

Весна ‘25. Предварительная волна. Вариант 1

1.1 Приведите пример линейной формы в пространстве полиномов

$f(p) = p(a) \quad a \in \mathbb{R}$

1.2 Как найти матрицу билинейной формы в некотором базисе

$\{e_i\}_1^n$  - базис. Тогда матрица билин. формы имеет вид  $\beta_{ij} = b(e_i, e_j)$

1.3 В чйм заключается смысл немого суммирования

Если в выражении встречается один и тот же индекс в верхнем и нижнем положении, то по нему подразумевается суммирование от 1 до n (где n — размерность пространства).

1.4 Как выглядит закон преобразования тензора типа (1, 1)

$T_j^i$ — компоненты тензора типа (1,1) в старом базисе,  
 $\overline{T_j^i}$ — компоненты этого же тензора в новом базисе,  
 $P = (P_k^i)$ — матрица перехода от старого базиса к новому,  
 $Q = P^{-1}$ — матрица перехода от нового базиса к старому,  
 $\overline{T_j^i} = P_k^i T_l^k Q_j^l$

1.5 Напишите закон преобразования матрицы оператора при смене базиса

Пусть  $\varphi \in \text{Hom}_K(V, W)$ , а в пространствах заданы базисы:

$V : \quad \{e_i\}_{i=1}^n \{e'_j\}_{j=1}^n$   
 $W : \quad \{g_k\}_{k=1}^m \{g'_l\}_{l=1}^m$

Причем известно, что  $T = \{t_{ij}\}$  — матрица перехода из базиса {e} в базис {e’}, а матрица  $S = \{s_{kl}\}$  — матрица перехода из базиса {g} в базис {g’}.

Матрица оператора при замене базисов преобразуется как  $A'_{\varphi} = S^{-1}AT$

2.1 Как связаны размерности ядра и образа оператора

$\dim_{\mathbb{K}} \ker \varphi + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } \varphi = \dim_{\mathbb{K}} V$

2.2 Найти собственные значения линейного оператора, матрица которого  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) = (1-\lambda)^2 - 2^2 = 0$   
 $(1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = 0$   
 $(-\lambda-1)(3-\lambda) = 0$   
 $\lambda = -1 \quad \lambda = 3$

2.3 Сформулируйте спектральную теорему для диаганализируемого оператора

Если линейный оператор А на конечномерном векторном пространстве диагонализирuem, то существует такой базис пространства, в котором матрица оператора А является диагональной, и её диагональные элементы — это собственные значения оператора.

2.4 Определите алегбраические и геометрические кратности собственных чисел оператора, если в жордановом базисе его матрица имеет вид  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

собственное число 1, алгебраическая кратность 3, геометрическая 1

2.5 Запишите матрицу полинома р(х) от диагональной матрицы А

$p(A_{\varphi}^D) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p(\lambda_i) \end{pmatrix}$

3.1 Каким образом из евклидова пространства можно получить нормированное

Евклидово пространство — частный случай нормированного пространства. Чтобы получить нормированное пространство из евклидова, достаточно использовать норму  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

3.2 Вычислите скалярное произведение векторов  $x = (1, 2)^T$  и  $y = (0, 3)^T$  в базисе, матрица Грама которого  $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 9$

3.3 Как найти коэффициенты Фурье вектора в ортонормированном базисе

В ортонормированном базисе координаты вектора находятся с помощью скалярного произведения. Если базис  $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$  ортонормированный, то для любого вектора v коэффициенты высчитываются как:

$c_i = \langle v, e_i \rangle$

3.4 Что такое сигнатура квадратичной формы

Сигнатура квадратичной формы - это набор из двух чисел (p, q), где p - число положительных собственных значений, q - число отрицательных собственных значений.

