



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE/IBM2020 Introducción a la Biomecánica

Tarea 3

Iván Vergara Lam
30 de abril del 2023
Tiempo dedicado: 23 horas

Problema 1. Revisión de artículo (Birzle et al., 2018)

El artículo “*Experimental characterization and model identification of the nonlinear compressible material behavior of lung parenchyma*” presenta la problemática de que no existe un modelo apropiado ni se han realizado las mediciones para caracterizar de manera adecuada las propiedades mecánicas de la parénquima pulmonar, por lo que el estudio surge con el objetivo de llenar esos vacíos existentes en la literatura y presentar un modelo constitutivo a partir de la caracterización experimental.

Para simular las deformaciones que ocurren en la parénquima pulmonar se toman pequeñas secciones cortadas con precisión de tejido pulmonar de ratas, las que denominan PCLS. Las PCLS son posteriormente infiltradas con gelatina que se sitúa en una columna sobre ellas, distintas cantidades de gelatina al interior implican distintas variaciones volumétricas y de presiones al interior del tejido, por lo que se controlan las cantidades y se realizan distintas repeticiones para cada una de ellas. En cuanto al vaciado del tejido, lo que simularía la exhalación total, se agrega un medio a 37° C, lo que genera el derretimiento de la gelatina y, en consecuencia, la contracción del tejido. Con la información anterior se determinaron las relaciones entre presión y volumen y se describieron las deformaciones volumétricas a partir de la variación de las áreas de las PCLS.

Posteriormente, las PCLS sin gelatina son sometidos a tests de tensión uniaxial para caracterizar el comportamiento del material ante deformaciones volumétricas pequeñas. Los últimos experimentos fueron realizados para evaluar criterios que habían sido asumidos como ciertos o podían generar algún sesgo, como el estado de presiones igual a 0 posterior al vaciado de las PCLS, las diferencias dependiendo de las secciones pulmonares de origen de los tejidos y las variaciones generadas entre los tejidos de cada rata.

En cuanto al modelo constitutivo, se asume la parénquima pulmonar como un material isotrópico, por lo que se utiliza una función hiperelástica de esfuerzo-energía presentado en literatura de mecánica no lineal, que utiliza los invariantes del tensor derecho de Cauchy-Green \mathbf{C} . Como solo se presentan deformaciones volumétricas, el tensor gradiente de deformaciones no tiene componentes fuera de la diagonal, de manera particular, $\mathbf{F} = \lambda \mathbf{I}$, donde λ fue definido anteriormente como el estiramiento de las PCLS en una dirección. Respecto a los parámetros del modelo, estos fueron escogidos de manera que se ajustaran a los datos, generando una curva de tensión-deformación. Mayor profundización acerca de la matemática del modelo se puede encontrar en el Problema 2.

Por último, el comportamiento mecánico observado al cual se ajusta el modelo corresponde al de un material hiperelástico. Sin embargo, esto no se ajusta para las deformaciones volumétricas más pequeñas del experimento, lo que se puede observar en la curva que se ajusta a los datos después de la definición de parámetros, que es de la forma de una curva tensión-deformación de un material hiperelástico para todos los datos menos los primeros. Lo anterior es consistente con lo propuesto por el estudio, pero se debe tener en consideración que se menciona que la parénquima pulmonar es, en realidad, un material viscoelástico, por lo que se dejan abiertas las puertas para que se realicen más estudios y se propongan nuevos modelos que permitan comprender el comportamiento mecánico en procesos como el intercambio gaseoso.

