



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE/IBM2020 Introducción a la Biomecánica

Tarea 2

Iván Vergara Lam
19 de abril del 2023
Tiempo dedicado: 22 horas

Problema 1. Bifurcación arterial

- i) Como se trata de un fluido incompresible, se puede tomar un volumen de control invariante, por lo que se cumple que el caudal de entrada es igual al caudal de salida, es decir,

$$Q_{\text{in}} = Q_{\text{out}} \quad (1)$$

El caudal de entrada está dado por:

$$\begin{aligned} Q_{\text{in}} &= \int_{A_1} \mathbf{v}_1 \cdot d\mathbf{A}_1 \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a k \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r dr d\theta \\ &= 2\pi k \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4a^2} \right) \Big|_0^a \\ &= \pi k \frac{a^2}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

Mientras tanto, el caudal de salida corresponde a la suma de ambas componentes de la bifurcación, así:

$$\begin{aligned} Q_{\text{out}} &= \int_{A_2} \mathbf{v}_2 \cdot d\mathbf{A}_2 + \int_{A_3} \mathbf{v}_3 \cdot d\mathbf{A}_3 \\ &= \bar{v}_2 A_2 + \bar{v}_3 A_3 \\ &= \bar{v}_2 \pi b^2 + \bar{v}_3 \pi c^2 \\ &= \pi (\bar{v}_2 b^2 + \bar{v}_3 c^2) \end{aligned} \quad (3)$$

Reemplazando lo obtenido en (2) y (3) en la expresión (1), se tiene que:

$$\begin{aligned} \pi k \frac{a^2}{2} &= \pi (\bar{v}_2 b^2 + \bar{v}_3 c^2) \\ k \frac{a^2}{2} &= \bar{v}_2 b^2 + \bar{v}_3 c^2 \\ \bar{v}_3 &= \frac{1}{c^2} \left(k \frac{a^2}{2} - \bar{v}_2 b^2 \right) \end{aligned} \quad (4)$$

- ii) En la sección donde el angostamiento es mayor, es decir, el punto en que la sección sigue siendo circular y el radio de la arteria disminuye en un 25 % a lo normal, se debe considerar un radio $c' = 0,75c$. De esta manera, la velocidad \bar{v}'_3 se determina por:

$$\begin{aligned} \bar{v}'_3 &= \frac{1}{c'^2} \left(k \frac{a^2}{2} - \bar{v}_2 b^2 \right) \\ \bar{v}'_3 &= \frac{1}{(0,75c)^2} \left(k \frac{a^2}{2} - \bar{v}_2 b^2 \right) \\ \bar{v}'_3 &= \frac{1,78}{c^2} \left(k \frac{a^2}{2} - \bar{v}_2 b^2 \right) \\ \bar{v}'_3 &= 1,78 \bar{v}_3 \end{aligned} \quad (5)$$

En base a los resultados obtenidos en la expresión (5), se puede determinar que la velocidad en la sección más angosta se presenta una velocidad 78 % mayor a la velocidad de salida de la rama inferior.

- iii) Si se conoce el perfil de velocidades de salida \mathbf{v}_{out} , es posible determinar la tensión de corte que se genera en el ingreso utilizando la expresión de conservación de moméntum lineal.

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \mathbf{v} dV = - \int_{\partial V_c} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{\partial V_c} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} dS + \int_{V_c} \rho \mathbf{b} dV \quad (6)$$

Por conservación de masa y ausencia de fuerzas externas, la expresión (6) se reduce a:

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\partial V_c} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{\partial V_c} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} dS \\ \int_{\partial V_c} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= \int_{\partial V_c} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} dS \end{aligned} \quad (7)$$

Reemplazando en la expresión (7) y desarrollando, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^c \rho k^2 \left(1 - \frac{r^2}{c^2}\right)^2 r dr d\theta - \rho v_{in}^2 A_{in} &= p_{out} A_{out} - p_{in} A_{in} - F \\ \rho \left(\int_0^{2\pi} \int_0^c k^2 \left(r - 2\frac{r^3}{c^2} + \frac{r^5}{c^4}\right) dr d\theta - v_{in}^2 A_{in} \right) &= p_{out} A_{out} - p_{in} A_{in} - F \\ \rho \left(2\pi k^2 \left(\frac{r^2}{2} - 2\frac{r^4}{4c^2} + \frac{r^6}{6c^4} \right) \Big|_0^c - v_{in}^2 A_{in} \right) &= p_{out} A_{out} - p_{in} A_{in} - F \\ \rho \left(\pi k^2 \frac{c^2}{3} - v_{in}^2 A_{in} \right) &= p_{out} A_{out} - p_{in} A_{in} - F \end{aligned} \quad (8)$$

