1 Estudos das deformações

1.1 Considerações iniciais

- Configuração do sólido: posição ocupada pelos pontos em um determinado instante t;
- Descrever a configuração deformada (V) a partir de uma configuração de referência (V^r);
- Considerando um conjunto de pontos da Geometria Euclidiana (E), e seja, $(\underset{\sim}{\mathbf{e_1}},\ \underset{\sim}{\mathbf{e_2}},\ \underset{\sim}{\mathbf{e_3}})$ uma base do espaço vetorial da geometria clássica.

Podemos definir $(0,\ \underset{\sim}{\mathbf{e_1}},\ \underset{\sim}{\mathbf{e_2}},\ \underset{\sim}{\mathbf{e_3}})$ como um sistema de referência:

// Inserir imagem

Os vetores dos pontos de referência $(\underset{\sim}{\mathbf{x^r}})$ e na configuração deformada $(\underset{\sim}{\mathbf{x}})$ em relação aos versores da base podem ser expressos na notação de Einstein:

$$\underset{\sim}{\mathbf{x^r}} = \underset{\sim}{\mathbf{x^r}} - \underset{\sim}{\mathbf{0}} = \sum_{i=1}^{3} x^{ri}\underset{\sim}{\mathbf{e_i}} = x^{r1}\underset{\sim}{\mathbf{e_1}} + x^{r2}\underset{\sim}{\mathbf{e_2}} + x^{r3}\underset{\sim}{\mathbf{e_3}}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{x}} = \underset{\sim}{\mathbf{x}} - \underset{\sim}{\mathbf{0}} = \sum_{i=1}^{3} x^{i}\underset{\sim}{\mathbf{e_i}} = x^{1}\underset{\sim}{\mathbf{e_1}} + x^{2}\underset{\sim}{\mathbf{e_2}} + x^{3}\underset{\sim}{\mathbf{e_3}}$$

Seja ψ uma função que associa a posição de cada ponto na configuração V^r a sua posição na configuração V. Tal aplicação é uma transformação de V^r em V.

$$x^1 = \hat{x}^1(x^{r1},\ x^{r2},\ x^{r3})$$

$$x^2 = \hat{x}^2(x^{r1},\ x^{r2},\ x^{r3})$$

$$x^3 = \hat{x}^3(x^{r1},\ x^{r2},\ x^{r3})$$

Aqui, o circunflexo denota *em função de*, *i.e.*, a coordenada i da posição deformada está em função das coordenadas da posição de referência.

Exemplo: Considere um sólido cuja seção no plano $\underset{\sim}{\mathbf{e_1}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{e_2}}$ é dado por:

//Inserir imagem

Caracterize os seguintes campos de deslocamento:

a) Translação de corpo rígido de intensidade Δ na direção de $\underset{\sim}{\mathbf{e_1}}$;

b) Rotação de corpo rígido em torno de $\underset{\sim}{\mathbf{e_3}}$ de intensidade φ.

Resolução:

a)

$$\underset{\sim}{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{u}} = \underset{\sim}{\mathbf{x}} - \underset{\sim}{\mathbf{x}}^{\mathbf{r}} \implies \underset{\sim}{\mathbf{x}} = \begin{cases} x^1 = x^{r1} + u_1 = x^{r1} + \Delta \\ x^2 = x^{r2} + u_2 = x^{r2} \\ x^3 = x^{r3} + u_3 = x^{r3} \end{cases}$$

b) //Inserir imagem

A configuração de referência:

$$x^{r1} = r \cdot \cos\theta$$

$$x^{r2} = r \cdot \sin\theta$$

$$x^{r3} = 0 \text{ (ou } x^{r3} \text{ para deixar genérico)}$$

A configuração deformada (a partir da imagem):

$$u^1 = r \cdot \cos(\varphi + \theta) - r \cdot \cos\theta$$

$$u^1 = r \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta - r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta - r \cdot \cos\theta$$

$$u^2 = r \cdot \sin(\varphi + \theta) - r \cdot \sin\theta$$

$$u^2 = r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta + r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\theta$$

