



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE/IBM2020 Introducción a la Biomecánica

Tarea 1

Iván Vergara Lam
31 de marzo del 2023
Tiempo dedicado: 12 horas

Problema 1. Matemática tensorial

- i) Se busca demostrar que $\mathbf{A}^{-T} : \mathbf{A} = 3$

Para ello, se utiliza la propiedad de la contracción tensorial:

$$\mathbf{S} : \mathbf{T} := \text{tr}(\mathbf{S}^T \mathbf{T}) = S_{ij} T_{ij} \quad (1)$$

Reemplazando en la ecuación (1), se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-T} : \mathbf{A} &= \text{tr}((\mathbf{A}^{-T})^T \mathbf{A}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{I}) \end{aligned} \quad (2)$$

De la ecuación (2), se puede determinar que $\mathbf{A}^{-T} : \mathbf{A}$ corresponde a la traza del tensor identidad. Por lo tanto, en el espacio \mathbb{R}^n se tiene que:

$$\mathbf{A}^{-T} : \mathbf{A} = \text{tr}(\mathbf{I}) = n \quad (3)$$

Asumiendo $n = 3$,

$$\mathbf{A}^{-T} : \mathbf{A} = \text{tr}(\mathbf{I}) = 3$$

■

- ii) Se busca demostrar que $\nabla \cdot (u\mathbf{v}) = u\nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla u \cdot \mathbf{v}$.

Para ello, se utilizan las definiciones de producto punto y divergencia.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funciones regulares, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} u\mathbf{v} : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (u\mathbf{v})_i &= u\mathbf{v}_i \end{aligned} \quad (4)$$

La divergencia de \mathbf{v} se define por:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}_{i,i} \quad (5)$$

Mientras tanto, el gradiente de u se define por:

$$\nabla u = u_{,i} \quad (6)$$

De esta manera, se cumple que:

$$\nabla \cdot (u\mathbf{v}) = (u\mathbf{v})_{i,i} \quad (7)$$

Utilizando la expresión (4) en (7):

$$\nabla \cdot (u\mathbf{v}) = (u\mathbf{v}_i)_{,i} \quad (8)$$

Por regla del producto en la derivada, lo anterior se puede reescribir como:

$$(u\mathbf{v}_i)_{,i} = u\mathbf{v}_{i,i} + u_{,i}\mathbf{v}_i \quad (9)$$

Finalmente, reemplazando (5), (6) y (8) en (9), se obtiene:

$$\nabla \cdot (u\mathbf{v}) = u\nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla u \cdot \mathbf{v} \quad (10)$$

■

iii) Se busca demostrar que

$$\int_{\Omega} u \frac{dv}{dx} dx = (uv)|_a^b - \int_{\Omega} v \frac{du}{dx} dx$$

La regla del producto usual se define por:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \quad (11)$$

Restando $v \frac{du}{dx}$ a ambos lados de la ecuación (11), se obtiene:

$$u \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) - v \frac{du}{dx} \quad (12)$$

Integrando los términos la ecuación (12) sobre $\Omega = (a, b)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \frac{dv}{dx} dx &= \int_{\Omega} \frac{d}{dx}(uv) dx - \int_{\Omega} v \frac{du}{dx} dx \\ \int_{\Omega} u \frac{dv}{dx} dx &= \int_a^b \frac{d}{dx}(uv) dx - \int_{\Omega} v \frac{du}{dx} dx \end{aligned} \quad (13)$$

Por Teorema Fundamental del Cálculo, se cumple que:

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(uv) dx = (uv)|_a^b \quad (14)$$

Al reemplazar la expresión (14) en la ecuación (13), se obtiene:

$$\int_{\Omega} u \frac{dv}{dx} dx = (uv)|_a^b - \int_{\Omega} v \frac{du}{dx} dx$$

■

iv) Se busca demostrar que

$$\int_{\Omega} u \nabla \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla u d\mathbf{x}$$

Utilizando la identidad (10), e integrando sus términos sobre Ω , se obtiene:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (u\mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} u \nabla \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \quad (15)$$

Restando $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$ a ambos lados de la ecuación (15), se obtiene:

$$\int_{\Omega} u \nabla \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla \cdot (u\mathbf{v}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \quad (16)$$

Por Teorema de la Divergencia, se cumple que:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \nabla \cdot (u\mathbf{v})d\mathbf{x} &= \int_{\partial\Omega} u\mathbf{v}ds \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot (u\mathbf{v})d\mathbf{x} &= \int_{\partial\Omega} u\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}ds\end{aligned}\tag{17}$$

Donde \mathbf{n} es el vector normal a la superficie $\partial\Omega$.