Como el área de entrada es igual al área de salida, se cumple que:

$$A = A_{in} = A_{out} = \pi c^2 \quad (9)$$

Reemplazando (9) en la expresión (8) se tiene:

$$\begin{aligned} \rho \left(\pi k^2 \frac{c^2}{3} - v_{in}^2 \pi c^2 \right) &= p_{out} \pi c^2 - p_{in} \pi c^2 - F \\ \rho \pi c^2 \left(\frac{k^2}{3} - v_{in}^2 \right) &= p_{out} \pi c^2 - p_{in} \pi c^2 - F \\ F &= p_{out} \pi c^2 - p_{in} \pi c^2 - \rho \pi c^2 \left(\frac{k^2}{3} - v_{in}^2 \right) \\ F &= \pi c^2 \left(p_{out} - p_{in} + \rho v_{in}^2 - \rho \frac{k^2}{3} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Finalmente, para determinar la tensión de corte τ , es necesario considerar la superficie del manto del injerto. Por lo tanto, utilizando la expresión (10), se tiene:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{F}{A_i} \\ \tau &= \frac{\pi c^2}{2\pi cL} \left(p_{out} - p_{in} + \rho v_{in}^2 - \rho \frac{k^2}{3} \right) \\ \tau &= \frac{c}{2L} \left(p_{out} - p_{in} + \rho v_{in}^2 - \rho \frac{k^2}{3} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Problema 2. Estudio computacional

- i) En primer lugar, se presenta una sección de vaso sanguíneo con proyección bidimensional de su configuración material. El gráfico se presenta a continuación:

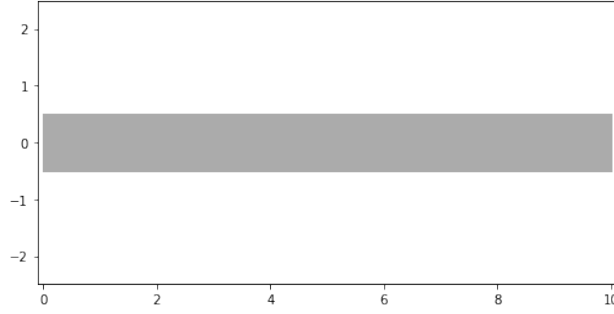


Figura 1: Configuraciones de referencia y actual

Luego, se calculó la configuración del vaso deformado mediante la aplicación del mapeo de deformaciones a la malla generada para la configuración no deformada. Posteriormente, se graficó la proyección en el plano X_1X_2 de la configuración de referencia (no deformada) en gris claro y la configuración actual (deformada) en gris oscuro, el resultado se presenta en la Figura 2.

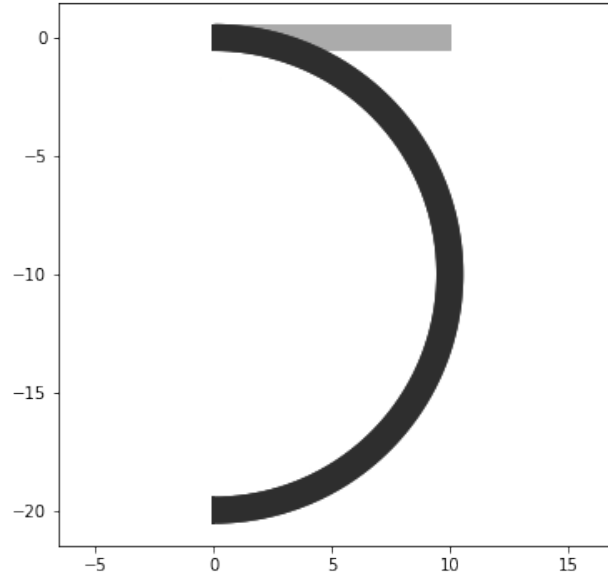


Figura 2: Configuraciones de referencia y actual

- ii) Posteriormente, se asume que el vaso es un material neohookeano compresible, por lo que satisface la ecuación constitutiva

$$\mathbf{P} = \mu(\mathbf{F} - \mathbf{F}^{-T}) + \lambda \ln J \mathbf{F}^{-T}$$

Donde \mathbf{F} corresponde al tensor gradiente de deformación y J a su determinante, dados por:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{L}(X_2 + R) \cos \frac{\pi X_1}{L} & \sin \frac{\pi X_1}{L} \\ -\frac{\pi}{L}(X_2 + R) \sin \frac{\pi X_1}{L} & \cos \frac{\pi X_1}{L} \end{pmatrix} \quad J = \frac{\pi}{L}(X_2 + R)$$

A partir de lo anterior, se calculó el tensor \mathbf{P} para cada punto de la configuración de referencia. Los gráficos de las componentes P_{11} , P_{22} y P_{12} sobre la configuración material se presentan en la Figura 3.

