# @ivansnpmaster

Material de estudo - Recorte de livros

Soares, I. R.

ivansnpmaster@gmail.com

24 de Fevereiro de 2019

# 1 Álgebra linear

## 1.1 Autovalores e autovetores

Seja $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Dizemos que um valor $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de $A$ se o sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

tiver uma solução não nula. Para um tal autovalor $\lambda$, cada solução de (1) será chamada de autovetor de $A$ associado a $\lambda$ (ou simplesmente, um autovetor de $A$).

**Notação**: Se $\lambda$ for um autovalor de uma matriz $A$, indicamos por $V(\lambda)$ ao conjunto de todos os autovetores de $A$ associados a $\lambda$ (isto é, o conjunto solução do sistema (1)).

**Exemplo**: Considere uma matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

Queremos encontrar um valor $\lambda \in \mathbb{R}$ (se isso for possível) tal que o sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

tenha soluções não nulas. Observe que podemos escrever

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Daí, a relação (2) pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Com isso,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 \\ -2 & \lambda+4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Nosso problema se reduz a encontrar um valor $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que o sistema (3) tenha uma solução não nula. Existe um teorema que diz que um tal sistema homogêneo tem solução não nula se e somente se o determinante de sua matriz de coeficientes for zero. Com isto, existirá um $\lambda$ como queremos se e somente se

$$0 = \det \begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 \\ -2 & \lambda+4 \end{pmatrix} = (\lambda+1)\cdot(\lambda+4) - 2\cdot 2 = \lambda(\lambda+5)$$

isto é, quando $\lambda = 0$ ou $\lambda = -5$. Esses valores serão os autovalores de $A$. Para cada autovalor deve-se achar os autovetores correspondentes. Substitui-se o respectivo valor de $\lambda$ encontrado em (3) e resolve-se os sistemas correspondentes.

Para $\lambda = 0$, o sistema (3) será:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Como a 2ª equação é a 1ª multiplicada por -2, a solução do sistema é a resolução da 1ª equação. Não é difícil ver que o conjunto solução desse sistema é $\{(2a,\ a) : a \in \mathbb{R}\}$.

Para $\lambda = -5$, o sistema (3) será:

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

que tem conjunto solução igual a $\{(a,\ -2a) : a \in \mathbb{R}\}$.

## 1.2 Polinômio característico

Um autovalor real de uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 1$, é um valor $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que o sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

tenha uma solução não nula. Inicialmente, observe que

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Com isso, tem-se que (4) é equivalente a

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

A matriz de coeficientes do sistema (5) pode então ser escrita como $(\lambda \cdot I - A)$ que obviamente pertence a $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. O sistema (5) terá uma solução não nula se e somente se $\det(\lambda \cdot I - A) = 0$.

O polinômio característico de uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é o polinômio $p_a(t) = \det(t \cdot I - A)$.

O problema de encontrar os autovalores de uma matriz $A$ transforma-se em achar as possíveis raízes do polinômio $p_a(t)$. Como sabe-se que um polinômio de grau $n$ possui no máximo $n$ raízes distintas, conclui-se que uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ possui no máximo $n$ autovalores distintos. Uma vez encontradas as raízes de $p_a(t)$, o cálculo dos autovetores associados a elas se reduz à solução de sistemas lineares.

**Exemplo:** Calcule os autovalores e os autovetores da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Primeiramente, seu polinômio característico:

$$p_a(t) = \det \begin{pmatrix} t+1 & -3 & 0 \\ 3 & t-5 & 0 \\ -1 & -1 & t-2 \end{pmatrix} = (t+1)\cdot(t-5)\cdot(t-2) - [-9\cdot(t-2)] =$$

$$= (t-2)\cdot[(t+1)\cdot(t-5)+9] = (t-2)\cdot(t^2-5t+t-5+9) =$$

$$(t-2)\cdot(t^2-4t+4) = (t-2)\cdot(t-2)^2 = (t-2)^3$$

Logo, o único autovalor da matriz $A$ é 2 (pois 2 é a raíz tripla de $p_a(t)$). Agora, calcula-se os autovetores associados a 2, isto é, a solução do sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, tem-se:

$$\begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ -6y = 0 \end{cases}$$

O que implica em $x = y = 0$.

