1 Estudos das deformações

1.1 Considerações iniciais

- Configuração do sólido: posição ocupada pelos pontos em um determinado instante t;
- Descrever a configuração deformada (V) a partir de uma configuração de referência (V^r);
- Considerando um conjunto de pontos da Geometria Euclidiana (E), e seja, ($\underset{\sim}{\mathbf{e_1}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{e_2}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{e_3}}$) uma base do espaço vetorial da geometria clássica.

Podemos definir (0, $\underset{\sim}{\mathbf{e_1}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{e_2}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{e_3}}$) como um sistema de referência:

// Inserir imagem

Os vetores dos pontos de referência ($\underset{\sim}{\mathbf{x^r}}$) e na configuração deformada ($\underset{\sim}{\mathbf{x}}$) em relação aos versores da base podem ser expressos na notação de Einstein:

$$\underset{\sim}{\mathbf{x^r}} = \underset{\sim}{\mathbf{x^r}} - \underset{\sim}{\mathbf{0}} = \sum_{i=1}^{3} x^{ri}\underset{\sim}{\mathbf{e_i}} = x^{r1}\underset{\sim}{\mathbf{e_1}} + x^{r2}\underset{\sim}{\mathbf{e_2}} + x^{r3}\underset{\sim}{\mathbf{e_3}}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{x}} = \underset{\sim}{\mathbf{x}} - \underset{\sim}{\mathbf{0}} = \sum_{i=1}^{3} x^{i}\underset{\sim}{\mathbf{e_i}} = x^{1}\underset{\sim}{\mathbf{e_1}} + x^{2}\underset{\sim}{\mathbf{e_2}} + x^{3}\underset{\sim}{\mathbf{e_3}}$$

Seja ψ uma função que associa a posição de cada ponto na configuração V^r a sua posição na configuração V. Tal aplicação é uma transformação de V^r em V.

$$x^1 = \hat{x}^1(x^{r1},\ x^{r2},\ x^{r3})$$

$$x^2 = \hat{x}^2(x^{r1},\ x^{r2},\ x^{r3})$$

$$x^3 = \hat{x}^3(x^{r1},\ x^{r2},\ x^{r3})$$

Aqui, o circunflexo denota *em função de*, *i.e.*, a coordenada i da posição deformada está em função das coordenadas da posição de referência.

Exemplo: Considere um sólido cuja seção no plano $\underset{\sim}{\mathbf{e_1}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{e_2}}$ é dado por:

//Inserir imagem

Caracterize os seguintes campos de deslocamento:

a) Translação de corpo rígido de intensidade Δ na direção de $\underset{\sim}{\mathbf{e_1}}$;

b) Rotação de corpo rígido em torno de $\underset{\sim}{\mathbf{e_3}}$ de intensidade φ.

Resolução:

a)

$$\underset{\sim}{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{u}} = \underset{\sim}{\mathbf{x}} - \underset{\sim}{\mathbf{x}}^{\mathbf{r}} \implies \underset{\sim}{\mathbf{x}} = \begin{cases} x^1 = x^{r1} + u_1 = x^{r1} + \Delta \\ x^2 = x^{r2} + u_2 = x^{r2} \\ x^3 = x^{r3} + u_3 = x^{r3} \end{cases}$$

b) //Inserir imagem

A configuração de referência:

$$x^{r1} = r \cdot \cos\theta$$

$$x^{r2} = r \cdot \sin\theta$$

$$x^{r3} = 0 \text{ (ou } x^{r3} \text{ para deixar genérico)}$$

A configuração deformada (a partir da imagem):

$$u^1 = r \cdot \cos(\varphi + \theta) - r \cdot \cos\theta$$

$$u^1 = r \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta - r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta - r \cdot \cos\theta$$

$$u^2 = r \cdot \sin(\varphi + \theta) - r \cdot \sin\theta$$

$$u^2 = r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta + r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\theta$$