Al reemplazar la expresión (17) en la ecuación (16), se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} u\nabla \cdot \mathbf{v}d\mathbf{x} &= \int_{\partial\Omega} u\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}ds - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{v}d\mathbf{x} \\ \int_{\Omega} u\nabla \cdot \mathbf{v}d\mathbf{x} &= \int_{\partial\Omega} u\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}ds - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla u d\mathbf{x}\end{aligned}$$

■

Problema 2. Deformación del ventrículo izquierdo

- i) En primer lugar, se calculó la configuración del ventrículo deformada mediante la aplicación del mapeo de deformaciones a la malla generada para la configuración no deformada. Posteriormente, se graficó la proyección en el plano XY de la configuración de referencia (no deformada) en gris claro y la configuración actual (deformada) en gris oscuro, el resultado se presenta en la Figura 1.

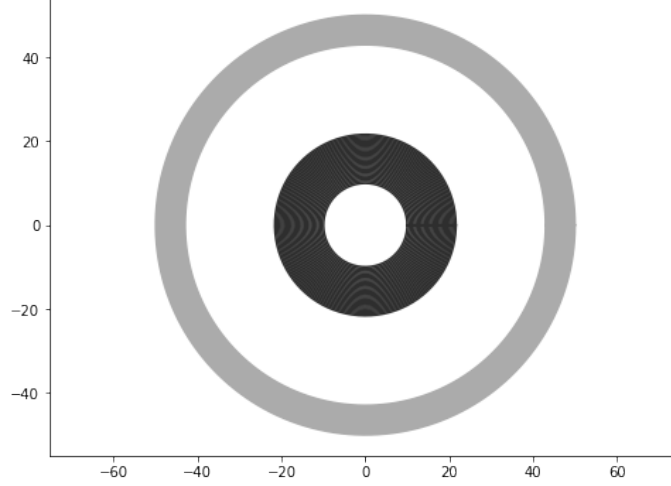


Figura 1: Configuraciones de referencia y actual

Se puede apreciar como la configuración deformada posee tanto un radio interno como externo menor, lo que hace sentido, debido a la presión negativa uniforme presente en el interior.

- ii) Para obtener los campos de las componentes E_{XX}, E_{YY}, E_{XY} sobre la configuración de referencia se calculó el tensor lagrangeano de deformaciones \mathbf{E} .

Para determinar \mathbf{E} se utilizó el tensor de deformaciones de Green-Lagrange en coordenadas cilíndricas \mathbf{E}_θ , al que se aplicó la siguiente transformación:

$$\mathbf{E} = \mathbf{Q}^T \mathbf{E}_\theta \mathbf{Q}$$

Donde \mathbf{Q} representa la siguiente matriz de cambio de coordenadas:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En cuanto al tensor de deformaciones de Green-Lagrange en coordenadas cilíndricas \mathbf{E}_θ , este fue determinado utilizando la siguiente expresión:

$$\mathbf{E}_\theta = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (18)$$

Donde \mathbf{F} corresponde al tensor gradiente de deformación en coordenadas polares, definido por:

$$[\mathbf{F}]_{t\theta z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial r}{\partial \Theta} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ r \frac{\partial \theta}{\partial R} & \frac{r}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} & r \frac{\partial \theta}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{1}{R} \frac{\partial z}{\partial \Theta} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix}$$

Utilizando los parámetros del problema, se tiene que:

$$[\mathbf{F}]_{t\theta z} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{B}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{B}{R^2} & 0 \\ -\frac{4B^2 Z}{\left(1 - \frac{B^2}{R^4}\right)^2 R^5} & 0 & \frac{1}{\left(1 - \frac{B^2}{R^4}\right)} \end{pmatrix}$$

De esta manera, los gráficos de los campos obtenidos corresponden a los siguientes.

