

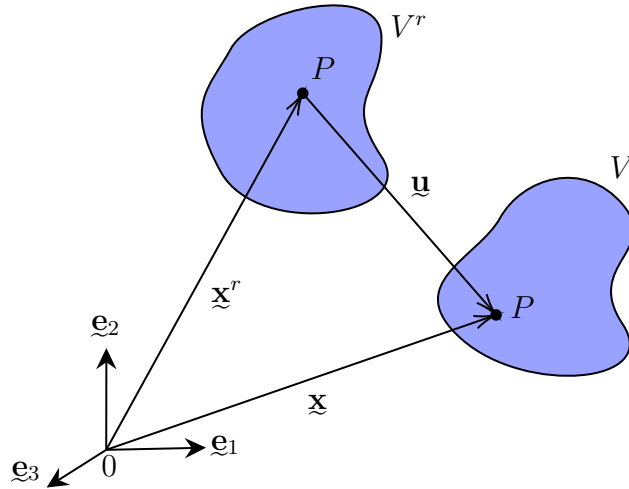
# 1 Estudos das deformações

## 1.1 Considerações iniciais

- Configuração do sólido: posição ocupada pelos pontos em um determinado instante  $t$ ;
- Descrever a configuração deformada ( $V$ ) a partir de uma configuração de referência ( $V^r$ );
- Considerando um conjunto de pontos da Geometria Euclidiana ( $E$ ), e seja,  $(\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3)$  uma base do espaço vetorial da geometria clássica.

Podemos definir  $(0, \underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3)$  como um sistema de referência:

Figura 1: Campo de deslocamentos.



Os vetores dos pontos de referência ( $\underline{\mathbf{x}}^r$ ) e na configuração deformada ( $\underline{\mathbf{x}}$ ) em relação aos versores da base podem ser expressos na notação de Einstein:

$$\underline{\mathbf{x}}^r = \underline{\mathbf{x}}^r - \underline{\mathbf{0}} = \sum_{i=1}^3 x^{ri} \underline{\mathbf{e}}_i = x^{r1} \underline{\mathbf{e}}_1 + x^{r2} \underline{\mathbf{e}}_2 + x^{r3} \underline{\mathbf{e}}_3$$

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{0}} = \sum_{i=1}^3 x^i \underline{\mathbf{e}}_i = x^1 \underline{\mathbf{e}}_1 + x^2 \underline{\mathbf{e}}_2 + x^3 \underline{\mathbf{e}}_3$$

Seja  $f$  uma função que associa a posição de cada ponto na configuração  $V^r$  a sua posição na configuração  $V$ . Tal aplicação é uma transformação de  $V^r$  em  $V$ .

$$x^1 = \hat{f}_1(x^{r1}, x^{r2}, x^{r3})$$

$$x^2 = \hat{f}_2(x^{r1}, x^{r2}, x^{r3})$$

$$x^3 = \hat{f}_3(x^{r1}, x^{r2}, x^{r3})$$

Aqui, o circunflexo denota *em função de*, *i.e.*, a coordenada  $i$  da posição deformada está em função das coordenadas da posição de referência.

Exemplo: Considere um sólido cuja seção no plano  $\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2$  é dado por:

//Inserir imagem

Caracterize os seguintes campos de deslocamento:

- a) Translação de corpo rígido de intensidade  $\Delta$  na direção de  $\underline{\mathbf{e}}_1$ ;
- b) Rotação de corpo rígido em torno de  $\underline{\mathbf{e}}_3$  de intensidade  $\varphi$ .

Resolução:

a)

$$\underline{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}^r \implies \underline{\mathbf{x}} = \begin{cases} x^1 = x^{r1} + u_1 = x^{r1} + \Delta \\ x^2 = x^{r2} + u_2 = x^{r2} \\ x^3 = x^{r3} + u_3 = x^{r3} \end{cases}$$

b) //Inserir imagem

A configuração de referência:

$$x^{r1} = r \cdot \cos \theta$$

$$x^{r2} = r \cdot \sin \theta$$

$$x^{r3} = 0 \text{ (ou } x^{r3} \text{ para deixar genérico)}$$

A configuração deformada (a partir da imagem):

$$u^1 = r \cdot \cos(\varphi + \theta) - r \cdot \cos \theta$$

$$u^1 = r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta - r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta - r \cdot \cos \theta$$

$$u^2 = r \cdot \sin(\varphi + \theta) - r \cdot \sin \theta$$

$$u^2 = r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta + r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \theta$$

Substituindo as coordenadas de referência nas coordenadas deformadas:

$$u^1 = x^{r1} \cdot \cos \varphi - x^{r2} \cdot \sin \varphi - x^{r1}$$

$$u^2 = x^{r1} \cdot \sin \varphi + x^{r2} \cdot \cos \varphi - x^{r2}$$

$$u^3 = 0$$

Como sabemos que  $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}}^r + \underline{\mathbf{u}}$ , temos:

$$\begin{cases} x^1 = x^{r1} \cdot \cos \varphi - x^{r2} \cdot \sin \varphi \\ x^2 = x^{r1} \cdot \sin \varphi + x^{r2} \cdot \cos \varphi \\ x^3 = x^{r3} \end{cases}$$

Podemos escrever também na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^{r1} \\ x^{r2} \\ x^{r3} \end{Bmatrix}$$

## 1.2 Deformação Normal e por Cisalhamento

//Inserir imagem

O assunto agora são fibras; como as fibras sofrem deformação. Seja  $d\mathbf{x}^r$  o vetor infinitesimal que representa uma fibra a partir do ponto  $\mathbf{x}^r$ ;  $d\mathbf{x}$  o vetor infinitesimal da mesma fibra agora na configuração deformada, partindo do ponto  $\mathbf{x}$ . Para que o vetor  $d\mathbf{x}^r$  deforme e se transforme em  $d\mathbf{x}$ , deve ocorrer uma transformação que depende de  $\mathbf{x}^r + d\mathbf{x}^r$ , *i.e.*, uma transformação  $\mathbf{u}(\mathbf{x}^r + d\mathbf{x}^r)$ .