Substituindo as coordenadas de referência nas coordenadas deformadas:

$$u^1 = x^{r1} \cdot \cos\varphi - x^{r2} \cdot \sin\varphi - x^{r1}$$

$$u^2 = x^{r1} \cdot \sin\varphi + x^{r2} \cdot \cos\varphi - x^{r2}$$

$$u^3 = 0$$

Como sabemos que $\underset{\sim}{\mathbf{x}} = \underset{\sim}{\mathbf{x}}^{\mathbf{r}} + \underset{\sim}{\mathbf{u}}$, temos:

$$\begin{cases} x^1 = x^{r1} \cdot \cos\varphi - x^{r2} \cdot \sin\varphi \\ x^2 = x^{r1} \cdot \sin\varphi + x^{r2} \cdot \cos\varphi \\ x^3 = x^{r3} \end{cases}$$

Podemos escrever também na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^{r1} \\ x^{r2} \\ x^{r3} \end{Bmatrix}$$

1.2 Deformação Normal e por Cisalhamento

//Inserir imagem

O assunto agora são fibras; como as fibras sofrem deformação. Seja $d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r$ o vetor infinitesimal que representa uma fibra a partir do ponto $\underset{\sim}{\mathbf{x}}^{\mathbf{r}}$; $d\underset{\sim}{\mathbf{x}}$ o vetor infinitesimal da mesma fibra agora na configuração deformada, partindo do ponto $\underset{\sim}{\mathbf{x}}$. Para que o vetor $d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r$

deforme e se transforme em $d\underset{\sim}{\mathbf{x}}$, deve ocorrer uma transformação que depende de $\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r + d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r$, *i.e.*, uma transformação $\underset{\sim}{\mathbf{u}}(\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r + d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r)$.

Algumas relações podem ser estabelecidas a partir da imagem acima, sendo:

$$\underset{\sim}{\mathbf{u}}(\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r) = d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r + \underset{\sim}{\mathbf{u}}(\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r + d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r)$$

E a fibra na configuração deformada:

$$d\underset{\sim}{\mathbf{x}} = d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r + \underset{\sim}{\mathbf{u}}(\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r + d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r) - \underset{\sim}{\mathbf{u}}(\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r)$$

A equação acima na forma de componentes:

$$dx^i = dx^{ri} + u^i(x^{r1} + dx^{r1},\ x^{r2} + dx^{r2},\ x^{r3} + dx^{r3}) - u^i(x^{r1},\ x^{r2},\ x^{r3})$$

Lembrando de cálculo com múltiplas variáveis:

$$u^i(x^{r1}+dx^{r1},\ x^{r2}+dx^{r2},\ x^{r3}+dx^{r3}) - u^i(x^{r1},\ x^{r2},\ x^{r3}) = \frac{\partial u^i}{\partial x^{r1}}dx^{r1} + \frac{\partial u^i}{\partial x^{r2}}dx^{r2} + \frac{\partial u^i}{\partial x^{r3}}dx^{r3}$$

Para $i = 1,\ 2$ e 3. Essa iteração diz que cada coordenada i depende de acontecimentos nas 3 dimensões do espaço euclidiano.

Reescrevendo na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{Bmatrix}}_{d\underset{\sim}{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} dx^{r1} \\ dx^{r2} \\ dx^{r3} \end{Bmatrix}}_{d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^1}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^1}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^2}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^2}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial u^3}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^3}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^3}{\partial x^{r3}} \end{bmatrix}}_{\nabla\underset{\sim}{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{L}}} \underbrace{\begin{Bmatrix} dx^{r1} \\ dx^{r2} \\ dx^{r3} \end{Bmatrix}}_{d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r}$$

Onde $\nabla\underset{\sim}{\mathbf{u}}$ é o **gradiente dos deslocamentos**.