Observa-se que qualquer valor de $z \in \mathbb{R}$ induz uma solução do sistema do tipo $(0,\ 0,\ z) = z(0,\ 0,\ 1)$. Logo, os autovetores associados a 2 são os múltiplos de $(0,\ 0,\ 1)$.

**Exemplo:** Considere uma matriz quase idêntica à do exemplo anterior (a diferença está no valor $a_{31}$).

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Seu polinômio característico é (também) $p_a(t) = (t-2)^3$. Já que na multiplicação nas diagonais onde está o $a_{31}$ existe o número zero. Logo, 2 é o único autovalor de $A$. Para o cálculo dos autovetores, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

É fácil ver que o conjunto solução do sistema será o conjunto solução da equação $x - y = 0$, o que implica que $x = y$. De novo, o valor de $z$ pode ser qualquer e portanto, tem-se que os autovetores de $A$ são vetores do tipo $(x,\ x,\ z) = x(1,\ 1,\ 0) + z(0,\ 0,\ 1)$, com $x, z \in \mathbb{R}$.

# 2 Cálculo diferencial e integral

## 2.1 Teorema do Valor Médio

Em um intervalo aberto $(a, b)$ em uma função contínua $f$ existe um número $c$ onde $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$. A reta tangente em $c$ é paralela à reta que liga os pontos $f(b)$ e $f(a)$.

## 2.2 Regra de l'Hôspital

Quando o limite de um quociente resultar em uma indeterminação tipo $0/0$ ou $\infty/\infty$, a Regra de l'Hôspital diz que o limite dessa indeterminação é também o limite de suas derivadas:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Essa ideia se baseia em dar um *zoom* no ponto $a$, de forma que as curvas de $f$ e $g$ pareçam cada vez mais como retas, indicando a veracidade do limite do quociente das funções ser igual ao limite do quociente de suas derivadas.

## 2.3 Produtos indeterminados

Quando $f(x) \to 0$ e $g(x) \to \infty$ (ou $-\infty$) quando $x \to a$, o limite do produto $f \cdot g$ é considerado indeterminado do tipo $0 \cdot \infty$.

Há uma disputa entre as funções e precisamos saber quem ganhará. Se $f$

ganhar, o limite é 0, se $g$ ganhar, o limite é $\infty$ (ou $-\infty$). Podendo ainda haver um equilíbrio e o limite tender a um número específico.

Podemos resolver reescrevendo

$$\lim_{x\to a} f \cdot g$$

como

$$\lim_{x\to a} \frac{f}{1/g} \text{ ou } \lim_{x\to a} \frac{g}{1/f}$$

Isso converte o produto indeterminado em outro do tipo $0/0$ ou $\infty/\infty$, fazendo com que seja possível aplicar a Regra de l'Hôspital.

## 2.4 Diferenças indeterminadas

Quando $f(x) \to \infty$ e $g(x) \to \infty$ quando $x \to a$, o limite da diferença $f - g$ é considerado indeterminado do tipo $\infty - \infty$.

Há uma disputa entre as funções e esse tipo de indeterminação geralmente acontece em quocientes. O primeiro passo para resolução do limite é encontrar um denominador em comum e realizar simplificações para posterior tentativa de utilização da Regra de l'Hôspital.

## 2.5 Potências indeterminadas

Existem três casos possíveis de indeterminação em limites de funcões potência, do tipo

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$, caso $0^0$
2. $f(x) \to \infty$ e $g(x) \to 0$, caso $\infty^0$
3. $f(x) \to 1$ e $g(x) \to \infty$, caso $1^\infty$

Sua resolução pode ser feita de duas formas. Pode-se tomar o logarítmo natural em ambos os lados de $y = [f(x)]^{g(x)}$, deixando a função na forma $\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$. Isso causa uma mudança no limite, deixado-o na forma indeterminada do tipo $0 \cdot \infty$. A partir daí, pode-se deixar a função como um quociente (produto indeterminado) para posterior aplicação da Regra de l'Hôspital ou podemos reescrever a função $[f(x)]^{g(x)}$ como $e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$, já que $x = e^{\ln x}$ e calculamos o limite dessa nova função, sendo:

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \to a} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = e^{\lim_{x \to a} g(x) \cdot \ln f(x)}$$