Algumas relações podem ser estabelecidas a partir da imagem acima, sendo:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^r) = d\mathbf{x}^r + \mathbf{u}(\mathbf{x}^r + d\mathbf{x}^r)$$

E a fibra na configuração deformada:

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{x}^r + \mathbf{u}(\mathbf{x}^r + d\mathbf{x}^r) - \mathbf{u}(\mathbf{x}^r)$$

A equação acima na forma de componentes:

$$dx^i = dx^{ri} + u^i(x^{r1} + dx^{r1}, x^{r2} + dx^{r2}, x^{r3} + dx^{r3}) - u^i(x^{r1}, x^{r2}, x^{r3})$$

Lembrando de cálculo com múltiplas variáveis:

$$u^i(x^{r1} + dx^{r1}, x^{r2} + dx^{r2}, x^{r3} + dx^{r3}) - u^i(x^{r1}, x^{r2}, x^{r3}) = \frac{\partial u^i}{\partial x^{r1}} dx^{r1} + \frac{\partial u^i}{\partial x^{r2}} dx^{r2} + \frac{\partial u^i}{\partial x^{r3}} dx^{r3}$$

Para  $i = 1, 2$  e  $3$ . Essa iteração diz que cada coordenada  $i$  depende de acontecimentos nas 3 dimensões do espaço euclidiano.

Reescrevendo na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{Bmatrix}}_{d\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} dx^{r1} \\ dx^{r2} \\ dx^{r3} \end{Bmatrix}}_{d\mathbf{x}^r} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^1}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^1}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^2}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^2}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial u^3}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^3}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^3}{\partial x^{r3}} \end{bmatrix}}_{\nabla \mathbf{u} = \mathbf{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} dx^{r1} \\ dx^{r2} \\ dx^{r3} \end{Bmatrix}}_{d\mathbf{x}^r}$$

Onde  $\nabla \underline{\mathbf{u}}$  é o **gradiente dos deslocamentos**.

Logo,

$$d\mathbf{\underline{x}} = d\mathbf{\underline{x}}^r + \nabla \underline{\mathbf{u}} d\mathbf{\underline{x}}^r$$

Colocando  $d\mathbf{\underline{x}}^r$  em evidência, temos:

$$d\mathbf{\underline{x}} = \underbrace{(\underline{\mathbf{I}} + \nabla \underline{\mathbf{u}})}_{\underline{\mathbf{F}}} d\mathbf{\underline{x}}^r$$

Onde  $\underline{\mathbf{F}}$  é o **gradiente das deformações**.

Portanto, temos:

$$d\mathbf{\underline{x}} = \underline{\mathbf{F}} d\mathbf{\underline{x}}^r \quad (1)$$

Ou seja, a fibra deformada agora pode ser obtida a partir do gradiente dos deslocamentos ( $\nabla \underline{\mathbf{u}}$ ) e também a partir do gradiente das deformações ( $\underline{\mathbf{F}}$ ).

O gradiente das deformações pode ser reescrito como:

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u^1}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^1}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^1}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^{r1}} & 1 + \frac{\partial u^2}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^2}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial u^3}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^3}{\partial x^{r2}} & 1 + \frac{\partial u^3}{\partial x^{r3}} \end{bmatrix}$$

Ou ainda, usando notação indicial de Einstein:

$$F_{ij} = \nabla u_{ij} + \delta_{ij}$$

Onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, *i.e.*:  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

E em notação indicial, temos:

$$\nabla u_{ij} = \frac{\partial u^i}{\partial x^{rj}}$$

Agora, expressemos:

$$\underline{\mathbf{u}} = \mathbf{\underline{x}} - \mathbf{\underline{x}}^r \implies \mathbf{\underline{x}} = \underline{\mathbf{u}} + \mathbf{\underline{x}}^r$$

$$x^i = u^i + x^{ri}$$

Derivando ambos os lados da notação indicial acima em relação a  $\underline{\mathbf{x}}^r$ , temos:

$$\underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x^{rj}}}_{\underline{\mathbf{F}}} = \underbrace{\frac{\partial u^i}{\partial x^{rj}}}_{\nabla u_{ij}} + \underbrace{\frac{\partial x^{ri}}{\partial x^{rj}}}_{\delta_{ij}}$$

Ou seja, agora o gradiente das deformações está em função da transformação e sua forma matricial é:

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{r3}} \end{bmatrix}$$

Lembrete sobre operadores lineares:

$\underline{\mathbf{F}}$  e  $\nabla \underline{\mathbf{u}}$  são operadores lineares de  $E \rightarrow E$ . Seja  $\underline{\mathbf{T}}$  um operador linear:

$$\underline{\mathbf{T}}(\alpha \underline{\mathbf{x}} + \beta \underline{\mathbf{y}}) = \alpha \underline{\mathbf{T}}\underline{\mathbf{x}} + \beta \underline{\mathbf{T}}\underline{\mathbf{y}}, \forall \underline{\mathbf{x}} \text{ e } \underline{\mathbf{y}} \in E$$

//Inserir imagem

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{T}}} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

Obs: Para o curso, um operador linear tem a mesma função de um tensor (simplificando).

### 1.3 Tensor das Deformações de Green-Lagrange

//Inserir imagem

Onde  $\hat{\underline{\mathbf{m}}}^r$  é um versor,  $\frac{d\hat{\underline{\mathbf{x}}}^r}{||d\hat{\underline{\mathbf{x}}}^r||} = 1$ ,  $ds^r$  é o comprimento infinitesimal de uma fibra na configuração de referência na direção de  $\hat{\underline{\mathbf{m}}}^r$  e  $ds$  é o comprimento dessa mesma fibra na configuração deformada. Os comprimentos são definidos como:

$$ds^r = ||d\hat{\underline{\mathbf{x}}}^r|| = (d\hat{\underline{\mathbf{x}}}^r \cdot d\hat{\underline{\mathbf{x}}}^r)^{\frac{1}{2}}$$

$$ds = ||d\hat{\underline{\mathbf{x}}}| = (d\hat{\underline{\mathbf{x}}} \cdot d\hat{\underline{\mathbf{x}}})^{\frac{1}{2}}$$

Lembrando sobre operadores lineares: Seja  $\underline{\mathbf{A}}$  um operador linear ou tensor, temos

$$\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{a}}, \forall \underline{\mathbf{a}} \text{ e } \underline{\mathbf{b}} \in E$$

Quando  $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}^T$ ,  $\underline{\mathbf{A}}$  é simétrico.

