

Университет ИТМО

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

ТФКП

Лабораторная работа №2

Построение конформных отображений

Вариант:16

Выполнил:

Чжун Цзяцзюнь

Группа: Р3210

Преподаватель:

Богачёв Владимир Александрович

Санкт-Петербург 2025 г.

Содержание

1	Задание	2
2	Аналитическое описание множеств	2
2.1	Рисунок 5	2
2.2	Рисунок 6	2
3	Построение конформного отображения	3
3.1	Прямое отображение: $G_1 \rightarrow G_2$	3
3.1.1	Поворот на -90°	3
3.1.2	Возведение в квадрат	3
3.1.3	Поворот на 90°	3
3.1.4	Логарифмическое отображение	4
3.2	Итоговое прямое отображение	4
3.3	Обратное отображение: $G_2 \rightarrow G_1$	4
4	Программная реализация	4
4.1	Основные этапы программы	5
5	Результаты	5
5.1	Визуализация преобразований	5
5.2	Анализ результатов	5
6	Выводы	6

1 Задание

Для варианта 16 необходимо построить конформное отображение между:

- **Рисунок 5:** Угловая область
- **Рисунок 6:** Полоса на комплексной плоскости

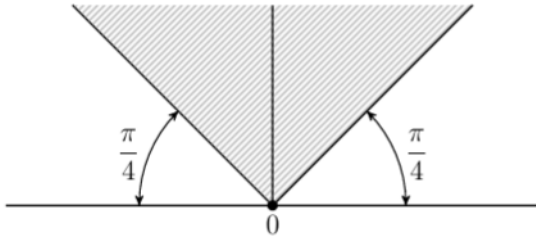


Рисунок 5

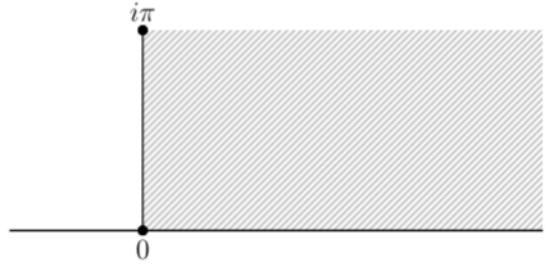


Рисунок 6

2 Аналитическое описание множеств

2.1 Рисунок 5

Исходная область представляет собой угловой сектор:

$$G_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}, |z| > 0 \right\} \quad (1)$$

Это сектор комплексной плоскости с углом раствора $\frac{\pi}{2}$ (от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{3\pi}{4}$), симметричный относительно положительной мнимой оси. В полярных координатах:

$$z = re^{i\theta}, \quad \text{где } r > 0, \quad \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4} \quad (2)$$

2.2 Рисунок 6

Целевая область представляет собой полуполосу:

$$G_2 = \{ w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) > 0, 0 < \operatorname{Im}(w) < \pi \} \quad (3)$$

Это горизонтальная полуполоса с вершиной в начале координат, ограниченная:

- Справа: уходит в бесконечность ($\operatorname{Re}(w) \rightarrow +\infty$)
- Снизу: действительной полуосью ($\operatorname{Im}(w) = 0, \operatorname{Re}(w) > 0$)
- Сверху: прямой $\operatorname{Im}(w) = \pi, \operatorname{Re}(w) > 0$
- Слева: мнимой полуосью от 0 до πi (не включая границу)

3 Построение конформного отображения

3.1 Прямое отображение: $G_1 \rightarrow G_2$

Для построения конформного отображения из G_1 в G_2 используем следующую композицию классических преобразований (соответствует комбинации из таблицы: №4 для возведения в степень, №16 для логарифма, с поворотами через умножение на $e^{i\theta}$).

3.1.1 Поворот на -90°

Применяем преобразование:

$$w_0 = -iz = e^{-i\pi/2}z \quad (4)$$

Действие:

- Угол $\arg(z)$ смещается на $-\pi/2$: если $\frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}$, то $-\frac{\pi}{4} < \arg(w_0) < \frac{\pi}{4}$
- Сектор становится симметричным относительно положительной вещественной оси

Получаем область:

$$G_0 = \left\{ w_0 \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{4} < \arg(w_0) < \frac{\pi}{4}, |w_0| > 0 \right\} \quad (5)$$

3.1.2 Возведение в квадрат

Применяем преобразование:

$$w_1 = w_0^2 \quad (6)$$

Действие:

- Угол $\arg(w_0)$ удваивается: $-\frac{\pi}{2} < \arg(w_1) < \frac{\pi}{2}$
- Радиус возводится в квадрат: $|w_1| = |w_0|^2$
- Сектор с углом $\frac{\pi}{2}$ преобразуется в правую полуплоскость ($\operatorname{Re}(w_1) > 0$)

Получаем область:

$$G'_1 = \{w_1 \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w_1) > 0\} \quad (7)$$

3.1.3 Поворот на 90°

Применяем преобразование:

$$w_2 = iw_1 = e^{i\pi/2}w_1 \quad (8)$$

Действие:

- Правая полуплоскость поворачивается на 90° и становится верхней полуплоскостью ($\operatorname{Im}(w_2) > 0$)
- Аргумент лежит в $(0, \pi)$

Получаем область:

$$G'_2 = \{w_2 \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(w_2) > 0\} \quad (9)$$

3.1.4 Логарифмическое отображение

Применяем преобразование:

$$w = \ln w_2 \quad (10)$$

где \ln — главная ветвь логарифма с $\arg \in (0, \pi)$. **Действие:**

- Верхняя полуплоскость отображается в горизонтальную полосу $0 < \operatorname{Im}(w) < \pi$
- Действительная часть: $\operatorname{Re}(w) = \ln |w_2|$, которая может быть от $-\infty$ до $+\infty$
- Для получения $\operatorname{Re}(w) > 0$ можно ограничить исходные точки $|z| > 1$, но поскольку области бесконечны, полуполоса является частью полной полосы

3.2 Итоговое прямое отображение

Композиция всех преобразований:

$$f(z) = \ln(i(-iz)^2) = \ln(-iz^2) = \ln(-i) + 2 \ln z = -i\frac{\pi}{2} + 2 \ln z \quad (11)$$

(с учётом ветви логарифма для $\arg \in (0, \pi)$).

