PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Ingeniería Biológica y Médica
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica
IBM2020 Introducción a la Biomecánica
Primer Semestre 2023

Tarea 1

Fecha de entrega: 31 de marzo, 2023, 23:59.

Todos los desarrollos teóricos y códigos computacionales deben ser elaborados en forma individual. Cualquier uso de fuentes o herramientas externas al curso deben ser citadas correctamente. El desarrollo final **debe** ser escrito por usted. Los conceptos generales de los problemas pueden ser discutidos, pero las soluciones no deben ser comparadas. El informe debe contener todos los desarrollos teóricos, resultados numéricos, figuras y explicaciones pedidas para la tarea. Se considerará como parte de la evaluación de la tarea la correcta diagramación, redacción y presentación del informe, pudiendo descontarse hasta 2 puntos por este concepto. Esta tarea se rige bajo la política de atrasos del curso explicada en Canvas.

Todos los códigos deben ser desarrollados en Python y documentados en un Jupyter Notebook. Si necesita, puede también generar librerías auxiliares en formato `.py`. La entrega del informe es de forma electrónica mediante la plataforma Canvas. Se pedirá el informe en formato PDF con el título `tarea_01_apellido_nombre.pdf`. Además, se deberá subir cualquier archivo de código a la misma plataforma. **Incluya en su informe el número de horas dedicadas a esta tarea**.

Bonus: Si la nota final de su tarea es $> 5{,}5$ y usted entrega su tarea escrita en LaTeXusando el template del curso, y además entrega el archivo `.tex` y las figuras utilizadas, se abonarán 0,5 puntos a la nota final de la tarea.

Problema 1:

i) Usando notación indicial, demuestre que

$$\boldsymbol{A}^{-T} : \boldsymbol{A} = 3.$$

ii) Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado y de frontera regular. Sean $\boldsymbol{v} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones regulares. Utilice notación indicial para demostrar que

$$\nabla \cdot (u\boldsymbol{v}) = u\nabla \cdot \boldsymbol{v} + \nabla u \cdot \boldsymbol{v}. \tag{1}$$

iii) Consideremos el caso particular en que $n = 1$, donde $\Omega = (a, b)$. Aquí, la identidad (1) toma la forma de la regla de producto usual,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v.$$

Utilice la regla del producto para demostrar la regla de integración por partes. A saber, demuestre que en este caso

$$\int_\Omega u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = (uv)\big|_a^b - \int_\Omega v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x.$$

iv) Volvamos a considerar un n natural arbitrario. Usando un procedimiento similar al del ítem (iii), utilice la identidad (1) para demostrar la regla de integración por partes en $\mathbb{R}^n$. A saber, demuestre que

$$\int_\Omega u\nabla \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} u\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s - \int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\nabla u\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Problema 2: Una sección en el eje corto del ventrículo izquierdo puede ser modelada con la geometría anular que se muestra en la figura 1. Este modelo considera un radio interno $a = 43\,\text{mm}$ y un radio externo $b = 50\,\text{mm}$. El ventrículo es sometido a una presión interna negativa uniforme $P_{\text{int}} = -0{,}04\,\text{N}/\text{mm}^2$. Considere la presión externa $P_{\text{ext}} = 0\,\text{N}/\text{mm}^2$. El mapeo de deformación en coordenadas cilíndricas está dado por:

$$
\begin{aligned}
r &= R + \frac{B}{R}, \\
\theta &= \Theta, \\
z &= \frac{Z}{1 - \frac{B^2}{R^4}},
\end{aligned}
$$

donde

$$
B = \tfrac{3}{2E} \tfrac{a^2 b^2}{(b^2 - a^2)} \left(P_{\text{int}} - P_{\text{ext}} \right).
$$

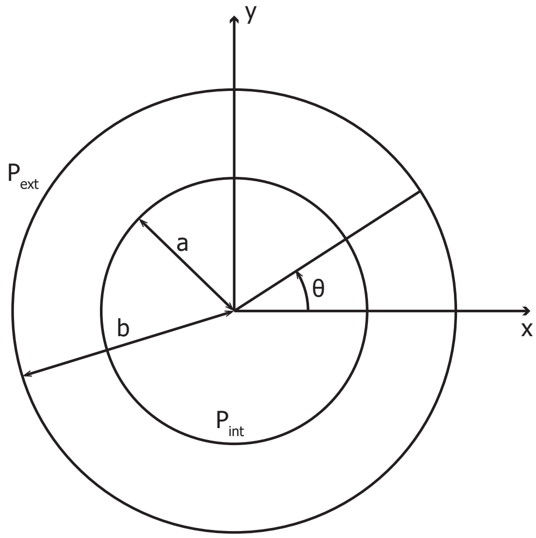

Figura 1: Modelo anular del ventrículo izquierdo

Considerando $E = 0{,}3\,\text{N}/\text{mm}^2$,

i) Grafique la proyección en el plano XY de la configuración de referencia (no deformada, en gris claro) y la configuración actual (deformada, en gris oscuro), sobrepuestas. Se recomienda estudiar el comando `meshgrid` de `numpy` y el comando `pcolor` de `matplotlib`.

ii) Grafique los campos de las componentes E_{XX}, E_{YY}, E_{XY} sobre la configuración de referencia, donde $\boldsymbol{E}$ es el tensor lagrangeano de deformaciones.

iii) Grafique los campos de las componentes $E_{RR}, E_{\Theta\Theta}, E_{R\Theta}$ sobre la configuración de referencia y compare con los gráficos anteriores.

Ayuda: La representación matricial del tensor gradiente de deformación $\boldsymbol{F}$ en coordenadas cilíndricas satisface

$$[\boldsymbol{F}]_{t\theta z} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial R} & \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial r}{\partial \Theta} & \dfrac{\partial r}{\partial Z} \\ r\dfrac{\partial \theta}{\partial R} & \dfrac{r}{R}\dfrac{\partial \theta}{\partial \Theta} & r\dfrac{\partial \theta}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial R} & \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial z}{\partial \Theta} & \dfrac{\partial z}{\partial Z} \end{pmatrix}.$$

Problema 3: Busque en la literatura científica[1] un artículo donde se estudie el comportamiento mecánico de tejidos **blandos**[2] de algún órgano que **no sea el corazón**. Entregue la cita, un breve resumen en español del artículo donde se indique el tipo de tejido y sus condiciones, con qué técnica se midieron las deformaciones, e incluya al menos un gráfico donde se puedan apreciar las deformaciones experimentadas por el tejido en estudio. Indique además que medidas de deformación (qué tensor) fueron utilizadas en dicho estudio. Se evaluarán cada uno de los aspectos particulares que se mencionaron en este enunciado. Sea original, y procure que el artículo que incluya en su trabajo no sea utilizado por otro estudiante del curso. Para esto, puede usar el foro de discusión de Canvas.

[1] Se recomienda usar *Google Scholar*.
[2] Es decir, que experimentan deformaciones considerables.