**Exemplo:** A *interpolação quadrática* ou *alongamento quadrático* é definida como:

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2} \frac{(ds)^2 - (ds^r)^2}{(ds^r)^2}$$

Sabendo que,

$$ds^2 = d\hat{\underline{\mathbf{x}}} \cdot d\hat{\underline{\mathbf{x}}} = \underbrace{\underline{\mathbf{F}}d\hat{\underline{\mathbf{x}}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}d\hat{\underline{\mathbf{x}}}^r}_{\underline{\mathbf{v}}}$$

$$ds^2 = \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{F}}d\hat{\underline{\mathbf{x}}}^r$$

$$ds^2 = d\hat{\underline{\mathbf{x}}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{v}}$$

$$ds^2 = d\hat{\underline{\mathbf{x}}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}}d\hat{\underline{\mathbf{x}}}^r$$

Logo,

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2} \frac{(d\hat{\underline{\mathbf{x}}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}}d\hat{\underline{\mathbf{x}}}^r) - (d\hat{\underline{\mathbf{x}}}^r \cdot d\hat{\underline{\mathbf{x}}}^r)}{d\hat{\underline{\mathbf{x}}}^r \cdot d\hat{\underline{\mathbf{x}}}^r}$$

Lembrando que,

$$d\hat{\underline{\mathbf{x}}}^r = ||d\hat{\underline{\mathbf{x}}}^r||\hat{\underline{\mathbf{m}}}^r = ds^r \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r$$

Então,

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2} \frac{(ds^r \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}}d\hat{\underline{\mathbf{x}}}^r) - (ds^r \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r \cdot ds^r \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r)}{ds^r \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r \cdot ds^r \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_q &= \frac{1}{2} \frac{ds^r \hat{\mathbf{m}}^r \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) ds^r \hat{\mathbf{m}}^r}{ds^r \hat{\mathbf{m}}^r \cdot ds^r \hat{\mathbf{m}}^r} \\
\varepsilon_q &= \frac{1}{2} [\hat{\mathbf{m}}^r \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \hat{\mathbf{m}}^r] \\
\varepsilon_q &= \hat{\mathbf{m}}^r \cdot \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})}_{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{m}}^r \\
\mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \\
\varepsilon_q(\hat{\mathbf{m}}^r) &= \hat{\mathbf{m}}^r \cdot \mathbf{E} \hat{\mathbf{m}}^r
\end{aligned}$$

Onde  $\mathbf{E}$  é o Tensor das Deformações de Green-Lagrange e vale para qualquer magnitude de deslocamento. Algumas literaturas chamam de *finite displacement* os deslocamentos de qualquer magnitude.

Agora na notação de Einstein:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x^k}{\partial x^{ri}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{rj}} - \delta_{ij} \right)$$

Expressando os componentes de  $\mathbf{E}$  a partir do campo de deslocamentos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u}^T + \mathbf{I})(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{I}) - \mathbf{I}] \\
\mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} + \mathbf{I} - \mathbf{I}) \\
\mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u})
\end{aligned}$$

Na notação de Einstein:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^{rj}} + \frac{\partial u^j}{\partial x^{ri}} + \underbrace{\frac{\partial u^k}{\partial x^{ri}} \frac{\partial u^k}{\partial x^{rj}}}_* \right)$$

Sendo \*:

$$\frac{\partial u^k}{\partial x^{ri}} \frac{\partial u^k}{\partial x^{rj}} = \frac{\partial u^1}{\partial x^{ri}} \frac{\partial u^1}{\partial x^{rj}} + \frac{\partial u^2}{\partial x^{ri}} \frac{\partial u^2}{\partial x^{rj}} + \frac{\partial u^3}{\partial x^{ri}} \frac{\partial u^3}{\partial x^{rj}}$$

Acima,  $E_{ij}$  denota equações de compatibilidade; uma relação deslocamentos-deformações.



## 1.4 Medidas de deformação/alongamento

- Estiramento ou *stretch*:

$$\lambda = \frac{ds}{ds^r}$$

- Alongamento linear:

$$\varepsilon_l = \frac{ds - ds^r}{ds^r}$$

- Alongamento quadrático:

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2} \frac{(ds)^2 - (ds^r)^2}{(ds^r)^2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{ds}{ds^r} \right)^2 - 1 \right] = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1)$$

- Alongamento logarítmico ou de Henry:

$$\varepsilon_n = \ln \left( \frac{ds}{ds^r} \right)$$

- Alongamento hiperbólico ou de Reiner:

$$\varepsilon_h = \frac{ds^r}{ds}$$

- Alongamento hiperbólico quadrático ou de Almansi:

$$\varepsilon_{hq} = \frac{1}{2} \frac{(ds^r)^2 - (ds)^2}{(ds)^2}$$

### 1.4.1 Relação entre alongamentos quadráticos e lineares

Para o alongamento quadrático:

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1)$$

$$\lambda^2 = 1 + 2\varepsilon_q$$

$$\lambda = \sqrt{1 + 2\varepsilon_q}$$

$$\lambda(\hat{\mathbf{m}}^r) = \sqrt{1 + 2(\hat{\mathbf{m}}^r \cdot \underline{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{m}}^r)}$$

Para o alongamento linear:

$$\varepsilon_l = \lambda - 1$$

$$\varepsilon_l(\hat{\mathbf{m}}^r) = \sqrt{1 + 2(\hat{\mathbf{m}}^r \cdot \underline{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{m}}^r)} - 1$$

$$\varepsilon_l(\hat{\mathbf{m}}^r) = \sqrt{1 + 2\varepsilon_q} - 1$$

## 1.5 Variação do ângulo entre fibras (distorção)

//Inserir imagem

- $d\mathbf{\underline{a}}^r$  e  $d\mathbf{\underline{b}}^r$  são inicialmente ortogonais;
- $\mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{a}}^r$  tem a mesma direção de  $d\mathbf{\underline{a}}$  (hipótese);
- $\hat{\mathbf{a}}$  e  $\hat{\mathbf{b}}$  são versores.

Lembrando que,

$$d\mathbf{\underline{a}} = \mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{a}}^r \text{ e } d\mathbf{\underline{b}} = \mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{b}}^r$$

A fim de encontrar novas relações, podemos definir o produto escalar,

$$d\mathbf{\underline{a}} \cdot d\mathbf{\underline{b}} = \mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{a}}^r \cdot \mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{b}}^r$$

$$d\mathbf{\underline{a}} \cdot d\mathbf{\underline{b}} = \|\mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{a}}^r\| \|\mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{b}}^r\| \cos \theta$$

Logo,

$$\cos \theta = \sin \gamma = \frac{\mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{a}}^r \cdot \mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{b}}^r}{\|\mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{a}}^r\| \|\mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{b}}^r\|} \quad (2)$$

E,

$$d\mathbf{\underline{a}}^r = d\mathbf{a}^r \hat{\mathbf{a}}^r$$

$$d\mathbf{\underline{b}}^r = d\mathbf{b}^r \hat{\mathbf{b}}^r$$

$$\|\mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{a}}^r\| = \sqrt{\mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{a}}^r \cdot \mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{a}}^r}$$

$$\|\mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{b}}^r\| = \sqrt{\mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{b}}^r \cdot \mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{b}}^r}$$

