

# Список вопросов к экзамену

## Двухсеместровый курс. Весна 2025. Раздел II

1. Ядро и образ линейного отображения. Примеры.
2. Теорема о ядре и образе (о ранге и дефекте).
3. Алгебра эндоморфизмов.
4. Определитель оператора. Инвариантность определителя. Обратимость оператора.
5. Инвариантное подпространство. Матрица оператора в базисе, согласованном с инвариантными подпространствами.
6. Собственные векторы, значения. Собственное подпространство.
7. Характеристический полином. Спектр оператора.
8. Линейная независимость собственных подпространств. Оператор с простым спектром.
9. Собственный базис и диагонализуемость. Критерий.
10. Корневые векторы и корневые подпространства. Определения, примеры.
11. Теорема о свойствах корневых подпространств. Следствия.
12. Структура нильпотентного оператора. Теорема о структуре нильпотентного оператора.
13. Жорданов базис. Структура базиса. Диаграмма Юнга.
14. Жорданова клетка. Жорданов блок.
15. Жорданова нормальная форма. Структура ЖНФ.
16. Алгоритм построения жорданова базиса.
17. Операторные и матричные полиномы. Связь с инвариантностью подпространств.
18. Аннулирующий полином. Теорема Гамильтона-Кэли.
19. Функциональное исчисление диагонализуемых операторов.
20. Функциональное исчисление ЖНФ.

## Двухсеместровый курс. Весна 2025. Раздел III

1. Метрическое и нормированное пространство. Определения, примеры. Связь.
2. Евклидово пространство. Скалярное произведение. Матрица Грама.
3. Неравенство Шварца. Критерий линейной зависимости.
4. Построение нормированного пространства из евклидова.
5. Ортогональность. Линейная независимость. Теорема Пифагора.
6. Процесс ортогонализации. Свойства относительно норм.
7. Ортогональные (ортонормированные) базисы. Вид скалярного произведения и матрицы Грама.
8. Ортогональность подпространств. Ортогональная сумма подпространств.
9. Ортогональный проектор. Задача о перпендикуляре.
10. Эрмитов сопряженный оператор и его матрица.
11. Самосопряженный и эрмитов оператор. Свойства собственных чисел и собственных векторов.
12. Диагонализуемость эрмитова оператора. Спектральная теорема.
13. Унитарный и ортогональный операторы. Свойства.
14. Определитель унитарного оператора. Матрица унитарного оператора.
15. Спектральные свойства унитарного оператора.
16. Нормальный вид квадратичной формы.
17. Сигнатура и знакоопределенность квадратичной формы.
18. Критерий Сильвестра.
19. Билинейные и квадратичные формы в евклидовом пространстве.
20. Метод Лагранжа диагонализации квадратичных форм.
21. Метод Якоби диагонализации квадратичных форм.
22. Одновременная диагонализация двух квадратичных форм.

\*вопросы о матричных разложениях не входят в основной список вопросов, но могут быть заданы экзаменатором в качестве дополнительных вопросов.