3.5 Сформулируйте свойства унитарного оператора в комплексном евклидовом пространстве

- 1. изометрия:  $\langle \psi_x, \psi_y \rangle = \langle x, y \rangle$
- 2. сохранение нормы:  $\| \psi_x \| = \| x \|^$
- 3. свойство сопряженного:  $\psi^{\dagger} = \psi^{-1}$

Весна ‘25. Предварительная волна. Вариант 2

1.1 Напишите определение линейной формы

Линейной формой на пространстве  $V$  называется такая функция  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ , что  $\forall v_1, v_2 \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$  выполняется:

- 1. Аддитивность:  $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
- 2. Однородность:  $f(\lambda v) = \lambda f(v)$

1.2 Пусть билинейная форма задана своей матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  в некотором базисе. Представьте её в виде суммы симметричной и антисимметричной компонент

$$\begin{aligned} b_S(x, y) &= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right) \\ b_S(x, y) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \\ b_S(x, y) &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3.5 & 2.5 \end{pmatrix} \\ b_{AS}(x, y) &= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right) \\ b_{AS}(x, y) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ b_{AS}(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \\ b(x, y) &= b_S + b_{AS} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3.5 & 2.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.3 Что является тензором линейной формы

Линейная форма  $\varphi \in V^*$  является ПЛФ валентности  $(1, 0)$   
Тензором полилинейной валентности  $(1, 0)$  является  $T_0^1(V)$   
Таким образом тензором линейной формы является ковариантный тензор ранга 1 — элемент сопряжённого пространства  $V^*$ .

1.4 Как может быть найден определитель квадратной матрицы с помощью символа Леви-Чевита

Пусть матрица  $A$  имеет размерность  $n \times n$ , тогда

$$\det A = \varepsilon_{i_1, i_2, \dots, i_n} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n}$$

1.5 Матрица линейного оператора  $\varphi$  в базисе  $e_1, e_2$  некоторого линейного пространства является матрица  $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ . Найдите матрицу линейного оператора базисе  $e'_1 = e_2, e'_2 = e_1 + e_2$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.1 Что такое ядро линейного оператора?

Ядро линейного оператора  $A : V \rightarrow W$  — это множество всех векторов из пространства  $V$ , которые оператор  $A$  переводит в нулевой вектор пространства  $W$

$$\ker A = \{v \in V \mid Av = 0_W\}$$

2.2 Сформулируйте определение собственного вектора и собственного значения оператора A

Ненулевой вектор  $x \in V$  называется собственным вектором оператора  $\varphi$ , если  $\varphi x = \lambda x$ . Число  $\lambda \in \mathbb{K}$  называется при этом собственным значением оператора  $\varphi$ , отвечающим собственному вектору  $x$ .

2.3 Сформулируйте критерии диагонализруемости оператора A

- 1. Оператор  $A$  диагонализруем тогда и только тогда, когда для каждого его собственного значения  $\lambda$  алгебраическая и геометрическая кратности равны
- 2. Характеристический многочлен раскладывается на линейные сомножители, то есть все его корни лежат в поле  $\mathbb{K}$

2.4 Определите алгебраические и геометрические кратности собственных чисел оператора, если в жордановом базисе его матрица имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- собственное число 0, алгебраическая кратность 2, геометрическая 1
- собственное число 1, алгебраическая кратность 1, геометрическая 1

2.5 Запишите матрицу полинома p(x) от диагональной матрицы A

$$p(A_\varphi^D) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

3.1 Какое пространство называется комплексным евклидовым пространством?

Линейное пространство  $X$  над  $\mathbb{C}$  называется комплексным евклидовым пространством, если на нем задана метрическая форма  $g(x, y) = \langle x, y \rangle$  со следующими свойствами:

- 1.  $\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \alpha \langle x, y_1 \rangle + \beta \langle x, y_2 \rangle$  - линейность по второму аргументу
- 2.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  - эрмитовость
- 3.  $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3.2 Приведите пример скалярного произведения в пространстве квадратных матриц

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$$

3.3 Как найти ортогональный проектор на подпространство, если задан ортонормированный базис

$$P_L(x) = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i$$

где  $e_i$  — ортонормированный базис подпространства  $L$

3.4 Запишите нормальный вид квадратичной формы в R, если её сигнатура  $(r_+, r_-) = (2, 3)$

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2$$

3.5 Каким свойством обладает матрица эрмитова оператора в ортонормированном базисе  
Если оператор  $T$  является эрмитовым, то в любом ортонормированном базисе его матрица  $A$  удовлетворяет:

$$A = A^*$$

где  $A^*$  — эрмитово сопряжённая

Весна ‘25. Предварительная волна. Вариант 3

1.1 Приведите пример линейной формы в пространстве геометрических векторов

$f(v) = \langle a, v \rangle$      $a$  – фиксированный вектор

1.2 Как найти антисимметричную компоненту билинейной формы

$b^{AS}(x, y) = \frac{1}{2}(b(x, y) - b(y, x))$

1.3 Какой валентностью обладает полилинейная форма валентности (p,q) после операции свёртки