1. Calcular $\lim_{x \to 0^+} x^x$

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} (e^{\ln x})^x = e^{\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x} = e^0 = 1$$

2. Calcular $\lim_{x \to 0^+} [1 + \sin(4x)]^{\cot x}$

$$\lim_{x \to 0^+} [1 + \sin(4x)]^{\cot x} = \lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \cot x \cdot \ln[1 + \sin(4x)] =$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln[1 + \sin(4x)]}{\tan x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{4 \cdot \cos(4x)}{1 + \sin(4x)}}{\sec^2 x} = 4$$

$$\lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln y} = e^4$$

## 2.6 Esboço de curvas

a. **Domínio**:

É interessante saber onde a função está definida para sabermos quais intervalos analisar nas etapas seguintes.

b. **Simetria**:

Quando $f(x) = f(-x)$, a função é par, ou seja, possui simetria em relação ao eixo $y$. Quando $f(x) = -f(x)$, a função é ímpar, ou seja, possui simetria rotacionando a função em 180° em torno da origem. É interessante saber se uma função possui simetria, pois o trabalho em descobrir o comportamento da função é menor.

c. **Assíntotas**:

Para verificar se a função possui assíntotas horizontais, devemos checar como ela se comporta quando tende aos infinitos. Em outras palavras, se

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$$

Para verificar se a função possui assíntotas verticais, é interessante verificar pontos próximos do local onde a função não está definida (extremos do domínio). Em outras palavras, se

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \text{ ou} - \infty$$

Uma função pode ter uma assíntota vertical quando se aproxima de um número $a$ pela esquerda ou pela direita (ou ambos).

d. **Intervalos de crescimento/caimento e números críticos**:

Os intervalos de crescimento e caimento de uma função $f(x)$ são obtidos quando $f'(x) = 0$. Quando isolamos a variável independente, encontramos onde a inclinação é 0 e podemos dividir o domínio de $f$ com base nos nesses pontos. Ao fazer isso, podemos testar pontos contidos nesses intervalos em $f'$ para verificar seu crescimento/caimento com base no sinal de $f'$.

Os pontos onde $f'(x) = 0$ são números críticos ($c$), indicando possíveis máximos ou mínimos locais.

O ponto $c$ será um máximo local quando $f'(x) > 0$ em $x \to c^-$ e quando $f'(x) < 0$ em $x \to c^+$. De forma análoga, $c$ será um mínimo local quando $f'(x) < 0$ em $x \to c^-$ e quando $f'(x) > 0$ em $x \to c^+$.

Para sabermos qual número $c_n$ nos possíveis $n$ pontos críticos de $f$ é um máximo ou mínimo absoluto, devemos encontrar $f(c_n)$ e verificar qual número $c$ resultou num maior número $y$ (máximo absoluto) e menor $y$ (menor absoluto).

e. **Concavidade e pontos de inflexão**:

A concavidade de uma função $f(x)$ é definida pelo sinal de $f''(x)$. Os pontos onde $f''(x) = 0$ são chamados de pontos de inflexão e são neles onde ocorre a mudança de concavidade de $f$. Encontrar a variável independente quando $f''(x) = 0$ divide o domínio de $f$ nos pontos onde ocorre a inflexão da curva.

## 2.7 Derivação implícita

Consiste na derivação de ambos os lados da equação em relação a $x$ e, então, na resolução da equação isolando $y'$ ou $\frac{dy}{dx}$.

1. Calcular $\frac{dy}{dx}$ para $x^2 + y^2 = 25$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}25$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

2. Encontre uma equação da tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto (3, 4)

   No ponto (3, 4), tem-se $x = 3$ e $y = 4$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$$

   Ou

$$3x + 4y = 25$$

3. Calcular $y'$ para $x^3 + y^3 = 6xy$ (Fólio de Descartes)

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

$$3x^2 + 3y^2y' = 6(xy' + y \cdot 1)$$

$$x^2 + y^2y' = 2xy' + 2y$$

$$y^2y' - 2xy' = 2y - x^2$$

$$y'(y^2 - 2x) = 2y - x^2$$
$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