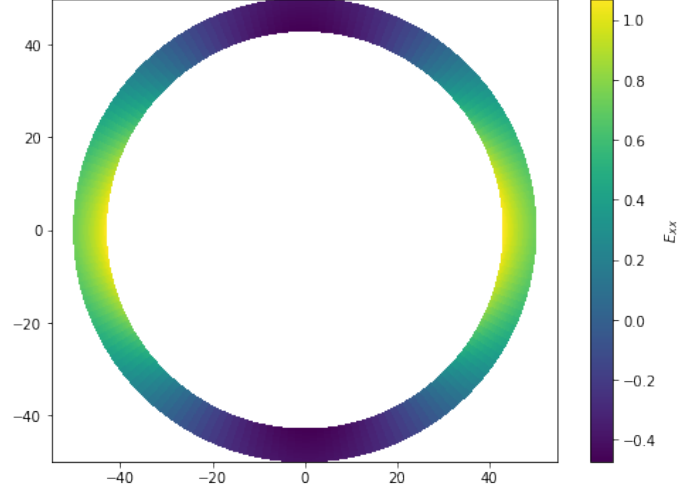


Figura 2: Componente E_{XX}

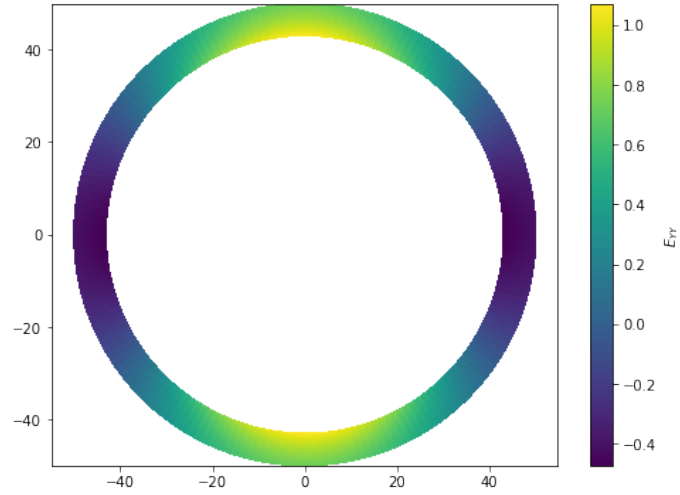


Figura 3: Componente E_{YY}

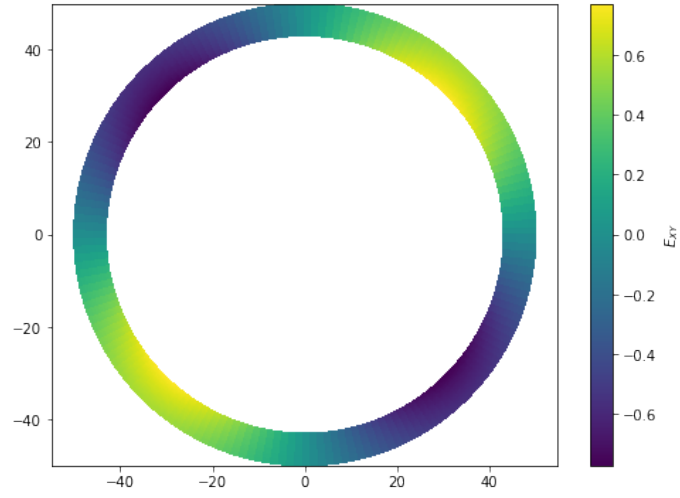


Figura 4: Componente E_{XY}

- iii) De manera similar, para graficar los campos de las componentes E_{RR} , $E_{\theta\theta}$, $E_{R\theta}$ sobre la configuración de referencia se utilizó el tensor de deformaciones de Green-Lagrange en coordenadas cilíndricas \mathbf{E}_θ descrito en la ecuación (18). Los gráficos obtenidos se presentan a continuación:

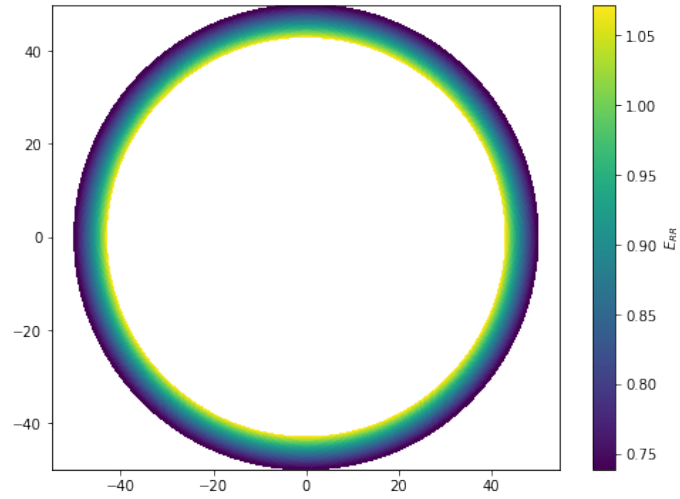


Figura 5: Componente E_{RR}

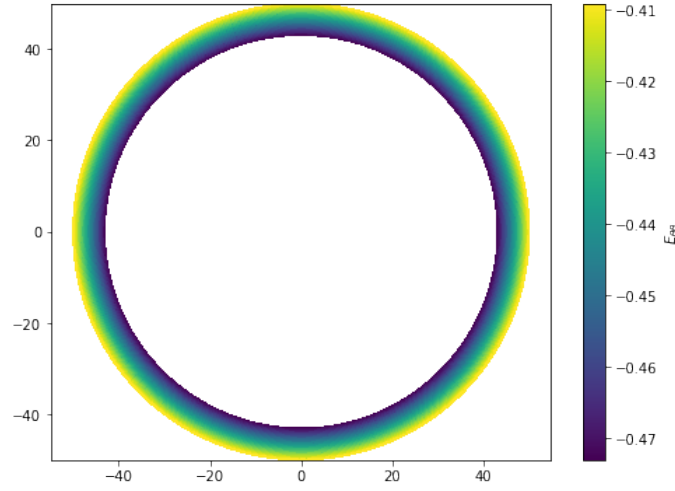


Figura 6: Componente $E_{\theta\theta}$

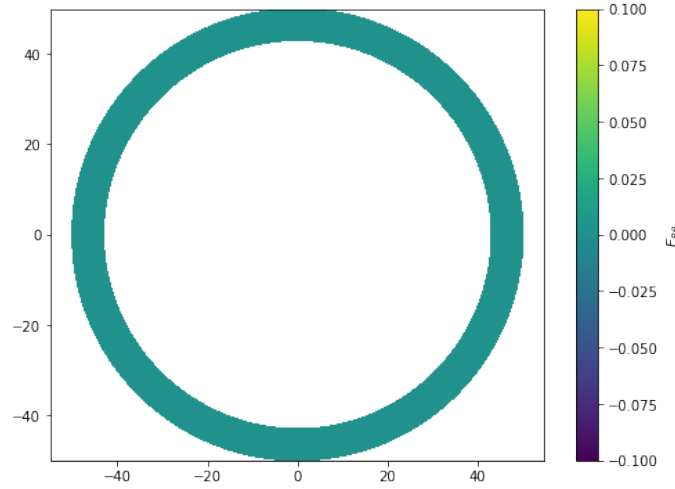


Figura 7: Componente $E_{R\theta}$

Se puede apreciar como los gráficos obtenidos en coordenadas cilíndricas poseen simetría radial, mientras que los gráficos obtenidos en coordenadas cartesianas presentan simetría axial. Además, en coordenadas cartesianas se presentan mayores deformaciones en el eje correspondiente a cada componente, es decir, la componente E_{XX} presenta mayores deformaciones en el eje X, mientras que la componente E_{YY} presenta mayores deformaciones en el eje Y. Otro aspecto importante se puede apreciar en el gráfico de la componente $E_{R\theta}$, el cual es completamente plano, con deformaciones iguales a 0 en todo el plano.

Nota: Los gráficos de los campos de las componentes fueron obtenidos utilizando un valor de $Z = 1$, para cambiar esto basta manipular la variable `zz` en el código fuente.

Problema 3. El artículo escogido corresponde a “*A hybrid patient-specific biomechanical model based image registration method for the motion estimation of lungs*”, publicado en 2017.

El artículo describe un método híbrido de registro de imágenes para la estimación del desplazamiento del pulmón en el proceso de inhalación y exhalación. El procedimiento realizado corresponde a un proceso de modelado biomecánico con un método de elementos finitos que estima el componente principal del campo de deformaciones a partir de una imagen original hacia una imagen objetivo, la que luego es utilizada para generar una imagen objetivo estimada. La imagen original corresponde al pulmón luego de exhalar, mientras que la imagen objetivo corresponde al pulmón luego de inhalar.

