1 Estudos das deformações

1.1 Considerações iniciais

- Configuração do sólido: posição ocupada pelos pontos em um determinado instante t;
- Descrever a configuração deformada (V) a partir de uma configuração de referência (V^r);
- Considerando um conjunto de pontos da Geometria Euclidiana (E), e seja, $(\underset{\sim}{e_1},\ \underset{\sim}{e_2},\ \underset{\sim}{e_3})$ uma base do espaço vetorial da geometria clássica.

Podemos definir $(0,\ \underset{\sim}{e_1},\ \underset{\sim}{e_2},\ \underset{\sim}{e_3})$ como um sistema de referência:

// Inserir imagem

Os vetores dos pontos de referência ($\underset{\sim}{x^r}$) e na configuração deformada ($\underset{\sim}{x}$) em relação aos versores da base podem ser expressos na notação de Einstein:

$$\underset{\sim}{x^r} = x^r - 0 = \sum_{i=1}^{3} x^{ri}\underset{\sim}{e_i} = x^{r1}\underset{\sim}{e_1} + x^{r2}\underset{\sim}{e_2} + x^{r3}\underset{\sim}{e_3}$$

$$\underset{\sim}{x} = x - 0 = \sum_{i=1}^{3} x^{i}\underset{\sim}{e_i} = x^{1}\underset{\sim}{e_1} + x^{2}\underset{\sim}{e_2} + x^{3}\underset{\sim}{e_3}$$

Seja ψ uma função que associa a posição de cada ponto na configuração V^r a sua posição na configuração V. Tal aplicação é uma transformação de V^r em V.

$$x^1 = \hat{x}^1(x^{r1},\ x^{r2},\ x^{r3})$$

$$x^2 = \hat{x}^2(x^{r1},\ x^{r2},\ x^{r3})$$

$$x^3 = \hat{x}^3(x^{r1},\ x^{r2},\ x^{r3})$$

Aqui, o circunflexo denota *em função de*, *i.e.*, a coordenada i da posição deformada está em função das coordenadas da posição de referência.

Exemplo: Considere um sólido cuja seção no plano $\underset{\sim}{e_1}$, $\underset{\sim}{e_2}$ é dado por:

//Inserir imagem

Caracterize os seguintes campos de deslocamento:

a) Translação de corpo rígido de intensidade Δ na direção de $\underset{\sim}{e_1}$;

b) Rotação de corpo rígido em torno de $\underset{\sim}{e_3}$ de intensidade φ.

Resolução:

a)

$$\underset{\sim}{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}^r \implies \underset{\sim}{x} = \begin{cases} x^1 = x^{r1} + u_1 = x^{r1} + \Delta \\ x^2 = x^{r2} + u_2 = x^{r2} \\ x^3 = x^{r3} + u_3 = x^{r3} \end{cases}$$

b) //Inserir imagem

A configuração de referência:

$$x^{r1} = r \cdot \cos\theta$$

$$x^{r2} = r \cdot \sin\theta$$

$$x^{r3} = 0 \text{ (ou } x^{r3} \text{ para deixar genérico)}$$

A configuração deformada (a partir da imagem):

$$u^1 = r \cdot \cos(\varphi + \theta) - r \cdot \cos\theta$$

$$u^1 = r \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta - r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta - r \cdot \cos\theta$$

$$u^2 = r \cdot \sin(\varphi + \theta) - r \cdot \sin\theta$$

$$u^2 = r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta + r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\theta$$

Substituindo as coordenadas de referência nas coordenadas deformadas:

$$u^1 = x^{r1} \cdot \cos\varphi - x^{r2} \cdot \sin\varphi - x^{r1}$$

$$u^2 = x^{r1} \cdot \sin\varphi + x^{r2} \cdot \cos\varphi - x^{r2}$$

$$u^3 = 0$$

Como sabemos que $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}^r + \underset{\sim}{u}$, temos:

$$\begin{cases} x^1 = x^{r1} \cdot \cos\varphi - x^{r2} \cdot \sin\varphi \\ x^2 = x^{r1} \cdot \sin\varphi + x^{r2} \cdot \cos\varphi \\ x^3 = x^{r3} \end{cases}$$

Podemos escrever também na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^{r1} \\ x^{r2} \\ x^{r3} \end{Bmatrix}$$

1.2 Deformação Normal e por Cisalhamento

//Inserir imagem

O assunto agora são fibras; como as fibras sofrem deformação. Seja $d\underset{\sim}{x}^r$ o vetor infinitesimal que representa uma fibra a partir do ponto x^r; $d\underset{\sim}{x}$ o vetor infinitesimal da mesma fibra agora na configuração deformada, partindo do ponto x. Para que o vetor $d\underset{\sim}{x}^r$

deforme e se transforme em $d\underset{\sim}{x}$, deve ocorrer uma transformação que depende de $\underset{\sim}{x}^r + d\underset{\sim}{x}^r$, *i.e.*, uma transformação $\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x}^r + d\underset{\sim}{x}^r)$.

