1. (a) Дайте определение линейного оператора.
   (b) Что такое образ линейного оператора?
   (c) Что такое ядро линейного оператора?
   (d) Как связаны размерности ядра и образа линейного оператора?
   (e) Какую размерность имеет образ оператора φ, определенного в $\mathbb{R}^4$, если размерность ядра равна 2?
   (f) Напишите определение матрицы линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$
   (g) Найдите матрицу оператора дифференцирования в пространстве $\mathbb{R}^3$ с базисом $\{1, x, x^2\}$

2. (a) Матрицей линейного оператора φ в базисе e_1, e_2 некоторого линейного пространства является матрица $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого линейного оператора в базисе $e_1' = e_2$, $e_2' = e_1 + e_2$
   (b) Матрицей линейного оператора φ в базисе e_1, e_2 некоторого линейного пространства является матрица $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого линейного оператора в базисе $e_1' = 2e_1$, $e_2' = e_2$
   (c) Матрицей линейного оператора φ в базисе e_1, e_2 некоторого линейного пространства является матрица $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу этого линейного оператора в базисе $e_1' = e_2$, $e_2' = 2e_1$
   (d) Запишите закон преобразования матрицы оператора при смене базиса.

3. (a) Сформулируйте определение собственного вектора и собственного значения оператора $\mathcal{A}$
   (b) Напишите определение алгебраической и геометрической кратности собственного значения оператора $\mathcal{A}$
   (c) Пусть x_1 и x_2 - собственные векторы оператора с простым спектром. При каком условии эти векторы будут линейно независимы?
   (d) Пусть x, y – собственные векторы линейного оператора. При каком условии вектор $\alpha x + \beta y$ является собственным при произвольных α и β.
   (e) Пусть x, y – собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, а числа α, β отличны от нуля. Докажите, что вектор $\alpha x + \beta y$ не является собственным.
   (f) Найти собственные значения линейного оператора, матрица которого $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
   (g) Найти сумму собственных значений линейного оператора, матрица которого $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. (a) Сформулируйте критерии диагонализируемости оператора A
   (b) Сформулируйте спектральную теорему для диагонализуемого оператора
   (c) Как найти собственные векторы оператора, если известен его спектр?
   (d) Что такое идемпотентность оператора?
   (e) Линейный оператор f линейного пространства L^2 в базисе e_1, e_2 задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Выясните, является ли он диагонализируемым.
   (f) Линейный оператор f линейного пространства L^2 в базисе e_1, e_2 задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Выясните, является ли он диагонализируемым.
   (g) Линейный оператор f линейного пространства L^2 в базисе e_1, e_2 задан матрицей $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Выясните, является ли он диагонализируемым.

5. (a) Дайте определение нильпотентного оператора. Что такое порядок нильпотентности?
   (b) Сформулируйте основную теорему о структуре нильпотентного оператора.
   (c) Дайте определение жордановой нормальной формы для оператора.
   (d) Опишите два подхода к формированию жорданова базиса.
   (e) Определите алгебраические и геометрические кратности собственных чисел оператора, если в жордановом базисе его матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (f) Определите алгебраические и геометрические кратности собственных чисел оператора, если в жордановом базисе его матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. (a) Сформулируйте свойства метрического пространства
   (b) Сформулируйте свойства нормированного пространства
   (c) Каким способом можно из нормированного пространства получить метрическое?
   (d) Каким способом можно из евклидова пространства получить нормированное?
   (e) Приведите произвольный пример нормы в пространстве квадратных матриц.

7. (a) Какое пространство называется вещественным евклидовым пространством?
   (b) Какое пространство называется комплексным евклидовым пространством?
   (c) Сформулируйте неравенство Шварца и условия его обращения в точное равенство.

(d) Сформулируйте определение метрического тензора

(e) Приведите пример скалярного произведения в пространстве квадратных матриц.

(f) Приведите пример скалярного произведения в пространстве полиномов степени не выше 3.

(g) Вычислите скалярное произведение векторов $x = (1, 2)$ и $y = (0, 3)$ в базисе, матрица Грама которого $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

8. (a) Сформулируйте условие, при котором базис евклидова пространства называется ортонормированным

   (b) Сформулируйте условие, при котором базис евклидова пространства называется ортогональным

   (c) Как выглядит матрица Грама в ортонормированном базисе?

   (d) Как выглядит матрица Грама в ортогональном базисе?

