

1 Estudos das deformações

1.1 Considerações iniciais

- Configuração do sólido: posição ocupada pelos pontos em um determinado instante t ;
- Descrever a configuração deformada (V) a partir de uma configuração de referência (V^r);
- Considerando um conjunto de pontos da Geometria Euclidiana (E), e seja, $(\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3)$ uma base do espaço vetorial da geometria clássica.

Podemos definir $(0, \underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3)$ como um sistema de referência:

// Inserir imagem

Os vetores dos pontos de referência ($\underline{\mathbf{x}}^r$) e na configuração deformada ($\underline{\mathbf{x}}$) em relação aos versores da base podem ser expressos na notação de Einstein:

$$\underline{\mathbf{x}}^r = \underline{\mathbf{x}}^r - \underline{\mathbf{0}} = \sum_{i=1}^3 x^{ri} \underline{\mathbf{e}}_i = x^{r1} \underline{\mathbf{e}}_1 + x^{r2} \underline{\mathbf{e}}_2 + x^{r3} \underline{\mathbf{e}}_3$$

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{0}} = \sum_{i=1}^3 x^i \underline{\mathbf{e}}_i = x^1 \underline{\mathbf{e}}_1 + x^2 \underline{\mathbf{e}}_2 + x^3 \underline{\mathbf{e}}_3$$

Seja ψ uma função que associa a posição de cada ponto na configuração V^r a sua posição na configuração V . Tal aplicação é uma transformação de V^r em V .

$$x^1 = \hat{x}^1(x^{r1}, x^{r2}, x^{r3})$$

$$x^2 = \hat{x}^2(x^{r1}, x^{r2}, x^{r3})$$

$$x^3 = \hat{x}^3(x^{r1}, x^{r2}, x^{r3})$$

Aqui, o circunflexo denota *em função de*, i.e., a coordenada i da posição deformada está em função das coordenadas da posição de referência.

Exemplo: Considere um sólido cuja seção no plano $\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2$ é dado por:

//Inserir imagem

Caracterize os seguintes campos de deslocamento:

- a) Translação de corpo rígido de intensidade Δ na direção de $\underline{\mathbf{e}}_1$;
- b) Rotação de corpo rígido em torno de $\underline{\mathbf{e}}_3$ de intensidade φ .

Resolução:

a)

$$\underline{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}^r \implies \underline{\mathbf{x}} = \begin{cases} x^1 = x^{r1} + u_1 = x^{r1} + \Delta \\ x^2 = x^{r2} + u_2 = x^{r2} \\ x^3 = x^{r3} + u_3 = x^{r3} \end{cases}$$

b) //Inserir imagem

A configuração de referência:

$$x^{r1} = r \cdot \cos \theta$$

$$x^{r2} = r \cdot \sin \theta$$

$$x^{r3} = 0 \text{ (ou } x^{r3} \text{ para deixar genérico)}$$

A configuração deformada (a partir da imagem):

$$u^1 = r \cdot \cos(\varphi + \theta) - r \cdot \cos \theta$$

$$u^1 = r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta - r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta - r \cdot \cos \theta$$

$$u^2 = r \cdot \sin(\varphi + \theta) - r \cdot \sin \theta$$

$$u^2 = r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta + r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \theta$$

Substituindo as coordenadas de referência nas coordenadas deformadas:

$$u^1 = x^{r1} \cdot \cos \varphi - x^{r2} \cdot \sin \varphi - x^{r1}$$

$$u^2 = x^{r1} \cdot \sin \varphi + x^{r2} \cdot \cos \varphi - x^{r2}$$

$$u^3 = 0$$

Como sabemos que $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}}^r + \underline{\mathbf{u}}$, temos:

$$\begin{cases} x^1 = x^{r1} \cdot \cos \varphi - x^{r2} \cdot \sin \varphi \\ x^2 = x^{r1} \cdot \sin \varphi + x^{r2} \cdot \cos \varphi \\ x^3 = x^{r3} \end{cases}$$