Problema 2. Modelo mecánico del tejido pulmonar

Un modelo hiperelástico compresible (Birzle et al., 2018) para el comportamiento mecánico del tejido pulmonar describe la densidad de energía de deformación como

$$W^{\text{CM1}}(\mathbf{C}) := c(I_1(\mathbf{C}) - 3) + \frac{c}{\beta}(I_3^{-\beta}(\mathbf{C}) - 1) + c_d(I_1(\mathbf{C}) - 3)^d \quad (\text{CM1})$$

donde c, β, c_d y d son parámetros del modelo y los términos I_i , $i = 1, 2, 3$ representan los invariantes del tensor. Otros trabajos (Berger et al., 2016) han propuesto modelos mecánicos diferentes para el parénquima pulmonar, como es el caso de la densidad de energía dada por

$$W^{\text{CM2}}(\mathbf{C}) := \frac{\mu}{2}(I_1(\mathbf{C}) - 3) + \frac{\lambda}{4}(I_3(\mathbf{C}) - 1) - \left(\mu + \frac{\lambda}{2}\right) \ln \left(\sqrt{I_3(\mathbf{C})} - 1 + \Phi_0\right) \quad (\text{CM2})$$

donde μ y λ son parámetros del modelo y Φ_0 es un término de penalización que se asume constante.

- i) A partir de ambos modelos, se puede derivar una expresión para el segundo tensor de Piola-Kirchoff \mathbf{S} en función del tensor derecho de Cauchy-Green \mathbf{C} .

Para el desarrollo, se debe considerar que los invariantes de un tensor \mathbf{A} están determinados por:

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{A}) \quad I_2 = \frac{1}{2}((\text{tr}(\mathbf{A}))^2 - \text{tr}(\mathbf{A}^2)) \quad I_3 = \det(\mathbf{A})$$

En cuanto a sus derivadas, estas corresponden a:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{I} \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{A}} = I_1 \mathbf{I} - \mathbf{A}^T \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{A}} = \det(\mathbf{A}) \mathbf{A}^{-T}$$

Teniendo en consideración lo anterior, para el modelo (CM1) se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{C}) &= 2 \frac{\partial W^{\text{CM1}}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \\ \mathbf{S}(\mathbf{C}) &= 2 \left(c \left(\frac{\partial I_1(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} 3 \right) + \frac{c}{\beta} \left(\frac{\partial I_3^{-\beta}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} 1 \right) + c_d \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} (I_1(\mathbf{C}) - 3)^d \right) \\ \mathbf{S}(\mathbf{C}) &= 2 \left(c \mathbf{I} + \frac{c}{\beta} \cdot -\beta \frac{\det(\mathbf{C})^{-\beta}}{\det(\mathbf{C})} \cdot \det(\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-T} + c_d d (\text{tr}(\mathbf{C}) - 3)^{d-1} \mathbf{I} \right) \\ \mathbf{S}(\mathbf{C}) &= 2 (c \mathbf{I} - c \det(\mathbf{C})^{-\beta} \mathbf{C}^{-T} + c_d d (\text{tr}(\mathbf{C}) - 3)^{d-1} \mathbf{I}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{C}) &= 2 ((c + c_d d (\text{tr}(\mathbf{C}) - 3)^{d-1}) \mathbf{I} - c \det(\mathbf{C})^{-\beta} \mathbf{C}^{-T}) \end{aligned} \quad (1)$$

En cuanto al modelo (CM2), se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{C}) &= 2 \frac{\partial W^{\text{CM2}}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \\ \mathbf{S}(\mathbf{C}) &= 2 \left(\frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial I_1(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} 3 \right) + \frac{\lambda}{4} \left(\frac{\partial I_3(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} 1 \right) + \left(\mu + \frac{\lambda}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \ln \left(\sqrt{I_3(\mathbf{C})} - 1 + \Phi_0 \right) \right) \\ \mathbf{S}(\mathbf{C}) &= 2 \left(\frac{\mu}{2} \mathbf{I} + \frac{\lambda}{4} \det(\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-T} + \left(\mu + \frac{\lambda}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{C})} - 1 + \Phi_0} \frac{1}{2\sqrt{\det(\mathbf{C})}} \det(\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-T} \right) \\ \mathbf{S}(\mathbf{C}) &= \mu \mathbf{I} + \frac{\lambda}{2} \det(\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-T} + \left(\mu + \frac{\lambda}{2} \right) \frac{\sqrt{\det(\mathbf{C})}}{\sqrt{\det(\mathbf{C})} - 1 + \Phi_0} \mathbf{C}^{-T} \end{aligned} \quad (2)$$