Substituindo as coordenadas de referência nas coordenadas deformadas:

$$u^1 = x^{r1} \cdot \cos\varphi - x^{r2} \cdot \sin\varphi - x^{r1}$$

$$u^2 = x^{r1} \cdot \sin\varphi + x^{r2} \cdot \cos\varphi - x^{r2}$$

$$u^3 = 0$$

Como sabemos que $\underset{\sim}{\mathbf{x}} = \underset{\sim}{\mathbf{x}}^{\mathbf{r}} + \underset{\sim}{\mathbf{u}}$, temos:

$$\begin{cases} x^1 = x^{r1} \cdot \cos\varphi - x^{r2} \cdot \sin\varphi \\ x^2 = x^{r1} \cdot \sin\varphi + x^{r2} \cdot \cos\varphi \\ x^3 = x^{r3} \end{cases}$$

Podemos escrever também na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^{r1} \\ x^{r2} \\ x^{r3} \end{Bmatrix}$$

1.2 Deformação Normal e por Cisalhamento

//Inserir imagem

O assunto agora são fibras; como as fibras sofrem deformação. Seja $d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r$ o vetor infinitesimal que representa uma fibra a partir do ponto $\underset{\sim}{\mathbf{x}}^{\mathbf{r}}$; $d\underset{\sim}{\mathbf{x}}$ o vetor infinitesimal da mesma fibra agora na configuração deformada, partindo do ponto $\underset{\sim}{\mathbf{x}}$. Para que o vetor $d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r$

deforme e se transforme em $d\underset{\sim}{\mathbf{x}}$, deve ocorrer uma transformação que depende de $\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r + d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r$, *i.e.*, uma transformação $\underset{\sim}{\mathbf{u}}(\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r + d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r)$.

Algumas relações podem ser estabelecidas a partir da imagem acima, sendo:

$$\underset{\sim}{\mathbf{u}}(\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r) = d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r + \underset{\sim}{\mathbf{u}}(\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r + d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r)$$

E a fibra na configuração deformada:

$$d\underset{\sim}{\mathbf{x}} = d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r + \underset{\sim}{\mathbf{u}}(\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r + d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r) - \underset{\sim}{\mathbf{u}}(\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r)$$

A equação acima na forma de componentes:

$$dx^i = dx^{ri} + u^i(x^{r1} + dx^{r1},\ x^{r2} + dx^{r2},\ x^{r3} + dx^{r3}) - u^i(x^{r1},\ x^{r2},\ x^{r3})$$

Lembrando de cálculo com múltiplas variáveis:

$$u^i(x^{r1}+dx^{r1},\ x^{r2}+dx^{r2},\ x^{r3}+dx^{r3}) - u^i(x^{r1},\ x^{r2},\ x^{r3}) = \frac{\partial u^i}{\partial x^{r1}}dx^{r1} + \frac{\partial u^i}{\partial x^{r2}}dx^{r2} + \frac{\partial u^i}{\partial x^{r3}}dx^{r3}$$

Para $i = 1,\ 2$ e 3. Essa iteração diz que cada coordenada i depende de acontecimentos nas 3 dimensões do espaço euclidiano.

Reescrevendo na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{Bmatrix}}_{d\underset{\sim}{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} dx^{r1} \\ dx^{r2} \\ dx^{r3} \end{Bmatrix}}_{d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^1}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^1}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^2}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^2}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial u^3}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^3}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^3}{\partial x^{r3}} \end{bmatrix}}_{\nabla\underset{\sim}{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{L}}} \underbrace{\begin{Bmatrix} dx^{r1} \\ dx^{r2} \\ dx^{r3} \end{Bmatrix}}_{d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r}$$

Onde $\nabla\underset{\sim}{\mathbf{u}}$ é o **gradiente dos deslocamentos**.

Logo,

$$d\underset{\sim}{\mathbf{x}} = d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r + \nabla\underset{\sim}{\mathbf{u}}\ d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r$$

Colocando $d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r$ em evidência, temos:

$$d\underset{\sim}{\mathbf{x}} = \underbrace{(\underline{\mathbf{I}} + \nabla\underset{\sim}{\mathbf{u}})}_{\underline{\mathbf{F}}}\, d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r$$

Onde $\underline{\mathbf{F}}$ é o **gradiente das deformações**.

Portanto, temos:

$$d\underset{\sim}{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{F}}\ d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r \tag{1}$$

Ou seja, a fibra deformada agora pode ser obtida a partir do gradiente dos deslocamentos ($\nabla\underset{\sim}{\mathbf{u}}$) e também a partir do gradiente das deformações ($\underline{\mathbf{F}}$).