$(p - 1, q - 1)$

1.4 Дайте определение символа Леви-Чевита

$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{если (i,j,k) - чётная перестановка} \\ -1 & \text{если (i,j,k) - нечётная перестановка} \\ 0 & \text{иначе (есть повторяющиеся индексы)} \end{cases}$

1.5 Напишите определение матрицы линейного оператора A в базисе {e1, e2, ..., en}

Матрицей линейного оператора A в этом базисе называется квадратная матрица A=(a<sub>ij</sub>) размера n×n, элементы которой определяются следующим образом:

$A(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i \quad \text{для} \quad j = 1, 2, ..., n$

2.1 Что такое ядро линейного оператора

Ядро линейного оператора  $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  — это множество всех векторов из пространства  $\mathbb{V}$ , которые оператор  $A$  переводит в нулевой вектор пространства  $\mathbb{W}$

$\ker A = \{v \in \mathbb{V} \mid Av = 0_{\mathbb{W}}\}$

2.2 Найти собственные значения линейного оператора, матрица которого  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) = (1-\lambda)^2 - 2^2 = 0$$
$$(1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = 0$$
$$(-\lambda-1)(3-\lambda) = 0$$
$$\lambda = -1 \quad \lambda = 3$$

2.3 Сформулируйте критерии диагонализруемости оператора A

- 1. Оператор A диагоналируем тогда и только тогда, когда для каждого его собственного значения  $\lambda$  алгебраическая и геометрическая кратности равны
- 2. Характеристический многочлен раскладывается на линейные сомножители, то есть все его корни лежат в поле  $\mathbb{K}$

2.4 Сформулируйте основную теорему о структуре нильпотентного оператора

Пусть N — нильпотентный оператор на  $\mathbb{V}$ . Тогда существует разложениепространства  $\mathbb{V}$  в прямую сумму циклических подпространств этого оператора  $\mathbb{V} = \oplus U_i$ . Количество слагаемых в таком разложении равно  $\dim \ker N$  .

2.5 Запишите матрицу полинома p(x) от диагональной матрицы A

$p\left(A_{\varphi}^D\right)=\left(\begin{array}{cccc} p\left(\lambda_1\right) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p\left(\lambda_2\right) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & p\left(\lambda_i\right) \end{array}\right)$

3.1 Сформулируйте определение метрического тензора

Пусть g - метрическая форма. Тогда совокупность чисел  $g_{ij} = g(e_i, e_j)$  называется метрическим тензором.

3.2 Пусть x1 и x2 - ортогональные векторы. При каких α и β выполняетсяравентво αx1 = βx2  
При α = β = 0

3.3 Какое подпространство называют ортогональным дополнением

Ортогональным дополнением пространства L называется множество  $M = \{x \in X : x \perp L\}$

3.4 Какому необходимому и достаточному условию должны удавоетворять главные миноры отрицательно определённой квадратичной формы

$(-1)^k D_k > 0 \quad \text{для всех} \quad k = 1, 2, ..., n$

где  $D_k$  — определитель  $k \times k$ -го верхнего левого блока (ведущего главного минора)

3.5 Сформулируйте определение унитарного оператора

Пусть  $\psi$  — опертор в евклидовом пространстве  $X_{\mathbb{E}}(K)$  является унитарным, если соблюдается хотя-бы одно (а как следствие и все остальные) из свойств:

- 1. изометрия:  $\langle \psi_x, \psi_y \rangle = \langle x, y \rangle$
- 2. сохранение нормы:  $\| \psi_x \| = \| x \|^$
- 3. свойство сопряженного:  $\psi^{\dagger} = \psi^{-1}$

Весна ‘25. Предварительная волна. Вариант 4

1.1 Напишите определение линейной формы

Линейной формой на пространстве  $V$  называется такая функция  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ , что  $\forall v_1, v_2 \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$  выполняется:

- 1. Аддитивность:  $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
- 2. Однородность:  $f(\lambda v) = \lambda f(v)$

1.2 Пусть билинейная форма задана своей матрицей  $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  в некотором базисе. Представьте её в виде суммы симметричной и антисимметричной формы

$$\begin{aligned} b_S &= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ b_S &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \\ b_S &= \begin{pmatrix} 2 & -1.5 \\ -1.5 & 1 \end{pmatrix} \\ b_{AS} &= \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ b_{AS} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} b_{AS} = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \\ b &= b_S + b_{AS} = \begin{pmatrix} 2 & -1.5 \\ -1.5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.3 В чйм заключается смысл немого суммирования

Если в выражении встречается один и тот же индекс в верхнем и нижнем положении, то по нему подразумевается суммирование от 1 до  $n$  (где  $n$  — размерность пространства).

1.4 Как выглядит закон преобразования тензора типа (2, 0)

$$\begin{aligned} T^{ij} &\text{— компоненты тензора } T \text{ в старом базисе,} \\ \overline{T^{pq}} &\text{— компоненты этого же тензора в новом базисе,} \\ P &= (P_k^i) \text{— матрица перехода от старого базиса к новому,} \\ \overline{T^{pq}} &= P_p^i P_p^j Q^{ij} \end{aligned}$$

1.5 Матрицей линейного оператора  $\varphi$  в базисе  $e_1, e_2$  некоторого линейного пространства является матрица  $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ . Найдите матрицу линейного оператора базисе  $e'_1 = 2e_1, e'_2 = e_2$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.1 Какую размерность имеет образ оператора  $\varphi$ , определённого в  $\mathbb{R}^4$ , если размерность ядра равна 2

2.2 Сформулируйте определение собственного вектора и собственного значения оператора  $A$   
Ненулевой вектор  $x \in V$  называется собственным вектором оператора  $\varphi$ , если  $\varphi x = \lambda x$ . Число  $\lambda \in \mathbb{K}$  называется при этом собственным значением оператора  $\varphi$ , отвечающим собственному вектору  $x$ .

2.3 Сформулируйте спектральную теорему для диаганолизируемого оператора  
Если линейный оператор  $A$  на конечномерном векторном пространстве диагонализирuem, то существует такой базис пространства, в котором матрица оператора  $A$  является диагональной, и её диагональные элементы — это собственные значения оператора.

2.4 Определите алгебраические и геометрические кратности собственных чисел оператора если в жордановом базисе его матрица имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

собственное число 0, алгебраическая кратность 2, геометрическая 1
собственное число 1, алгебраическая кратность 1, геометрическая 1

2.5 Найдите  $e^A$  если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$e^A = \begin{pmatrix} e & e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & e \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

3.1 Сформулируйте определение метрического тензора

Пусть  $g$  - метрическая форма. Тогда совокупность чисел  $g_{ij} = g(e_i, e_j)$  называется метрическим тензором.

3.2 Приведите пример скалярного произведения в пространстве квадратных матриц

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$$

3.3 Какое подпространство называют ортогональным дополнением

Ортогональным дополнением пространства  $L$  называется множество  $M = \{x \in X : x \perp L\}$

3.4 Запишите квадратичную форму по её матрице  $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

$$b(x, y) = 6x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_2 - 4x_2y_3 - x_3y_1 - 4x_3y_2$$

3.5 Сформулируйте свойства спектра ортогонального оператора в вещественном евклидовом пространстве

- 1. Модуль всех собственных значений равен 1
- 2. Ортогональный оператор диагонализирuem над  $\mathbb{R}$

Весна ‘25. Предварительная волна. Вариант 5

1.1 Что из себя представляют элементы сопряжённого пространства

Элементы сопряжённого пространства  $V^*$  — это линейные формы (или ковекторы), то есть все линейные отображения вида  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{F}$  где  $V$  — ваше исходное векторное пространство над полем  $\mathbb{F}$

1.2 Дайте определение квадратичной формы на линейном пространстве V

Квадратичной формой на линейном пространстве  $V_{\mathbb{K}}$  называется такая функция  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ , что  $\forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$  выполняется:

1. Линейность по первому аргументу:  $b(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 b(x_1, y) + \lambda_2 b(x_2, y)$
2. Линейность по второму аргументу:  $b(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 b(x, y_1) + \lambda_2 b(x, y_2)$