4. Calcular $y'$ para $\sin(y + x) = y^2 \cos x$

$$\sin(y + x) = y^2 \cos x$$

$$\cos(y + x)(y' + 1) = y^2(-\sin x) + \cos x \cdot 2yy'$$

Agrupando termos semelhantes

$$\cos(y + x) + y^2 \sin x = \cos x \cdot (2yy') - \cos(y + x)y'$$

$$\cos(y + x) + y^2 \sin x = y'(\cos x \cdot 2y - \cos(y + x))$$
$$y' = \frac{\cos(y + x) + y^2 \sin x}{\cos x \cdot 2y - \cos(y + x)}$$

5. Calcular $y''$ para $x^4 + y^4 = 16$

$$x^4 + y^4 = 16$$

$$4x^3 + 4y^3 y' = 0$$
$$y' = -\frac{4x^3}{4y^3} = -\frac{x^3}{y^3}$$

Derivando $y'$ pela Regra do Quociente:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right) = -\left(\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 3y^2 y'}{(y^3)^2}\right)$$

Substituindo $y'$ na equação acima:

$$-\left(\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 3y^2\left[-\frac{x^3}{y^3}\right]}{y^6}\right)$$

$$-\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = -\frac{3x^2(y^4 + x^4)}{y^7}$$

Podendo ainda ser simplificada, pois $x^4 + y^4 = 16$

$$-\frac{3x^2(16)}{y^7} = -\frac{48x^2}{y^7}$$

# 3 Resistência dos materiais

## 3.1 Tensão e deformação - carregamento axial

Considerando uma barra de comprimento $L$ e seção transversal uniforme, e chamando-se de $\delta$ sua deformação sob uma carga axial $P$:

// Inserir imagem

Define-se a *deformação específica normal* $\varepsilon$ da barra como sendo a *deformação por unidade de comprimento*:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \tag{6}$$

Em barra de seção transversal variável, a deformação específica normal é definida:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx} \tag{7}$$

// Inserir imagem

A porção inicial do diagrama tensão-deformação é uma linha reta. Isto significa que para pequenas deformações a tensão é diretamente proporcional à deformação:

$$\sigma = E\varepsilon \tag{8}$$

Esta relação é conhecida como Lei de Hooke e o coeficiente $E$ como *módulo de elasticidade longitudinal* do material. A maior tensão para a qual a Equação (8) se aplica é a *tensão de proporcionalidade* do material.

## 3.2 Deformações de barras sujeitas a cargas axiais

Tratando-se de deformação elástica, se uma barra de comprimento $L$ e seção transversal uniforme de área $A$ é submetida a uma carga $P$, axial e centrada em sua extremidade, a correnpondente deformação é, a partir da junção de que $\sigma = F/A$ e das Equações (6) e (8):

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

Sua união,

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

Portanto,

$$\delta = \frac{PL}{AE} \tag{9}$$

Se a barra for carregada em vários pontos ou consiste em várias partes com seções transversais diferentes, e ainda, possivelmente, de diferentes materiais, a deformação $\delta$ da barra deve ser expressa como o somatório das deformações nas várias partes:

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \tag{10}$$

## 3.3 Problemas envolvendo variação de temperatura

Tomando uma barra $AB$, homogênea e de seção transversal uniforme, apoiada em uma superfície lisa horizontal. Se for aumentada a temperatura da barra em um valor $\Delta T$, nota-se que ela se alonga de um valor $\delta_T$ que é proporcional tanto à variação de temperatura quanto ao comprimento da barra $L$. Tem-se, então:

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \tag{11}$$

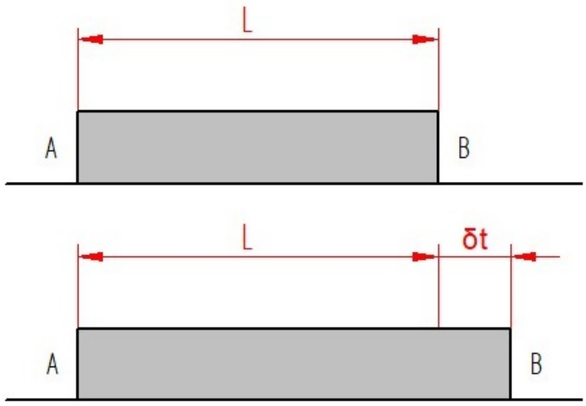
Onde $\alpha$ é a constante característica do material, chamada de *coeficiente de dilatação térmica*. Como $L$ e $\delta_T$ são expressos em unidades de comprimento, $\alpha$ representa uma quantidade *por grau C* ou *por grau F*, dependendo de como a temperatura é expressada.