O gradiente das deformações pode ser reescrito como:

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u^1}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^1}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^1}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x^{r1}} & 1 + \frac{\partial u^2}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial u^2}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial u^3}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial u^3}{\partial x^{r2}} & 1 + \frac{\partial u^3}{\partial x^{r3}} \end{bmatrix}$$

Ou ainda, usando notação indicial de Einstein:

$$F_{ij} = \nabla u_{ij} + \delta_{ij}$$

Onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, *i.e.*: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

E em notação indicial, temos:

$$\nabla u_{ij} = \frac{\partial u^i}{\partial x^{rj}}$$

Agora, expressemos:

$$\underset{\sim}{\mathbf{u}} = \underset{\sim}{\mathbf{x}} - \underset{\sim}{\mathbf{x}}^r \implies \underset{\sim}{\mathbf{x}} = \underset{\sim}{\mathbf{u}} + \underset{\sim}{\mathbf{x}}^r$$

$$x^i = u^i + x^{ri}$$

Derivando ambos os lados da notação indicial acima em relação a $\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r$, temos:

$$\underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x^{rj}}}_{\underline{\mathbf{F}}} = \underbrace{\frac{\partial u^i}{\partial x^{rj}}}_{\nabla u_{ij}} + \underbrace{\frac{\partial x^{ri}}{\partial x^{rj}}}_{\delta_{ij}}$$

Ou seja, agora o gradiente das deformações está em função da transformação e sua forma matricial é:

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{r3}} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x^{r1}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{r2}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{r3}} \end{bmatrix}$$

Lembrete sobre operadores lineares:

$\underline{\mathbf{F}}$ e $\nabla \utilde{\mathbf{u}}$ são operadores lineares de $E \to E$. Seja $\underline{\mathbf{T}}$ um operador linear:

$$\underline{\mathbf{T}}(\alpha \utilde{\mathbf{x}} + \beta \utilde{\mathbf{y}}) = \alpha \underline{\mathbf{T}} \utilde{\mathbf{x}} + \beta \underline{\mathbf{T}} \utilde{\mathbf{y}}, \ \forall \ \utilde{\mathbf{x}} \text{ e } \utilde{\mathbf{y}} \in E$$

//Inserir imagem

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{T}}} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

Obs: Para o curso, um operador linear tem a mesma função de um tensor (simplificando).

1.3 Tensor das Deformações de Green-Lagrange

//Inserir imagem

Onde $\utilde{\hat{\mathbf{m}}}^r$ é um versor, $\dfrac{d\utilde{\mathbf{x}}^r}{||d\utilde{\mathbf{x}}^r||} = 1$, ds^r é o comprimento infinitesimal de uma fibra na configuração de referência na direção de $\utilde{\hat{\mathbf{m}}}^r$ e ds é o comprimento dessa mesma fibra na configuração deformada. Os comprimentos são definidos como:

$$ds^r = ||d\utilde{\mathbf{x}}^r|| = (d\utilde{\mathbf{x}}^r \cdot d\utilde{\mathbf{x}}^r)^{\frac{1}{2}}$$

$$ds = ||d\utilde{\mathbf{x}}|| = (d\utilde{\mathbf{x}} \cdot d\utilde{\mathbf{x}})^{\frac{1}{2}}$$

Lembrando sobre operadores lineares: Seja $\underline{\mathbf{A}}$ um operador linear ou tensor, temos

$$\underset{\sim}{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{A}}\underset{\sim}{\mathbf{b}} = \underset{\sim}{\mathbf{b}} \cdot \underline{\mathbf{A}}^T\underset{\sim}{\mathbf{a}},\ \forall\ \underset{\sim}{\mathbf{a}} \text{ e } \underset{\sim}{\mathbf{b}} \in E$$

Quando $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}}^T$, $\underline{\mathbf{A}}$ é simétrico.