Podemos escrever também na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^{r1} \\ x^{r2} \\ x^{r3} \end{pmatrix}$$

1.2 Deformação Normal e por Cisalhamento

//Inserir imagem

O assunto agora são fibras; como as fibras sofrem deformação. Seja $d\underline{\mathbf{x}}^r$ o vetor infinitesimal que representa uma fibra a partir do ponto $\underline{\mathbf{x}}^r$; $d\underline{\mathbf{x}}$ o vetor infinitesimal da mesma fibra agora na configuração deformada, partindo do ponto $\underline{\mathbf{x}}$. Para que o vetor $d\underline{\mathbf{x}}^r$

deforme e se transforme em $d\mathbf{\tilde{x}}$, deve ocorrer uma transformação que depende de $\mathbf{\tilde{x}}^r + d\mathbf{\tilde{x}}^r$, *i.e.*, uma transformação $\mathbf{\underline{u}}(\mathbf{\tilde{x}}^r + d\mathbf{\tilde{x}}^r)$.

Algumas relações podem ser estabelecidas a partir da imagem acima, sendo:

$$\mathbf{\underline{u}}(\mathbf{\tilde{x}}^r) = d\mathbf{\tilde{x}}^r + \mathbf{\underline{u}}(\mathbf{\tilde{x}}^r + d\mathbf{\tilde{x}}^r)$$

E a fibra na configuração deformada:

$$d\mathbf{\tilde{x}} = d\mathbf{\tilde{x}}^r + \mathbf{\underline{u}}(\mathbf{\tilde{x}}^r + d\mathbf{\tilde{x}}^r) - \mathbf{\underline{u}}(\mathbf{\tilde{x}}^r)$$

A equação acima na forma de componentes:

$$dx^i = dx^{ri} + u^i(x^{r1} + dx^{r1}, x^{r2} + dx^{r2}, x^{r3} + dx^{r3}) - u^i(x^{r1}, x^{r2}, x^{r3})$$

Lembrando de cálculo com múltiplas variáveis:

$$u^i(x^{r1} + dx^{r1}, x^{r2} + dx^{r2}, x^{r3} + dx^{r3}) - u^i(x^{r1}, x^{r2}, x^{r3}) = \frac{\partial u^i}{\partial x^{r1}} dx^{r1} + \frac{\partial u^i}{\partial x^{r2}} dx^{r2} + \frac{\partial u^i}{\partial x^{r3}} dx^{r3}$$

Para $i = 1, 2$ e 3 . Essa iteração diz que cada coordenada i depende de acontecimentos nas 3 dimensões do espaço euclidiano.

Reescrevendo na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{Bmatrix}}_{d\mathbf{\tilde{x}}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} dx^{r1} \\ dx^{r2} \\ dx^{r3} \end{Bmatrix}}_{d\mathbf{\tilde{x}}^r} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^1}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^1}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^2}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^2}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial u^3}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^3}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^3}{\partial x^{r3}} \end{bmatrix}}_{\nabla \mathbf{\underline{u}} = \mathbf{\underline{L}}} \underbrace{\begin{Bmatrix} dx^{r1} \\ dx^{r2} \\ dx^{r3} \end{Bmatrix}}_{d\mathbf{\tilde{x}}^r}$$

Onde $\nabla \mathbf{\underline{u}}$ é o **gradiente dos deslocamentos**.

Logo,

$$d\mathbf{\tilde{x}} = d\mathbf{\tilde{x}}^r + \nabla \mathbf{\underline{u}} d\mathbf{\tilde{x}}^r$$

Colocando $d\mathbf{\tilde{x}}^r$ em evidência, temos:

$$d\mathbf{\tilde{x}} = \underbrace{(\mathbf{\underline{I}} + \nabla \mathbf{\underline{u}})}_{\mathbf{\underline{F}}} d\mathbf{\tilde{x}}^r$$

Onde $\underline{\mathbf{F}}$ é o **gradiente das deformações**.