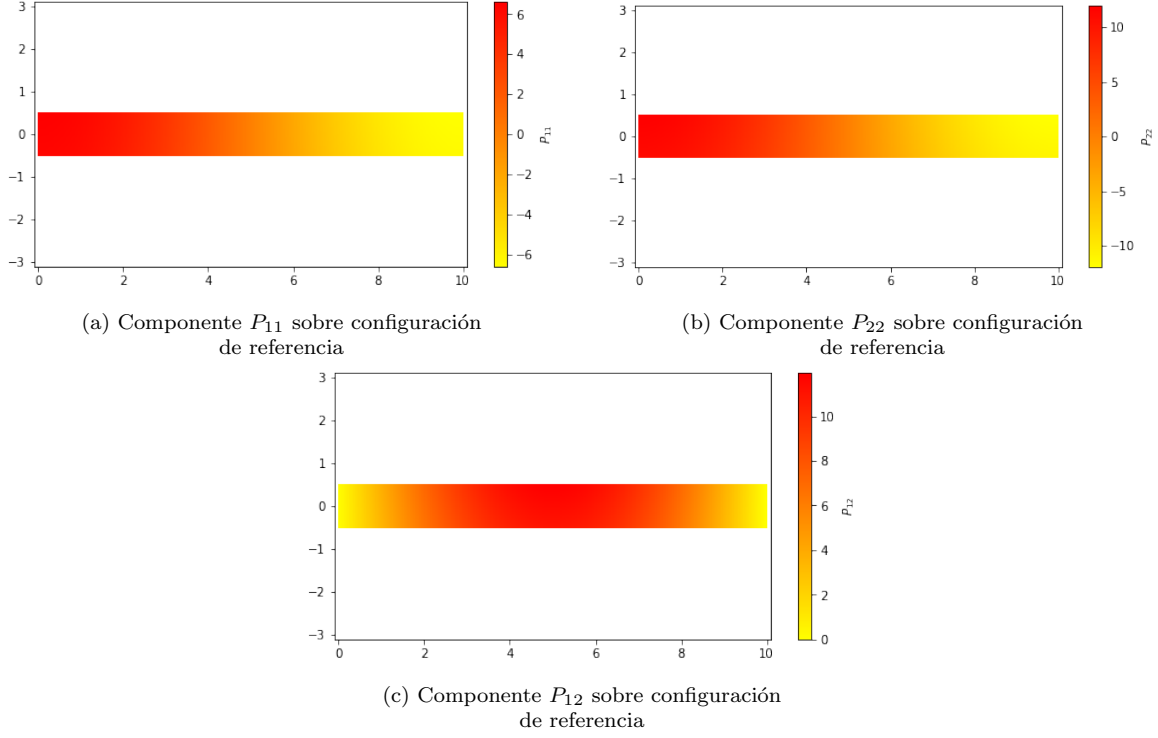


Figura 3: Componentes P_{11} , P_{22} y P_{12} sobre la configuración material

iii) Utilizando la relación

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^T$$

Se puede determinar el tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$. Los gráficos de las componentes σ_{11} , σ_{22} y σ_{12} sobre la configuración espacial se presentan en la Figura 4.

