1. 线性操作符

(a) 线性操作符定义

线性操作符是映射 $\varphi: V \to W$，在线性空间 V 和 W 之间（定义在域 P 上），满足以下条件：

- $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
- $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$

对于所有 $x, y \in V$，$\alpha \in P$。

(b) 操作符的像

操作符的像 ($\mathrm{Im}\ \varphi$) 是操作符值的集合：

$\mathrm{Im}\ \varphi = \{\varphi(x) \mid x \in V\}$

(c) 操作符的核

操作符的核 ($\mathrm{Ker}\ \varphi$) 是被操作符映射为零的向量集合：

$\mathrm{Ker}\ \varphi = \{x \in V \mid \varphi(x) = 0\}$

(d) 维数关系（秩-零化度定理）

如果 V 是有限维的：

$\dim(\mathrm{Ker}\ \varphi) + \dim(\mathrm{Im}\ \varphi) = \dim V$

(e) 实例计算

对于 $\varphi: R^4 \to R^4$，如果 $\dim(\mathrm{Ker}\ \varphi) = 2$：

$\dim(\mathrm{Im}\ \varphi) = \dim R^4 - \dim(\mathrm{Ker}\ \varphi) = 4 - 2 = 2$

(f) 线性操作符的矩阵

在基 $e_1, \ldots, e_n$ 中，线性操作符 A 的矩阵为 $A = (a_{ij})$，其中第 j 列的元素是向量 $\varphi(e_j)$ 在此基中的坐标：

$\varphi(e_j) = \Sigma_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$

(g) 微分操作符矩阵

在 $R[x]_{\le 2}$ 中，基为 $\{1, x, x^2\}$，微分操作符的矩阵：

- $\varphi(1) = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$
- $\varphi(x) = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$
- $\varphi(x^2) = 2x = 0\cdot 1 + 2\cdot x + 0\cdot x^2$

矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 基变换

(a) 第一个例子

给定操作符在基 e_1, e_2 中的矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

新基：$e_1' = e_2, e_2' = e_1 + e_2$

转换矩阵 P（列为新基向量在旧基中的坐标）：

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

新操作符矩阵：

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) 第二个例子

给定操作符矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

新基：$e_1' = 2e_1$, $e_2' = e_2$

转换矩阵：

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

新操作符矩阵：

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1/2 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) 第三个例子

给定操作符矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

新基：$e_1' = e_2$, $e_2' = 2e_1$

转换矩阵：

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

新操作符矩阵：

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(d) 操作符矩阵变换定律

当基通过转换矩阵 P 改变时，操作符矩阵 A 按以下公式变换：

$A' = P^{-1}AP$

3. 特征值和特征向量

(a) 定义

特征向量 $x \neq 0$ 和特征值 λ 满足：

$Ax = \lambda x$

(b) 重数定义

- 代数重数 $\mu(\lambda)$：λ 在特征方程中的重数
- 几何重数 $\gamma(\lambda)$：特征子空间 $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ 的维数

(c) 线性无关性

具有不同特征值的特征向量 x_1 和 x_2 线性无关。

(d) 特征向量的线性组合

向量 $\alpha x + \beta y$ 是特征向量，当且仅当 x 和 y 属于同一特征值 λ。

(e) 证明

设 x 和 y 是不同特征值 λ 和 μ 的特征向量。假设 $\alpha x + \beta y$ 是特征值为 v 的特征向量：

$A(\alpha x + \beta y) = v(\alpha x + \beta y) \Longrightarrow \alpha\lambda x + \beta\mu y = v\alpha x + v\beta y$

