Университет ИТМО
Физико-технический мегафакультет
Физический факультет

Группа: *ПИиКТ 1.1*

Студенты:
Решетников Сергей 467233
Шкиптан Александр 468105
Булюсин Илья 465303

Преподаватель: *Сорокина Е.К.*

К работе допущен____________________

Работа выполнена____________________

Отчет принят________________________

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №1

«Распределение случайной величины»

1. Цель работы

Исследование распределения случайной величины на примере измерения средней скорости сборки docker-контейнера для первой лабораторной по дисциплине веб-программирование.

2. Задачи, решаемые при выполнении работы.

1. Провести многократные измерения определенного промежутка времени.
2. Построить гистограмму распределения результатов измерения.
3. Вычислить среднее значение и дисперсию полученной выборки
4. Сравнить гистограмму с графиком функции Гаусса с такими же, как и у экспериментального распределения средним значением и дисперсией.

3. Объект исследования.

Случайная величина — средняя скорость сборки приложения.

4. Метод экспериментального исследования.

Многократное повторение опыта и замер его результатов.

5. Рабочие формулы и исходные данные.

- Среднее арифметическое всех результатов измерений:

$$\langle t \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} b_i$$

- Выборочная дисперсия:

$$D(b) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(b_i - \langle b \rangle_N \right)^2$$

- Выборочное среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(b_i - \langle b \rangle_N\right)^2}$$

- Максимальное значение плотности распределения:

$$\rho_{max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

- Среднеквадратичное отклонение среднего значения:

$$\sigma_{\langle b \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\left(b_i - \langle b \rangle_N\right)^2}$$

6. Измерительные приборы.

№ п/п	*Наименование*	*Тип прибора*	*Используемый диапазон*	*Погрешность прибора*
1	*секундомер*	*цифровой*	*0 - 10 с*	*0,01 с*

7. Результаты прямых измерений и их обработки (*таблицы, примеры расчетов*).

Таблица 1 - Результаты прямых измерений

№	t_i, c	$t_i - \langle t \rangle_N, c$	$\left(t_i - \langle t \rangle_N\right)^2, c^2$
1	2.41	-0.48	0.23
2	2.56	-0.33	0.11
3	2.90	-0.01	0.00
4	3.07	0.18	0.03
5	2.68	-0.21	0.04
6	2.71	-0.18	0.03
7	2.94	0.05	0.00
8	2.97	0.08	0.01
9	2.88	-0.01	0.00
10	2.93	0.04	0.00
11	2.77	-0.12	0.01
12	2.89	0.00	0.00
13	2.92	0.03	0.00
14	2.82	-0.07	0.00
15	2.93	0.04	0.00
16	2.71	-0.18	0.03
17	2.86	-0.03	0.00
18	2.81	-0.08	0.01
19	2.91	0.02	0.00
20	2.92	0.03	0.00
21	2.97	0.08	0.01
22	2.80	-0.09	0.01
23	2.87	-0.02	0.00
24	2.88	-0.01	0.00
25	2.93	0.04	0.00

26	2.85	-0.04	0.00
27	2.96	0.07	0.00
28	2.80	-0.09	0.01
29	2.94	0.05	0.00
30	2.98	0.09	0.01
31	2.85	-0.04	0.00
32	2.92	0.03	0.00
33	2.79	-0.10	0.01
34	2.82	-0.07	0.00
35	2.96	0.07	0.00
36	3.03	0.14	0.02
37	2.81	-0.08	0.01
38	2.92	0.03	0.00
39	2.82	-0.07	0.00
40	3.07	0.18	0.03
41	3.07	0.18	0.03
42	3.07	0.18	0.03
43	3.07	0.18	0.03
44	2.97	0.08	0.01
45	2.76	-0.13	0.02
46	2.88	-0.01	0.00
47	3.45	0.56	0.31
48	3.27	0.38	0.14
49	2.89	0.00	0.00
50	2.92	0.03	0.00
	$\langle t\rangle_N=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i \approx 2.89\,c$	$\sum_{i=1}^{N}\left(t_i-\langle t\rangle\right)\approx 0.15\,c$	$\sigma_N \approx 0.16\,c$ $\rho_{max}\approx 2.53\,c^{-1}$

8. Расчет результатов косвенных измерений (*таблицы, примеры расчетов*).

1.1 Найдём в первом столбце максимальное t_{max} и минимальное t_{min} значения результатов измерений:

$$t_{max}=3.45\,c$$
$$t_{min}=2.41\,c$$

1.2 Разобьём промежуток $[t_{min}, t_{max}]$ на m равных интервалов Δt. Так как $m\approx\sqrt{50}\approx 7$, то:

$$\Delta t=\frac{t_{max}-t_{min}}{m}=\frac{3.45-2.41}{7}=0{,}13\,c$$

Найдём начало и конец каждого интервала и запишем полученные значения в первый столбец Таблица 2.