Portanto, temos:

$$d\mathbf{\underline{x}} = \underline{\mathbf{F}} d\mathbf{\underline{x}}^r \quad (1)$$

Ou seja, a fibra deformada agora pode ser obtida a partir do gradiente dos deslocamentos ($\nabla \mathbf{\underline{u}}$) e também a partir do gradiente das deformações ($\underline{\mathbf{F}}$).

O gradiente das deformações pode ser reescrito como:

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u^1}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^1}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^1}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^{r1}} & 1 + \frac{\partial u^2}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^2}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial u^3}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^3}{\partial x^{r2}} & 1 + \frac{\partial u^3}{\partial x^{r3}} \end{bmatrix}$$

Ou ainda, usando notação indicial de Einstein:

$$F_{ij} = \nabla u_{ij} + \delta_{ij}$$

$$\text{Onde } \delta_{ij} \text{ é o delta de Kronecker, i.e.: } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

E em notação indicial, temos:

$$\nabla u_{ij} = \frac{\partial u^i}{\partial x^{rj}}$$

Agora, expressemos:

$$\mathbf{\underline{u}} = \mathbf{\underline{x}} - \mathbf{\underline{x}}^r \implies \mathbf{\underline{x}} = \mathbf{\underline{u}} + \mathbf{\underline{x}}^r$$

$$x^i = u^i + x^{ri}$$

Derivando ambos os lados da notação indicial acima em relação a $\mathbf{\underline{x}}^r$, temos:

$$\underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x^{rj}}}_{\underline{\mathbf{F}}} = \underbrace{\frac{\partial u^i}{\partial x^{rj}}}_{\nabla u_{ij}} + \underbrace{\frac{\partial x^{ri}}{\partial x^{rj}}}_{\delta_{ij}}$$

Ou seja, agora o gradiente das deformações está em função da transformação e sua forma matricial é:

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{r3}} \end{bmatrix}$$

Lembrete sobre operadores lineares:

$\underline{\mathbf{F}}$ e $\nabla \underline{\mathbf{u}}$ são operadores lineares de $E \rightarrow E$. Seja $\underline{\mathbf{T}}$ um operador linear:

$$\underline{\mathbf{T}}(\alpha \underline{\mathbf{x}} + \beta \underline{\mathbf{y}}) = \alpha \underline{\mathbf{T}}\underline{\mathbf{x}} + \beta \underline{\mathbf{T}}\underline{\mathbf{y}}, \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \text{ e } \underline{\mathbf{y}} \in E$$

//Inserir imagem

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{T}}} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

Obs: Para o curso, um operador linear tem a mesma função de um tensor (simplificando).

1.3 Tensor das Deformações de Green-Lagrange

//Inserir imagem

Onde $\hat{\underline{\mathbf{m}}}^r$ é um versor, $\frac{d\underline{\mathbf{x}}^r}{||d\underline{\mathbf{x}}^r||} = 1$, ds^r é o comprimento infinitesimal de uma fibra na configuração de referência na direção de $\hat{\underline{\mathbf{m}}}^r$ e ds é o comprimento dessa mesma fibra na configuração deformada. Os comprimentos são definidos como:

$$ds^r = ||d\underline{\mathbf{x}}^r|| = (d\underline{\mathbf{x}}^r \cdot d\underline{\mathbf{x}}^r)^{\frac{1}{2}}$$

$$ds = ||d\underline{\mathbf{x}}|| = (d\underline{\mathbf{x}} \cdot d\underline{\mathbf{x}})^{\frac{1}{2}}$$

Lembrando sobre operadores lineares: Seja $\underline{\mathbf{A}}$ um operador linear ou tensor, temos

$$\underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{a}}, \forall \underline{\mathbf{a}} \text{ e } \underline{\mathbf{b}} \in E$$

Quando $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}^T$, $\underline{\mathbf{A}}$ é simétrico.

