



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Ingeniería Biológica y Médica
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica
IBM2020 Introducción a la Biomecánica
Primer Semestre 2023

Tarea 2

Fecha de entrega: 14 de abril, 2023, 23:59.

Todos los desarrollos teóricos y códigos computacionales deben ser elaborados en forma individual. Cualquier uso de fuentes o herramientas externas al curso deben ser citadas correctamente. El desarrollo final **debe** ser escrito por usted. Los conceptos generales de los problemas pueden ser discutidos, pero las soluciones no deben ser comparadas. El informe debe contener todos los desarrollos teóricos, resultados numéricos, figuras y explicaciones pedidas para la tarea. Se considerará como parte de la evaluación de la tarea la correcta diagramación, redacción y presentación del informe, pudiendo descontarse hasta 2 puntos por este concepto. Esta tarea se rige bajo la política de atrasos del curso explicada en Canvas.

Todos los códigos deben ser desarrollados en Python y documentados en un Jupyter Notebook. Si necesita, puede también generar librerías auxiliares en formato `.py`. La entrega del informe es de forma electrónica mediante la plataforma Canvas. Se pedirá el informe en formato PDF con el título `tarea_01_apellido_nombre.pdf`. Además, se deberá subir cualquier archivo de código a la misma plataforma. **Incluya en su informe el número de horas dedicadas a esta tarea.**

Bonus: Si la nota final de su tarea es $> 5,5$ y usted entrega su tarea escrita en L^AT_EX usando el template del curso, y además entrega el archivo `.tex` y las figuras utilizadas, se abonarán 0,5 puntos a la nota final de la tarea.

A lo largo de esta tarea vamos a estudiar el flujo sanguíneo y el sistema cardiovascular.

Problema 1:

Comencemos con un caso de estudio. Para poder realizar cirugías a corazón abierto era necesario que la ingeniería biomédica fuese capaz de desarrollar un dispositivo que permitiera al cirujano trabajar en un corazón inactivo. Esta máquina es la que se conoce como *heart-lung machine* la cual es capaz de bombear y oxigenar la sangre dañando mínimamente las células dentro de esta. Para lograr mantener el flujo volumétrico deseado y las condiciones de la sangre es necesario conocer y estudiar los flujos dentro de las venas y arterias. Considere la bifurcación arterial de la Figura 1 que presenta una placa de aterosclerosis en una de sus ramas. Considere que las arterias tienen una sección circular con radio a , b y c como se indica en la Figura 1. La velocidad de entrada es

$$\mathbf{v}_1(r) = -k \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \mathbf{n}_1 \quad (1)$$

donde k es una constante, la coordenada radial r varía según $r \in [-a, a]$ ($r = 0$ corresponde al eje central) y \mathbf{n}_1 es la normal exterior a la sección de entrada. La velocidad de salida de la rama superior es

$$\mathbf{v}_2 = \bar{v}_2 \mathbf{n}_2 \quad (2)$$

donde $\bar{v}_2 \in \mathbb{R}$ es un valor conocido y corresponde a la rapidez de salida. Aquí \mathbf{n}_2 es el vector normal exterior a la sección de salida de la rama superior.

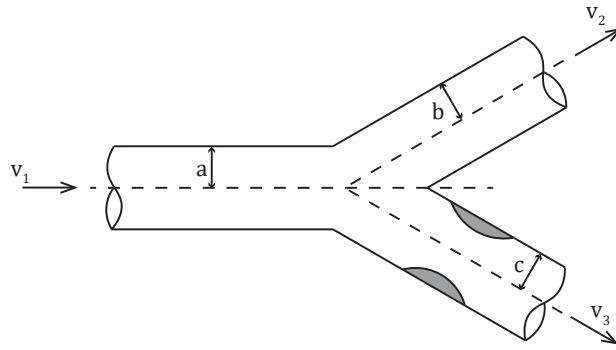


Figura 1: Bifurcación arterial con presencia de una placa de ateroesclerosis en una de las ramas

Suponga que

$$\mathbf{v}_3 = \bar{v}_3 \mathbf{n}_3 \quad (3)$$

donde $\bar{v}_3 \in \mathbb{R}$ y \mathbf{n}_3 es el vector normal exterior a la sección de salida de la rama inferior.