- ii) Para determinar una expresión para el primer tensor de Piola-Kirchoff \mathbf{P} en función del tensor gradiente de deformación \mathbf{F} es necesario recordar que

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad \mathbf{P} = \mathbf{F} \mathbf{S}$$

De esta manera, utilizando la expresión (1), para el modelo (CM1) se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{F} \mathbf{S} \\ \mathbf{P} &= \mathbf{F} 2 \left((c + c_d d(\text{tr}(\mathbf{C}) - 3)^{d-1}) \mathbf{I} - c \det(\mathbf{C})^{-\beta} \mathbf{C}^{-T} \right) \\ \mathbf{P} &= 2\mathbf{F} \left((c + c_d d(\text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) - 3)^{d-1}) \mathbf{I} - c \det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-\beta} (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-T} \right) \\ \mathbf{P} &= 2 \left(c\mathbf{F} + c_d d(\text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) - 3)^{d-1} \mathbf{F} - c \det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-\beta} \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T}) \right) \\ \mathbf{P} &= 2 \left(c\mathbf{F} + c_d d(\text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) - 3)^{d-1} \mathbf{F} - c \det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-\beta} (\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T}) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

En cuanto al modelo (CM2), utilizando la expresión (2), se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{F} \mathbf{S} \\ \mathbf{P} &= \mathbf{F} \left(\mu \mathbf{I} + \frac{\lambda}{2} \det(\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-T} + \left(\mu + \frac{\lambda}{2} \right) \frac{\sqrt{\det(\mathbf{C})}}{\sqrt{\det(\mathbf{C})} - 1 + \Phi_0} \mathbf{C}^{-T} \right) \\ \mathbf{P} &= \mathbf{F} \left(\mu \mathbf{I} + \frac{\lambda}{2} \det(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-T} + \left(\mu + \frac{\lambda}{2} \right) \frac{\sqrt{\det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})}}{\sqrt{\det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})} - 1 + \Phi_0} (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-T} \right) \\ \mathbf{P} &= \mu \mathbf{F} + \frac{\lambda}{2} \det(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T}) + \left(\mu + \frac{\lambda}{2} \right) \frac{\sqrt{\det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})}}{\sqrt{\det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})} - 1 + \Phi_0} \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T}) \\ \mathbf{P} &= \mu \mathbf{F} + \frac{\lambda}{2} \det(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) (\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T}) + \left(\mu + \frac{\lambda}{2} \right) \frac{\sqrt{\det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})}}{\sqrt{\det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})} - 1 + \Phi_0} (\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T}) \end{aligned} \quad (4)$$

- iii) Por último, para encontrar una expresión para el tensor de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ en función del tensor izquierdo de Cauchy-Green $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$ se debe utilizar la relación

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^T$$

donde $J = \det(\mathbf{F}) = \sqrt{\det(\mathbf{C})}$.

De esta manera, utilizando la expresión (3), para el modelo (CM1) se tiene:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= J^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^T \\ \boldsymbol{\sigma} &= \frac{2}{\det(\mathbf{F})} \left(c\mathbf{F} + c_d d(\text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) - 3)^{d-1} \mathbf{F} - c \det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-\beta} (\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T}) \right) \mathbf{F}^T \\ \boldsymbol{\sigma} &= \frac{2}{\det(\mathbf{F})} \left(c\mathbf{F} \mathbf{F}^T + c_d d(\text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) - 3)^{d-1} \mathbf{F} \mathbf{F}^T - c \det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-\beta} (\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^T) \right) \\ \boldsymbol{\sigma} &= \frac{2}{\det(\mathbf{F})} \left((c + c_d d(\text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) - 3)^{d-1}) \mathbf{B} - c \det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-\beta} (\mathbf{F} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}^T) \right) \end{aligned} \quad (5)$$

