Prova vetorial de $\sin(\alpha + \beta)$ e $\cos(\alpha + \beta)$

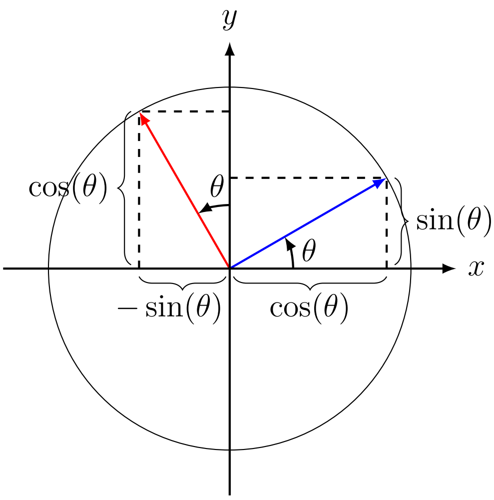
Ivan Ribeiro

12 de maio de 2023

Um vetor $\vec{\mathbf{u}}$ pode ser representado através da combinação linear da base cartesiana

$$\vec{\mathbf{u}} = a\hat{\mathbf{x}} + b\hat{\mathbf{y}}$$

Uma rotação de θ da base cartesiana no círculo trigonométrico unitário é dada por



$$\mathrm{Rot}_\theta(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathrm{Rot}_\theta(\hat{\mathbf{y}}) = \begin{bmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{bmatrix}$$

A rotação no plano preserva algumas propriedades úteis. Com k e $\theta \in \mathbb{R}$, um vetor $\vec{\mathbf{u}}$ rotacionado por θ e depois escalonado por k é o mesmo que um vetor $\vec{\mathbf{u}}$ escalonado por k e depois rotacionado por θ.

$$k\mathrm{Rot}_\theta(\vec{\mathbf{u}}) = \mathrm{Rot}_\theta(k\vec{\mathbf{u}})$$

Isso significa que rotacionar um vetor $\vec{\mathbf{u}}$ é o mesmo que rotacionar a base cartesiana e escaloná-la pelas componentes de $\vec{\mathbf{u}}$.

$$\mathrm{Rot}_\theta(\vec{\mathbf{u}}) = a \cdot \mathrm{Rot}_\theta(\hat{\mathbf{x}}) + b \cdot \mathrm{Rot}_\theta(\hat{\mathbf{y}})$$

$$\mathrm{Rot}_\theta(\vec{\mathbf{u}}) = a\begin{bmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Rot}_\theta(\vec{\mathbf{u}}) = \begin{bmatrix}a\cos(\theta) - b\sin(\theta)\\ a\sin(\theta) + b\cos(\theta)\end{bmatrix} \tag{1}$$

Ao rotacionarmos, por exemplo, $\hat{\mathbf{x}}$ primeiramente por α e depois por β, teremos o mesmo resultado se tivéssemos rotacionado por $\alpha+\beta$, comutativamente.

$$\mathrm{Rot}_{\alpha+\beta}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathrm{Rot}_{\alpha}(\mathrm{Rot}_{\beta}(\hat{\mathbf{x}})) = \mathrm{Rot}_{\beta}(\mathrm{Rot}_{\alpha}(\hat{\mathbf{x}}))$$

Temos, ainda

$$\mathrm{Rot}_{\beta}(\mathrm{Rot}_{\alpha}(\hat{\mathbf{x}})) = \mathrm{Rot}_{\beta}\left(\begin{bmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{bmatrix}\right) \tag{2}$$

Lembrando a Equação (1), temos

$$\mathrm{Rot}_{\theta}(\vec{\mathbf{u}}) = \begin{bmatrix} a\cos(\theta) - b\sin(\theta) \\ a\sin(\theta) + b\cos(\theta)\end{bmatrix}$$

Tomando $a = \cos(\alpha)$ e $b = \sin(\alpha)$ nas Equações (1) e (2), e considerando a rotação por β da Equação (2), temos

$$\mathrm{Rot}_{\alpha+\beta}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\\ \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)\end{bmatrix}$$