

## Лабораторная работа № 1.05

# Исследование колебаний физического маятника

## Содержание

Введение . . . . .	2
Экспериментальная установка . . . . .	9
Проведение измерений . . . . .	11
Обработка результатов . . . . .	13
Контрольные вопросы . . . . .	15
Литература . . . . .	16
Приложение . . . . .	17

## Цели работы

1. Изучение характеристик затухающих колебаний физического маятника.

## Задачи

1. Измерение периода затухающих колебаний.
2. Определение зависимости амплитуды затухающих колебаний физического маятника от времени.
3. Определение зависимости периода колебаний от момента инерции физического маятника.
4. Определение преобладающего типа трения.
5. Определение экспериментальной и теоретической приведенных длин маятника при его разных конфигурациях.

## Введение

Физическим маятником называется твердое тело, способное совершать колебания вокруг точки подвеса. В отличие от математического маятника, в случае физического маятника размерами тела нельзя пренебречь по сравнению с расстоянием от точки подвеса до центра масс. Модель физического маятника показана на рис. [1](#).

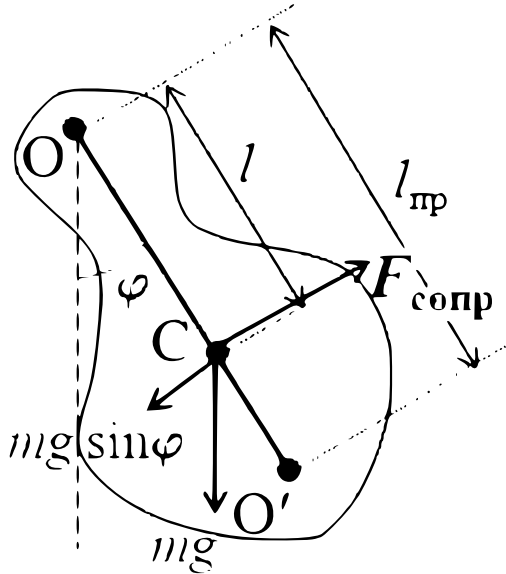


Рис. 1. Физический маятник. Ось качания (ось подвеса) проходит перпендикулярно рисунку в точке  $O$ ,  $C$  - центр масс,  $O'$  - центр качания

Угол  $\varphi$  между отрезком  $OC$  и вертикалью задает текущее положение маятника. Выберем вращение против часовой стрелки в качестве положительного направления вращения. Тогда для маятника на рис. 1 при отклонении налево  $\varphi < 0$ , при отклонении направо  $\varphi > 0$ .

Движение физического маятника подчиняется основному уравнению динамики вращательного движения, которое в данном случае имеет вид

$$I\varepsilon = M_{\text{тяж}} + M_{\text{сопр}}, \quad (1)$$

где  $I$  - момент инерции тела относительно оси качания,  $\varepsilon$  - угловое ускорение,  $M_{\text{тяж}}$  и  $M_{\text{сопр}}$  - осевые моменты силы тяжести и

силы сопротивления соответственно.

Угловое ускорение по определению - вторая производная от угла по времени:

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (2)$$

Сила взаимодействия маятника со средой, вообще говоря, распределена по всей поверхности маятника, но для вычисления момента силы сопротивления эту силу можно заменить равнодействующей силой лобового сопротивления  $F_{\text{сопр}}$ , приложенной в центре масс маятника. При малой скорости движения маятника сила лобового сопротивления пропорциональна скорости  $v$  движения центра масс и называется силой вязкого трения:

$$F_{\text{сопр}} = -rv, \quad (3)$$

где  $r$  – постоянный коэффициент, который будем называть коэффициентом сопротивления среды. В соответствии с уговором о положительном направлении вращения, скорости  $v$  формуле (3) приписывается знак «+» при вращении маятника против часовой стрелки и «-» при вращении в обратную сторону. Аналогичное правило знаков используется для величины  $F_{\text{сопр}}$ . Знак «-» в формуле (3) учитывает, что сила сопротивления всегда направлена противоположно скорости.

