PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Ingeniería Biológica y Médica
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica
IBM2020 Introducción a la Biomecánica
Primer Semestre 2023

Tarea 3

Fecha de entrega: 28 de abril, 2023, 23:59.

Todos los desarrollos teóricos y códigos computacionales deben ser elaborados en forma individual. Cualquier uso de fuentes o herramientas externas al curso deben ser citadas correctamente. El desarrollo final **debe** ser escrito por usted. Los conceptos generales de los problemas pueden ser discutidos, pero las soluciones no deben ser comparadas. El informe debe contener todos los desarrollos teóricos, resultados numéricos, figuras y explicaciones pedidas para la tarea. Se considerará como parte de la evaluación de la tarea la correcta diagramación, redacción y presentación del informe, pudiendo descontarse hasta 2 puntos por este concepto. Esta tarea se rige bajo la política de atrasos del curso explicada en Canvas.

Todos los códigos deben ser desarrollados en Python y documentados en un Jupyter Notebook. Si necesita, puede también generar librerías auxiliares en formato `.py`. La entrega del informe es de forma electrónica mediante la plataforma Canvas. Se pedirá el informe en formato PDF con el título `tarea_01_apellido_nombre.pdf`. Además, se deberá subir cualquier archivo de código a la misma plataforma. **Incluya en su informe el número de horas dedicadas a esta tarea**.

Bonus: Si la nota final de su tarea es $>$ 5,5 y usted entrega su tarea escrita en LaTeXusando el template del curso, y además entrega el archivo `.tex` y las figuras utilizadas, se abonarán 0,5 puntos a la nota final de la tarea.

Problema 1: Lea detenidamente el artículo "Experimental characterization and model identification of the nonlinear compressible material behavior of lung parenchyma" [2]. Escriba un resumen del artículo — en sus palabras, y con una extensión máxima de una plana— que incluya objetivos, métodos y conclusiones relevantes. Procure que su resumen incluya, al menos, alguna descripción de un comportamiento mecánico particular de tejidos blandos visto en clases que se observó (o no se observó) en el tejido estudiado. Se evaluará que todos los puntos de este enunciado estén presentes en su respuesta.

Problema 2: El artículo anterior [2], propone un modelo hiperelástico compresible para describir el comportamiento mecánico del tejido pulmonar cuya densidad de energía de deformación es

$$W^{CM1}(\boldsymbol{C}) := c(I_1(\boldsymbol{C}) - 3) + \frac{c}{\beta}(I_3^{-\beta}(\boldsymbol{C}) - 1) + c_d(I_1(\boldsymbol{C}) - 3)^d \tag{CM1}$$

donde c, β, c_d y d son parámetros del modelo y los términos I_i, $i = 1, 2, 3$ representan los invariantes del tensor. Otros trabajos [1] han propuesto modelos mecánicos diferentes para el parénquima pulmonar, como por ejemplo la densidad de energía dada por

$$W^{CM2}(\boldsymbol{C}) := \frac{\mu}{2}(I_1(\boldsymbol{C}) - 3) + \frac{\lambda}{4}(I_3(\boldsymbol{C}) - 1) - \left(\mu + \frac{\lambda}{2}\right) \ln(\sqrt{I_3(\boldsymbol{C})} - 1 + \Phi_0) \tag{CM2}$$

donde μ y λ son parámetros del modelo y Φ_0 es un término de penalización que puede asumir constante. Para cada uno de estos modelos,

i) derive una expresión explícita en notación directa para el segundo tensor de Piola-Kirchoff $\boldsymbol{S}$ en función del tensor derecho de Cauchy-Green $\boldsymbol{C}$,

ii) derive una expresión explícita en notación directa para el primer tensor de Piola-Kirchoff $\boldsymbol{P}$ en función del tensor gradiente de deformación $\boldsymbol{F}$ y

iii) derive una expresión explícita en notación directa para el tensor de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ en función del tensor izquierdo de Cauchy-Green $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T$.

Problema 3: Como vimos en clases, la teoría de la hiperelasticidad se utiliza muchas veces para intentar capturar fenómenos observables en el laboratorio. Para unir estos dos mundos, necesitamos poder traducir la teoría en predicciones sobre lo que sucederá en un ensayo. En la siguiente tarea veremos cómo juntar el modelo con datos, pero por ahora nos enfocaremos en cómo reducir la complejidad del modelo hiperelástico al caso particular de un ensayo de laboratorio.
Suponga un ensayo uniaxial realizado sobre una muestra de parénquima pulmonar. Asumiendo que la dirección $\boldsymbol{X}_1$ coincide con el eje axial del ensayo, adoptar una base ortogonal como marco de referencia nos permite realizar las siguientes aproximaciones:

a) El tensor gradiente de deformación puede escribirse como

$$[\boldsymbol{F}] = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_T & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_T \end{pmatrix}.$$

b) El tensor de tensiones de Cauchy puede escribirse como

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considere los valores expuestos en la tabla para los parámetros del ejercicio anterior.

Berger et al. [1]	Birzle et al. [2]
$\mu = 280{,}8\,\text{Pa}$	$c = 286{,}61\,\text{Pa}$
$\lambda = 421{,}2\,\text{Pa}$	$c_d = 0{,}008238\,\text{Pa}$
$\Phi_0 = 0{,}99$	$\beta = 1{,}1738$
	$d = 6$

i) Construya una función en Python $\sigma_{11}(\lambda)$ que entregue la tensión axial como argumento del estiramiento axial para un ensayo de tracción simulado. Grafique esta función para cada modelo considerando el intervalo $\lambda \in [0{,}5, 2]$. En el desarrollo de estas funciones, llegará un momento en el que deberá estimar el valor de λ_T para cada valor posible de λ. Desde la teoría, puede llegar a una ecuación no lineal que relacione estas dos cantidades. Use el método de Newton para estimar λ_T en cada valor de λ para por usar ese valor en su función.

ii) Luego de desarrollar el problema anterior, habrá notado que las aproximaciones de la forma de los tensores se usan fuertemente. Argumente brevemente a favor o en contra de las aproximaciones a) y b) realizadas para el análisis del experimento. Comente qué podría motivar dichas aproximaciones, por qué resultan útiles y qué información podría perderse al realizarlas.

Referencias

[1] L. Berger, R. Bordas, K. Burrowes, V. Grau, S. Tavener, and D. Kay. A poroelastic model coupled to a fluid network with applications in lung modelling. *International journal for numerical methods in biomedical engineering*, 32(1), 2016.

[2] A. M. Birzle, C. Martin, L. Yoshihara, S. Uhlig, and W. A. Wall. Experimental characterization and model identification of the nonlinear compressible material behavior of lung parenchyma. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 77(July 2017):754–763, 2018. ISSN 18780180. doi: 10.1016/j.jmbbm.2017.08.001. URL `https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2017.08.001`.