- i) Encuentre el valor de \bar{v}_3 que corresponde a la velocidad de salida de la rama inferior pasada la estenosis (angostamiento), es decir, en una sección con radio c .
- ii) Encuentre el valor de la rapidez de la sangre en donde el angostamiento es mayor. Considere que en este punto la sección sigue siendo circular y el radio de la arteria disminuye en un 25 % a lo normal. Compare con el valor de \bar{v}_3 calculado en i).
- iii) Una forma de tratar la ateroesclerosis es colocar un injerto vascular. Para asegurar que las suturas del injerto sean capaces de soportar es necesario calcular las fuerzas que se generarán debido al flujo de la sangre.

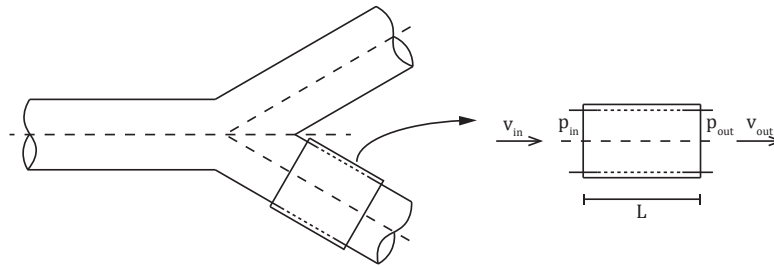


Figura 2: Injerto vascular en la rama inferior

Una vez insertado el injerto de largo $L \in \mathbb{R}$, de acuerdo a la Figura 2, se tiene que el perfil de velocidades de salida es

$$\mathbf{v}_{\text{out}} = k \left(1 - \frac{r^2}{c^2} \right) \mathbf{n}_3. \quad (4)$$

Se sabe que la velocidad de entrada es $\mathbf{v}_{\text{in}} = \bar{v}_{\text{in}} \mathbf{n}_3$ donde $\bar{v}_{\text{in}} \in \mathbb{R}$ es la rapidez de entrada al injerto. Además, p_{in} y p_{out} son las presiones medias en las respectivas secciones, de entrada y salida del injerto. Calcule la tensión de corte que se genera en el injerto.

Problema 2:

Pasemos a un estudio computacional de tensiones en vasos sanguíneos. Para simplificar todo, proyectaremos las geometrías tridimensionales a dos dimensiones. Así, el vaso sanguíneo será simplemente un rectángulo.

Imaginemos una sección de vaso sanguíneo con proyección bidimensional de su configuración material $B_0 = [0, L] \times [-h/2, h/2]$. Este vaso sanguíneo, cuando está en el cuerpo, se encuentra deformado para rodear un círculo. No nos interesará hoy qué fuerzas externas generan esta deformación. El mapeo de deformación en flexión circular con curvatura R , para deformaciones moderadamente grandes, está dado por

$$\begin{aligned} x_1 &= (X_2 + R) \sin \frac{\pi X_1}{L} \\ x_2 &= X_2 - (X_2 + R) \left(1 - \cos \frac{\pi X_1}{L} \right) \end{aligned}$$

Asumiremos que el vaso es un material neohookeano compresible, que significa que satisface la ecuación constitutiva

$$\mathbf{P} = \mu(\mathbf{F} - \mathbf{F}^{-T}) + \lambda \ln J \mathbf{F}^{-T}$$

con parámetros μ y λ .

Asumamos que $L = 10, h = 1, R = 10, \mu = 1, \lambda = 10$, sin considerar unidades.

- i) Grafique la proyección en el plano $X_1 X_2$ de la configuración de referencia (no-deformada) y la configuración actual (deformada), sobrepuestas.
- ii) Grafique los campos de las componentes P_{11}, P_{22}, P_{12} sobre la configuración de referencia.
- iii) Grafique los campos de las componentes $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ sobre la configuración actual, donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy. Compare estos resultados con el punto iii) y comente.
- iv) Sea $\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{N}$ la tracción material, donde \mathbf{N} es el vector tangente al eje neutro de cada sección transversal (no deformada). Grafique sobre la configuración material el campo $\|\mathbf{T}\|$ y el campo vectorial $\frac{1}{\|\mathbf{T}\|}\mathbf{T}$ en gráficos distintos. Escale el segundo gráfico para que sea visible la dirección del campo vectorial.
- v) Sea $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$ la tracción espacial, donde \mathbf{n} es el vector tangente al eje neutro de cada sección transversal (deformada). Grafique sobre la configuración espacial el campo $\|\mathbf{t}\|$ y el campo vectorial $\frac{1}{\|\mathbf{t}\|}\mathbf{t}$ en gráficos distintos. Escale el segundo gráfico para que sea visible la dirección del campo vectorial. Compare sus resultados con aquellos del punto iv) y comente.