Logo,

$$d\underset{\sim}{\mathbf{x}} = d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r + \nabla\underset{\sim}{\mathbf{u}}\ d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r$$

Colocando $d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r$ em evidência, temos:

$$d\underset{\sim}{\mathbf{x}} = \underbrace{(\underline{\mathbf{I}} + \nabla\underset{\sim}{\mathbf{u}})}_{\underline{\mathbf{F}}}\, d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r$$

Onde $\underline{\mathbf{F}}$ é o **gradiente das deformações**.

Portanto, temos:

$$d\underset{\sim}{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{F}}\, d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r \tag{1}$$

Ou seja, a fibra deformada agora pode ser obtida a partir do gradiente dos deslocamentos ($\nabla\underset{\sim}{\mathbf{u}}$) e também a partir do gradiente das deformações ($\underline{\mathbf{F}}$).

O gradiente das deformações pode ser reescrito como:

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u^1}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^1}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^1}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^{r1}} & 1 + \frac{\partial u^2}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^2}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial u^3}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^3}{\partial x^{r2}} & 1 + \frac{\partial u^3}{\partial x^{r3}} \end{bmatrix}$$

Ou ainda, usando notação indicial de Einstein:

$$F_{ij} = \nabla u_{ij} + \delta_{ij}$$

Onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, *i.e.*: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

E em notação indicial, temos:

$$\nabla u_{ij} = \frac{\partial u^i}{\partial x^{rj}}$$

Agora, expressemos:

$$\underset{\sim}{\mathbf{u}} = \underset{\sim}{\mathbf{x}} - \underset{\sim}{\mathbf{x}}^r \implies \underset{\sim}{\mathbf{x}} = \underset{\sim}{\mathbf{u}} + \underset{\sim}{\mathbf{x}}^r$$

$$x^i = u^i + x^{ri}$$

Derivando ambos os lados da notação indicial acima em relação a $\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r$, temos:

$$\underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x^{rj}}}_{\underline{\mathbf{F}}} = \underbrace{\frac{\partial u^i}{\partial x^{rj}}}_{\nabla u_{ij}} + \underbrace{\frac{\partial x^{ri}}{\partial x^{rj}}}_{\delta_{ij}}$$

Ou seja, agora o gradiente das deformações está em função da transformação e sua forma matricial é:

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{r3}} \end{bmatrix}$$

Lembrete sobre operadores lineares:

$\underline{\mathbf{F}}$ e $\nabla \underset{\sim}{\mathbf{u}}$ são operadores lineares de $E \rightarrow E$. Seja $\underline{\mathbf{T}}$ um operador linear:

$$\underline{\mathbf{T}}(\alpha \underset{\sim}{\mathbf{x}} + \beta \underset{\sim}{\mathbf{y}}) = \alpha \underline{\mathbf{T}} \underset{\sim}{\mathbf{x}} + \beta \underline{\mathbf{T}} \underset{\sim}{\mathbf{y}},\ \forall\ \underset{\sim}{\mathbf{x}} \text{ e } \underset{\sim}{\mathbf{y}} \in E$$

//Inserir imagem

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{T}}} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

Obs: Para o curso, um operador linear tem a mesma função de um tensor (simplificando).

1.3 Tensor das Deformações de Green-Lagrange

//Inserir imagem

Onde $\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r$ é um versor, $\dfrac{d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r}{||d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r||} = 1$, ds^r é o comprimento infinitesimal de uma fibra na configuração de referência na direção de $\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r$ e ds é o comprimento dessa mesma fibra na configuração deformada. Os comprimentos são definidos como:

$$ds^r = ||d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r|| = (d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r \cdot d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r)^{\frac{1}{2}}$$

$$ds = ||d\underset{\sim}{\mathbf{x}}|| = (d\underset{\sim}{\mathbf{x}} \cdot d\underset{\sim}{\mathbf{x}})^{\frac{1}{2}}$$

Lembrando sobre operadores lineares: Seja $\underline{\mathbf{A}}$ um operador linear ou tensor, temos

$$\underset{\sim}{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{A}}\underset{\sim}{\mathbf{b}} = \underset{\sim}{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{A}}^T\underset{\sim}{\mathbf{a}},\ \forall\ \underset{\sim}{\mathbf{a}} \text{ e } \underset{\sim}{\mathbf{b}} \in E$$

Quando $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}^T$, $\underline{\mathbf{A}}$ é simétrico.