Substituindo as 4 relações acima na Equação (2),

$$\sin \gamma = \frac{d\mathbf{\underline{b}}^r \cdot \mathbf{\underline{F}}^T \mathbf{\underline{F}} d\mathbf{\underline{a}}^r}{\sqrt{d\mathbf{\underline{a}}^r \cdot \mathbf{\underline{F}}^T \mathbf{\underline{F}} d\mathbf{\underline{a}}^r} \sqrt{d\mathbf{\underline{b}}^r \cdot \mathbf{\underline{F}}^T \mathbf{\underline{F}} d\mathbf{\underline{b}}^r}}$$

$$\begin{aligned}
\sin \gamma &= \frac{(d\mathbf{b}^r \hat{\mathbf{b}}^r) \cdot [\mathbf{F}^T \mathbf{F}(d\mathbf{a}^r \hat{\mathbf{a}}^r)]}{\sqrt{(d\mathbf{a}^r \hat{\mathbf{a}}^r) \cdot [\mathbf{F}^T \mathbf{F}(d\mathbf{a}^r \hat{\mathbf{a}}^r)]} \sqrt{(d\mathbf{b}^r \hat{\mathbf{b}}^r) \cdot [\mathbf{F}^T \mathbf{F}(d\mathbf{b}^r \hat{\mathbf{b}}^r)]}} \\
\sin \gamma &= \frac{(d\mathbf{b}^r d\mathbf{a}^r)[\hat{\mathbf{b}}^r \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \hat{\mathbf{a}}^r]}{(d\mathbf{b}^r d\mathbf{a}^r) \sqrt{\hat{\mathbf{a}}^r \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \hat{\mathbf{a}}^r} \sqrt{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \hat{\mathbf{b}}^r}} \\
\sin \gamma &= \frac{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \hat{\mathbf{a}}^r}{\sqrt{\hat{\mathbf{a}}^r \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \hat{\mathbf{a}}^r} \sqrt{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \hat{\mathbf{b}}^r}} \quad (3)
\end{aligned}$$

Lembrando que,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \\
\mathbf{F}^T \mathbf{F} &= 2\mathbf{E} + \mathbf{I}
\end{aligned}$$

Substituindo a expressão acima na Equação (3),

$$\begin{aligned}
\sin \gamma &= \frac{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot (2\mathbf{E} + \mathbf{I})\hat{\mathbf{a}}^r}{\sqrt{\hat{\mathbf{a}}^r \cdot (2\mathbf{E} + \mathbf{I})\hat{\mathbf{a}}^r} \sqrt{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot (2\mathbf{E} + \mathbf{I})\hat{\mathbf{b}}^r}} \\
(2\mathbf{E} + \mathbf{I})\hat{\mathbf{a}}^r &= 2\mathbf{E}\hat{\mathbf{a}}^r + \mathbf{I}\hat{\mathbf{a}}^r = 2\mathbf{E}\hat{\mathbf{a}}^r + \hat{\mathbf{a}}^r \\
\sin \gamma &= \frac{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot (2\mathbf{E}\hat{\mathbf{a}}^r + \hat{\mathbf{a}}^r)}{\sqrt{\hat{\mathbf{a}}^r \cdot (2\mathbf{E}\hat{\mathbf{a}}^r + \hat{\mathbf{a}}^r)} \sqrt{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot (2\mathbf{E}\hat{\mathbf{b}}^r + \hat{\mathbf{b}}^r)}} \\
\sin \gamma &= \frac{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot 2\mathbf{E}\hat{\mathbf{a}}^r + \hat{\mathbf{b}}^r \cdot \hat{\mathbf{a}}^r}{\sqrt{\hat{\mathbf{a}}^r \cdot 2\mathbf{E}\hat{\mathbf{a}}^r + \hat{\mathbf{a}}^r \cdot \hat{\mathbf{a}}^r} \sqrt{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot 2\mathbf{E}\hat{\mathbf{b}}^r + \hat{\mathbf{b}}^r \cdot \hat{\mathbf{b}}^r}}
\end{aligned}$$

Por fim,

$$\sin \gamma(\hat{\mathbf{a}}^r, \hat{\mathbf{b}}^r) = \frac{2(\hat{\mathbf{b}}^r \cdot \mathbf{E}\hat{\mathbf{a}}^r)}{\sqrt{2(\hat{\mathbf{a}}^r \cdot \mathbf{E}\hat{\mathbf{a}}^r) + 1} \sqrt{2(\hat{\mathbf{b}}^r \cdot \mathbf{E}\hat{\mathbf{b}}^r) + 1}} \quad (4)$$

Onde  $\gamma$  é a distorção, *i.e.*, a variação de ângulo entre duas fibras inicialmente ortogonais.

## 1.6 Interpretação de $\underline{\mathbf{E}}$

Partindo-se de uma base ortonormal  $(\underline{\hat{e}}_1, \underline{\hat{e}}_2, \underline{\hat{e}}_3)$ , o Tensor das Deformações de Green-Lagrange é definido como,

$$\underline{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix}$$

Lembrando do alongamento quadrático, por exemplo, de uma fibra alinhada na direção de  $\underline{\hat{e}}_1$ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon_q(\underline{\hat{e}}_1) &= \underline{\hat{e}}_1 \cdot \underline{\mathbf{E}} \underline{\hat{e}}_1 \\ \varepsilon_q(\underline{\hat{e}}_1) &= \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \varepsilon_q(\underline{\hat{e}}_1) &= \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{Bmatrix} = E_{11} \end{aligned}$$

Da mesma forma, uma fibra na direção de  $\underline{\hat{e}}_2$  ou  $\underline{\hat{e}}_3$ ,

$$\varepsilon_q(\underline{\hat{e}}_2) = E_{22}$$

$$\varepsilon_q(\underline{\hat{e}}_3) = E_{33}$$

Ou seja, a diagonal de  $\underline{\mathbf{E}}$  guarda o alongamento quadrático. E quanto à distorção? Escolhendo dois vetores da base ortonormal quaisquer, por exemplo,  $\underline{\hat{e}}_1$  e  $\underline{\hat{e}}_2$  e lembrando da Equação (4),

$$\sin \gamma(\underline{\hat{e}}_1, \underline{\hat{e}}_2) = \frac{2(\underline{\hat{e}}_2 \cdot \underline{\mathbf{E}} \underline{\hat{e}}_1)}{\sqrt{2(\underline{\hat{e}}_1 \cdot \underline{\mathbf{E}} \underline{\hat{e}}_1) + 1} \sqrt{2(\underline{\hat{e}}_2 \cdot \underline{\mathbf{E}} \underline{\hat{e}}_2) + 1}} \quad (5)$$

Desenvolvendo o produto escalar no numerador da expressão acima na equação do alongamento quadrático,

$$\varepsilon_q = \underline{\hat{e}}_2 \cdot \underline{\mathbf{E}} \underline{\hat{e}}_1$$

$$\varepsilon_q = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_q = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{21} \\ E_{31} \end{Bmatrix} = E_{21}$$

Agora, invertendo os versores escolhidos para a Equação (4) e como o denominador continuará o mesmo, só o numerador sofrerá alteração. Desenvolvendo-o da mesma forma na equação do alongamento quadrático,

$$\varepsilon_q = \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \underline{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{e}}_2$$

$$\varepsilon_q = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_q = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} E_{12} \\ E_{22} \\ E_{32} \end{Bmatrix} = E_{12}$$

Ou seja, como a distorção entre esses versores deve ser igual, apenas invertendo os versores utilizados pode-se chegar a conclusão de que  $E_{21} = E_{12}$ . Isso significa que  $\underline{\mathbf{E}}$  é simétrico.

