polinômio característico é (também)  $p_a(t) = (t - 2)^3$ . Já que na multiplicação nas diagonais onde está o  $a_{31}$  existe o número zero. Logo, 2 é o único autovalor de  $A$ . Para o cálculo dos autovetores, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

É fácil ver que o conjunto solução do sistema será o conjunto solução da equação  $x - y = 0$ , o que implica que  $x = y$ . De novo, o valor de  $z$  pode ser qualquer e portanto, tem-se que os autovetores de  $A$  são vetores do tipo  $(x, x, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1)$ , com  $x, z \in \mathbb{R}$ .

## 2 Cálculo diferencial e integral

### 2.1 Teorema do Valor Médio

Em um intervalo aberto  $(a, b)$  em uma função contínua  $f$  existe um número  $c$  onde  $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$ . A reta tangente em  $c$  é paralela à reta que liga os pontos  $f(b)$  e  $f(a)$ .

### 2.2 Regra de l'Hôpital

Quando o limite de um quociente resultar em uma indeterminação tipo  $0/0$  ou  $\infty/\infty$ , a Regra de l'Hôpital diz que o limite dessa indeterminação é também o limite de suas derivadas:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Essa ideia se baseia em dar um *zoom* no ponto  $a$ , de forma que as curvas de  $f$  e  $g$  pareçam cada vez mais como retas, indicando a veracidade do limite do quociente das funções ser igual ao limite do quociente de suas derivadas.

### 2.3 Produtos indeterminados

Quando  $f(x) \rightarrow 0$  e  $g(x) \rightarrow \infty$  (ou  $-\infty$ ) quando  $x \rightarrow a$ , o limite do produto  $f \cdot g$  é considerado indeterminado do tipo  $0 \cdot \infty$ .

Há uma disputa entre as funções e precisamos saber quem ganhará. Se  $f$

ganhar, o limite é 0, se  $g$  ganhar, o limite é  $\infty$  (ou  $-\infty$ ). Podendo ainda haver um equilíbrio e o limite tender a um número específico.

Podemos resolver reescrevendo

$$\lim_{x \rightarrow a} f \cdot g$$

como

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{1/g} \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g}{1/f}$$

Isso converte o produto indeterminado em outro do tipo  $0/0$  ou  $\infty/\infty$ , fazendo com que seja possível aplicar a Regra de l'Hôpital.

## 2.4 Diferenças indeterminadas

Quando  $f(x) \rightarrow \infty$  e  $g(x) \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow a$ , o limite da diferença  $f - g$  é considerado indeterminado do tipo  $\infty - \infty$ .

Há uma disputa entre as funções e esse tipo de indeterminação geralmente acontece em quocientes. O primeiro passo para resolução do limite é encontrar um denominador em comum e realizar simplificações para posterior tentativa de utilização da Regra de l'Hôpital.

## 2.5 Potências indeterminadas

Existem três casos possíveis de indeterminação em limites de funções potência, do tipo

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$$

1.  $f(x) \rightarrow 0$  e  $g(x) \rightarrow 0$ , caso  $0^0$
2.  $f(x) \rightarrow \infty$  e  $g(x) \rightarrow 0$ , caso  $\infty^0$
3.  $f(x) \rightarrow 1$  e  $g(x) \rightarrow \infty$ , caso  $1^\infty$



Sua resolução pode ser feita de duas formas. Pode-se tomar o logaritmo natural em ambos os lados de  $y = [f(x)]^{g(x)}$ , deixando a função na forma  $\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$ . Isso causa uma mudança no limite, deixando-o na forma indeterminada do tipo  $0 \cdot \infty$ . A partir daí, pode-se deixar a função como um quociente (produto indeterminado) para posterior aplicação da Regra de l'Hôpital ou podemos reescrever a função  $[f(x)]^{g(x)}$  como  $e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$ , já que  $x = e^{\ln x}$  e calculamos o limite dessa nova função, sendo:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \ln f(x)}$$

1. Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{\ln x})^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x} = e^0 = 1$$

2. Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [1 + \sin(4x)]^{\cot x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [1 + \sin(4x)]^{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x \cdot \ln[1 + \sin(4x)] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln[1 + \sin(4x)]}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \cdot \cos(4x)}{1 + \sin(4x)} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln y} = e^4$$

## 2.6 Esboço de curvas

### a. Domínio:

É interessante saber onde a função está definida para sabermos quais intervalos analisar nas etapas seguintes.