Exemplo: A *interpolação quadrática* ou *alongamento quadrático* é definida como:

$$Eq = \frac{1}{2}\frac{(ds)^2 - (ds^r)^2}{(ds^r)^2}$$

Sabendo que,

$$ds^2 = d\underset{\sim}{\mathbf{x}} \cdot d\underset{\sim}{\mathbf{x}} = \underbrace{\underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r}_{\underset{\sim}{\mathbf{v}}} \cdot \underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r$$

$$ds^2 = \underset{\sim}{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r$$

$$ds^2 = d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}^T\underset{\sim}{\mathbf{v}}$$

$$ds^2 = d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r$$

Logo,

$$Eq = \frac{1}{2}\frac{(d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r) - (d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r \cdot d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r)}{d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r \cdot d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r}$$

Lembrando que,

$$d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r = ||d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r||\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r = ds^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r$$

Então,

$$Eq = \frac{1}{2}\frac{(ds^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r) - (ds^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r \cdot ds^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r)}{ds^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r \cdot ds^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r}$$

$$Eq = \frac{1}{2}\frac{ds^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r \cdot (\underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{I}})ds^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r}{ds^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r \cdot ds^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r}$$

$$Eq = \frac{1}{2}[\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r \cdot (\underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{I}})\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r]$$

$$Eq = \underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r \cdot \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{I}})}_{\underline{\mathbf{E}}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r$$

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{I}})$$

$$Eq(\hat{\underset{\sim}{\mathbf{m}}}^r) = \hat{\underset{\sim}{\mathbf{m}}}^r \cdot \underline{\mathbf{E}}\hat{\underset{\sim}{\mathbf{m}}}^r$$

Onde $\underline{\mathbf{E}}$ é o Tensor das Deformações de Green-Lagrange e vale para qualquer magnitude de deslocamento. Algumas literaturas chamam de *finite displacement* os deslocamentos de qualquer magnitude.

Agora na notação de Einstein:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{ri}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{rj}} - \delta_{ij}\right)$$

Expressando os componentes de $\underline{\mathbf{E}}$ a partir do campo de deslocamentos:

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}[(\nabla\underset{\sim}{\mathbf{u}}^T + \underline{\mathbf{I}})(\nabla\underset{\sim}{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{I}}) - \underline{\mathbf{I}}]$$

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\nabla\underset{\sim}{\mathbf{u}}^T\nabla\underset{\sim}{\mathbf{u}} + \nabla\underset{\sim}{\mathbf{u}}^T + \nabla\underset{\sim}{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{I}})$$

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\nabla\underset{\sim}{\mathbf{u}} + \nabla\underset{\sim}{\mathbf{u}}^T + \nabla\underset{\sim}{\mathbf{u}}^T\nabla\underset{\sim}{\mathbf{u}})$$

Na notação de Einstein:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^{rj}} + \frac{\partial u^j}{\partial x^{ri}} + \underbrace{\frac{\partial u^k}{\partial x^{ri}}\frac{\partial u^k}{\partial x^{rj}}}_{*}\right)$$

Sendo $*$:

$$\frac{\partial u^k}{\partial x^{ri}}\frac{\partial u^k}{\partial x^{rj}} = \frac{\partial u^1}{\partial x^{ri}}\frac{\partial u^1}{\partial x^{rj}} + \frac{\partial u^2}{\partial x^{ri}}\frac{\partial u^2}{\partial x^{rj}} + \frac{\partial u^3}{\partial x^{ri}}\frac{\partial u^3}{\partial x^{rj}}$$

Acima, E_{ij} denota equações de compatibilidade; uma relação deslocamentos-deformações.