Algumas relaçõe podem ser estabelecidas a partir da imagem acima, sendo:

$$\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x}^r) = d\underset{\sim}{x}^r + \underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x}^r + d\underset{\sim}{x}^r)$$

E a fibra na configuração deformada:

$$d\underset{\sim}{x} = d\underset{\sim}{x}^r + \underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x}^r + d\underset{\sim}{x}^r) - \underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x}^r)$$

A equação acima na forma de componentes:

$$dx^i = dx^{ri} + u^i(x^{r1} + dx^{r1},\ x^{r2} + dx^{r2},\ x^{r3} + dx^{r3}) - u^i(x^{r1},\ x^{r2},\ x^{r3})$$

Lembrando de cálculo com múltiplas variáveis:

$$u^i(x^{r1}+dx^{r1},\ x^{r2}+dx^{r2},\ x^{r3}+dx^{r3}) - u^i(x^{r1},\ x^{r2},\ x^{r3}) = \frac{\partial u^i}{\partial x^{r1}}dx^{r1} + \frac{\partial u^i}{\partial x^{r2}}dx^{r2} + \frac{\partial u^i}{\partial x^{r3}}dx^{r3}$$

Para $i = 1,\ 2$ e 3. Essa iteração diz que cada coordenada i depende de acontecimentos nas 3 dimensões do espaço euclidiano.

Reescrevendo na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{Bmatrix}}_{d\underset{\sim}{x}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} dx^{r1} \\ dx^{r2} \\ dx^{r3} \end{Bmatrix}}_{d\underset{\sim}{x}^r} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^1}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^1}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^2}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^2}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial u^3}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^3}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^3}{\partial x^{r3}} \end{bmatrix}}_{\nabla \underset{\sim}{u} = \underline{L}} \underbrace{\begin{Bmatrix} dx^{r1} \\ dx^{r2} \\ dx^{r3} \end{Bmatrix}}_{d\underset{\sim}{x}^r}$$

Onde $\nabla\underset{\sim}{u}$ é o **gradiente dos deslocamentos**.

Logo,

$$d\underset{\sim}{x} = d\underset{\sim}{x}^r + \nabla\underset{\sim}{u}\, d\underset{\sim}{x}^r$$

Colocando $d\underset{\sim}{x}^r$ em evidência, temos:

$$d\underset{\sim}{x} = \underbrace{(\underline{I} + \nabla\underset{\sim}{u})}_{\underline{F}}\, d\underset{\sim}{x}^r$$

Onde $\underline{F}$ é o **gradiente das deformações**.

Portanto, temos:

$$d\underset{\sim}{x} = \underline{F}\, d\underset{\sim}{x}^r \tag{1}$$

Ou seja, a fibra deformada agora pode ser obtida a partir do gradiente dos deslocamentos ($\nabla \underset{\sim}{u}$) e também a partir do gradiente das deformações ($\underline{F}$).

O gradiente das deformações pode ser reescrito como:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u^1}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^1}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^1}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^{r1}} & 1 + \frac{\partial u^2}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^2}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial u^3}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^3}{\partial x^{r2}} & 1 + \frac{\partial u^3}{\partial x^{r3}} \end{bmatrix}$$

Ou ainda, usando notação indicial de Einstein:

$$F_{ij} = \nabla u_{ij} + \delta_{ij}$$

Onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, *i.e.*: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

E em notação indicial, temos:

$$\nabla u_{ij} = \frac{\partial u^i}{\partial x^{rj}}$$

Agora, expressemos:

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}^r \implies \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{x}^r$$

$$x^i = u^i + x^{ri}$$

Derivando ambos os lados da notação indicial acima, temos:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{rj}} = \frac{\partial u^i}{\partial x^{rj}} + \underbrace{\frac{\partial x^{ri}}{\partial x^{rj}}}_{\delta_{ij}}$$