Момент силы сопротивления

$$M_{\text{сопр}} = F_{\text{сопр}}l, \quad (4)$$

где  $l$  - расстояние между точкой подвеса  $O$  и центром масс маятника  $C$ .

Подставляя (3) в (4), с учетом того, что  $v = l\frac{d\varphi}{dt}$ , получаем:

$$M_{\text{сопр}} = -rvl = -r \frac{ds}{dt} l = -r \frac{d(l\varphi)}{dt} = -rl^2 \frac{d\varphi}{dt}. \quad (5)$$

Момент силы тяжести  $M_{\text{тяж}} = -mglsin\varphi$ . Здесь учтено, что знак момента  $M_{\text{тяж}}$  противоположен знаку угловой координаты  $\varphi$ . Для малых углов отклонения ( $\varphi \leq 15^\circ$ ) с погрешностью менее 1%  $sin\varphi \approx \varphi$ , где  $\varphi$  – в радианах, поэтому при малой угловой амплитуде качания можно считать, что

$$M_{\text{тяж}} = -mgl\varphi. \quad (6)$$

Подставляя формулы (2), (5), (6) в уравнение динамики (1), получаем уравнение свободных затухающих колебаний физического маятника

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\varphi - rl^2 \frac{d\varphi}{dt}. \quad (7)$$

Введем обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}, \beta = \frac{rl^2}{2I},$$

где  $\omega_0^2$  – циклическая частота собственных незатухающих колебаний маятника;  $\beta$  – коэффициент затухания. Соответственно период колебаний маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (8)$$

Приведенной длиной физического маятника называется длина математического маятника, имеющего такой же период колебаний, т. е.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}. \quad (9)$$

Учитывая, что момент инерции маятника относительно точки подвеса  $I$  связан по теореме Штейнера с моментом инерции относительно центра масс  $I_0$  соотношением  $I = I_0 + ml^2$ , из (9) получаем

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{ml} = \frac{I_0}{ml} + l. \quad (10)$$

Точка  $O'$ , находящаяся на расстоянии приведенной длины от оси подвеса, называется центром качания.

С учетом введенных обозначений уравнение (7) приводится к виду

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta\frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2\varphi = 0. \quad (11)$$

Решение уравнения (11) при  $\beta < \omega_0$  имеет вид

$$\varphi = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0), \quad (12)$$

где  $A_0$  – амплитуда в начальный момент времени;  $\omega$  – циклическая частота затухающих колебаний,  $\alpha_0$  – начальная фаза.

Таким образом, при наличии вязкого трения амплитуда колебаний убывает по экспоненциальному закону (рис. 2):

$$\varphi = A_0 e^{-\beta t}. \quad (13)$$

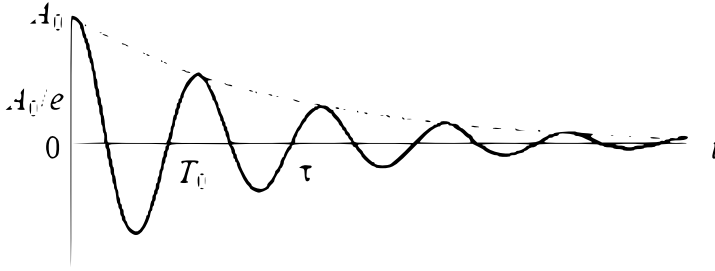


Рис. 2. Затухающее колебание

За время  $\tau = 1/\beta$  амплитуда убывает в  $e = 2.72$  раз. Это время называется временем затухания. Логарифмируя уравнение (13), получаем, что

$$\ln \frac{A}{A_0} = -\beta t, \quad (14)$$

т. е. график зависимости логарифма отношения амплитуд от времени представляет собой прямую, модуль коэффициента наклона которой равен коэффициенту затухания.