Exemplo: A *interpolação quadrática* ou *alongamento quadrático* é definida como:

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2} \frac{(ds)^2 - (ds^r)^2}{(ds^r)^2}$$

Sabendo que,

$$ds^2 = d\underline{\mathbf{x}} \cdot d\underline{\mathbf{x}} = \underbrace{\underline{\mathbf{F}} d\underline{\mathbf{x}}^r}_{\underline{\mathbf{v}}} \cdot \underline{\mathbf{F}} d\underline{\mathbf{x}}^r$$

$$ds^2 = \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{F}} d\underline{\mathbf{x}}^r$$

$$ds^2 = d\underline{\mathbf{x}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{v}}$$

$$ds^2 = d\underline{\mathbf{x}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}} d\underline{\mathbf{x}}^r$$

Logo,

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2} \frac{(d\underline{\mathbf{x}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}} d\underline{\mathbf{x}}^r) - (d\underline{\mathbf{x}}^r \cdot d\underline{\mathbf{x}}^r)}{d\underline{\mathbf{x}}^r \cdot d\underline{\mathbf{x}}^r}$$

Lembrando que,

$$d\underline{\mathbf{x}}^r = \|d\underline{\mathbf{x}}^r\| \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r = ds^r \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r$$

Então,

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2} \frac{(ds^r \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}} d\underline{\mathbf{x}}^r) - (ds^r \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r \cdot ds^r \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r)}{ds^r \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r \cdot ds^r \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r}$$

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2} \frac{ds^r \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r \cdot (\underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{I}}) ds^r \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r}{ds^r \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r \cdot ds^r \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r}$$

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2} [\hat{\underline{\mathbf{m}}}^r \cdot (\underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{I}}) \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r]$$

$$\varepsilon_q = \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r \cdot \underbrace{\frac{1}{2} (\underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{I}})}_{\underline{\mathbf{E}}} \hat{\underline{\mathbf{m}}}^r$$

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{F}}^T \underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{I}})$$

$$\varepsilon_q(\hat{\mathbf{m}}^r) = \hat{\mathbf{m}}^r \cdot \underline{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{m}}^r$$

Onde $\underline{\mathbf{E}}$ é o Tensor das Deformações de Green-Lagrange e vale para qualquer magnitude de deslocamento. Algumas literaturas chamam de *finite displacement* os deslocamentos de qualquer magnitude.

Agora na notação de Einstein:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{ri}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{rj}} - \delta_{ij} \right)$$

Expressando os componentes de $\underline{\mathbf{E}}$ a partir do campo de deslocamentos:

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}[(\nabla \underline{\mathbf{u}}^T + \underline{\mathbf{I}})(\nabla \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{I}}) - \underline{\mathbf{I}}]$$

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{\mathbf{u}}^T \nabla \underline{\mathbf{u}} + \nabla \underline{\mathbf{u}}^T + \nabla \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{I}})$$

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{\mathbf{u}} + \nabla \underline{\mathbf{u}}^T + \nabla \underline{\mathbf{u}}^T \nabla \underline{\mathbf{u}})$$

Na notação de Einstein:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^{rj}} + \frac{\partial u^j}{\partial x^{ri}} + \underbrace{\frac{\partial u^k}{\partial x^{ri}} \frac{\partial u^k}{\partial x^{rj}}}_* \right)$$

Sendo *:

$$\frac{\partial u^k}{\partial x^{ri}} \frac{\partial u^k}{\partial x^{rj}} = \frac{\partial u^1}{\partial x^{ri}} \frac{\partial u^1}{\partial x^{rj}} + \frac{\partial u^2}{\partial x^{ri}} \frac{\partial u^2}{\partial x^{rj}} + \frac{\partial u^3}{\partial x^{ri}} \frac{\partial u^3}{\partial x^{rj}}$$

Acima, E_{ij} denota equações de compatibilidade; uma relação deslocamentos-deformações.