En cuanto al modelo (CM2), utilizando la expresión (4), se tiene:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^T \\
\boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{\det(\mathbf{F})} \left(\mu \mathbf{F} + \frac{\lambda}{2} \det(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) (\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T}) + \left(\mu + \frac{\lambda}{2} \right) \frac{\sqrt{\det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})}}{\sqrt{\det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})} - 1 + \Phi_0} (\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T}) \right) \mathbf{F}^T \\
\boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{\det(\mathbf{F})} \left(\mu \mathbf{F} \mathbf{F}^T + \frac{\lambda}{2} \det(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) (\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^T) + \left(\mu + \frac{\lambda}{2} \right) \frac{\sqrt{\det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})}}{\sqrt{\det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})} - 1 + \Phi_0} (\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^T) \right) \\
\boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{\det(\mathbf{F})} \left(\mu \mathbf{B} + \frac{\lambda}{2} \det(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) (\mathbf{F} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}^T) + \left(\mu + \frac{\lambda}{2} \right) \frac{\sqrt{\det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})}}{\sqrt{\det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})} - 1 + \Phi_0} (\mathbf{F} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}^T) \right) \quad (6)
\end{aligned}$$

Problema 3. Modelo computacional

- i) Para cada uno de los dos modelos presentados, se pide construir una función σ_{11} que entregue la tensión axial como argumento del estiramiento axial para un ensayo de tracción simulado. Para ello, se emplea el siguiente marco de referencia:

$$[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_T & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_T \end{pmatrix} \quad [\boldsymbol{\sigma}] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La información que entrega el marco de referencia anterior, permite elaborar una igualdad al considerar $\sigma_{22} = 0$ y $\sigma_{33} = 0$, lo que permite el calculo aproximado de los valores de λ_T para cada λ empleando el método de Newton.

Además, para el cálculo numérico se consideran los valores de parámetros entregados en ambos artículo, los que se presentan en la Tabla 1:

Berger et al., 2016	Birzle et al., 2018
$\mu = 280,8 \text{ Pa}$	$c = 286,61 \text{ Pa}$
$\lambda = 421,2 \text{ Pa}$	$c_d = 0,008238 \text{ Pa}$
$\Phi_0 = 0,99$	$\beta = 1,1738$
	$d = 6$

Tabla 1: Valores de parámetros utilizados en los modelos

De esta manera, para el modelo (CM1) se tiene:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{2}{\det(\mathbf{F})} ((c + c_d d (\text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) - 3)^{d-1}) \mathbf{B} - c \det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-\beta} (\mathbf{F} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}^T)) \\ \sigma_{22} &= \frac{2}{\det(\mathbf{F})} ((c + c_d d (\text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) - 3)^{d-1}) B_{22} - c \det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-\beta} (\mathbf{F} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}^T)) \\ \sigma_{22} &= \frac{2}{\lambda \lambda_T^2} ((c + c_d d (\lambda^2 + 2\lambda_T^2 - 3)^{d-1}) \lambda_T - c (\lambda^2 \lambda_T^4)^{-\beta}) \\ 0 &= \frac{2}{\lambda \lambda_T^2} ((c + c_d d (\lambda^2 + 2\lambda_T^2 - 3)^{d-1}) \lambda_T - c (\lambda^2 \lambda_T^4)^{-\beta}) \end{aligned} \quad (7)$$

La expresión obtenida es entregada como argumento a la función `scipy.optimize.newton`, que permite obtener un valor aproximado de λ_T en función de λ . El gráfico obtenido se presenta en la Figura 1.

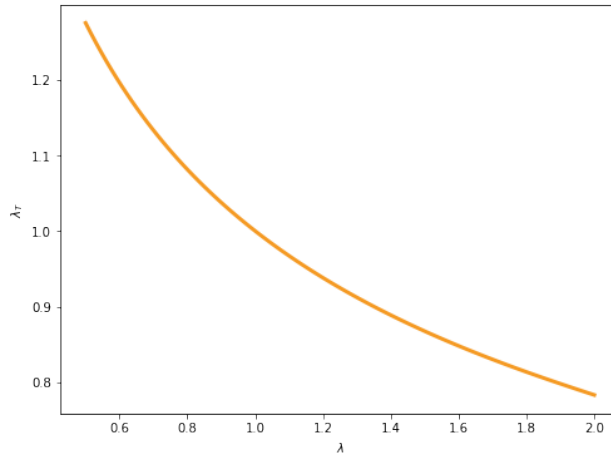


Figura 1: Gráfico λ_T vs. λ para el modelo CM1

Utilizando la información obtenida con la aproximación, se elabora un gráfico de tensión axial en función del estiramiento axial.