   (e) Пусть x_1 и x_2 - ортогональные векторы. При каких α и β выполняется равенство $\alpha x_1 = \beta x_2$?

   (f) Система векторов задана в ортонормированном базисе евклидова пространства координатными столбцами. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке этих векторов $(1, 2, 1)^T, (2, -1, 0)^T, (1, 0, 0)^T$

   (g) Система векторов задана в ортонормированном базисе евклидова пространства координатными столбцами. При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке этих векторов $(1, 2, 1)^T, (-2, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T$

9. (a) Напишите условие ортогональности подпространств.

   (b) Какое подпространство называют ортогональным дополнением?

   (c) Опишите алгоритм решения «Задачи о перпендикуляре»

   (d) Как найти ортогональный проектор на подпространство, если задан ортонормированный базис?

   (e) Как найти коэффициенты Фурье вектора в ортонормированном базисе?

10. (a) Сформулируйте определение эрмитова оператора

    (b) Сформулируйте спектральные свойства эрмитова оператора

    (c) Каким свойством обладает матрица эрмитова оператора в ортонормированном базисе?

    (d) Сформулируйте определение унитарного оператора

    (e) Сформулируйте свойства спектра ортогонального оператора в вещественном евклидовом пространстве

    (f) Сформулируйте свойства спектра унитарного оператора в комплексном евклидовом пространстве

(g) Каким свойством обладает определитель ортогонального оператора?

(h) Каким свойством обладает определитель унитарного оператора?

(i) Найдите матрицу сопряженного оператора, заданного в ортонормированном базисе матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 3-i \\ 1-3i & 1 \end{pmatrix}$

11. (a) Напишите определение линейной формы.

(b) Приведите алгоритм нахождения сопряженного базиса.

(c) Каким соотношением связаны сопряженные базисы?

(d) Что из себя представляют элементы сопряженного пространства?

(e) Найдите сопряженный базис, если базис в пространстве V задан векторами $e_1 = (1,1)^T$ и $e_2 = (0,1)$

(f) Найдите сопряженный базис, если базис в пространстве V задан векторами $e_1 = (2,1)^T$ и $e_2 = (1,2)$

(g) Приведите пример линейной формы в пространстве геометрических векторов.

(h) Приведите пример линейной формы в пространстве квадратных матриц.

(i) Приведите пример линейной формы в пространстве полиномов.

12. (a) Дайте определение билинейной формы.

(b) Как преобразуется матрица билинейной формы при смене базиса?

(c) Как найти симметричную компоненту билинейной формы?

(d) Как найти антисимметричную компоненту билинейной формы

(e) Как найти матрицу билинейной формы в некотором базисе?

(f) Пусть билинейная форма задана своей матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ в некотором базисе. Представьте ее в виде суммы симметричной и антисимметричной компонент.

(g) Пусть билинейная форма задана своей матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ в некотором базисе. Представьте ее в виде суммы симметричной и антисимметричной компонент.

13. (a) Дайте определение квадратичной формы на линейном пространстве V

(b) Что такое сигнатура квадратичной формы?

(c) Запишите нормальный вид квадратичной формы в $\mathbb{R}$, если ее сигнатура $(r_+, r_-) = (2,3)$.

(d) Сформулируйте критерий Сельвестра для вещественной квадратичной формы

(e) Запишите квадратичную форму по ее матрице $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

(f) Укажите, при каких значениях параметра λ квадратичная форма $k(x) = \lambda x_1^2 - 4x_1x_2 + (\lambda + 3)x_2^2 + \lambda x_3^2$ - положительно определена

(g) Какому необходимому и достаточному условию должны удовлетворять главные миноры отрицательно определенной квадратичной формы?

14. (a) Сформулируйте определение полилинейной формы

(b) Опишите основные действия с полилинейными формами

(c) Напишите определение тензора ПЛФ

(d) Сформулируйте определение тензорного базиса

(e) Опишите операцию свертывание тензора

(f) Сколько различных тензоров можно образовать при помощи свертки тензора типа (2, 2)?

15. (a) Запишите закон преобразования тензора ω_k^{ij} при смене базиса.

(b) Запишите закон преобразования тензора ω_{kl}^{ij} при смене базиса.

(c) Запишите закон преобразования тензора ω_{ijk} при смене базиса.

(d) Сколько компонент имеет трехвалентный тензор в четырехмерном пространстве?

(e) Какое преобразование позволяет симметризовать тензор ω_{ijk}

(f) Какое преобразование позволяет антисимметризовать тензор ω_{ijk}