Exemplo: A *interpolação quadrática* ou *alongamento quadrático* é definida como:

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2}\frac{(ds)^2 - (ds^r)^2}{(ds^r)^2}$$

Sabendo que,

$$ds^2 = d\underset{\sim}{\mathbf{x}} \cdot d\underset{\sim}{\mathbf{x}} = \underbrace{\underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r}_{\underset{\sim}{\mathbf{v}}} \cdot \underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r$$

$$ds^2 = \underset{\sim}{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r$$

$$ds^2 = d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}^T\underset{\sim}{\mathbf{v}}$$

$$ds^2 = d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r$$

Logo,

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2}\frac{(d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r) - (d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r \cdot d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r)}{d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r \cdot d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r}$$

Lembrando que,

$$d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r = ||d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r||\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r = ds^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r$$

Então,

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2}\frac{(ds^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{x}}^r) - (ds^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r \cdot ds^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r)}{ds^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r \cdot ds^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r}$$

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2}\frac{ds^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r \cdot (\underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{I}})ds^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r}{ds^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r \cdot ds^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r}$$

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2}[\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r \cdot (\underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{I}})\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r]$$

$$\varepsilon_q = \underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r \cdot \underbrace{\frac{1}{2}(\underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{I}})}_{\underline{\mathbf{E}}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r$$

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{I}})$$
$$\varepsilon_q(\utilde{\hat{\mathbf{m}}}^r) = \utilde{\hat{\mathbf{m}}}^r \cdot \underline{\mathbf{E}}\utilde{\hat{\mathbf{m}}}^r$$

Onde $\underline{\mathbf{E}}$ é o Tensor das Deformações de Green-Lagrange e vale para qualquer magnitude de deslocamento. Algumas literaturas chamam de *finite displacement* os deslocamentos de qualquer magnitude.

Agora na notação de Einstein:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{ri}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{rj}} - \delta_{ij}\right)$$

Expressando os componentes de $\underline{\mathbf{E}}$ a partir do campo de deslocamentos:

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}[(\nabla\utilde{\mathbf{u}}^T + \underline{\mathbf{I}})(\nabla\utilde{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{I}}) - \underline{\mathbf{I}}]$$
$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\nabla\utilde{\mathbf{u}}^T\nabla\utilde{\mathbf{u}} + \nabla\utilde{\mathbf{u}}^T + \nabla\utilde{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{I}})$$
$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\nabla\utilde{\mathbf{u}} + \nabla\utilde{\mathbf{u}}^T + \nabla\utilde{\mathbf{u}}^T\nabla\utilde{\mathbf{u}})$$

Na notação de Einstein:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^{rj}} + \frac{\partial u^j}{\partial x^{ri}} + \underbrace{\frac{\partial u^k}{\partial x^{ri}}\frac{\partial u^k}{\partial x^{rj}}}_{*}\right)$$

Sendo $*$:

$$\frac{\partial u^k}{\partial x^{ri}}\frac{\partial u^k}{\partial x^{rj}} = \frac{\partial u^1}{\partial x^{ri}}\frac{\partial u^1}{\partial x^{rj}} + \frac{\partial u^2}{\partial x^{ri}}\frac{\partial u^2}{\partial x^{rj}} + \frac{\partial u^3}{\partial x^{ri}}\frac{\partial u^3}{\partial x^{rj}}$$

Acima, E_{ij} denota equações de compatibilidade; uma relação deslocamentos-deformações.

1.4 Medidas de deformação/alongamento

- Estiramento ou *stretch*:

$$\lambda = \frac{ds}{ds^r}$$

- Alongamento linear:

$$\varepsilon_l = \frac{ds - ds^r}{ds^r}$$

- Alongamento quadrático:

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2}\frac{(ds)^2 - (ds^r)^2}{(ds^r)^2} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{ds}{ds^r}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$$

- Alongamento logarítmico ou de Henry:

$$\varepsilon_n = \ln\left(\frac{ds}{ds^r}\right)$$

- Alongamento hiperbólico ou de Reiner:

$$\varepsilon_h = \frac{ds^r}{ds}$$

- Alongamento hiperbólico quadrático ou de Almansi:

$$\varepsilon_{hq} = \frac{1}{2}\frac{(ds^r)^2 - (ds)^2}{(ds)^2}$$

1.4.1 Relação entre alongamentos quadráticos e lineares

Para o alongamento quadrático:

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$$

$$\lambda^2 = 1 + 2\varepsilon_q$$

$$\lambda = \sqrt{1 + 2\varepsilon_q}$$

$$\lambda(\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r) = \sqrt{1 + 2(\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r \cdot \underline{\mathbf{E}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r)}$$

Para o alongamento linear:

$$\varepsilon_l = \lambda - 1$$

$$\varepsilon_l(\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r) = \sqrt{1 + 2(\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r \cdot \underline{\mathbf{E}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r)} - 1$$

$$\varepsilon_l(\underset{\sim}{\hat{\mathbf{m}}}^r) = \sqrt{1 + 2\varepsilon_q} - 1$$