Циклическая частота затухающих колебаний несколько ниже циклической частоты собственных колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (15)$$

однако при малом затухании ( $\beta \ll \omega_0$ ) можно считать  $\omega \approx \omega_0$ .

Вместо коэффициента затухания  $\beta$ , имеющего размерность частоты, бывает удобно использовать безразмерный параметр, который называется логарифмическим декрементом затухания:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T. \quad (16)$$

Логарифмический декремент затухания обратен числу колеба-

ний за время затухания.

Кроме вязкого трения колебания маятника могут затухать из-за сухого трения в оси подвеса. Если при вязком трении момент силы трения пропорционален угловой скорости, то при сухом трении он постоянен. В этом случае у маятника по обе стороны от положения равновесия появляется зона застоя  $\Delta\varphi_3$ : если угол отклонения  $|\varphi| < \Delta\varphi_3$ , то момент силы трения уравнивает момент силы тяжести, и маятник остается в покое.

Если угол отклонения превышает ширину зоны застоя, то пока маятник движется в одном направлении, постоянный момент сухого трения вызывает смещение средней точки колебаний к границе зоны застоя (в сторону, противоположную направлению вращения). При изменении направления движения после точки поворота средняя точка перескакивает к другой границе зоны застоя. Поэтому за один период колебаний амплитуда уменьшается на удвоенную ширину зоны застоя (т.е. на величину  $4\Delta\varphi_3$ ). Амплитудные значения уменьшаются по линейному закону:

$$A(t = nT) = A_0 - 4n\Delta\varphi_3. \quad (17)$$

Колебания прекращаются после конечного числа циклов. Рис. 3 иллюстрирует различие в затухании маятников с вязким и сухим трением.

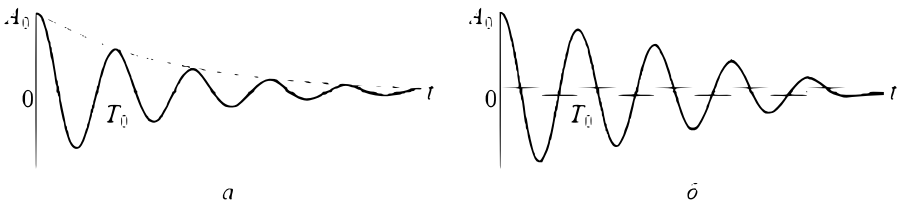


РИС. 3. Затухание маятника с вязким (а) и сухим (б) трением



## Экспериментальная установка

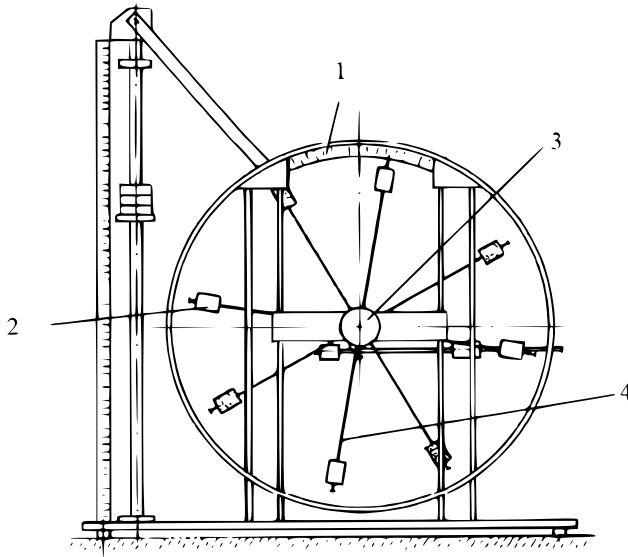


Рис. 4. Стенд лаборатории механики (общий вид)

Работа выполняется на универсальном стенде (рис. 4). В состав установки входят:

1. Шкала
2. Груз
3. Рукоятка сцепления
4. Передняя крестовина

В работе используется передняя крестовина. Угол отклонения маятника отсчитывается по шкале в угловых градусах. Время измеряется механическим или электронным секундомером. Характеристики средств измерений привести в 1.