由于 x 和 y 线性无关，得到 $\lambda = v$ 且 $\mu = v$，这与假设矛盾。

(f) 特征值计算示例

对于矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}:$$

特征方程：$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

根：$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$

(g) 矩阵的迹

对于矩阵

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

特征值之和等于矩阵的迹：4 + 1 + 3 = 8

4. 对角化

(a) 对角化准则

操作符可对角化当且仅当：

1. 特征多项式完全分解为线性因子
2. 对每个特征值 λ：$\gamma(\lambda) = \mu(\lambda)$

(b) 谱定理

如果操作符可对角化，则空间分解为特征子空间的直和。

(c) 特征向量求解

特征值 λ 的特征向量通过求解系统 $(A - \lambda I)x = 0$ 找到。

(d) 幂等性

操作符 P 是幂等的，如果 $P^2 = P$。

(e) 矩阵示例

对于矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

特征值 $\lambda_1 = 1$（代数重数1，几何重数1），$\lambda_2 = 0$（同样）。操作符可对角化。

(f) 单位矩阵

矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 已经是对角形式，因此可对角化。

(g) 一般矩阵示例

对于矩阵

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

特征方程：$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$，根为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$。
几何重数都等于1（$A - \lambda I$ 的核的维数为1）。操作符可对角化。

5. 幂零操作符和Jordan形式

(a) 幂零操作符

幂零操作符 N：存在 k 使得 $N^k = 0$。最小的这样的 k 是幂零度。

(b) 结构定理

对于幂零操作符，存在Jordan基，其中矩阵由对角线为零的Jordan块组成。

(c) Jordan标准形式

块对角矩阵，每个块（Jordan块）形式为：

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

(d) Jordan基构造方法

1. 对每个 λ 找到广义特征向量链
2. 使用根子空间的直和分解

(e) 矩阵示例

对于矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 特征值 λ = 0：代数重数2（2×2块），几何重数1（A - 0·I 的核维数为1）
- 特征值 λ = 1：代数重数1，几何重数1

(f) 另一个示例

对于矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

特征值 λ = 1：代数重数3（一个3×3块），几何重数1（A - I 的核维数为1）。

6. 度量和赋范空间

(a) 度量空间性质

度量空间 (X, ρ) 满足：

1. $\rho(x, y) \geq 0$，$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

(b) 赋范空间性质

赋范空间 (V, ‖·‖) 满足：

1. $\|x\| \geq 0$，$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\cdot\|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(c) 从范数导出度量

$\rho(x, y) = \|x - y\|$

(d) 从欧几里得空间导出范数

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

(e) 矩阵空间中的范数示例

在 $R^{n\times n}$ 中的Frobenius范数：

$\|A\|\_F = \sqrt{(\Sigma_{i,j} |a_{ij}|^2)}$

7. 欧几里得空间

(a) 实欧几里得空间

R 上的线性空间，具有对称正定双线性形式 $\langle\cdot, \cdot\rangle$。

(b) 复欧几里得空间（酉空间）

C 上的线性空间，具有埃尔米特正定形式 $\langle\cdot, \cdot\rangle$。

(c) Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz不等式

$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$

等号成立 $\Leftrightarrow$ x 和 y 线性相关。

(d) 度量张量

Gram矩阵 $G = (g_{ij})$，其中 $g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$。

(e) 矩阵的标量积示例

$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$

(f) 多项式的标量积示例

对于次数 ≤ 3 的多项式：

$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$

(g) 标量积计算

向量 $x = (1, 2)^T$，$y = (0, 3)^T$，Gram矩阵 $G = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$：

$$\langle x, y\rangle = x^T G y = (1\ 2)\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)\begin{pmatrix} 3/2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1\cdot 3/2 + 2\cdot 3 = 9/2$$