Pode-se reescrever a Equação (5) como,

$$\sin \gamma(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2) = \frac{2E_{21}}{\sqrt{2E_{11} + 1} \sqrt{2E_{22} + 1}}$$

## 1.7 Tensor das Deformações de Cauchy-Green (da direita)

O Tensor das Deformações de Cauchy-Green ( $\underline{\mathbf{C}}$ ) serve para grandes deformações e é definido como,

$$\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}} \quad (6)$$

Podendo ser reescrito na notação de Einstein como,

$$C_{ij} = F_{ik}^T F_{kj}$$

$$C_{ij} = F_{ki} F_{kj}$$

Na forma diferencial,

$$C_{ij} = \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}^k}{\partial x^{ri}} \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}^k}{\partial x^{rj}}$$

### 1.7.1 Relações entre alongamentos quadráticos e lineares

O alongamento quadrático,

$$\lambda = \sqrt{2\varepsilon_q + 1}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado,

$$\lambda^2 = 2\varepsilon_q + 1 = 2(\hat{\underline{\mathbf{m}}}^r \cdot \underline{\mathbf{E}}\hat{\underline{\mathbf{m}}}^r) + 1$$

Como  $\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}}$ ,  $\underline{\mathbf{E}}$  pode ser reescrito como,

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{C}} - \underline{\mathbf{I}}) \quad (7)$$

Pode-se reescrever  $\lambda^2$  como,

$$\lambda^2 = 2 \left\{ \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r \cdot \left[ \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{C}} - \underline{\mathbf{I}}) \right] \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r \right\} + 1$$

$$\lambda^2 = \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r \cdot \underline{\mathbf{C}}\hat{\underline{\mathbf{m}}}^r - \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r \cdot \underline{\mathbf{I}}\hat{\underline{\mathbf{m}}}^r + 1$$

$$\lambda^2 = \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r \cdot \underline{\mathbf{C}}\hat{\underline{\mathbf{m}}}^r - \underbrace{\hat{\underline{\mathbf{m}}}^r \cdot \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r}_1 + 1$$

$$\lambda^2 = \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r \cdot \underline{\mathbf{C}}\hat{\underline{\mathbf{m}}}^r$$

Logo,

$$\lambda(\hat{\underline{\mathbf{m}}}^r) = \sqrt{\hat{\underline{\mathbf{m}}}^r \cdot \underline{\mathbf{C}}\hat{\underline{\mathbf{m}}}^r} \quad (8)$$

Para o alongamento linear,

$$\begin{aligned}\varepsilon_l(\hat{\mathbf{m}}^r) &= \lambda - 1 \\ \varepsilon_l(\hat{\mathbf{m}}^r) &= \sqrt{\hat{\mathbf{m}}^r \cdot \underline{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{m}}^r} - 1\end{aligned}\tag{9}$$

Para a distorção, a partir da Equação (3),

$$\sin \gamma = \frac{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{a}}^r}{\sqrt{\hat{\mathbf{a}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{a}}^r} \sqrt{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{b}}^r}}$$

Como  $\underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{C}}$ ,

$$\begin{aligned}\sin \gamma &= \frac{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot \underline{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{a}}^r}{\sqrt{\hat{\mathbf{a}}^r \cdot \underline{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{a}}^r} \sqrt{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot \underline{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{b}}^r}} \\ \sin \gamma &= \frac{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot \underline{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{a}}^r}{\lambda(\hat{\mathbf{a}}^r) \lambda(\hat{\mathbf{b}}^r)}\end{aligned}$$

Ou seja, pode-se concluir que  $\underline{\mathbf{C}}$  é simétrico.

### 1.7.2 Interpretação de $\underline{\mathbf{C}}$ na base ortonormal

$$\begin{aligned}\lambda(\hat{\mathbf{e}}_1) &= \sqrt{\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \underline{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{e}}_1} = \sqrt{C_{11}} \therefore \lambda^2(\hat{\mathbf{e}}_1) = C_{11} \\ \lambda(\hat{\mathbf{e}}_2) &= \sqrt{\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \underline{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{e}}_2} = \sqrt{C_{22}} \therefore \lambda^2(\hat{\mathbf{e}}_2) = C_{22} \\ \lambda(\hat{\mathbf{e}}_3) &= \sqrt{\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \underline{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{e}}_3} = \sqrt{C_{33}} \therefore \lambda^2(\hat{\mathbf{e}}_3) = C_{33}\end{aligned}$$

Ou seja, a diagonal de  $\underline{\mathbf{C}}$  guarda o alongamento quadrático.

$$\sin(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2) = \frac{\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \underline{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{e}}_2}{\lambda(\hat{\mathbf{e}}_1) \lambda(\hat{\mathbf{e}}_2)} = \frac{C_{12}}{\lambda(\hat{\mathbf{e}}_1) \lambda(\hat{\mathbf{e}}_2)}$$

## 1.8 Deslocamentos infinitesimais

Relembrando de  $\underline{\mathbf{E}}$  na forma diferencial,

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^{rj}} + \frac{\partial u^j}{\partial x^{ri}} + \frac{\partial u^k}{\partial x^{ri}} \frac{\partial u^k}{\partial x^{rj}} \right)$$

Para deslocamentos infinitesimais, pode-se desprezar o produto contido na expressão acima. Ficando como,

$$E_{ij}^l = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^{rj}} + \frac{\partial u^j}{\partial x^{ri}} \right)$$

Ou seja, obtém-se o Tensor das Deformações infinitesimais linearizado, denotado por  $\underline{\mathbf{E}}^l$  ou  $E_{ij}^l$ . Sendo,

$$\underline{\mathbf{E}}^l = \frac{1}{2}(\nabla u^T + \nabla u)$$

Agora, lembrando do alongamento linear em função do vetor unitário  $\hat{\mathbf{m}}^r$  (direção de uma fibra na configuração de referência),

$$\varepsilon_l(\hat{\mathbf{m}}^r) = \sqrt{1 + 2(\hat{\mathbf{m}}^r \cdot \underline{\mathbf{E}}\hat{\mathbf{m}}^r)} - 1$$