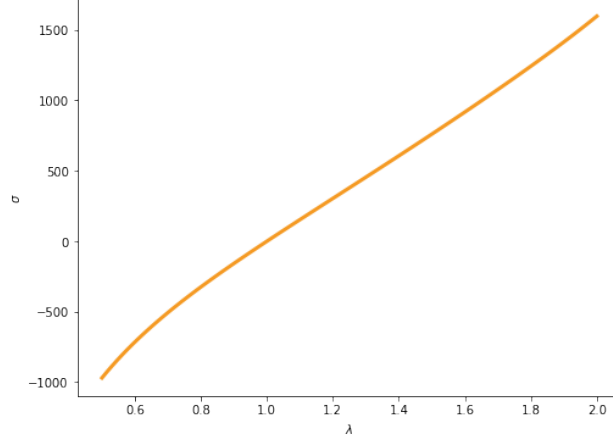


Figura 2: Gráfico σ vs. λ para el modelo CM1

De manera análoga, para el modelo (CM2) se tiene:

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \frac{1}{\det(\mathbf{F})} \left(\mu \mathbf{B} + \frac{\lambda}{2} \det(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) (\mathbf{F} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}^T) + \left(\mu + \frac{\lambda}{2} \right) \frac{\sqrt{\det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})}}{\sqrt{\det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})} - 1 + \Phi_0} (\mathbf{F} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}^T) \right) \\
 \sigma_{22} &= \frac{1}{\det(\mathbf{F})} \left(\mu B_{22} + \frac{\lambda}{2} \det(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) (\mathbf{F} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}^T) + \left(\mu + \frac{\lambda}{2} \right) \frac{\sqrt{\det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})}}{\sqrt{\det(\mathbf{F}^T \mathbf{F})} - 1 + \Phi_0} (\mathbf{F} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{F}^T) \right) \\
 \sigma_{22} &= \frac{1}{\lambda \lambda_T^2} \left(\mu \lambda_T + \frac{\lambda}{2} \lambda^2 \lambda_T^4 + \left(\mu + \frac{\lambda}{2} \right) \frac{\lambda \lambda_T^2}{\lambda \lambda_T^2 - 1 + \Phi_0} \right) \\
 0 &= \frac{1}{\lambda \lambda_T^2} \left(\mu \lambda_T + \frac{\lambda}{2} \lambda^2 \lambda_T^4 + \left(\mu + \frac{\lambda}{2} \right) \frac{\lambda \lambda_T^2}{\lambda \lambda_T^2 - 1 + \Phi_0} \right)
 \end{aligned} \tag{8}$$

De igual manera, la expresión obtenida es entregada como argumento a la función `scipy.optimize.newton`, que permite obtener un valor aproximado de λ_T en función de λ . El gráfico obtenido se presenta en la Figura 3.

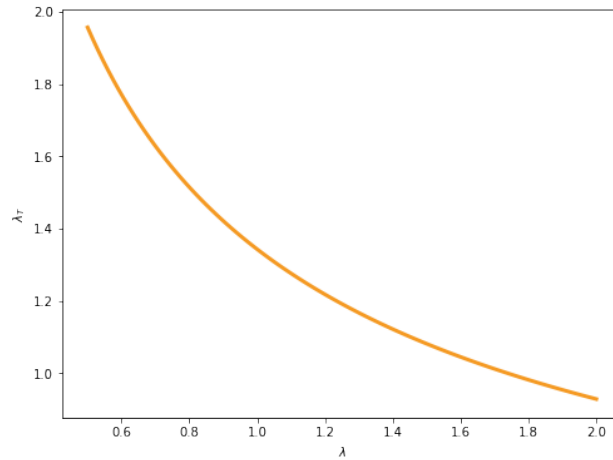


Figura 3: Gráfico λ_T vs. λ para el modelo CM2

Por último, se utilizan los valores de λ_T obtenidos con la aproximación y se elabora un gráfico de tensión axial en función del estiramiento axial.

