1. Функции одной и нескольких переменных. Основные определения. Непрерывные функции. Равномерная непрерывность

- Определение: Если каждой точке $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из области $D \subset \mathbb{R}^n$ соответствует единственное число u, то говорят, что на D задана функция n переменных: $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- Непрерывность: Функция $f(P)$ называется непрерывной в точке P_0, если $\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$. Это означает, что приращение функции $\Delta f = f(P) - f(P_0)$ стремится к нулю, когда расстояние $\rho(P, P_0) \to 0$.
- Равномерная непрерывность: Функция $f(P)$ называется равномерно непрерывной на множестве D, если $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, такое, что для любых точек $P_1, P_2 \in D$, удовлетворяющих условию $\rho(P_1, P_2) < \delta$, выполняется неравенство $|f(P_1) - f(P_2)| < \epsilon$.

2. Частные производные. Касательная прямая и нормальная плоскость к кривой. Полное приращение и полный дифференциал. Геометрический смысл.

- Частная производная: $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$. Это скорость изменения функции по одному направлению.
- Касательная к кривой: Для кривой $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ уравнение касательной: $\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$.
- Нормальная плоскость: $x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$.
- Полный дифференциал: $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$.
- Геометрический смысл: Дифференциал функции в точке (x, y) равен приращению аппликаты касательной плоскости к графику функции в этой точке.

3. Дифференцирование сложной функции нескольких переменных. Производная функции, заданной параметрически

- Сложная функция: Если $z = f(u, v)$, где $u = \phi(x, y), v = \psi(x, y)$, то $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$.
- Параметрическая функция: Если y зависит от x через параметр t ($x = x(t), y = y(t)$), то первая производная $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, вторая $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

4. Формула конечных приращений. Инвариантность формы первого дифференциала

- Формула конечных приращений (Лагранжа): $f(P_1) - f(P_0) = \nabla f(P^*) \cdot P_0 \vec{P}_1$, где P^* — точка на отрезке $P_0 P_1$.
- Инвариантность: Форма дифференциала $df = f'_x dx + f'_y dy$ сохраняется независимо от того, являются ли x и y независимыми переменными или функциями других аргументов.

5. Производные высших порядков. Теорема о смешанных производных

- Определение: Производные второго и более порядков: $f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$, $f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$.
- Теорема (Шварца): Если смешанные производные непрерывны в точке, то они равны между собой: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

6. Дифференциалы высших порядков

- Определение: $d^2 z = d(dz)$. Если x, y — независимые переменные, то $d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$. В операторном виде: $d^n z = (dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y})^n z$.

7. Формула Тейлора для функции нескольких переменных

- Если функция $f(P)$ дифференцируема $n+1$ раз в окрестности точки P_0, то:$f(P) = f(P_0) + df(P_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(P_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(P_0) + R_n(P)$, где R_n — остаточный член.

8. Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия

- Необходимое условие: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ для всех i (точка P_0 — стационарная).
- Достаточное условие: Исследуется квадратичная форма $d^2 f(P_0)$. Если $d^2 f > 0$ — минимум; $d^2 f < 0$ — максимум; если форма знакопеременная — экстремума нет. (Для двух переменных используется определитель матрицы Гессе $D = f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2$).

9. Экстремумы функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции.

- Для нахождения глобального экстремума на замкнутом множестве D:
  - Найти значения в стационарных точках внутри D.
  - Исследовать функцию на границе области ∂D.
  - Выбрать наибольшее и наименьшее из полученных значений.

10. Функции, заданные неявно.
Производные от неявно заданной функции.

- Если $F(x, y, z) = 0$ задает $z = z(x, y)$, то при условии $F'_z \neq 0$:$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$.

11. Условный экстремум.
Метод неопределенных множителей Лагранжа.

- Задача: экстремум $f(x, y)$ при условии $\phi(x, y) = 0$.
- Метод Лагранжа: Составляется функция $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \phi(x, y)$. Условия экстремума: $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 0, \phi(x, y) = 0$.

12. Векторная функция скалярного аргумента. Касательная прямая и нормальная плоскость к кривой.

- $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. Производная $\vec{r}'(t)$ направлена по касательной.
- Уравнение касательной: $\vec{R} = \vec{r}(t_0) + u\vec{r}'(t_0)$.
- Уравнение нормальной плоскости: $(\vec{R} - \vec{r}(t_0)) \cdot \vec{r}'(t_0) = 0$.

13. Двойной интеграл.
    Свойства интегрируемых функций.

- Определение: $\iint_D f(x, y)dxdy = \lim_{\text{diam } \Delta_i \to 0} \sum f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$.
- Свойства: Линейность, аддитивность по области, теорема об оценке, монотонность.

14. Вычисление двойного интеграла. Теорема о среднем значении15.

- Вычисление: Сводится к повторному интегралу $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$.
- Теорема о среднем: $\iint_D f(x, y)dS = f(P^*) \cdot S$, где S — площадь области D, $P^* \in D$.

15. Криволинейные координаты. Якобиан. Вычисление площади.

- Переход к координатам (u, v): $x = x(u, v), y = y(u, v)$.
- Якобиан: $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$.
- Площадь: $S = \iint_{D'} |J|dudv$.

16. Замена переменных в двойном интеграле.

- $\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v))|J|dudv$.
- Частный случай (полярные координаты): $x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, |J| = \rho$.

17. Тройной интеграл.

- Определение: $\iiint_V f(x, y, z)dV$.
- Вычисление: $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz$.

18. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты19.