8. 正交基

(a) 标准正交基

$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$

(b) 正交基

$\langle e_i, e_j\rangle = 0$ 当 $i \neq j$

(c) 标准正交基中的Gram矩阵

$G = I$（单位矩阵）

(d) 正交基中的Gram矩阵

对角矩阵

(e) 正交向量的条件

如果 $x_1, x_2 \neq 0$ 且正交，则对于 $\alpha x_1 = \beta x_2$，必须 $\alpha = \beta = 0$。

(f) 向量正交化

向量 $v_1 = (1, 2, 1)^T$，$v_2 = (2, -1, 0)^T$，$v_3 = (1, 0, 0)^T$：

1. $u_1 = v_1 = (1, 2, 1)^T$
2. $u_2 = v_2 - (\langle v_2, u_1\rangle/\langle u_1, u_1\rangle)u_1 = (2, -1, 0)^T - (0/6)u_1 = (2, -1, 0)^T$
3. $u_3 = v_3 - (\langle v_3, u_1\rangle/\langle u_1, u_1\rangle)u_1 - (\langle v_3, u_2\rangle/\langle u_2, u_2\rangle)u_2$
   $= (1, 0, 0)^T - (1/6)(1, 2, 1)^T - (2/5)(2, -1, 0)^T$
   $= (1/30, -4/15, -1/6)^T$

标准化：

- $e_1 = u_1/\|u_1\| = (1/\sqrt{6})(1, 2, 1)^T$
- $e_2 = u_2/\|u_2\| = (1/\sqrt{5})(2, -1, 0)^T$
- $e_3 = u_3/\|u_3\| = (1/\sqrt{(1/30)})(1/30, -4/15, -1/6)^T$