1.4 Medidas de deformação/alongamento

- Estiramento ou *stretch*:

$$\lambda = \frac{ds}{ds^r}$$

- Alongamento linear:

$$\varepsilon_l = \frac{ds - ds^r}{ds^r}$$

- Alongamento quadrático:

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2} \frac{(ds)^2 - (ds^r)^2}{(ds^r)^2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{ds}{ds^r} \right)^2 - 1 \right] = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1)$$

- Alongamento logarítmico ou de Henry:

$$\varepsilon_n = \ln \left(\frac{ds}{ds^r} \right)$$

- Alongamento hiperbólico ou de Reiner:

$$\varepsilon_h = \frac{ds^r}{ds}$$

- Alongamento hiperbólico quadrático ou de Almansi:

$$\varepsilon_{hq} = \frac{1}{2} \frac{(ds^r)^2 - (ds)^2}{(ds)^2}$$

1.4.1 Relação entre alongamentos quadráticos e lineares

Para o alongamento quadrático:

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1)$$

$$\lambda^2 = 1 + 2\varepsilon_q$$

$$\lambda = \sqrt{1 + 2\varepsilon_q}$$

$$\lambda(\hat{\mathbf{m}}^r) = \sqrt{1 + 2(\hat{\mathbf{m}}^r \cdot \underline{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{m}}^r)}$$

Para o alongamento linear:

$$\varepsilon_l = \lambda - 1$$

$$\varepsilon_l(\hat{\mathbf{m}}^r) = \sqrt{1 + 2(\hat{\mathbf{m}}^r \cdot \underline{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{m}}^r)} - 1$$

$$\varepsilon_l(\hat{\mathbf{m}}^r) = \sqrt{1 + 2\varepsilon_q} - 1$$

1.5 Variação do ângulo entre fibras (distorção)

//Inserir imagem

- $d\mathbf{\underline{a}}^r$ e $d\mathbf{\underline{b}}^r$ são inicialmente ortogonais;
- $\mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{a}}^r$ tem a mesma direção de $d\mathbf{\underline{a}}$ (hipótese);
- $\hat{\mathbf{a}}$ e $\hat{\mathbf{b}}$ são versores.

Lembrando que,

$$d\mathbf{\underline{a}} = \mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{a}}^r \text{ e } d\mathbf{\underline{b}} = \mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{b}}^r$$

A fim de encontrar novas relações, podemos definir o produto escalar,

$$d\mathbf{\underline{a}} \cdot d\mathbf{\underline{b}} = \mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{a}}^r \cdot \mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{b}}^r$$

$$d\mathbf{\underline{a}} \cdot d\mathbf{\underline{b}} = \|\mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{a}}^r\| \|\mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{b}}^r\| \cos \theta$$

Logo,

$$\cos \theta = \sin \gamma = \frac{\mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{a}}^r \cdot \mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{b}}^r}{\|\mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{a}}^r\| \|\mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{b}}^r\|} \quad (2)$$

E,

$$d\mathbf{\underline{a}}^r = d\mathbf{a}^r \hat{\mathbf{a}}^r$$

$$d\mathbf{\underline{b}}^r = d\mathbf{b}^r \hat{\mathbf{b}}^r$$

$$\|\mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{a}}^r\| = \sqrt{\mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{a}}^r \cdot \mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{a}}^r}$$

$$\|\mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{b}}^r\| = \sqrt{\mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{b}}^r \cdot \mathbf{\underline{F}}d\mathbf{\underline{b}}^r}$$

