Material de estudo

@ivansnpmaster

16 de Fevereiro de 2019

1 Álgebra linear

1.1 Autovalores e autovetores

Seja $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Dizemos que um valor $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de A se o sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

tiver uma solução não nula. Para um tal autovalor λ, cada solução de (1) será chamada de autovetor de A associado a λ (ou simplesmente, um autovetor de A).

Notação: Se λ for um autovalor de uma matriz A, indicamos por $V(\lambda)$ ao conjunto de todos os autovetores de A associados a λ (isto é, o conjunto solução do sistema (1)).

Exemplo: Considere uma matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

Queremos encontrar um valor $\lambda \in \mathbb{R}$ (se isso for possível) tal que o sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

tenha soluções não nulas. Observe que podemos escrever

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Daí, a relação (2) pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Com isso,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 \\ -2 & \lambda+4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Nosso problema se reduz a encontrar um valor $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que o sistema (3) tenha uma solução não nula. Existe um teorema que diz que um tal sistema homogêneo tem solução não nula se e somente se o determinante de sua matriz de coeficientes for zero. Com isto, existirá um λ como queremos se e somente se

$$0 = \det \begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 \\ -2 & \lambda+4 \end{pmatrix} = (\lambda+1)\cdot(\lambda+4) - 2\cdot 2 = \lambda(\lambda+5)$$

isto é, quando $\lambda = 0$ ou $\lambda = -5$. Esses valores serão os autovalores de A. Para cada autovalor deve-se achar os autovetores correspondentes. Substitui-se o respectivo valor de λ encontrado em (3) e resolve-se os sistemas correspondentes.

Para $\lambda = 0$, o sistema (3) será:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Como a 2ª equação é a 1ª multiplicada por -2, a solução do sistema é a resolução da 1ª equação. Não é difícil ver que o conjunto solução desse sistema é $\{(2a,\ a) : a \in \mathbb{R}\}$.

Para $\lambda = -5$, o sistema (3) será:

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

que tem conjunto solução igual a $\{(a,\ -2a) : a \in \mathbb{R}\}$.

1.2 Polinômio característico

Um autovalor real de uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 1$, é um valor $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que o sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

tenha uma solução não nula. Inicialmente, observe que

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Com isso, tem-se que (4) é equivalente a

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

A matriz de coeficientes do sistema (5) pode então ser escrita como $(\lambda \cdot I - A)$ que obviamente pertence a $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. O sistema (5) terá uma solução não nula se e somente se $\det(\lambda \cdot I - A) = 0$.

O polinômio característico de uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é o polinômio $p_a(t) = \det(t \cdot I - A)$.

O problema de encontrar os autovalores de uma matriz A transforma-se em achar as possíveis raízes do polinômio $p_a(t)$. Como sabe-se que um polinômio de grau n possui no máximo n raízes distintas, conclui-se que uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ possui no máximo n autovalores distintos. Uma vez encontradas as raízes de $p_a(t)$, o cálculo dos autovetores associados a elas se reduz à solução de sistemas lineares.

Exemplo: Calcule os autovalores e os autovetores da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Primeiramente, seu polinômio característico:

$$p_a(t) = \det \begin{pmatrix} t+1 & -3 & 0 \\ 3 & t-5 & 0 \\ -1 & -1 & t-2 \end{pmatrix} = (t+1) \cdot (t-5) \cdot (t-2) - [-9 \cdot (t-2)] =$$

$$= (t-2) \cdot [(t+1) \cdot (t-5) + 9] = (t-2) \cdot (t^2 - 5t + t - 5 + 9) =$$

$$(t-2) \cdot (t^2 - 4t + 4) = (t-2) \cdot (t-2)^2 = (t-2)^3$$

Logo, o único autovalor da matriz A é 2 (pois 2 é a raíz tripla de $p_a(t)$). Agora, calcula-se os autovetores associados a 2, isto é, a solução do sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, tem-se:

$$\begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ -6y = 0 \end{cases}$$

O que implica em $x = y = 0$.

Observa-se que qualquer valor de $z \in \mathbb{R}$ induz uma solução do sistema do tipo $(0,\ 0,\ z) = z(0,\ 0,\ 1)$. Logo, os autovetores associados a 2 são os múltiplos de $(0,\ 0,\ 1)$.

Exemplo: Considere uma matriz quase idêntica à do exemplo anterior (a diferença está no valor a_{31}).

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Seu polinômio característico é (também) $p_a(t) = (t-2)^3$. Já que na multiplicação nas diagonais onde está o a_{31} existe o número zero. Logo, 2 é o único autovalor de A. Para o cálculo dos autovetores, tem-se:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

É fácil ver que o conjunto solução do sistema será o conjunto solução da equação $x - y = 0$, o que implica que $x = y$. De novo, o valor de z pode ser qualquer e portanto, tem-se que os autovetores de A são vetores do tipo $(x,\ x,\ z) = x(1,\ 1,\ 0) + z(0,\ 0,\ 1)$, com $x, z \in \mathbb{R}$.