À deformação total $\delta_T$ está relacionada uma deformação específica $\varepsilon_T = \delta_T/L$. Reescrevendo a Equação (11):

$$\varepsilon_T = \alpha(\Delta T) \tag{12}$$

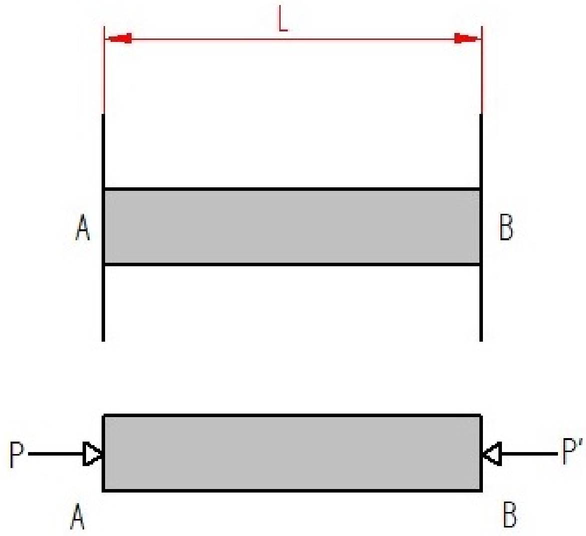
Onde $\varepsilon_T$ é chamada de *deformação térmica específica*, uma vez que é causada por variação de temperatura na barra. No caso considerado não há tensões relacionadas com a deformação $\varepsilon_T$.

Figura 1: Aumento de comprimento devido o acréscimo de temperatura.




Agora, um caso específico. Considerando uma barra $AB$ de comprimento $L$, colocada entre dois anteparos fixos, separados por uma distância $L$. Elevando-se $\Delta T$, o alongamento da barra é nulo, pois os anteparos impedem qualquer deformação. Sendo a barra homogênea e de seção uniforme, a deformação específica em qualquer ponto é $\varepsilon = \delta_t/L$, também nula. Entretanto, para evitar o alongamento da barra, os anteparos vão aplicar sobre ela as forças $P$ e $P'$ após a elevação da temperatura. É criado um estado de tensão na barra (sem que ocorram deformações específicas).

Figura 2: Aumento de temperatura sem deformação.




## 3.4 Estado plano de tensão

Adotando-se que o ponto $Q$ está submetido a um estado plano de tensões (com $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$), que é representado pelas componentes de tensão $\sigma_x$, $\sigma_y$ e $\tau_{xy}$ relativas ao cubo elementar a seguir:

Procura-se agora determinar as componentes de tensão $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ e $\tau_{x'y'}$, referentes ao cubo elementar que foi rodado de um ângulo $\theta$ em torno do eixo $z$, como a seguir:

expressando essas componentes em função de $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\tau_{xy}$ e $\theta$.

Para determinar a tensão normal $\sigma_{x'}$ e a tensão de cisalhamento $\tau_{x'y'}$ que atuam na face perpendicular ao eixo $x'$, considera-se o prisma elementar de faces perpendiculares aos eixos $x$, $y$ e $x'$, como a seguir:

Chamando de $\Delta A$ a área da face inclinada, calcula-se as áreas das faces vertical e horizontal por $(\Delta A \cos\theta)$ e $(\Delta A \sin\theta)$, respectivamente. Com isso, as forças elementares que atuam nessas faces são as seguintes:

Não ocorrem forças atuando nas faces triangulares do prisma elementar, pois foi adotado que as componentes de tensões nessas faces são nulas.

Fazendo-se as equações de equilíbrio dessas forças em relação aos eixos $x'$ e $y'$, tem-se:

$$\sum F_{x'} = 0$$

$$\sigma_{x'}\Delta A - \sigma_x(\Delta A\cos\theta)\cos\theta - \tau_{xy}(\Delta A\cos\theta)\sin\theta - \sigma_y(\Delta A\sin\theta)\sin\theta - \tau_{xy}(\Delta A\sin\theta)\cos\theta = 0$$

Resolvendo para $\sigma_{x'}$:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$