La precisión del procedimiento propuesto fue testeado utilizando *datasets* públicos de 10 pacientes con cáncer pulmonar. La parénquima pulmonar se asumió compresible, elástica no lineal, continua homogénea y descrita por un modelo Neo-Hookeano de dos parámetros, enunciado a continuación:

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{D_1}(J^{el} - 1)^2$$

Donde $\bar{I}_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ corresponde a la primera traza invariante del tensor derecho de deformación de Cauchy-Green, donde λ_i corresponden a las tensiones principales (Wikipedia contributors, 2023). J^{el} es el Jacobiano elástico, y C_{10} y D_1 son parámetros del material.

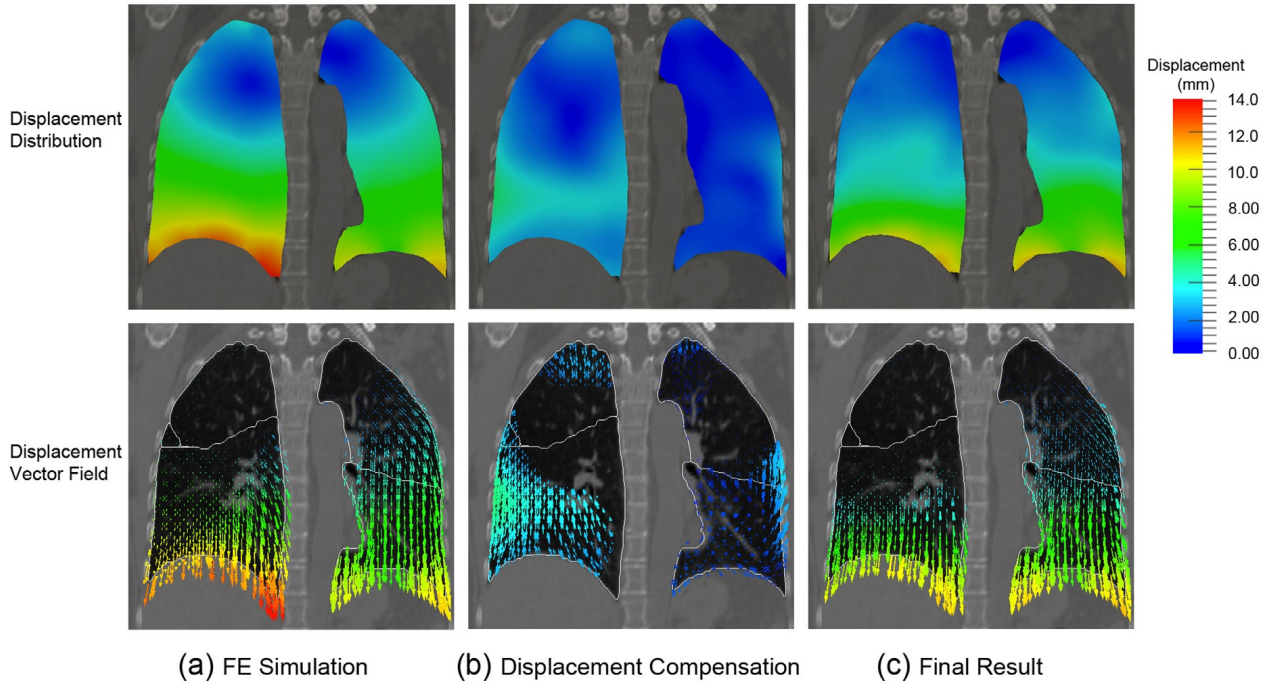


Figura 8: Deformación del pulmón

En la Figura 8 se puede apreciar la estimación del campo de desplazamiento para dos procesos consecutivos del método propuesto. En (a) se muestra el campo de desplazamientos estimado por el método de elementos finitos, (b) muestra la compensación del desplazamiento a partir del registro y (c) presenta el campo de desplazamientos final. La magnitud del desplazamiento varía entre 0.28 mm y 13.6 mm.

Finalmente, los resultados obtenidos por el método propuesto presentaron un error de registro objetivo (TRE por su sigla en inglés) de 1.37 mm, significativamente inferior a lo obtenido con métodos alternativos, como el modelado biomecánico (TRE = 3.81 mm) y el registro de imágenes sin consideración por el deslizamiento (TRE = 4.57 mm) (Han et al., 2017).