1.5 Variação do ângulo entre fibras (distorção)

//Inserir imagem

- $d\underset{\sim}{\mathbf{a}}^r$ e $d\underset{\sim}{\mathbf{b}}^r$ são inicialmente ortogonais;
- $\underline{\mathbf{F}}$ e $d\underset{\sim}{\mathbf{a}}^r$ tem a mesma direção de $d\underset{\sim}{\mathbf{a}}$ (hipótese);
- $\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}$ e $\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}$ são versores.

Lembrando que,

$$d\underset{\sim}{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{a}}^r \text{ e } d\underset{\sim}{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{b}}^r$$

A fim de encontrar novas relações, podemos definir o produto escalar,

$$d\underset{\sim}{\mathbf{a}} \cdot d\underset{\sim}{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{a}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{b}}^r$$

$$d\underset{\sim}{\mathbf{a}} \cdot d\underset{\sim}{\mathbf{b}} = ||\underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{a}}^r||\ ||\underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{b}}^r|| \cos\theta$$

Logo,

$$\cos\theta = \sin\gamma = \frac{\underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{a}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{b}}^r}{||\underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{a}}^r||\ ||\underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{b}}^r||} \tag{2}$$

E,

$$d\underset{\sim}{\mathbf{a}}^r = d\mathbf{a}^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r$$

$$d\underset{\sim}{\mathbf{b}}^r = d\mathbf{b}^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r$$

$$||\underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{a}}^r|| = \sqrt{\underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{a}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{a}}^r}$$

$$||\underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{b}}^r|| = \sqrt{\underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{b}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{b}}^r}$$

Substituindo as 4 relações acima na Equação (2),

$$\sin\gamma = \frac{d\underset{\sim}{\mathbf{b}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{a}}^r}{\sqrt{d\underset{\sim}{\mathbf{a}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{a}}^r}\sqrt{d\underset{\sim}{\mathbf{b}}^r \cdot \underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}}d\underset{\sim}{\mathbf{b}}^r}}$$

$$\sin\gamma = \frac{(d\mathbf{b}^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r)\cdot[\underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}}(d\mathbf{a}^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r)]}{\sqrt{(d\mathbf{a}^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r)\cdot[\underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}}(d\mathbf{a}^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r)]}\sqrt{(d\mathbf{b}^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r)\cdot[\underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}}(d\mathbf{b}^r\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r)]}}$$

$$\sin\gamma = \frac{(d\mathbf{b}^r d\mathbf{a}^r)[\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r\cdot\underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r]}{(d\mathbf{b}^r d\mathbf{a}^r)\sqrt{\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r\cdot\underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r}\sqrt{\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r\cdot\underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r}}$$

$$\sin\gamma = \frac{\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r\cdot\underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r}{\sqrt{\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r\cdot\underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r}\sqrt{\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r\cdot\underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r}} \tag{3}$$

Lembrando que,

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{I}})$$

$$\underline{\mathbf{F}}^T\underline{\mathbf{F}} = 2\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{I}}$$

Substituindo a expressão acima na Equação (3),

$$\sin\gamma = \frac{\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r\cdot(2\underline{\mathbf{E}}+\underline{\mathbf{I}})\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r}{\sqrt{\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r\cdot(2\underline{\mathbf{E}}+\underline{\mathbf{I}})\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r}\sqrt{\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r\cdot(2\underline{\mathbf{E}}+\underline{\mathbf{I}})\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r}}$$

$$(2\underline{\mathbf{E}}+\underline{\mathbf{I}})\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r = 2\underline{\mathbf{E}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r + \underline{\mathbf{I}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r = 2\underline{\mathbf{E}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r + \underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r$$

$$\sin\gamma = \frac{\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r\cdot(2\underline{\mathbf{E}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r+\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r)}{\sqrt{\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r\cdot(2\underline{\mathbf{E}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r+\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r)}\sqrt{\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r\cdot(2\underline{\mathbf{E}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r+\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r)}}$$

$$\sin\gamma = \frac{\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r\cdot 2\underline{\mathbf{E}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r+\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r\cdot\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r}{\sqrt{\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r\cdot 2\underline{\mathbf{E}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r+\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r\cdot\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r}\sqrt{\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r\cdot 2\underline{\mathbf{E}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r+\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r\cdot\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r}}$$

Por fim,

$$\sin\gamma(\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r,\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r) = \frac{2(\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r\cdot\underline{\mathbf{E}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r)}{\sqrt{2(\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r\cdot\underline{\mathbf{E}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{a}}}^r)+1}\sqrt{2(\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r\cdot\underline{\mathbf{E}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{b}}}^r)+1}} \tag{4}$$

Onde γ é a distorção, *i.e.*, a variação de ângulo entre duas fibras inicialmente ortogonais.