Problema 3:

En los problemas anteriores asumimos perfiles parabólicos o uniformes en el flujo vascular y geometrías cilíndricas. En este problema estudiaremos la conservación de movimiento y cómo se pueden plantear distintos modelos a partir de ella con otros supuestos. Estos modelos son adecuados para geometrías mucho más generales, y pueden entregar perfiles de velocidad mucho más complejos. Por ahora solo los plantearemos, más adelante en el curso veremos cómo solucionar ecuaciones diferenciales parciales.

Sea $\boldsymbol{\varphi} : B_0 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ una descripción de movimiento que conserva la masa, el momento lineal y el momento angular, y sean $\rho(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ y $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ la densidad de masa euleriana, el vector de fuerzas de cuerpo euleriano y el tensor de Cauchy, respectivamente.

- i) Demuestre que para un fluido Newtoniano, i.e. $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d}$, que además es incompresible, la ecuación de equilibrio de momento lineal se reduce a la ecuación de Navier-Stokes. A saber,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} - \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Para hacer esto, considere la ecuación de conservación de moméntum lineal general y reemplace la expresión de un fluido Newtoniano en ella. En un momento se encontrará con la expresión $\text{div } \mathbf{d}$. Usando notación indicial, el teorema de Clairaut, la conservación de masa, y la definición de \mathbf{d} , demuestre que $\text{div } \mathbf{d} = \frac{1}{2}\Delta \mathbf{v}$. Luego simplifique hasta la ecuación final, usando notación indicial cuando le sea conveniente. La ecuación de Navier-Stokes modela, entre muchas otras cosas, el flujo sanguíneo en grandes arterias y el flujo del aire en las vías aéreas (el aire es un tipo de material).

- ii) Considere ahora un fluido del que no sabe mucho más que conserva masa, moméntum lineal y angular. Lo único adicional que puede asumir es que en cualquier sección del material, la tracción del fluido es paralela a la normal. Demuestre que existe un campo escalar $p(\mathbf{x}, t)$ tal que

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} \quad \forall \mathbf{x} \in \varphi(B_0, t). \quad (6)$$

Esta condición se traduce en que el material es incapaz de sostener tensiones de corte, y se conoce como fluido ideal o invíscido. Para hacer esta demostración, plantee la tracción en sección arbitraria del cuerpo y use el teorema de Cauchy. Luego de esta demostración puede comparar esta ecuación con la ecuación constitutiva de un fluido Newtoniano. Note que se puede deducir que esto implica que $\mu = 0$, entregando así el nombre de “invíscido”, o, sin viscosidad, al fluido ideal. Pocos biofluidos son invíscidos, y esto complica su modelamiento.

1. Use el resultado anterior para demostrar que la ecuación de movimiento de un fluido invíscido puede ser reducida a la ecuación de Euler,

$$-\nabla p + \rho \mathbf{b} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \right). \quad (7)$$

Para hacer esto, reemplace la relación constitutiva que acaba de demostrar en la ecuación de conservación de moméntum general y reduzca términos.

2. Volvamos a considerar un fluido Newtoniano incompresible. Suponga que el flujo es de tipo *creeping*, es decir que el número de Reynolds es “muy bajo”, o, analíticamente, que

$$\overline{(\rho \mathbf{v})} = 0. \quad (8)$$

Demuestre que en ese caso la ecuación de movimiento se puede reducir a la ecuación de Stokes

$$\mu \Delta \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{b} = 0. \quad (9)$$

Para hacer esto, desarrolle los términos de la condición y reemplace esto en la ecuación de Navier-Stokes. Los números de Reynolds muy bajos son característicos de flujos sanguíneos en capilares, y esta ecuación es utilizada para modelar dichos flujos.

3. Suponga por último que, además de flujo *creeping*, la fuerza viscosa es lineal (y biyectiva) a la velocidad, i.e. se tiene que

$$\mu \Delta \mathbf{v} = T(\mathbf{v}) \quad (10)$$

para alguna transformación lineal invertible T . Demuestre que en este último caso, si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, la ecuación de movimiento se reduce a la ley de Darcy

$$\mathbf{v} = \frac{-1}{\mu} \boldsymbol{\kappa} \nabla p \quad (11)$$

para algún tensor $\boldsymbol{\kappa}$ que debe definir. Esta ley modela flujos viscosos en medios porosos, como lo son los órganos perfundidos, el agua en la arena o el vapor condensando alrededor del café en cafeteras italianas. Aquí, $\boldsymbol{\kappa}$ es conocido como el tensor de permeabilidad, y sus componentes modulan la facilidad del fluido para atravesar el medio en el que se encuentra.