2 Cálculo diferencial e integral

2.1 Teorema do Valor Médio

Em um intervalo aberto (a, b) em uma função contínua f existe um número c onde $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$. A reta tangente em c é paralela à reta que liga os pontos $f(b)$ e $f(a)$.

2.2 Regra de l'Hôspital

Quando o limite de um quociente resultar em uma indeterminação tipo $0/0$ ou ∞/∞, a Regra de l'Hôspital diz que o limite dessa indeterminação é também o limite de suas derivadas:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Essa ideia se baseia em dar um *zoom* no ponto a, de forma que as curvas de f e g pareçam cada vez mais como retas, indicando a veracidade do limite do quociente das funções ser igual ao limite do quociente de suas derivadas.

2.3 Produtos indeterminados

Quando $f(x) \to 0$ e $g(x) \to \infty$ (ou $-\infty$) quando $x \to a$, o limite do produto $f \cdot g$ é considerado indeterminado do tipo $0 \cdot \infty$.

Há uma disputa entre as funções e precisamos saber quem ganhará. Se f ganhar, o limite é 0, se g ganhar, o limite é ∞ (ou $-\infty$). Podendo ainda haver um equilíbrio e o limite tender a um número específico.

Podemos resolver reescrevendo

$$\lim_{x \to a} f \cdot g$$

como

$$\lim_{x \to a} \frac{f}{1/g} \text{ ou } \lim_{x \to a} \frac{g}{1/f}$$

Isso converte o produto indeterminado em outro do tipo $0/0$ ou ∞/∞, fazendo com que seja possível aplicar a Regra de l'Hôspital.

2.4 Diferenças indeterminadas

Quando $f(x) \to \infty$ e $g(x) \to \infty$ quando $x \to a$, o limite da diferença $f - g$ é considerado indeterminado do tipo $\infty - \infty$.

Há uma disputa entre as funções e esse tipo de indeterminação geralmente acontece em quocientes. O primeiro passo para resolução do limite é encontrar um denominador em comum e realizar simplificações para posterior tentativa de utilização da Regra de l'Hôspital.

2.5 Potências indeterminadas

Existem três casos possíveis de indeterminação em limites de funcões potência, do tipo

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$, caso 0^0
2. $f(x) \to \infty$ e $g(x) \to 0$, caso ∞^0
3. $f(x) \to 1$ e $g(x) \to \infty$, caso 1^∞

Sua resolução pode ser feita de duas formas. Pode-se tomar o logarítmo natural em ambos os lados de $y = [f(x)]^{g(x)}$, deixando a função na forma $\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$. Isso causa uma mudança no limite, deixado-o na forma indeterminada do tipo $0 \cdot \infty$. A partir daí, pode-se deixar a função como um quociente (produto indeterminado) para posterior aplicação da Regra de l'Hôspital ou podemos reescrever a função $[f(x)]^{g(x)}$ como $e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$, já que $x = e^{\ln x}$ e calculamos o limite dessa nova função, sendo:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x)}$$

1. Calcular $\lim_{x\to 0^+} x^x$

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} (e^{\ln x})^x = e^{\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x} = e^0 = 1$$

2. Calcular $\lim_{x\to 0^+}[1+\sin(4x)]^{\cot x}$

$$\lim_{x\to 0^+}[1+\sin(4x)]^{\cot x} = \lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \cot x \cdot \ln[1+\sin(4x)] =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln[1+\sin(4x)]}{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{4\cdot\cos(4x)}{1+\sin(4x)}}{\sec^2 x} = 4$$

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^4$$

2.6 Esboço de curvas

a. **Domínio**:

É interessante saber onde a função está definida para sabermos quais intervalos analisar nas etapas seguintes.

b. **Simetria**:

Quando $f(x) = f(-x)$, a função é par, ou seja, possui simetria em relação ao eixo y. Quando $f(x) = -f(x)$, a função é ímpar, ou seja, possui simetria rotacionando a função em 180° em torno da origem. É interessante saber se uma função possui simetria, pois o trabalho em descobrir o comportamento da função é menor.

c. **Assíntotas**:

Para verificar se a função possui assíntotas horizontais, devemos checar como ela se comporta quando tende aos infinitos. Em outras palavras, se

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$$

Para verificar se a função possui assíntotas verticais, é interessante verificar pontos próximos do local onde a função não está definida (extremos do domínio). Em outras palavras, se

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \text{ ou } -\infty$$

Uma função pode ter uma assíntota vertical quando se aproxima de um número a pela esquerda ou pela direita (ou ambos).

d. **Intervalos de crescimento/caimento e números críticos**:

Os intervalos de crescimento e caimento de uma função $f(x)$ são obtidos quando $f'(x) = 0$. Quando isolamos a variável independente, encontramos onde a inclinação é 0 e podemos dividir o domínio de f com base nos nesses pontos. Ao fazer isso, podemos testar pontos contidos nesses intervalos em f' para verificar seu crescimento/caimento com base no sinal de f'.