**Таблица 1:** Характеристики средств измерения

Наименование средства измерения	Предел измерений	Цена деления	Погрешность $\delta_{\text{и}}$
Шкала	$60^\circ$	$1^\circ/\text{дел.}$	$1^\circ$
Секундомер	...	...	...

## Техника безопасности

1. Утяжелители должны быть плотно закреплены на спицах во избежание вылета с установки.
2. Требуется контролировать, чтобы передняя крестовина вращается независимо от задней.

## Проведение измерений

1. Занести в протокол параметры установки (таблица с параметрами находится в лаборатории).
2. Вращая рукоятку сцепления против часовой стрелки, расцепить переднюю и заднюю крестовины.
3. Отсоединить нить от ступицы.
4. Установить груз на спице со стрелкой на первую риску, а противоположный груз на шестую риску. На боковых спицах установить грузы на расстоянии третьей риски (риска должна находиться у поверхности груза, расположенной ближе к оси вращения крестовины).
5. Совместить указатель положения маятника (стрелку спицы) с центральной отметкой шкалы ( $\varphi_{\text{шк } 0} = 30^\circ$ ), слегка перемещая один из грузов на боковых спицах.
6. Запуская маятник из положения  $\varphi_{\text{шк}} = 0$ , три раза измерить время десяти ( $N = 10$ ) колебаний маятника. Записать результаты измерений  $t_1 = \dots$  с;  $t_2 = \dots$  с;  $t_3 = \dots$  с.
7. Отклонить маятник в положение  $\varphi_{\text{шк}} = 0$  (при этом отклонение маятника от положения равновесия составляет  $30^\circ$ ), затем отпустить маятник и одновременно включить секундомер. Маятник будет совершать свободные затухающие колебания. Не останавливая секундомер, измерить время, когда амплитуда отклонения маятника от равновесного положения будет равна  $25^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $5^\circ$ . Результаты измерений занести в табл. 2. Измерения удобно проводить вдвоем: один следит за изменением амплитуды отклонения  $A$ , а второй – за текущим временем по секундомеру. Опыт повторить три раза. Результаты измерений записать в табл. 2.

8. Установить грузы на боковых спицах на первую риску. Совместить указатель с центральной отметкой шкалы ( $\varphi_{\text{шк } 0} = 30^\circ$ ), слегка перемещая один из грузов на боковых спицах. Три раза измерить время  $N = 10$  колебаний маятника. Результаты занести в табл. 3.
9. Повторить измерения, устанавливая боковые грузы на расстояниях 2, 3, 4, 5, 6 риск.

**Внимание!** Результаты измерений нужно подписать у преподавателя, ведущего занятие в лаборатории.

## Обработка результатов

1. По результатам измерений рассчитать среднее время десяти колебаний  $\bar{t}$  и период колебаний  $T = \frac{\bar{t}}{N}$ .
2. По данным табл. 2 построить график зависимости амплитуды колебаний от времени  $A(t)$ . Определить, какой тип трения играет главную роль в затухании колебаний: сухое трение или вязкое (см. рис. 3).

В случае вязкого трения построить график, соответствующий формуле (14), аппроксимировать его прямой линией по методу наименьших квадратов и найти коэффициент затухания  $\beta$  и время затухания  $\theta$ .

В случае сухого трения по угловому коэффициенту графика и найденному периоду колебаний найти ширину зоны застоя  $\Delta\varphi_z$  (см. формулу (17)). Оценить, через сколько периодов колебания прекратятся.