В общем виде формулы имеют следующий вид:

$$t_{нач_i}=t_{кон_{i-1}}$$
$$t_{кон_i}=t_{кон_i}+\Delta d$$

Для примера рассчитаем первый интервал:

$$t_{нач}=2.41\,c$$
$$t_{кон}=t_{нач}+\Delta t=9{,}1+4{,}7=13{,}8\,c$$

1.3 Вычислим ΔN – количество результатов измерений, попавших в каждый из интервалов, и занесём эти значение во второй столбец Таблица 2.
Например в первый интервал попадает только одно значение результатов измерений.

1.4 Для каждого из интервалов вычислим опытное значение плотности вероятности и заполним третий столбец Таблица 2.
В общем виде формула принимает вид:

$$\rho_i = \frac{\Delta N_i}{N\,\Delta t}$$

Для примера рассчитаем плотность вероятности для первого интервала:

$$\rho_1 = \frac{\Delta N_1}{N\,\Delta t} = \frac{1}{50\cdot 0.13} = 0.15\,c^{-1}$$

2. Вычислим выборочное значение среднего арифметического всех измерений:

$$\langle t\rangle_N = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} t_i \approx 2.89\,c$$

Теперь используя $\langle t\rangle_N$ выборочное среднеквадратичное отклонение:

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{50-1}\sum_{i=1}^{50}(t_i - 2.89)^2} \approx 0.16\,c$$

Запишем σ_N и $\langle t\rangle_N$ в подвал Таблица 1.

3. Используя значение σ_N вычислим максимальное значение плотности распределения:

$$\rho_{max} = \frac{1}{\sigma_N\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{0.16\sqrt{2\pi}} \approx 2.53\,c^{-1}$$

И запишем её в подвал Таблица 1.

4. Для каждого интервала вычислим значение $\rho(t)$ нормального распределения функции Гаусса и заполним четвёртый столбец Таблица 2.
Для первого интервала получим

$$\rho(t) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(t-\langle t\rangle)^2}{2\sigma^2}\right) = \rho_{max}\exp\left(\frac{-(t-\langle t\rangle)^2}{2\sigma^2}\right) = 2.53\cdot\exp\left(\frac{-(2.89-2.48)^2}{2\cdot 0.16^2}\right) = 0.08\,c^{-1}$$

5. Вычислим границы стандартных интервалов.
Для первого интервала получим:
От: $\langle t\rangle_N - \sigma = 2.89 - 0.16 = 2.73\,c$
До: $\langle t\rangle_N + \sigma = 2.89 + 0.16 = 3.05\,c$
Теперь определим количество результатов измерений, попавших в каждый из интервалов, и вычислим вероятность попадания в каждый из интервалов.
Например, для первого интервала получим ΔN = 40. Получаем:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{40}{50} \approx 0.8$$

Занесём полученные данные в Таблица 3.

Таблица 2 - Данные для построения гистограммы

Границы интервалов, с	ΔN	$\frac{\Delta N}{N \Delta t}, c^{-1}$	t, c	ρ, c^{-1}
2.41 2.54	1	0.15	2.48	0.08
2.54 2.67	2	0.31	2.61	0.05
2.67 2.80	15	2.31	2.74	1.58
2.80 2.93	26	4.00	2.87	2.51
2.93 3.06	3	0.46	3.00	2.01
3.06 3.19	2	0.31	3.13	0.82
3.19 3.32	1	0.15	3.26	0.17

Таблица 3 - Стандартные доверительные интервалы

	Интервал, с		ΔN	$\frac{\Delta N}{N}$	P
	от	до			
$\langle t \rangle_N \pm \sigma_N$	2.73	3.05	40	0.80	0.68
$\langle t \rangle_N \pm 2\sigma_N$	2.58	3.21	46	0.92	0.95
$\langle t \rangle_N \pm 3\sigma_N$	2.42	3.37	48	0.96	0.99

9. Расчет погрешностей измерений (*для прямых и косвенных измерений*).

Рассчитаем среднеквадратичное отклонение среднего значения:

$$\sigma_{\langle t \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (t_i - \langle t \rangle_N)^2} = \sqrt{\frac{1}{50(50-1)} \sum_{i=1}^{50} (t_i - 2.89)^2} \approx 0.02\, c$$

Табличное значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha, N}$ для доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$:

$$t_{\alpha, N} = 2.01$$

Рассчитаем доверительный интервал:

$$\Delta_{\langle t \rangle} = t_{\alpha, N} \cdot \sigma_{\langle t \rangle} = 2.01 \cdot 0.02 \approx 0.04\, c$$

Определим абсолютную погрешность измерения с учетом доверительного интервала $\Delta_{\langle t \rangle}$ и инструментальной погрешности $\Delta_{ut} = 0{,}01\, c$:

$$\Delta_t = \sqrt{\Delta_{\langle t \rangle}^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \Delta_{ut}\right)^2} = \sqrt{0.04^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot 0.01\right)^2} \approx 0.05\, c$$

Вычислим относительную погрешность измерения:

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta_t}{\langle t \rangle_N} \cdot 100\,\% = \frac{0.05}{2{,}89} \cdot 100\,\% \approx 1.56\,\%$$

10. Графики (*перечень графиков, которые составляют Приложение 2*).