Elevando ambos os lados ao quadrado,

$$(\varepsilon_l + 1)^2 = 1 + 2(\hat{\mathbf{m}}^r \cdot \underline{\mathbf{E}}\hat{\mathbf{m}}^r)$$

$$\varepsilon_l^2 + 2\varepsilon_l + 1 = 1 + 2(\hat{\mathbf{m}}^r \cdot \underline{\mathbf{E}}\hat{\mathbf{m}}^r)$$

Desprezando a ordem superior,

$$\varepsilon_l = \hat{\mathbf{m}}^r \cdot \underline{\mathbf{E}}\hat{\mathbf{m}}^r$$

Ou seja,  $\underline{\mathbf{E}}$  tende para  $\underline{\mathbf{E}}^l$  para deslocamentos lineares, portanto,

$$\varepsilon_l(\hat{\mathbf{m}}^r) = \hat{\mathbf{m}}^r \cdot \underline{\mathbf{E}}^l \hat{\mathbf{m}}^r$$

E para a distorção,

$$\sin \gamma(\hat{\mathbf{a}}^r, \hat{\mathbf{b}}^r) = \frac{2(\hat{\mathbf{b}}^r \cdot \underline{\mathbf{E}}\hat{\mathbf{a}}^r)}{\sqrt{2(\hat{\mathbf{a}}^r \cdot \underline{\mathbf{E}}\hat{\mathbf{a}}^r) + 1} \sqrt{2(\hat{\mathbf{b}}^r \cdot \underline{\mathbf{E}}\hat{\mathbf{b}}^r) + 1}}$$



Admitindo que o denominador acima será muito pequeno em relação a 1,

$$\sin \gamma(\hat{\mathbf{a}}^r, \hat{\mathbf{b}}^r) = 2(\hat{\mathbf{b}}^r \cdot \underline{\mathbf{E}}^l \hat{\mathbf{a}}^r)$$

**Exercício** - Capítulo 3/página 108 do livro *The Mechanics of Solids and Structures - Hierarchical Modeling and The Finite Element Process of Solution* (Bucalem, Bathe):

Configuração deformada para um bloco de aresta  $a$ ,

$$\begin{cases} x^1 = x^{r1} + \tan \beta x^{r2} \\ x^2 = x^{r2} \\ x^3 = x^{r3} \end{cases}$$

//Inserir desenho

1. Calcular o campo de deslocamentos e deformações normais ( $\varepsilon_l$ ) nas direções ( $\hat{\mathbf{e}}_1$ ), ( $\hat{\mathbf{e}}_2$ ), ( $\underline{\mathbf{m}}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\mathbf{e}}_2$ ) e ( $\underline{\mathbf{m}}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\mathbf{e}}_2$ ).
2. Calcular as deformações por cisalhamento para os pares de fibras nas direções ( $\hat{\mathbf{e}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_2$ ) e ( $\underline{\mathbf{m}}_1$ ,  $\underline{\mathbf{m}}_2$ ).
3. Repetir os itens 1 e 2 assumindo um  $\beta$  pequeno, obter os resultados usando a teoria dos pequenos deslocamentos, e mostrar que estes mesmos resultados são também obtidos de 1 e 2.

**Solução:**

1. O campo de deslocamentos é dado por,

$$u^i = x^i - x^{ri}$$

Aplicando para as coordenadas,

$$u^1 = x^1 - x^{r1} = (x^{r1} + \tan \beta x^{r2}) - x^{r1} = \tan \beta x^{r2}$$

$$u^2 = x^2 - x^{r2} = x^{r2} - x^{r2} = 0$$

$$u^3 = x^2 - x^{r2} = x^{r3} - x^{r3} = 0$$

Considerando grandes deslocamentos, precisamos calcular o gradiente das deformações ( $\underline{\mathbf{F}}$ )

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota-se aqui que através do bloco, os elementos de F são constantes (independentes de  $x^{r1}$ ,  $x^{r2}$  e  $x^{r3}$ ).

Então,

$$\underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tan \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \tan \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \beta & 0 \\ \tan \beta & \tan^2 \beta + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando a Equação (9) (alongamento linear) para as fibras do item 1:

Para  $\hat{\mathbf{e}}_1$ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon_l(\hat{\mathbf{e}}_1) &= \sqrt{\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \underline{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{e}}_1} - 1 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \underline{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{e}}_1 &= \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \tan \beta & 0 \\ \tan \beta & \tan^2 \beta + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \underline{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{e}}_1 &= \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ \tan \beta \\ 0 \end{Bmatrix} = 1 \\ \varepsilon_l(\hat{\mathbf{e}}_1) &= \sqrt{1} - 1 = 0 \end{aligned}$$

Para  $\hat{\mathbf{e}}_2$ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon_l(\hat{\mathbf{e}}_2) &= \sqrt{\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \underline{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{e}}_2} - 1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \underline{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{e}}_2 &= \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \tan \beta & 0 \\ \tan \beta & \tan^2 \beta + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \underline{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{e}}_2 = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tan \beta \\ \tan^2 \beta + 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \tan^2 \beta + 1$$

$$\varepsilon_l(\hat{\mathbf{e}}_2) = \sqrt{\tan^2 \beta + 1} - 1$$

Para  $\underline{\mathbf{m}}_1$  (sendo  $\underline{\mathbf{m}}_1$  unitário, obrigatoriamente),

$$\varepsilon_l(\underline{\mathbf{m}}_1) = \sqrt{\underline{\mathbf{m}}_1 \cdot \underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{m}}_1} - 1$$

$$\underline{\mathbf{m}}_1 \cdot \underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{m}}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \tan \beta & 0 \\ \tan \beta & \tan^2 \beta + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{m}}_1 \cdot \underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{m}}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(\tan \beta + 1) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\tan^2 \beta + 1 + \tan \beta) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{m}}_1 \cdot \underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{m}}_1 = \frac{1}{2}(\tan \beta + 1) + \frac{1}{2}(\tan^2 \beta + 1 + \tan \beta)$$

$$\underline{\mathbf{m}}_1 \cdot \underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{m}}_1 = \tan \beta + 1 + \frac{\tan^2 \beta}{2}$$

$$\varepsilon_l(\underline{\mathbf{m}}_1) = \sqrt{\tan \beta + 1 + \frac{\tan^2 \beta}{2}} - 1$$

