Calculus, 1-st sem (Вариант 1)

Final Test

Задача 1

Введите все номера верных утверждений или равенств:
1) Если функция $f : \langle a; b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в $x_0 \in (a; b)$ и $x_0 + h \in (a, b)$, то $f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h$ при $h \to 0$.
2) Функция $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$, определённая на отрезке $[-1, 1]$, достигает на нём своего наибольшего значения.
3) Если функция $f(x) = e^{ax}$, то производная n-го порядка равна $f^{(n)}(x) = e^{ax}$.

Пример ввода: [1, 3]. Можно ввести как [3, 1].
(Если вы считаете, что верных утверждений или равенств нет, то введите [])

Задача 2

Пусть $T_2(x)$ – многочлен Тейлора 2-го порядка в точке $x_0 = -4$ для функции $f(x) = \dfrac{1}{19-x}$. Чему равно значение $T_2(7.5)$?
Пример ответа: $\dfrac{7}{12}$
Пример ввода: $7/12$

Задача 3

Введите все номера верных утверждений или равенств:
1) Теорема Коши применима к функциям $f(x) = x^2 + 1$ и $g(x) = 1 - 2x$ на всём отрезке $[1, 3]$.
2) Если $f'(x_0) = 0$, то в точке x_0 у функции f экстремум.
3) Формула Тейлора порядка n для функции $f(x)$ в точке $x_0 = 2$ представляет её многочленом по степеням $x - 2$ с точностью до $o((x-2)^n), x \to 2$.

Пример ввода: [1, 3]. Можно ввести как [3, 1].
(Если вы считаете, что верных утверждений или равенств нет, то введите [])

Задача 4

Введите все номера верных утверждений или равенств:
1) Сумма нескольких бесконечно малых функций в точке разного порядка является бесконечно малой функцией в этой точке и при этом наименьшего порядка из данных.
2) Для того, чтобы последовательность a_n была бесконечно малой, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 > 0 : \forall n > n_0 (n_0, n \in \mathbb{N})\ |a_n| < \varepsilon$.
3) $\frac{x-4}{\sqrt{x-3}-1} = 2 + \alpha(x)$, если $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to 4$.

Пример ввода: [1, 3]. Можно ввести как [3, 1].
(Если вы считаете, что верных утверждений или равенств нет, то введите [])

Задача 5

Исследуйте на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & x \leq -3\pi, \\ x + 2\pi, & -3\pi < x < -2\pi, \\ \frac{1-cos(x)}{x^3}, & |x| \leq 2\pi, \\ \frac{1}{x-2\pi} & x > 2\pi. \end{cases}$$

Определите тип следующих точек: $x_1 = -3\pi, x_2 = -2\pi, x_3 = 0, x_4 = 2\pi, x_5 = 3\pi$

Формат ответа: строка из пяти цифр, k-я цифра равна:

- 0, если x_k - точка непрерывности
- 1, если x_k - точка разрыва 1-ого рода, при этом не устранимого
- 2, если x_k - точка разрыва 2-ого рода
- 3, если x_k - точка устранимого разрыва

Например: ответ 01200 означает, что x_1, x_4, x_5 - точки непрерывности, x_2 - точка разрыва 1-го рода (неустранимого), x_3 - точка разрыва 2-го рода

Задача 6

Введите все номера верных утверждений или равенств:
1) Если для функции $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ и любых $x, x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ таких, что $x_1 < x < x_2$, выполняется неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} > \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

то функция f является выпуклой вверх на $\langle a, b\rangle$.
2) Функция $y = \frac{e^x}{1+x}$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$, при $x \to +\infty$.
3) Для последовательности $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ верно, что $\exists N_1\ \forall n > N_1 : x_{N_1} > x_n$ и $\exists N_2$ $\forall n > N_2 : x_{N_2} < x_n (n, N_1, N_2 \in \mathbb{N})$.

Пример ввода: [1, 3]. Можно ввести как [3, 1].
(Если вы считаете, что верных утверждений или равенств нет, то введите [])

Задача 7

Найти точку перегиба функции $f(x) = 2x^4 - 28x^3 + 72x^2 + x - 3$, при прохождении через которую выпуклость вниз графика меняется на выпуклость вверх.
Пример ответа: -2
Пример ввода: -2

Задача 8

Введите все номера верных утверждений или равенств:
1) Пусть $f : D \to \mathbb{R}, x_0$ – предельная точка множества D. Если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D \implies f(x) \in U_\varepsilon(+\infty)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.
2) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{4x^2-1} - \frac{2}{2x+1}) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{4x^2-1} - \lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{2x+1}$
3) Если $A \subset \mathbb{R}$ и $A = [0;1) \cup \{2\}$, то точки из $[0,1]$ – предельные точки A.

Пример ввода: [1, 3]. Можно ввести как [3, 1].
(Если вы считаете, что верных утверждений или равенств нет, то введите [])

Задача 9

Вычислите предел

$$\lim_{x\to 6}\frac{10-\sqrt{x+94}}{6-x}$$

Ответу $x = \frac{1}{3}$ **соответствует**
Пример ввода: 1/3 или 0.33

Задача 10

Введите все номера верных утверждений или равенств:
1) $\{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$
2) Если $f(x) = (\frac{1}{3})^{x^2+5x-4}, A = (-5;6), B = [3^{-62}; 3^{10.25}]$, то $f(A) = B$.
3) Условие $x = 1$ является необходимым, чтобы выполнялось $(x^2-1)(x-2) = 0$.

Пример ввода: [1, 3]. Можно ввести как [3, 1].
(Если вы считаете, что верных утверждений или равенств нет, то введите [])