

# Prova vetorial de $\sin(\alpha + \beta)$ e $\cos(\alpha + \beta)$

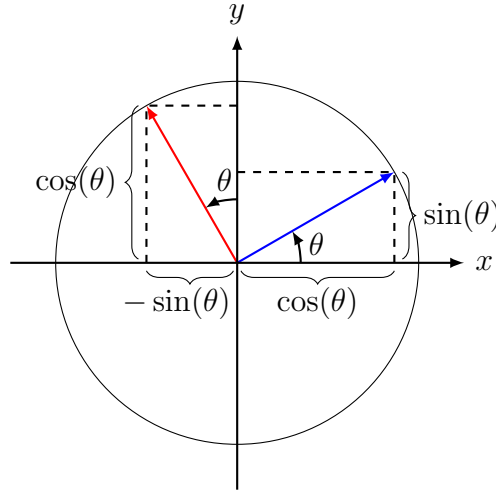
Ivan Ribeiro

2 de dezembro de 2022

Um vetor  $\vec{u}$  pode ser representado através da combinação linear da base cartesiana

$$\vec{u} = a\hat{x} + b\hat{y}$$

Uma rotação de  $\theta$  da base cartesiana no círculo trigonométrico unitário é dada por



$$\text{Rot}_\theta(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \text{Rot}_\theta(\hat{y}) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

A rotação no plano preserva algumas propriedades úteis. Com  $k$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ , um vetor  $\vec{u}$  rotacionado por  $\theta$  e depois escalonado por  $k$  é o mesmo que um vetor  $\vec{u}$  escalonado por  $k$  e depois rotacionado por  $\theta$ .

$$k\text{Rot}_\theta(\vec{u}) = \text{Rot}_\theta(k\vec{u})$$

Isso significa que rotacionar um vetor  $\vec{u}$  é o mesmo que rotacionar a base cartesiana e escaloná-la pelas componentes de  $\vec{u}$ .

$$\text{Rot}_\theta(\vec{u}) = a \cdot \text{Rot}_\theta(\hat{x}) + b \cdot \text{Rot}_\theta(\hat{y})$$

$$\text{Rot}_\theta(\vec{u}) = a \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}_\theta(\vec{u}) = \begin{bmatrix} a \cos(\theta) - b \sin(\theta) \\ a \sin(\theta) + b \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{1}$$

Ao rotacionarmos, por exemplo,  $\hat{\mathbf{x}}$  primeiramente por  $\alpha$  e depois por  $\beta$ , teremos o mesmo resultado se tivéssemos rotacionado por  $\alpha + \beta$ , comutativamente.

$$\text{Rot}_{\alpha+\beta}(\hat{\mathbf{x}}) = \text{Rot}_{\alpha}(\text{Rot}_{\beta}(\hat{\mathbf{x}})) = \text{Rot}_{\beta}(\text{Rot}_{\alpha}(\hat{\mathbf{x}}))$$

Temos, ainda

$$\text{Rot}_{\beta}(\text{Rot}_{\alpha}(\hat{\mathbf{x}})) = \text{Rot}_{\beta} \left( \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \right) \quad (2)$$

Lembrando a Equação (1), temos

$$\text{Rot}_{\theta}(\vec{\mathbf{u}}) = \begin{bmatrix} a \cos(\theta) - b \sin(\theta) \\ a \sin(\theta) + b \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Tomando  $a = \cos(\alpha)$  e  $b = \sin(\alpha)$  nas Equações (1) e (2), e considerando a rotação por  $\beta$  da Equação (2), temos

$$\text{Rot}_{\alpha+\beta}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta) \end{bmatrix}$$