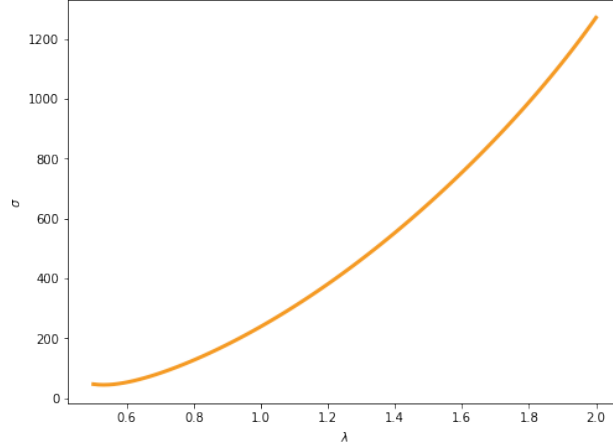


Figura 4: Gráfico σ vs. λ para el modelo CM2

- ii) Se puede apreciar que las aproximaciones obtenidas obedecen patrones similares, por lo que se puede afirmar que ambos modelos consideran una cantidad de información similar. En el caso particular de los gráficos de λ_T vs. λ , se puede notar que ambas curvas tienen la misma forma, y lo único que cambia entre ambas corresponde al valor máximo, lo anterior puede tener origen en el método que se utiliza para realizar la aproximación, o bien, con la cantidad de información que considera el modelo y los supuestos que se toman para definirse los tensores gradiente y de tensiones.

En cuanto a los gráficos de tensión, ambos son monótonamente crecientes, y presentan formas similares a las presentadas en los artículos, lo que guarda relación con el comportamiento hiperelástico de la parénquima pulmonar que se considera. Sin embargo, en función de lo apreciado que los gráficos obtenidos difieren principalmente en el primer tramo de la curva, lo que corresponde a la zona de deformaciones volumétricas pequeñas, es esta sección la que se podría ver más afectada al realizar aproximaciones de este estilo.

Referencias

- Berger, L., Bordas, R., Burrowes, K., Grau, V., Tavener, S., & Kay, D. (2016). A poroelastic model coupled to a fluid network with applications in lung modelling. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 32(1). <https://doi.org/10.1002/cnm.2731>
- Birzle, A. M., Martin, C., Yoshihara, L., Uhlig, S., & Wall, W. A. (2018). Experimental characterization and model identification of the nonlinear compressible material behavior of lung parenchyma. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 77, 754-763. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2017.08.001>