(g) 其他向量组的正交化

对向量 $(1, 2, 1)^T$，$(-2, 1, 0)^T$，$(0, 0, 1)^T$ 进行类似处理。

9. 正交子空间

(a) 正交子空间定义

子空间 U 和 V 正交，如果 $\forall u \in U, v \in V$：$\langle u, v\rangle = 0$。

(b) 正交补

$U\perp = \{v \mid \langle v, u\rangle = 0 \ \forall u \in U\}$

(c) 垂足问题（向量在子空间上的投影）

如果 U 有标准正交基 $\{e_1, ..., e_k\}$，则向量 x 在 U 上的投影：

$\text{proj\_U}\ x = \Sigma_{i=1}^k \langle x, e_i\rangle e_i$

(d) 正交投影算子

在标准正交基 $\{e_1, ..., e_k\}$ 的子空间 U 上的投影算子矩阵：

$P = \Sigma_{i=1}^k e_ie_i^T$

(e) Fourier系数

向量 x 在标准正交基 $\{e_i\}$ 中的Fourier系数：

$c_i = \langle x, e_i \rangle$

10. 埃尔米特和酉算子

(a) 埃尔米特算子（自伴算子）

$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$

(b) 埃尔米特算子的谱性质

1. 特征值是实数
2. 特征向量正交

(c) 标准正交基中埃尔米特算子的矩阵

埃尔米特矩阵（$A = A^*$）

(d) 酉算子

保持标量积：$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$

(e) R^n中正交算子的谱性质

1. 特征值模长为1
2. 复特征值成对共轭出现

(f) C^n中酉算子的谱性质

特征值在单位圆上

(g) 正交算子的行列式

$|\det Q| = 1$

(h) 酉算子的行列式

$|\det U| = 1$

(i) 标准正交基中伴随算子的矩阵

对于算子 A，其伴随 A*（共轭转置）

11. 线性形式和对偶基

(a) 线性形式

线性泛函 $f: V \to P$

(b) 对偶基算法

找到对偶基 $\{f_1, ..., f_n\}$ 对应基 $\{e_1, ..., e_n\}$：
解系统 $f_i(e_j) = \delta_{ij}$

(c) 对偶基关系

$f_i(e_j) = \delta_{ij}$

(d) 对偶空间

V* 的元素是 V 上的线性形式

(e) 对偶基示例

对于 $e_1 = (1, 1)^T$，$e_2 = (0, 1)^T$：

- $f_1(x, y) = x$
- $f_2(x, y) = -x + y$

(f) 另一个对偶基示例

对于 $e_1 = (2, 1)^T$，$e_2 = (1, 2)^T$：

- $f_1(x, y) = (2/3)x - (1/3)y$
- $f_2(x, y) = -(1/3)x + (2/3)y$

(g) 几何向量的线性形式示例

$f(v) = v \cdot n$（向量 n 上的投影）

(h) 矩阵的线性形式示例

$f(A) = tr(A)$

(i) 多项式的线性形式示例

$f(p) = p(0)$

12. 双线性形式

(a) 双线性形式定义

映射 $B: V \times V \to P$，对每个变量线性

(b) 基变换时的矩阵变换

如果 P 是转换矩阵，则新形式矩阵：$B' = P^T B P$

(c) 对称部分

$B_s(x, y) = (1/2)(B(x, y) + B(y, x))$

(d) 反对称部分

$B_a(x, y) = (1/2)(B(x, y) - B(y, x))$

(e) 基中双线性形式的矩阵

$b_{ij} = B(e_i, e_j)$

(f), (g) 需要具体矩阵（题目中未给出）

13. 二次形式

(a) 二次形式定义

齐次二次多项式：$Q(x) = B(x, x)$，其中 B 是对称双线性形式

(b) 符号差

(r_+, r_-) - 标准形式中正负系数的个数

(c) 符号差 (2, 3) 的标准形式

$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2$

(d) Sylvester准则

二次形式正定 ⟺ 所有主子式为正

(e) 二次形式示例

矩阵

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

的二次形式：

$Q(x) = 6x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_3 - 8x_2x_3$

(f) 正定性条件

形式 $k(x) = \lambda x_1^2 - 4x_1x_2 + (\lambda+3)x_2^2 + \lambda x_3^2$：

矩阵：

$$\begin{pmatrix} \lambda & -2 & 0 \\ -2 & \lambda+3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

主子式：

- $\Delta_1 = \lambda > 0$
- $\Delta_2 = \lambda(\lambda+3) - 4 > 0$
- $\Delta_3 = \lambda \cdot \Delta_2 > 0$

解：$\lambda > 1$

(g) 负定条件

奇数阶主子式 < 0，偶数阶主子式 > 0

14. 多线性形式和张量

(a) 多线性形式

映射 $F: V^k \to P$，对每个变量线性

(b) 运算

加法、数乘、张量积

(c) 张量作为多线性形式

(p, q) 型张量：$T: (V^*)^p \times V^g \to P$

(d) 张量基

$\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k}\}$

(e) 张量缩并

固定指标（协变和逆变）并求和

(f) (2, 2) 型张量的缩并数

4个（每对指标）

15. 张量

(a) 张量 $\omega^k{}_{ij}$ 的变换

$\omega'^k{}_{ij} = P^k{}_l P^{-1}{}_i{}^m P^{-1}{}_j{}^n \omega^l{}_{mn}$

(b) 张量 $\omega^{kl}{}_{ij}$ 的变换

$\omega'^{kl}{}_{ij} = P^k{}_m P^l{}_n P^{-1}{}_i{}^p P^{-1}{}_j{}^g \omega^{mn}{}_p{}^g$

(c) 张量 ω_{ijk} 的变换

$\omega'_{rst} = (P^{-1})_{ri}(P^{-1})_{sj}(P^{-1})_{tk}\omega_{ijk}$

(d) 4维空间中3价张量的分量数

$4^3 = 64$

(e) 对称化

$\mathrm{Sym}(\omega)_{i_1\ldots i_k} = (1/k!)\ \Sigma\_\sigma \in S_k\ \omega_{i\sigma(1)\ldots i\sigma(k)}$

(f) 反对称化

$\mathrm{Alt}(\omega)_{i_1\ldots i_k} = (1/k!)\ \Sigma\_\sigma \in S_k\ \mathrm{sgn}(\sigma)\omega_{i\sigma(1)\ldots i\sigma(k)}$

本文档包含了线性代数的核心概念，从基本的线性操作符到高级的张量理论，提供了完整的理论框架和计算示例。每个章节都包含了定义、定理、性质和具体的计算实例，适合深入学习线性代数的各个方面。