### b. Simetria:

Quando  $f(x) = f(-x)$ , a função é par, ou seja, possui simetria em relação ao eixo  $y$ . Quando  $f(x) = -f(x)$ , a função é ímpar, ou seja, possui simetria rotacionando a função em  $180^\circ$  em torno da origem. É interessante saber se uma função possui simetria, pois o trabalho em descobrir o comportamento da função é menor.

c. **Assíntotas:**

Para verificar se a função possui assíntotas horizontais, devemos checar como ela se comporta quando tende aos infinitos. Em outras palavras, se

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$$

Para verificar se a função possui assíntotas verticais, é interessante verificar pontos próximos do local onde a função não está definida (extremos do domínio). Em outras palavras, se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ ou } -\infty$$

Uma função pode ter uma assíntota vertical quando se aproxima de um número  $a$  pela esquerda ou pela direita (ou ambos).

d. **Intervalos de crescimento/caimento e números críticos:**

Os intervalos de crescimento e caimento de uma função  $f(x)$  são obtidos quando  $f'(x) = 0$ . Quando isolamos a variável independente, encontramos onde a inclinação é 0 e podemos dividir o domínio de  $f$  com base nos desses pontos. Ao fazer isso, podemos testar pontos contidos nesses intervalos em  $f'$  para verificar seu crescimento/caimento com base no sinal de  $f'$ .

Os pontos onde  $f'(x) = 0$  são números críticos ( $c$ ), indicando possíveis máximos ou mínimos locais.

O ponto  $c$  será um máximo local quando  $f'(x) > 0$  em  $x \rightarrow c^-$  e quando  $f'(x) < 0$  em  $x \rightarrow c^+$ . De forma análoga,  $c$  será um mínimo local quando  $f'(x) < 0$  em  $x \rightarrow c^-$  e quando  $f'(x) > 0$  em  $x \rightarrow c^+$ .

Para sabermos qual número  $c_n$  nos possíveis  $n$  pontos críticos de  $f$  é um máximo ou mínimo absoluto, devemos encontrar  $f(c_n)$  e verificar qual número  $c$  resultou num maior número  $y$  (máximo absoluto) e menor  $y$  (mínimo absoluto).

e. **Concavidade e pontos de inflexão:**

A concavidade de uma função  $f(x)$  é definida pelo sinal de  $f''(x)$ . Os pontos onde  $f''(x) = 0$  são chamados de pontos de inflexão e são neles onde ocorre a mudança

de concavidade de  $f$ . Encontrar a variável independente quando  $f''(x) = 0$  divide o domínio de  $f$  nos pontos onde ocorre a inflexão da curva.

## 2.7 Derivação implícita

Consiste na derivação de ambos os lados da equação em relação a  $x$  e, então, na resolução da equação isolando  $y'$  ou  $\frac{dy}{dx}$ .

1. Calcular  $\frac{dy}{dx}$  para  $x^2 + y^2 = 25$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}25$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

2. Encontre uma equação da tangente ao círculo  $x^2 + y^2 = 25$  no ponto  $(3, 4)$

No ponto  $(3, 4)$ , tem-se  $x = 3$  e  $y = 4$ :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$$

Ou

$$3x + 4y = 25$$

3. Calcular  $y'$  para  $x^3 + y^3 = 6xy$  (Fólio de Descartes)

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

$$3x^2 + 3y^2y' = 6(xy' + y \cdot 1)$$

$$x^2 + y^2y' = 2xy' + 2y$$

$$y^2y' - 2xy' = 2y - x^2$$

$$y'(y^2 - 2x) = 2y - x^2$$

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

4. Calcular  $y'$  para  $\sin(y + x) = y^2 \cos x$

$$\sin(y + x) = y^2 \cos x$$

$$\cos(y + x)(y' + 1) = y^2(-\sin x) + \cos x \cdot 2yy'$$

Agrupando termos semelhantes

$$\cos(y + x) + y^2 \sin x = \cos x \cdot (2yy') - \cos(y + x)y'$$

$$\cos(y + x) + y^2 \sin x = y'(\cos x \cdot 2y - \cos(y + x))$$

$$y' = \frac{\cos(y + x) + y^2 \sin x}{\cos x \cdot 2y - \cos(y + x)}$$

5. Calcular  $y''$  para  $x^4 + y^4 = 16$

$$x^4 + y^4 = 16$$

$$4x^3 + 4y^3y' = 0$$

$$y' = -\frac{4x^3}{4y^3} = -\frac{x^3}{y^3}$$

Derivando  $y'$  pela Regra do Quociente:

$$y'' = \frac{d}{dx} \left( -\frac{x^3}{y^3} \right) = - \left( \frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 3y^2y'}{(y^3)^2} \right)$$

Substituindo  $y'$  na equação acima:

$$- \left( \frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 3y^2 \left[ -\frac{x^3}{y^3} \right]}{y^6} \right)$$

$$-\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = -\frac{3x^2(y^4 + x^4)}{y^7}$$