Anexo: Códigos

```
#!/usr/bin/env python
# coding: utf-8

## Tarea 3 - Introducción a la Biomecánica
### Pregunta 3

import numpy as np
from scipy.optimize import newton
import matplotlib.pyplot as plt

# Definición de parámetros

global mu, lam2, phi, c, cd, beta, d

mu = 280.8
lam2 = 421.2
phi = 0.99

c = 286.61
cd = 0.008238
beta = 1.1738
d = 6

lam_array = np.linspace(0.5, 2, 100)

### Caso CM1

# Función sigma_11
def s11cm1(lam, lam_t):
    return (2 / (lam * lam_t ** 2)) * (
        (-c * (lam ** 2 * lam_t ** 4) ** (-beta)) +
        lam ** 2 * (c + cd * d * \
            (2 * lam_t ** 2 + lam ** 2 - 3) ** (d - 1))
    )

# Función sigma_22
def s22cm1(lam, lam_t):
    return (2 / (lam * lam_t ** 2)) * (
        (-c * (lam ** 2 * lam_t ** 4) ** (-beta)) +
        lam_t ** 2 * (c + cd * d * \
            (2 * lam_t ** 2 + lam ** 2 - 3) ** (d - 1))
    )

# Derivada función sigma_22
def ds22cm1(lam, lam_t):
    return (4 / (lam * lam_t ** 3)) * (
        (c * (1 + 2 * beta) * (lam ** 2 * lam_t ** 4) ** (-beta)) +
        lam_t ** 4 * 2 * cd * d * (d - 1) * \
            (2 * lam_t ** 2 + lam ** 2 - 3) ** (d - 2)
    )

g_cm1_array = []
for lam in lam_array:
    def g_cm1(lam_t):
        return s22cm1(lam, lam_t)
    g_cm1_array.append(g_cm1)

dg_cm1_array = []
for lam in lam_array:
    def dg_cm1(lam_t):
        return ds22cm1(lam, lam_t)
    dg_cm1_array.append(dg_cm1)

cm1_lam_t_array = []
for i, lam in enumerate(lam_array):
    cm1_lam_t = newton(g_cm1_array[i], 0.5, maxiter = 50)
    cm1_lam_t_array.append(cm1_lam_t)

cm1_lam_t_array = []
for i, lam in enumerate(lam_array):
    cm1_lam_t = newton(g_cm1_array[i], fprime=dg_cm1_array[i], x0=0.5, maxiter=50)
    cm1_lam_t_array.append(cm1_lam_t)

# Plot método de Newton
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.ylabel(r'$\lambda T$')
plt.xlabel(r'$\lambda$')
plt.plot(lam_array, cm1_lam_t_array, color = '#F59A23', linewidth = 3)
plt.show()

cm1_array = []

for i in range(len(lam_array)):
    cm1 = s11cm1(lam_array[i], cm1_lam_t_array[i])
    cm1_array.append(cm1)

# Plot tensión vs. deformación
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.ylabel(r'$\sigma$')
plt.xlabel(r'$\lambda$')
plt.plot(lam_array, cm1_array, color = '#F59A23', linewidth = 3)
plt.show()

### Caso CM2

# Función sigma_11
def s11cm2(lam, lam_t):
    return (1 / 2) * (
        lam * lam2 * lam_t ** 2 +
        (2 * mu) / (lam_t ** 2) +
        (lam2 + 2 * mu) / (phi + lam * lam_t ** 2 - 1)
    )

# Función sigma_22
def s22cm2(lam, lam_t):
    return (1 / 2) * lam * lam2 * lam_t ** 2 + \
        (mu) / (lam * lam_t) + \
        (lam2 / 2 + mu) / (phi + lam * lam_t ** 2 - 1)

# Derivada función sigma_22
def ds22cm2(lam, lam_t):
    return (1 / ((lam * lam_t ** 2) * (phi + lam * lam_t ** 2 - 1))) * (
        lam ** 4 * lam2 * lam_t ** 7 + \
        2 * lam ** 3 * lam2 * lam_t ** 5 * (phi - 1) - \
        2 * lam * lam_t ** 2 * mu * (phi - 1) - mu * (phi - 1) ** 2 - \
        lam ** 2 * lam_t ** 3 * ((lam_t + 2) * mu - lam2 * (phi - 2) * phi)
    )

g_cm2_array = []
for lam in lam_array:
    def g_cm2(lam_t):
        return s22cm2(lam, lam_t)
    g_cm2_array.append(g_cm2)

dg_cm2_array = []
for lam in lam_array:
    def dg_cm2(lam_t):
        return ds22cm2(lam, lam_t)
    dg_cm2_array.append(dg_cm2)

cm2_lam_t_array = []
for i, lam in enumerate(lam_array):
    cm2_lam_t = newton(dg_cm2_array[i], 0.5, maxiter = 50)
    cm2_lam_t_array.append(cm2_lam_t)

# Plot método de Newton
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.ylabel(r'$\lambda T$')
plt.xlabel(r'$\lambda$')
plt.plot(lam_array, cm2_lam_t_array, color = '#F59A23', linewidth = 3)
plt.show()

cm2_array = []

for i in range(len(lam_array)):
    cm2 = s11cm1(lam_array[i], cm2_lam_t_array[i])
    cm2_array.append(cm2)

# Plot tensión vs. deformación
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.ylabel(r'$\sigma$')
plt.xlabel(r'$\lambda$')
plt.plot(lam_array, cm2_array, color = '#F59A23', linewidth = 3)
plt.show()

#### Hecho con :heart: por Iván Vergara Lam
```