Os pontos onde $f'(x) = 0$ são números críticos (c), indicando possíveis máximos ou mínimos locais.

O ponto c será um máximo local quando $f'(x) > 0$ em $x \to c^-$ e quando $f'(x) < 0$ em $x \to c^+$. De forma análoga, c será um mínimo local quando $f'(x) < 0$ em $x \to c^-$ e quando $f'(x) > 0$ em $x \to c^+$.

Para sabermos qual número c_n nos possíveis n pontos críticos de f é um máximo ou mínimo absoluto, devemos encontrar $f(c_n)$ e verificar qual número c resultou num maior número y (máximo absoluto) e menor y (menor absoluto).

e. **Concavidade e pontos de inflexão**:

A concavidade de uma função $f(x)$ é definida pelo sinal de $f''(x)$. Os pontos onde $f''(x) = 0$ são chamados de pontos de inflexão e são neles onde ocorre a mudança de concavidade de f. Encontrar a variável independente quando $f''(x) = 0$ divide o domínio de f nos pontos onde ocorre a inflexão da curva.

2.7 Derivação implícita

Consiste na derivação de ambos os lados da equação em relação a x e, então, na resolução da equação isolando y' ou $\dfrac{dy}{dx}$.

1. Calcular $\frac{dy}{dx}$ para $x^2 + y^2 = 25$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}25$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

2. Encontre uma equação da tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto (3, 4)

   No ponto (3, 4), tem-se $x = 3$ e $y = 4$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$$

   Ou

$$3x + 4y = 25$$

3. Calcular y' para $x^3 + y^3 = 6xy$ (Fólio de Descartes)

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

$$3x^2 + 3y^2y' = 6(xy' + y \cdot 1)$$

$$x^2 + y^2y' = 2xy' + 2y$$

$$y^2y' - 2xy' = 2y - x^2$$

$$y'(y^2 - 2x) = 2y - x^2$$

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

4. Calcular y' para $\sin(y + x) = y^2 \cos x$

$$\sin(y + x) = y^2 \cos x$$

$$\cos(y + x)(y' + 1) = y^2(-\sin x) + \cos x \cdot 2yy'$$

   Agrupando termos semelhantes

$$\cos(y + x) + y^2 \sin x = \cos x \cdot (2yy') - \cos(y + x)y'$$

$$\cos(y + x) + y^2 \sin x = y'(\cos x \cdot 2y - \cos(y + x))$$

$$y' = \frac{\cos(y + x) + y^2 \sin x}{\cos x \cdot 2y - \cos(y + x)}$$

5. Calcular y'' para $x^4 + y^4 = 16$

$$x^4 + y^4 = 16$$

$$4x^3 + 4y^3 y' = 0$$

$$y' = -\frac{4x^3}{4y^3} = -\frac{x^3}{y^3}$$

Derivando y' pela Regra do Quociente:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right) = -\left(\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 3y^2 y'}{(y^3)^2}\right)$$

Substituindo y' na equação acima:

$$-\left(\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 3y^2 \left[-\frac{x^3}{y^3}\right]}{y^6}\right)$$

$$-\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = -\frac{3x^2(y^4 + x^4)}{y^7}$$

Podendo ainda ser simplificada, pois $x^4 + y^4 = 16$

$$-\frac{3x^2(16)}{y^7} = -\frac{48x^2}{y^7}$$

3 Resistência dos materiais

3.1 Estado plano de tensão

Adotando-se que o ponto Q está submetido a um estado plano de tensões (com $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$), que é representado pelas componentes de tensão σ_x, σ_y e τ_{xy} relativas ao cubo elementar a seguir:

Procura-se agora determinar as componentes de tensão $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ e $\tau_{x'y'}$, referentes ao cubo elementar que foi rodado de um ângulo θ em torno do eixo z, como a seguir:

expressando essas componentes em função de σ_x, σ_y, τ_{xy} e θ.

Para determinar a tensão normal $\sigma_{x'}$ e a tensão de cisalhamento $\tau_{x'y'}$ que atuam na face perpendicular ao eixo x', considera-se o prisma elementar de faces perpendiculares aos eixos x, y e x', como a seguir:

Chamando de ΔA a área da face inclinada, calcula-se as áreas das faces vertical e horizontal por $(\Delta A \cos\theta)$ e $(\Delta A \sin\theta)$, respectivamente. Com isso, as forças elementares que atuam nessas faces são as seguintes:

Não ocorrem forças atuando nas faces triangulares do prisma elementar, pois foi adotado que as componentes de tensões nessas faces são nulas.

Fazendo-se as equações de equilíbrio dessas forças em relação aos eixos x' e y', tem-se:

$$\sum F_{x'} = 0$$

$$\sigma_{x'}\Delta A - \sigma_x(\Delta A\cos\theta)\cos\theta - \tau_{xy}(\Delta A\cos\theta)\sin\theta - \sigma_y(\Delta A\sin\theta)\sin\theta - \tau_{xy}(\Delta A\sin\theta)\cos\theta = 0$$

Resolvendo para $\sigma_{x'}$:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$