Substituindo as 4 relações acima na Equação (2),

$$\sin \gamma = \frac{d\mathbf{\underline{b}}^r \cdot \mathbf{\underline{F}}^T \mathbf{\underline{F}} d\mathbf{\underline{a}}^r}{\sqrt{d\mathbf{\underline{a}}^r \cdot \mathbf{\underline{F}}^T \mathbf{\underline{F}} d\mathbf{\underline{a}}^r} \sqrt{d\mathbf{\underline{b}}^r \cdot \mathbf{\underline{F}}^T \mathbf{\underline{F}} d\mathbf{\underline{b}}^r}}$$

$$\begin{aligned}
\sin \gamma &= \frac{(d\mathbf{b}^r \hat{\mathbf{b}}^r) \cdot [\mathbf{F}^T \mathbf{F}(d\mathbf{a}^r \hat{\mathbf{a}}^r)]}{\sqrt{(d\mathbf{a}^r \hat{\mathbf{a}}^r) \cdot [\mathbf{F}^T \mathbf{F}(d\mathbf{a}^r \hat{\mathbf{a}}^r)]} \sqrt{(d\mathbf{b}^r \hat{\mathbf{b}}^r) \cdot [\mathbf{F}^T \mathbf{F}(d\mathbf{b}^r \hat{\mathbf{b}}^r)]}} \\
\sin \gamma &= \frac{(d\mathbf{b}^r d\mathbf{a}^r)[\hat{\mathbf{b}}^r \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \hat{\mathbf{a}}^r]}{(d\mathbf{b}^r d\mathbf{a}^r) \sqrt{\hat{\mathbf{a}}^r \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \hat{\mathbf{a}}^r} \sqrt{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \hat{\mathbf{b}}^r}} \\
\sin \gamma &= \frac{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \hat{\mathbf{a}}^r}{\sqrt{\hat{\mathbf{a}}^r \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \hat{\mathbf{a}}^r} \sqrt{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \hat{\mathbf{b}}^r}} \tag{3}
\end{aligned}$$

Lembrando que,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \\
\mathbf{F}^T \mathbf{F} &= 2\mathbf{E} + \mathbf{I}
\end{aligned}$$

Substituindo a expressão acima na Equação (3),

$$\begin{aligned}
\sin \gamma &= \frac{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot (2\mathbf{E} + \mathbf{I})\hat{\mathbf{a}}^r}{\sqrt{\hat{\mathbf{a}}^r \cdot (2\mathbf{E} + \mathbf{I})\hat{\mathbf{a}}^r} \sqrt{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot (2\mathbf{E} + \mathbf{I})\hat{\mathbf{b}}^r}} \\
(2\mathbf{E} + \mathbf{I})\hat{\mathbf{a}}^r &= 2\mathbf{E}\hat{\mathbf{a}}^r + \mathbf{I}\hat{\mathbf{a}}^r = 2\mathbf{E}\hat{\mathbf{a}}^r + \hat{\mathbf{a}}^r \\
\sin \gamma &= \frac{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot (2\mathbf{E}\hat{\mathbf{a}}^r + \hat{\mathbf{a}}^r)}{\sqrt{\hat{\mathbf{a}}^r \cdot (2\mathbf{E}\hat{\mathbf{a}}^r + \hat{\mathbf{a}}^r)} \sqrt{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot (2\mathbf{E}\hat{\mathbf{b}}^r + \hat{\mathbf{b}}^r)}} \\
\sin \gamma &= \frac{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot 2\mathbf{E}\hat{\mathbf{a}}^r + \hat{\mathbf{b}}^r \cdot \hat{\mathbf{a}}^r}{\sqrt{\hat{\mathbf{a}}^r \cdot 2\mathbf{E}\hat{\mathbf{a}}^r + \hat{\mathbf{a}}^r \cdot \hat{\mathbf{a}}^r} \sqrt{\hat{\mathbf{b}}^r \cdot 2\mathbf{E}\hat{\mathbf{b}}^r + \hat{\mathbf{b}}^r \cdot \hat{\mathbf{b}}^r}}
\end{aligned}$$