1.6 Interpretação de $\underline{\mathbf{E}}$

Partindo-se de uma base ortonormal ($\underset{\sim}{e_1}$, $\underset{\sim}{e_2}$, $\underset{\sim}{e_3}$), o Tensor das Deformações de Green-Lagrange é definido como,

$$\underline{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix}$$

Lembrando do alongamento quadrático, por exemplo, de uma fibra alinhada na direção de $\underset{\sim}{\hat{\mathbf{e}}_1}$,

$$\varepsilon_q(\underset{\sim}{\hat{\mathbf{e}}_1}) = \underset{\sim}{\hat{\mathbf{e}}_1} \cdot \underline{\mathbf{E}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{e}}_1}$$

$$\varepsilon_q(\underset{\sim}{\hat{\mathbf{e}}_1}) = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_q(\underset{\sim}{\hat{\mathbf{e}}_1}) = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{Bmatrix} = E_{11}$$

Da mesma forma, uma fibra na direção de $\underset{\sim}{\hat{\mathbf{e}}_2}$ ou $\underset{\sim}{\hat{\mathbf{e}}_3}$,

$$\varepsilon_q(\underset{\sim}{\hat{\mathbf{e}}_2}) = E_{22}$$

$$\varepsilon_q(\underset{\sim}{\hat{\mathbf{e}}_3}) = E_{33}$$

Ou seja, a diagonal de $\underline{\mathbf{E}}$ guarda o alongamento quadrático. E quanto à distorção? Escolhendo dois vetores da base ortonormal quaisqueres, por exemplo, $\underset{\sim}{\hat{\mathbf{e}}_1}$ e $\underset{\sim}{\hat{\mathbf{e}}_2}$ e lembrando da Equação (4),

$$\sin\gamma(\underset{\sim}{\hat{\mathbf{e}}_1}, \underset{\sim}{\hat{\mathbf{e}}_2}) = \frac{2(\underset{\sim}{\hat{\mathbf{e}}_2} \cdot \underline{\mathbf{E}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{e}}_1})}{\sqrt{2(\underset{\sim}{\hat{\mathbf{e}}_1} \cdot \underline{\mathbf{E}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{e}}_1}) + 1}\sqrt{2(\underset{\sim}{\hat{\mathbf{e}}_2} \cdot \underline{\mathbf{E}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{e}}_2}) + 1}} \tag{5}$$

Desenvolvendo o produto escalar no numerador da expressão acima na equação do alongamento quadrático,

$$\varepsilon_q = \underset{\sim}{\hat{\mathbf{e}}_2} \cdot \underline{\mathbf{E}}\underset{\sim}{\hat{\mathbf{e}}_1}$$

$$\varepsilon_q = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_q = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{21} \\ E_{31} \end{Bmatrix} = E_{21}$$

Agora, invertendo os versores escolhidos para a Equação (4) e como o denominador continuará o mesmo, só o numerador sofrerá alteração. Desenvolvendo-o da mesma forma na equação do alongamento quadrático,

$$\varepsilon_q = \undertilde{\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}} \cdot \underline{\mathbf{E}} \undertilde{\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}}}$$

$$\varepsilon_q = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_q = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} E_{12} \\ E_{22} \\ E_{32} \end{Bmatrix} = E_{12}$$

Ou seja, como a distorção entre esses versores deve ser igual, apenas invertendo os versores utilizados pode-se chegar a conclusão de que $E_{21} = E_{12}$. Isso significa que $\underline{\mathbf{E}}$ é simétrico.

Pode-se reescrever a Equação (5) como,

$$\sin \gamma(\undertilde{\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}}, \undertilde{\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}}}) = \frac{2E_{21}}{\sqrt{2E_{11}+1}\sqrt{2E_{22}+1}}$$