3. Для каждого положения грузов вычислить расстояния центров верхнего ( $R_{\text{верх}}$ ), нижнего ( $R_{\text{нижн}}$ ) и боковых ( $R_{\text{бок}}$ ) грузов от оси вращения по формуле

$$R = l_1 + (n - 1)l_0 + b/2$$

где  $l_1$  – расстояние от оси вращения до первой риски,  $l_0$  – расстояние между соседними рисками,  $b$  – размер груза вдоль спицы. Результаты занести в табл. 4.

4. Рассчитать моменты инерции грузов:

$$I_{\text{гр}} = m_{\text{гр}}(R_{\text{верх}}^2 + R_{\text{нижн}}^2 + 2R_{\text{бок}}^2).$$

Вычислить полный момент инерции физического маятника:  $I = I_{\text{гр}} + I_0$ , где  $I_0$  – **момент инерции ступицы и крестовины, равный  $8 \cdot 10^{-3}$  кг·м<sup>2</sup>**. Результаты занести в табл. 4.

5. Построить график  $T^2(I)$ . Аппроксимировать его прямой линией по методу наименьших квадратов. По угловому коэффициенту графика найти произведение  $ml$  (см. формулу (8)).

6. Предполагая, что основная масса маятника сосредоточена в грузах на спицах, вычислить расстояние от оси вращения до центра масс  $l_{\text{теор}}$ .

7. По периодам колебаний из табл. 3 рассчитать приведенную длину маятника  $l_{\text{пр эксп}}$ . Результаты занести в табл. 4.

8. Вычислить по формуле (10) теоретические значения приведенной длины  $l_{\text{пр теор}}$ , используя величину  $l_{\text{теор}}$ . Результаты занести в табл. 4.

В отчет по лабораторной работе должны входить:

- Графики зависимостей амплитуды колебаний от времени и квадрата периода от момента инерции.
- Вывод о преобладающем типе трения.
- Экспериментальная и теоретическая приведенная длина маятника при разных его конфигурациях (в двух последних строках табл. 4).

## Контрольные вопросы

1. Чем отличается физический маятник от математического?
2. От чего зависит период колебаний математического маятника?
3. Какой вид имеет уравнение гармонических колебаний физического маятника?
4. Что такое и как вычисляются собственная частота, период колебаний и приведенная длина физического маятника?
5. Какой вид имеет уравнение затухающих колебаний при вязком трении?
6. В каких единицах измеряются коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания?
7. Какой вид имеет график зависимости угла от времени для сухого и вязкого трения.
8. Какой вид имеет график зависимости угла от времени для затухающих колебаний при сухом и вязком трении.
9. Какой вид имеет график зависимости угла от времени для затухающих колебаний при сухом и вязком трении.
10. Может ли приведенная длина физического маятника быть меньше расстояния от оси подвеса до центра масс, если да, то при каких условиях?

## Литература

1. Платунов Е.С. Физика. Т. 1. Классическая механика: Учеб. пособие. 2-е изд., перераб. и доп. – СПб: СПбГУНиПТ, 2005. – 259 с.
2. Трофимова Т.И. Курс физики: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 542 с.
3. Курепин В.В., Баранов И.В. Обработка экспериментальных данных: Методические указания к лабораторным работам. – СПб, 2003.–57 с.



## Приложение

Таблица 2

Амплитуда отклонения Время	25°	20°	15°	10°	5°
$t_{1,c}$					
$t_{2,c}$					
$t_{3,c}$					
$\bar{t},c$					

Таблица 3

Положение боковых грузов	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$\bar{t}$	$T$
1 риска					
2 риски					
3 риски					
4 риски					
5 рисок					
6 рисок					

Таблица 4

Риски	1	2	3	4	5	6
$R_{\text{верх}}$						
$R_{\text{ниж}}$						
$R_{\text{бок}}$						
$I_{\text{гр}}$						
I						
$l_{\text{пр эксп}}$						
$l_{\text{пр теор}}$						