Podendo ainda ser simplificada, pois  $x^4 + y^4 = 16$

$$-\frac{3x^2(16)}{y^7} = -\frac{48x^2}{y^7}$$

### 3 Resistência dos materiais

#### 3.1 Tensão e deformação - carregamento axial

Considerando uma barra de comprimento  $L$  e seção transversal uniforme, e chamando-se de  $\delta$  sua deformação sob uma carga axial  $P$ :

// Inserir imagem

Define-se a *deformação específica normal*  $\varepsilon$  da barra como sendo a *deformação por unidade de comprimento*:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad (6)$$

Em barra de seção transversal variável, a deformação específica normal é definida:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx} \quad (7)$$

// Inserir imagem

A porção inicial do diagrama tensão-deformação é uma linha reta. Isto significa que para pequenas deformações a tensão é diretamente proporcional à deformação:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (8)$$

Esta relação é conhecida como Lei de Hooke e o coeficiente  $E$  como *módulo de elasticidade longitudinal* do material. A maior tensão para a qual a Equação (8) se aplica é a *tensão de proporcionalidade* do material.

#### 3.2 Deformações de barras sujeitas a cargas axiais

Tratando-se de deformação elástica, se uma barra de comprimento  $L$  e seção transversal uniforme de área  $A$  é submetida a uma carga  $P$ , axial e centrada em sua

extremidade, a correspondente deformação é, a partir da junção de que  $\sigma = F/A$  e das Equações (6) e (8):

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

Sua união,

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

Portanto,

$$\delta = \frac{PL}{AE} \quad (9)$$

Se a barra for carregada em vários pontos ou consiste em várias partes com seções transversais diferentes, e ainda, possivelmente, de diferentes materiais, a deformação  $\delta$  da barra deve ser expressa como o somatório das deformações nas várias partes:

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \quad (10)$$

### 3.3 Problemas envolvendo variação de temperatura

Tomando uma barra  $AB$ , homogênea e de seção transversal uniforme, apoiada em uma superfície lisa horizontal. Se for aumentada a temperatura da barra em um valor  $\Delta T$ , nota-se que ela se alonga de um valor  $\delta_T$  que é proporcional tanto à variação de temperatura quanto ao comprimento da barra  $L$ . Tem-se, então:

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \quad (11)$$

Onde  $\alpha$  é a constante característica do material, chamada de *coeficiente de dilatação térmica*. Como  $L$  e  $\delta_T$  são expressos em unidades de comprimento,  $\alpha$  representa uma quantidade *por grau C* ou *por grau F*, dependendo de como a temperatura é expressada.

À deformação total  $\delta_T$  está relacionada uma deformação específica  $\varepsilon_T = \delta_T/L$ .  
Reescrevendo a Equação (11):

$$\varepsilon_T = \alpha(\Delta T) \quad (12)$$

Onde  $\varepsilon_T$  é chamada de *deformação térmica específica*, uma vez que é causada por variação de temperatura na barra. No caso considerado não há tensões relacionadas com a deformação  $\varepsilon_T$ .

// Inserir imagem

### 3.4 Estado plano de tensão

Adotando-se que o ponto  $Q$  está submetido a um estado plano de tensões (com  $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ ), que é representado pelas componentes de tensão  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  relativas ao cubo elementar a seguir:

Procura-se agora determinar as componentes de tensão  $\sigma_{x'}$ ,  $\sigma_{y'}$  e  $\tau_{x'y'}$ , referentes ao cubo elementar que foi rodado de um ângulo  $\theta$  em torno do eixo  $z$ , como a seguir:

expressando essas componentes em função de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  e  $\theta$ .

Para determinar a tensão normal  $\sigma_{x'}$  e a tensão de cisalhamento  $\tau_{x'y'}$  que atuam na face perpendicular ao eixo  $x'$ , considera-se o prisma elementar de faces perpendiculares aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $x'$ , como a seguir:

Chamando de  $\Delta A$  a área da face inclinada, calcula-se as áreas das faces vertical e horizontal por  $(\Delta A \cos \theta)$  e  $(\Delta A \sin \theta)$ , respectivamente. Com isso, as forças elementares que atuam nessas faces são as seguintes:

Não ocorrem forças atuando nas faces triangulares do prisma elementar, pois foi adotado que as componentes de tensões nessas faces são nulas.

Fazendo-se as equações de equilíbrio dessas forças em relação aos eixos  $x'$  e  $y'$ ,

tem-se:

$$\sum F_{x'} = 0$$

$$\sigma_{x'} \Delta A - \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \cos \theta = 0$$

Resolvendo para  $\sigma_{x'}$ :

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$