Referencias

- Han, L., Dong, H., McClelland, J. R., Han, L., Hawkes, D. J., & Barratt, D. C. (2017). A hybrid patient-specific biomechanical model based image registration method for the motion estimation of lungs. *Medical Image Analysis*, 39, 87-100. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.media.2017.04.003>
- Wikipedia contributors. (2023). Neo-Hookean solid. https://en.wikipedia.org/wiki/Neo-Hookean_solid

Anexo: Códigos

```
#!/usr/bin/env python
# coding: utf-8

## Tarea 1 - Introducción a la Biomecánica
### Pregunta 2

# Importación de librerías

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definición de parámetros

a = 43
b = 50

E = 0.3

P_i = -0.04
P_e = 0

# Definición de función B

B = (3 / (2 * E)) * ((a ** 2 * b ** 2) / (b ** 2 - a ** 2)) * (P_i - P_e)

# Creación de malla

R = np.linspace(a, b, 30)
T = np.linspace(0, 2 * np.pi, 180)
RR, TT = np.meshgrid(R, T)

# Ploteo sin deformación

XX = RR * np.cos(TT)
YY = RR * np.sin(TT)

fig = plt.figure(figsize=(8,6))
plt.plot(XX, YY, color='ABABAB')
plt.axis('equal')
plt.plot()

# Función de deformación

def phi(R, T):
    r = R + B / R
    t = T
    return r, t

# Creación de malla deformada

rr, tt = phi(RR, TT)

xx = rr * np.cos(tt)
yy = rr * np.sin(tt)

# Ploteo con deformación

fig = plt.figure(figsize=(8,6))
plt.plot(XX, YY, color='ABABAB')
plt.plot(xx, yy, color='2E2E2E')
plt.axis('equal')
plt.plot()

# Definición de tensores de deformación

E_rr = np.zeros(RR.shape)
E_tt = np.zeros(RR.shape)
E_rt = np.zeros(RR.shape)

E_xx = np.zeros(RR.shape)
E_yy = np.zeros(RR.shape)
E_xy = np.zeros(RR.shape)

# Definición de tensor gradiente de deformación

F = np.zeros((*RR.shape, 3, 3))
F.shape

# Parámetro Z

zz = 1

# Cálculo de tensores de deformación

for i in range(len(RR[:, 0])):
    for j in range(len(RR[0, :])):
        local_F = np.array([
            [1 - (B / RR[i, j] ** 2), 0, 0],
            [0, 1 + (B / RR[i, j] ** 2), 0],
            [-(4 * zz * B ** 2) / ((1 - (B ** 2 / RR[i, j] ** 4)) * RR[i, j] ** 5), 0, \
            1 / (1 - (B ** 2 / RR[i, j] ** 4))]
        ])
        F[i, j] = local_F

    Q = np.array([
        [np.cos(TT[i, j]), np.sin(TT[i, j]), 0],
        [-np.sin(TT[i, j]), np.cos(TT[i, j]), 0],
        [0, 0, 1]
    ])

    local_E = 1/2*(np.transpose(local_F) @ local_F - np.identity(len(local_F)))
    E_rr[i, j] = local_E[0, 0]
    E_tt[i, j] = local_E[1, 1]
    E_rt[i, j] = local_E[0, 1]

local_other_E = np.transpose(Q) @ local_E @ Q

E_xx[i, j] = local_other_E[0, 0]
E_yy[i, j] = local_other_E[1, 1]
E_xy[i, j] = local_other_E[0, 1]

# Ploteo de E_rr

fig = plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.pcolor(XX, YY, E_rr)
plt.colorbar(label = r'$E_{RR}$')
plt.axis('equal')
plt.plot()

# Ploteo de E_tt

fig = plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.pcolor(XX, YY, E_tt)
plt.colorbar(label = r'$E_{\theta\theta}$')
plt.axis('equal')
plt.plot()

# Ploteo de E_rt

fig = plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.pcolor(XX, YY, E_rt)
plt.colorbar(label = r'$E_{R\theta}$')
plt.axis('equal')
plt.plot()

# Ploteo de E_xx

fig = plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.pcolor(XX, YY, E_xx)
plt.colorbar(label = r'$E_{XX}$')
plt.axis('equal')
plt.plot()

# Ploteo de E_yy

fig = plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.pcolor(XX, YY, E_yy)
plt.colorbar(label = r'$E_{YY}$')
plt.axis('equal')
plt.plot()

# Ploteo de E_xy

fig = plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.pcolor(XX, YY, E_xy)
plt.colorbar(label = r'$E_{XY}$')
plt.axis('equal')
plt.plot()

#### Hecho con :heart: por Iván Vergara Lam
```