Para  $\underline{\mathbf{m}}_2$  (sendo  $\underline{\mathbf{m}}_2$  unitário, obrigatoriamente),

$$\varepsilon_l(\underline{\mathbf{m}}_2) = \sqrt{\underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{m}}_2} - 1$$

$$\underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{m}}_2 = \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \tan \beta & 0 \\ \tan \beta & \tan^2 \beta + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{m}}_2 = \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(\tan \beta - 1) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\tan^2 \beta + 1 - \tan \beta) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{m}}_2 = -\frac{1}{2}(\tan \beta - 1) + \frac{1}{2}(\tan^2 \beta + 1 - \tan \beta)$$

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{m}}_2 &= -\tan \beta + 1 + \frac{\tan^2 \beta}{2} \\ \varepsilon_l(\underline{\mathbf{m}}_2) &= \sqrt{1 + \frac{\tan^2 \beta}{2}} - \tan \beta - 1\end{aligned}$$

2. As tensões de cisalhamento podem ser calculadas como segue,

Sabendo que,

$$\begin{aligned}\varepsilon_l(\hat{\underline{\mathbf{m}}}^r) &= \sqrt{\hat{\underline{\mathbf{m}}}^r \cdot \underline{\mathbf{C}}\hat{\underline{\mathbf{m}}}^r} - 1 \\ 1 + \varepsilon_l(\hat{\underline{\mathbf{m}}}^r) &= \sqrt{\hat{\underline{\mathbf{m}}}^r \cdot \underline{\mathbf{C}}\hat{\underline{\mathbf{m}}}^r}\end{aligned}$$

Substituindo na Equação (3),

$$\sin \gamma = \frac{\hat{\underline{\mathbf{b}}}^r \cdot \underline{\mathbf{C}}\hat{\underline{\mathbf{a}}}^r}{\sqrt{1 + \varepsilon_l(\hat{\underline{\mathbf{a}}}^r)}\sqrt{1 + \varepsilon_l(\hat{\underline{\mathbf{b}}}^r)}}$$

Para o par de fibras  $(\hat{\underline{\mathbf{e}}}_1, \hat{\underline{\mathbf{e}}}_2)$ ,

$$\begin{aligned}\sin \gamma &= \frac{\hat{\underline{\mathbf{e}}}_2 \cdot \underline{\mathbf{C}}\hat{\underline{\mathbf{e}}}_1}{\sqrt{1 + \varepsilon_l(\hat{\underline{\mathbf{e}}}_1)}\sqrt{1 + \varepsilon_l(\hat{\underline{\mathbf{e}}}_2)}} = \frac{\hat{\underline{\mathbf{e}}}_2 \cdot \underline{\mathbf{C}}\hat{\underline{\mathbf{e}}}_1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} \\ \hat{\underline{\mathbf{e}}}_2 \cdot \underline{\mathbf{C}}\hat{\underline{\mathbf{e}}}_1 &= \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \tan \beta & 0 \\ \tan \beta & \tan^2 \beta + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \hat{\underline{\mathbf{e}}}_2 \cdot \underline{\mathbf{C}}\hat{\underline{\mathbf{e}}}_1 &= \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ \tan \beta \\ 0 \end{Bmatrix} = \tan \beta \\ \sin \gamma &= \frac{\tan \beta}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}}\end{aligned}$$

Usando a identidade  $\sec^2 \beta - \tan^2 \beta = 1$ ,

$$\sin \gamma = \frac{\tan \beta}{\sqrt{\sec^2 \beta}} = \frac{\tan \beta}{\sec \beta} = \frac{\frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{\frac{1}{\cos \beta}} = \sin \beta$$

O que implica que  $\gamma = \beta$ .

Para o par de fibras  $(\underline{\mathbf{m}}_1, \underline{\mathbf{m}}_2)$ ,

$$\begin{aligned}\sin \gamma &= \frac{\underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{m}}_1}{\sqrt{1 + \varepsilon_l(\underline{\mathbf{m}}_1)} \sqrt{1 + \varepsilon_l(\underline{\mathbf{m}}_2)}} \\ \underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{m}}_1 &= \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \right\} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \tan \beta & 0 \\ \tan \beta & \tan^2 \beta + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{m}}_1 &= \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \right\} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \tan \beta) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\tan \beta + \tan^2 \beta + 1) \\ 0 \end{bmatrix} \\ \underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{m}}_1 &= -\frac{1}{2}(1 + \tan \beta) + \frac{1}{2}(\tan \beta + \tan^2 \beta + 1) = \tan^2 \beta \\ \sin \gamma &= \frac{\tan^2 \beta}{\sqrt{\tan \beta + 1 + \frac{\tan^2 \beta}{2}} \sqrt{1 + \frac{\tan^2 \beta}{2} - \tan \beta}}\end{aligned}$$

3. Quando os deslocamentos são infinitesimais, podemos calcular o alongamento normal e deformação cisalhante usando o tensor infinitesimal das deformações, sendo definido como,

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^i}{\partial x^{rj}} + \frac{\partial u^j}{\partial x^{ri}} \right)$$

Então,

$$E_{11} = \frac{\partial u^1}{\partial x^{r1}} = 0, \quad E_{22} = \frac{\partial u^2}{\partial x^{r2}} = 0, \quad E_{33} = \frac{\partial u^3}{\partial x^{r3}} = 0$$

E como para deslocamentos infinitesimais  $\tan \beta = \beta$ ,

$$\begin{aligned}E_{12} = E_{21} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^1}{\partial x^{r2}} + \frac{\partial u^2}{\partial x^{r1}} \right) = \frac{\beta}{2} \\ E_{13} = E_{31} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^1}{\partial x^{r3}} + \frac{\partial u^3}{\partial x^{r1}} \right) = 0 \\ E_{23} = E_{32} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^2}{\partial x^{r3}} + \frac{\partial u^3}{\partial x^{r2}} \right) = 0\end{aligned}$$

Na forma matricial,

$$\underline{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 0 & \beta/2 & 0 \\ \beta/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtendo-se,

$$\varepsilon_l(\hat{\mathbf{e}}_1) = E_{11} = 0, \quad \varepsilon_l(\hat{\mathbf{e}}_2) = E_{22} = 0, \quad \sin(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2) = 2E_{12} = \beta$$

A deformação normal das fibras nas direções  $\underline{\mathbf{m}}_1$  e  $\underline{\mathbf{m}}_2$  podem ser calculadas por,

$$\begin{aligned} \varepsilon_l(\underline{\mathbf{m}}_1) &= \underline{\mathbf{m}}_1 \cdot \underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{m}}_1 \\ \varepsilon_l(\underline{\mathbf{m}}_1) &= \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \right\} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \beta/2 & 0 \\ \beta/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\beta}{2} \\ \varepsilon_l(\underline{\mathbf{m}}_2) &= \underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \underline{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{m}}_2 \\ \varepsilon_l(\underline{\mathbf{m}}_2) &= \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \right\} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \beta/2 & 0 \\ \beta/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = -\frac{\beta}{2} \end{aligned}$$