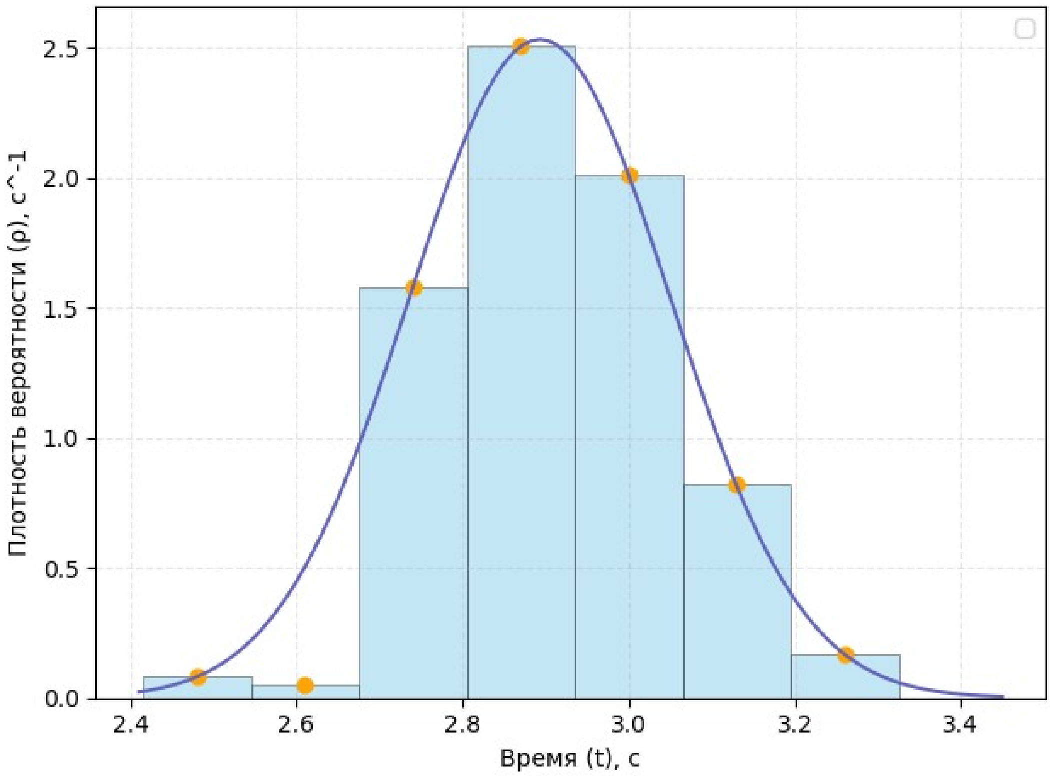

Рисунок 1 - График плотности вероятности

11. Окончательные результаты.

Среднее арифметическое всех результатов измерений с учетом погрешности:

$$t = (2.89 \pm 0.05)\, c\, ; \varepsilon_t = 1{,}56\,\%\, \alpha = 0{,}95$$

12. Выводы и анализ результатов работы.

В ходе выполнения лабораторной работы было проведено исследование распределения случайной величины - времени сборки docker-контейнера. По результатам 50 измерений были получены следующие результаты:

1. Среднее время сборки составило $t = (2.89 \pm 0.05)\, c$

2. Выборочное стандартное отклонение $\sigma_N \approx 0.16\, c$

3. Относительная погрешность измерения $t = (2.89 \pm 0.05)\, c\, ; \varepsilon_t = 1{,}56\,\%\, \alpha = 0{,}95$ при доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$.

Гистограмма экспериментального распределения времени сборки визуально близка к нормальному распределению, что подтверждается сравнением эмпирических и теоретических вероятностей попадания в стандартные интервалы ($\langle t \rangle_N \pm k\, \sigma_N$):

1. В интервал $\langle t \rangle_N \pm \sigma_N$ попало 80% измерений при теоретическом значении 68%.

2. В интервал $\langle t \rangle_N \pm 2\sigma_N$ — 92% при теоретическом 95%.

3. В интервал $\langle t \rangle_N \pm 3\sigma_N$ — 96% при теоретическом 99%.

Небольшие отклонения эмпирических данных от теоретических значений могут быть объяснены ограниченным объёмом выборки и влиянием внешних факторов (например, изменение нагрузки на систему в момент отдельных измерений).

Таким образом, можно заключить, что рассмотренная случайная величина подчиняется нормальному закону распределения. Результаты работы могут быть использованы для прогнозирования времени сборки и оптимизации процесса разработки.