1.3 Сколько различных тензоров можно образовать с помощью свёртки тензора типа (2,2)

4

1.4 Какими свойствами обладает символ Кронакера

1. Симметричность
2. В случае ДПСК справедливо свойство:  $\delta_{ij} a^j = a_i$

1.5 Матрицей линейного оператора  $\varphi$  в базисе  $e_1, e_2$  некоторого линейного пространства является матрица  $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ . Найдите матрицу линейного оператора базисе  $e'_1 = 2e_1, e'_2 = e_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1 Что такое ядро линейного оператора

Ядро линейного оператора  $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  — это множество всех векторов из пространства  $\mathbb{V}$ , которые оператор  $A$  переводит в нулевой вектор пространства  $\mathbb{W}$

$$\ker A = \{v \in \mathbb{V} \mid Av = 0_{\mathbb{W}}\}$$

2.2 Найти собственные значения линейного оператора, матрица которого  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det \left( \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right) = (1-\lambda)^2 - 2^2 = 0 \\ (1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = 0 \\ (-\lambda-1)(3-\lambda) = 0 \\ \lambda = -1 \quad \lambda = 3$$

2.3 Линейный оператор  $f$  линейного пространства  $L^3$  в базисе  $e_1, e_2$  задан матрицей  $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Выясните, является ли он диагонализирuem

$$\det(A - \lambda I) = \det \left( \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right) = 0 \\ \det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = 0 \\ 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 2 = 0 \\ 6 - 5\lambda + \lambda^2 = 0 \\ \lambda_1 = 2 \text{ (алг. крат. 1)} \quad \lambda_2 = 3 \text{ (алг. крат. 1)}$$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{одна строка линейно зависима} \Rightarrow \dim \ker = 2 - 1 \Rightarrow \text{геом. крат. 1}$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{одна строка линейно зависима} \Rightarrow \dim \ker = 2 - 1 \Rightarrow \text{геом. крат. 1}$$

Да, является

2.4? Опишите 2 подхода к формированию жорданова базиса

Подход через цепочки обобщённых собственных векторов

1. Находим собственные значения  $\lambda$  из характеристического уравнения.
2. Для каждого  $\lambda$  строим последовательность ядер:  $\ker(A - \lambda I), \ker(A - \lambda I)^2, \dots$
3. Выбираем векторы из разности ядер:  $\ker(A - \lambda I)^k / \ker(A - \lambda I)^{k-1}$
4. Для каждого такого вектора строим цепочку:  $v, (A - \lambda I)v, \dots, (A - \lambda I)^{k-1}v$
5. Объединяя все цепочки, получаем Жорданов базис

Подход через разложение на инвариантные подпространства

1. Разбиваем пространство в сумму обобщённых собственных подпространств  $V = \bigoplus V_{\lambda}$
2. В каждом  $V_{\lambda}$  находим циклические векторы — такие, чьи образы под действием  $A$  порождают инвариантное подпространство
3. Строим базисы:  $\{v, Av, A^2v, \dots\}$
4. Полученные базисы соответствуют Жордановым блокам

2.5 Что такое операторный полином?

Операторный полином — это полином, в котором переменная заменена на линейный оператор.

3.1 Приведите произвольный пример нормы в пространстве квадратных матриц

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

3.2 Приведите пример скалярного произведения в пространстве полиномов степени не выше 3

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

3.3 Как найти ортогональный проектор на подпространство, если задан ортонормированный базис

$$P_L(x) = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i$$

где  $e_i$  — ортонормированный базис подпространства L

3.4 Какому необходимому и достаточному условию должны удавоетворять главные миноры отрицательно определённой квадратичной формы

$$(-1)^k D_k > 0 \quad \text{для всех} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

где  $D_k$  — определитель  $k \times k$ -го верхнего левого блока (ведущего главного минора)

3.5 Сформулируйте свойства унитарного оператора в комплексном евклидовом пространстве

1. изометрия:  $\langle \psi_x, \psi_y \rangle = \langle x, y \rangle$
2. сохранение нормы:  $\|\psi_x\| = \|x\|$
3. свойство сопряженного:  $\psi^\dagger = \psi^{-1}$