Por fim,

$$\sin \gamma(\hat{\mathbf{a}}^r, \hat{\mathbf{b}}^r) = \frac{2(\hat{\mathbf{b}}^r \cdot \mathbf{E}\hat{\mathbf{a}}^r)}{\sqrt{2(\hat{\mathbf{a}}^r \cdot \mathbf{E}\hat{\mathbf{a}}^r) + 1} \sqrt{2(\hat{\mathbf{b}}^r \cdot \mathbf{E}\hat{\mathbf{b}}^r) + 1}} \tag{4}$$

Onde γ é a distorção, *i.e.*, a variação de ângulo entre duas fibras inicialmente ortogonais.

1.6 Interpretação de $\underline{\mathbf{E}}$

Partindo-se de uma base ortonormal $(\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3)$, o Tensor das Deformações de Green-Lagrange é definido como,

$$\underline{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix}$$

Lembrando do alongamento quadrático, por exemplo, de uma fibra alinhada na direção de $\underline{\hat{\mathbf{e}}}_1$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_q(\underline{\hat{\mathbf{e}}}_1) &= \underline{\hat{\mathbf{e}}}_1 \cdot \underline{\mathbf{E}} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_1 \\ \varepsilon_q(\underline{\hat{\mathbf{e}}}_1) &= \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \varepsilon_q(\underline{\hat{\mathbf{e}}}_1) &= \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{Bmatrix} = E_{11} \end{aligned}$$

Da mesma forma, uma fibra na direção de $\underline{\hat{\mathbf{e}}}_2$ ou $\underline{\hat{\mathbf{e}}}_3$,

$$\varepsilon_q(\underline{\hat{\mathbf{e}}}_2) = E_{22}$$

$$\varepsilon_q(\underline{\hat{\mathbf{e}}}_3) = E_{33}$$

Ou seja, a diagonal de $\underline{\mathbf{E}}$ guarda o alongamento quadrático. E quanto à distorção? Escolhendo dois vetores da base ortonormal quaisquer, por exemplo, $\underline{\hat{\mathbf{e}}}_1$ e $\underline{\hat{\mathbf{e}}}_2$ e lembrando da Equação (4),

$$\sin \gamma(\underline{\hat{\mathbf{e}}}_1, \underline{\hat{\mathbf{e}}}_2) = \frac{2(\underline{\hat{\mathbf{e}}}_2 \cdot \underline{\mathbf{E}} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_1)}{\sqrt{2(\underline{\hat{\mathbf{e}}}_1 \cdot \underline{\mathbf{E}} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_1) + 1} \sqrt{2(\underline{\hat{\mathbf{e}}}_2 \cdot \underline{\mathbf{E}} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_2) + 1}} \quad (5)$$

Desenvolvendo o produto escalar no numerador da expressão acima na equação do alongamento quadrático,

$$\varepsilon_q = \underline{\hat{\mathbf{e}}}_2 \cdot \underline{\mathbf{E}} \underline{\hat{\mathbf{e}}}_1$$

$$\varepsilon_q = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_q = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{21} \\ E_{31} \end{Bmatrix} = E_{21}$$

Agora, invertendo os versores escolhidos para a Equação (4) e como o denominador continuará o mesmo, só o numerador sofrerá alteração. Desenvolvendo-o da mesma forma na equação do alongamento quadrático,

$$\varepsilon_q = \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \underline{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{e}}_2$$

$$\varepsilon_q = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_q = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} E_{12} \\ E_{22} \\ E_{32} \end{Bmatrix} = E_{12}$$

Ou seja, como a distorção entre esses versores deve ser igual, apenas invertendo os versores utilizados pode-se chegar a conclusão de que $E_{21} = E_{12}$. Isso significa que $\underline{\mathbf{E}}$ é simétrico.

Pode-se reescrever a Equação (5) como,

$$\sin \gamma(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2) = \frac{2E_{21}}{\sqrt{2E_{11} + 1} \sqrt{2E_{22} + 1}}$$