3.3 Обратное отображение: $G_2 \rightarrow G_1$

Обратное отображение строится путём обращения каждого шага в обратном порядке с соответствующими ветвями:

1. Обратный логарифм: $v = e^w$
2. Обратный поворот (деление на i): $u = v/i = -iv$
3. Обратное возведение в квадрат (квадратный корень): $s = \sqrt{u}$, ветвь с $\operatorname{Re}(s) > 0$, $\arg(s) \in (-\pi/2, \pi/2)$
4. Обратный поворот (умножение на i): $z = is$

Итоговое обратное отображение:

$$f^{-1}(w) = i\sqrt{-ie^w} \quad (12)$$

где квадратный корень берётся с ветвью $\operatorname{Re} > 0$, а экспонента согласуется по ветвям.

4 Программная реализация

Программа реализована на языке Python с использованием библиотек `numpy` и `matplotlib`.

4.1 Основные этапы программы

1. **Генерация точек исходной области:** создаётся сетка точек в секторе $\frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}$ в полярных координатах (радиус от 0.1 до 3 для визуализации)
2. **Применение преобразований:** последовательно применяются все промежуточные отображения (поворот, квадрат, поворот, логарифм)
3. **Визуализация:** отрисовка исходной области, промежуточных результатов и финальной области с фильтрацией на $\operatorname{Re}(w) > 0$
4. **Визуализация сетки:** построение конформной сетки (радиальные линии и окружности) для наглядности сохранения углов

5 Результаты

5.1 Визуализация преобразований

На рисунках ниже представлены результаты применения конформных отображений:

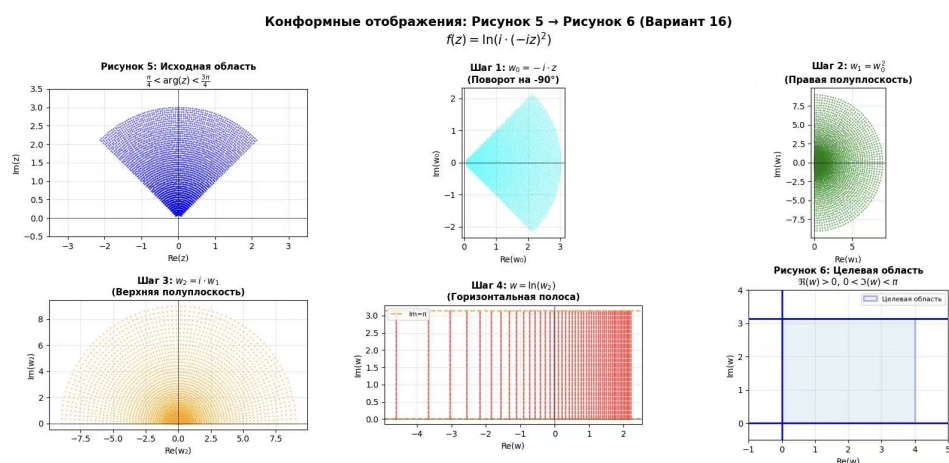


Рис. 1: Пошаговое конформное отображение области из Рисунка 5 в Рисунок 6

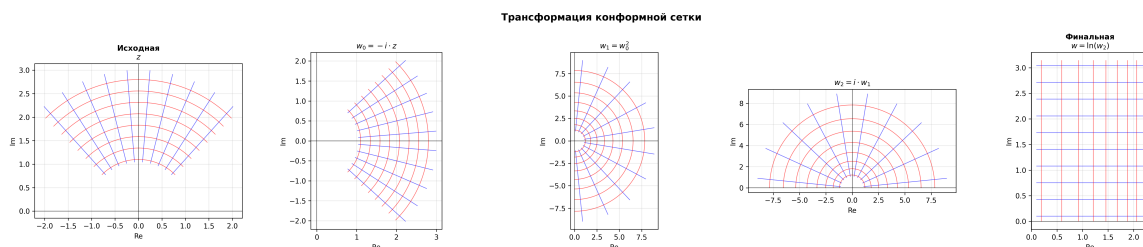


Рис. 2: Трансформация конформной сетки при отображениях

5.2 Анализ результатов

- Поворот $-iz$ симметризует сектор относительно вещественной оси

- Преобразование $w = z^2$ удваивает угол, преобразуя сектор с углом $\frac{\pi}{2}$ в правую полуплоскость
- Поворот iw переводит в верхнюю полуплоскость
- Логарифм $\ln w$ даёт горизонтальную полосу $0 < \text{Im}(w) < \pi$
- Конформная сетка показывает сохранение углов между кривыми при преобразованиях
- Радиальные линии исходной области преобразуются в горизонтальные линии в полосе, а угловые — в вертикальные
- Область корректно отображается из углового сектора в горизонтальную полосу (с $\text{Re}(w) > 0$ для $|z| > 1$)

6 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы:

1. Построено аналитическое описание заданных областей (Рисунок 5 и Рисунок 6)
2. Составлено конформное отображение из исходной области в целевую с использованием композиции классических преобразований
3. Получено обратное отображение
4. Реализована программа на Python для визуализации преобразований
5. Продемонстрировано сохранение конформной структуры при отображениях