A deformação entre as fibras de direção  $\underline{\mathbf{m}}_1$ ,  $\underline{\mathbf{m}}_2$  é dada por,

$$\begin{aligned} \gamma(\underline{\mathbf{m}}_1, \underline{\mathbf{m}}_2) &= 2(\underline{\mathbf{m}}_1 \cdot \underline{\mathbf{E}}^l \underline{\mathbf{m}}_2) \\ \gamma(\underline{\mathbf{m}}_1, \underline{\mathbf{m}}_2) &= 2 \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \right\} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \beta/2 & 0 \\ \beta/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

A fim de mostrar que obtivemos os resultados acima dos valores calculados em 1 e 2, precisamos considerar  $\beta$  infinitesimal nas expressões em 1 e 2.

## 1.9 Movimentos rígidos: Rotações

//Inserir imagem

Para a figura acima em uma base ortonormal e o eixo de rotação  $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}}_3$ ,  $\theta$  é a magnitude de rotação,  $\underline{\boldsymbol{\varrho}} = \theta \hat{\mathbf{e}}$  ( $\underline{\boldsymbol{\varrho}}$  define totalmente a rotação) e  $\|\hat{\mathbf{e}}\| = 1$ .

Lembrando do exercício de rotação da primeira aula,

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix}}_{\underline{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{Q}}} \underbrace{\begin{Bmatrix} x^{r1} \\ x^{r2} \\ x^{r3} \end{Bmatrix}}_{\underline{\mathbf{x}}^r}$$

Onde  $\underline{\mathbf{Q}}$  é o operador (tensor) ortogonal.

Pode-se definir um operador ortogonal de forma equivalente por uma das relações abaixo,

- $\|\underline{\mathbf{Q}}\underline{\mathbf{w}}\| = \|\underline{\mathbf{w}}\| \forall \underline{\mathbf{w}}$  (Não muda o comprimento).
- $\underline{\mathbf{Q}}\underline{\mathbf{Q}}^T = \underline{\mathbf{Q}}^T\underline{\mathbf{Q}} = \underline{\mathbf{I}} \implies \underline{\mathbf{Q}}^{-1} = \underline{\mathbf{Q}}^T$
- A partir de item acima,

$$\det(\underline{\mathbf{Q}}\underline{\mathbf{Q}}^T) = \det(\underline{\mathbf{I}})$$

$$\det(\underline{\mathbf{Q}})\det(\underline{\mathbf{Q}}^T) = 1$$

$$(\det \underline{\mathbf{Q}})^2 = 1$$

$$\det(\underline{\mathbf{Q}}) = \pm 1$$

Pode-se demonstrar que para qualquer tensor ortogonal com determinante positivo ( $\det(\underline{\mathbf{Q}}) = 1$ ), a rotação é descrita através da equação,

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{Q}}\underline{\mathbf{x}}^r$$

**Exercício** - Capítulo 3/página 144 do livro *The Mechanics of Solids and Structures - Hierarchical Modeling and The Finite Element Process of Solution* (Bucalem, Bathe):

Considere o tensor  $\underline{\mathbf{Q}}$  na base ortogonal,

$$\underline{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} + \frac{5\sqrt{3}}{18} & \frac{5}{18} + \frac{2\sqrt{3}}{9} & \frac{5}{9} - \frac{\sqrt{3}}{9} \\ \frac{11}{18} - \frac{2\sqrt{3}}{9} & \frac{4}{9} + \frac{5\sqrt{3}}{18} & -\frac{1}{9} - \frac{\sqrt{3}}{9} \\ -\frac{1}{9} - \frac{\sqrt{3}}{9} & \frac{5}{9} - \frac{\sqrt{3}}{9} & \frac{1}{9} + \frac{4\sqrt{3}}{9} \end{bmatrix}$$

1. Verificar se  $\underline{\mathbf{Q}}$  é um tensor ortogonal;
2. Obter o eixo e magnitude dada por  $\underline{\mathbf{Q}}$ .

Solução:

1. Deve-se verificar se  $\underline{\mathbf{Q}}\underline{\mathbf{Q}}^T = \mathbf{I}$
2. Considerando que  $\underline{\hat{\mathbf{e}}}$  é um vetor unitário ( $||\underline{\hat{\mathbf{e}}}|| = 1$ ) na direção do eixo de rotação, então:

$$\underline{\mathbf{Q}}\underline{\hat{\mathbf{e}}} = \underline{\hat{\mathbf{e}}} \quad (\text{Não muda a magnitude})$$

$$\underline{\mathbf{Q}}\underline{\hat{\mathbf{e}}} - \underline{\hat{\mathbf{e}}} = 0$$

$$(\underline{\mathbf{Q}} - \mathbf{I})\underline{\hat{\mathbf{e}}} = 0$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} Q_{11} - 1 & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} - 1 & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema

$$\underline{\hat{\mathbf{e}}} = \begin{Bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{Bmatrix}$$

Verificando se não houve falha no processo de cálculo,

$$||\underline{\hat{\mathbf{e}}}|| = \sqrt{(2/3)^2 + (2/3)^2 + (1/3)^2} = 1$$

Adotando  $\underline{\mathbf{g}}$  como um vetor unitário ortogonal ao eixo de rotação e escolhendo qualquer um dos vetores da base,

$$\underline{\mathbf{g}} = \frac{\underline{\hat{\mathbf{e}}} \times \underline{\hat{\mathbf{e}}}_2}{||\underline{\hat{\mathbf{e}}} \times \underline{\hat{\mathbf{e}}}_2||} = \begin{Bmatrix} -\sqrt{5}/5 \\ 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{Bmatrix}$$



Aplicando a rotação em  $\underline{\mathbf{g}}$  para obter um vetor  $\underline{\mathbf{f}}$ ,

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{Q}}\underline{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{15}}{10} + \frac{2\sqrt{5}}{15} \\ -\frac{5}{6} \\ \frac{\sqrt{15}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{15} \end{pmatrix}$$

Encontrando o ângulo de rotação pelo produto escalar entre  $\underline{\mathbf{g}}$  e  $\underline{\mathbf{f}}$ ,

$$\underline{\mathbf{g}} \cdot \underline{\mathbf{f}} = ||\underline{\mathbf{g}}|| \ ||\underline{\mathbf{f}}|| \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \theta = 30^\circ$$