- Цилиндрические: $x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, z = z$. $J = \rho$.
- Сферические: $x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta$. $J = r^2 \sin \theta$.

19. Приложения кратных интегралов.

- Площадь: $S = \iint_D dxdy$.

- Объем: $V = \iiint_V dxdydz$.
- Масса: $M = \iiint_V f(x, y, z)dV$.
- Центр масс: $x_c = \frac{1}{M} \iiint_V xf(x, y, z)dV$.
- Момент инерции: $I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)f(x, y, z)dV$.

20. Длина кривой.

    Дифференциал длины дуги кривой.

- Декартовы координаты: $dl = \sqrt{1 + (y')^2}dx$. $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}dx$.
- Параметрически: $dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}dt$. $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}dt$.

21. Криволинейный интеграл первого рода.

- Связь с определенным интегралом: $\int_L f(P)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{(x')^2 + (y')^2}dt$.
- Полярные координаты: $dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}d\phi$.
- Приложения: Масса кривой $M = \int_L \delta(x, y)dl$, центр масс.

22. Криволинейный интеграл второго рода. Существование и вычисление.

- Определение: $\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \lim \sum (P\Delta x_i + Q\Delta y_i + R\Delta z_i)$.
- Вычисление: $\int_{t_1}^{t_2} [P(t)x'(t) + Q(t)y'(t) + R(t)z'(t)]dt$.

23. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода. Работа силового поля.

- Связь: $\int_L \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_L A_\tau dl$, где A_τ — проекция вектора на касательную.
- Работа: $W = \int_L F_x dx + F_y dy + F_z dz$.

24. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

    Для односвязной области следующие условия эквивалентны:

1. $\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0$ по любому замкнутому контуру.
2. Интеграл зависит только от начальной и конечной точек.
3. $\mathrm{rot}\ \vec{A} = 0$ (или $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ на плоскости).

25. Восстановление функции по её полному дифференциалу.

    Признак полного дифференциала.

- Выражение $Pdx + Qdy$ есть полный дифференциал du, если $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.
- Восстановление: $u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy$.

26. Теорема Грина.

- Связывает интеграл по замкнутому контуру L с двойным интегралом по области D: $\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$.

27. Скалярное поле.
    Производная по направлению.

- $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$, где $\cos\alpha, \dots$ — направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

28. Градиент скалярного поля. Свойства градиента.

- $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$.
- Свойства: Направлен по нормали к поверхности уровня; указывает направление максимального роста функции; $|\text{grad } u| = \max(\frac{\partial u}{\partial l})$.

29. Векторное поле. Дивергенция.
    Физический смысл.

- $\text{div } \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.
- Физический смысл: Плотность источников (при $\text{div} > 0$) или стоков (при $\text{div} < 0$) векторного поля в данной точке.

30. Ротор векторного поля. Физический смысл. Оператор Гамильтона.

- $\text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$.
- Физический смысл: Характеризует вращательную способность поля (завихренность).
- Оператор Гамильтона (набла): $\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$.

31. Односторонние и двусторонние поверхности. Ориентация.
    Площадь.

- Ориентация: Выбор определенной стороны поверхности (выбор направления нормали $\vec{n}$).
- Двусторонняя: Можно обойти по любому замкнутому пути, не меняя направления нормали (например, сфера).
- Площадь: $S = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}dxdy$.

32. Поверхностный интеграл первого рода.
    Приложения.

- $\iint_S f(P)dS = \iint_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}dxdy$.

- Приложения: Площадь поверхности, масса поверхности, моменты инерции.

33. Поверхностный интеграл второго рода.
    Связь между родами.

- Определение: Интеграл от потока вектора через сторону поверхности S: $\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$.
- Связь: $\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_S (\vec{A} \cdot \vec{n}) dS$, где $\vec{n}$ — единичная нормаль.

34. Вычисление поверхностного интеграла второго рода.
    Поток векторного поля.

- Вычисление: Сводится к двойному интегралу по проекции поверхности на координатные плоскости.
- Поток: $\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$.

35. Теорема Стокса.
    Приложение к криволинейному интегралу в пространстве.

- Циркуляция вектора по контуру L равна потоку его ротора через поверхность S, натянутую на этот контур:$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \mathrm{rot}\ \vec{A} \cdot d\vec{S}$.

36. Теорема Стокса в векторной форме.
    Инвариантное определение ротора.

- Векторная форма: $\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$.
- Инвариантное определение ротора: $(\mathrm{rot}\ \vec{A} \cdot \vec{n}) = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{r}$.

37. Теорема Остроградского-Гаусса.

- Связывает поток через замкнутую поверхность S с интегралом от дивергенции по объему V:$\oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dV$.

38. Теорема Остроградского-Гаусса в векторной форме.
    Инвариантное определение дивергенции.

- Векторная форма: $\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\ \vec{A} dV$.
- Инвариантное определение дивергенции: $\mathrm{div}\ \vec{A} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$.

39. Приложение формулы Остроградского-Гаусса.
    Теорема о независимости интеграла от поверхности.

- Если $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, то поток вектора через любую замкнутую поверхность равен нулю. Следовательно, поток через поверхность, натянутую на контур, не зависит от вида этой поверхности.

40. Потенциальное поле. Соленоидальное поле.
    Критерий соленоидальности.

- Потенциальное поле: $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$. Существует скаляр u (потенциал), такой что $\vec{A} = \operatorname{grad} u$.
- Соленоидальное поле: $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. В таком поле нет ни источников, ни стоков.
- Критерий соленоидальности: Поле соленоидально тогда и только тогда, когда поток через любую замкнутую поверхность равен нулю.