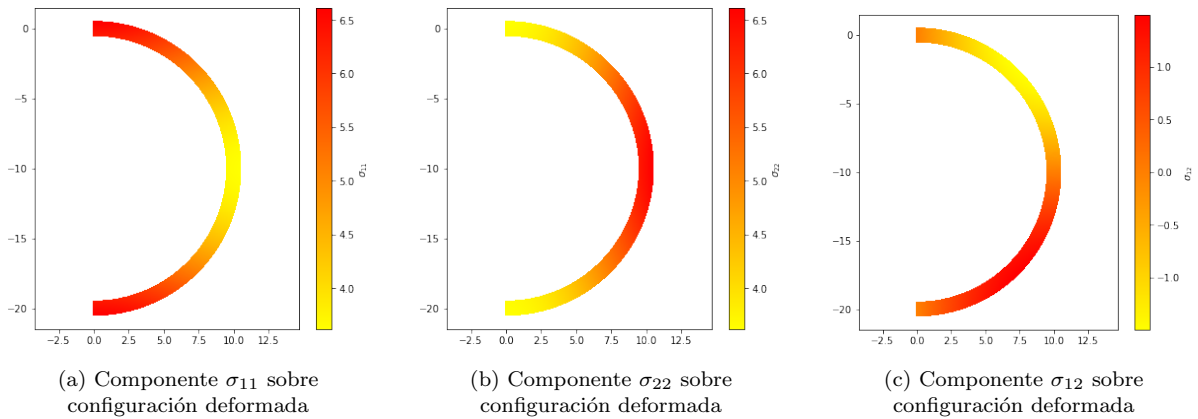


Figura 4: Componentes σ_{11} , σ_{22} y σ_{12} sobre la configuración espacial

En los gráficos se puede apreciar como la configuración σ_{11} y σ_{22} poseen la misma simetría respecto al eje Y, pero con valores opuestos. Lo anterior, resulta interesante de observar, ya que en las configura-

ciones P_{11} y P_{22} , representados en las Figuras 4a y 4b, respectivamente, se presenta la misma simetría, evidenciando la misma distribución de $\|T\|$ en ambos gráficos.

De igual manera, tanto la configuración σ_{12} como la configuración P_{12} se diferencian de las componentes axiales, debido a que estas hacen referencia a las componentes de corte, que no se encuentran en la diagonal del tensor.

- iv) La tracción material se define por $\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{N}$, donde \mathbf{N} es el vector tangente al eje neutro de cada sección transversal, en esta configuración se cumple que $\mathbf{N} = (1, 0)$. A continuación, se presenta el campo escalar $\|T\|$ y el campo vectorial $\frac{1}{\|T\|}\mathbf{T}$ sobre la configuración material.

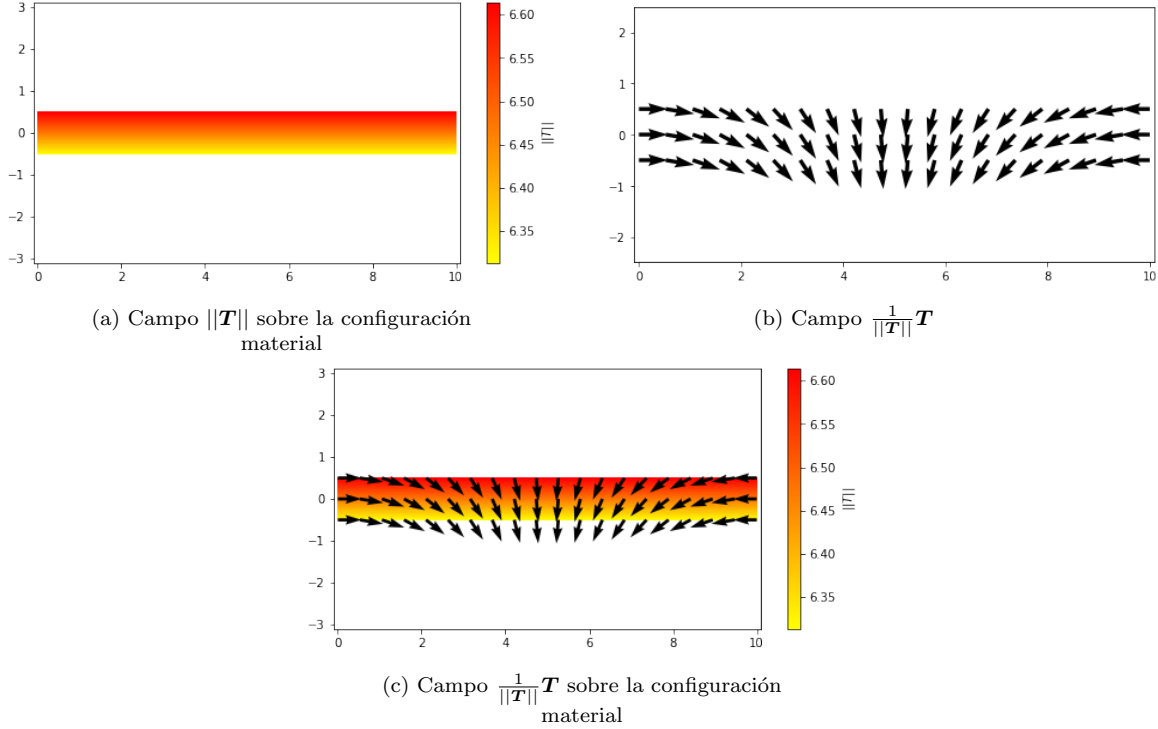


Figura 5: Campo de tracción material \mathbf{T} sobre la configuración no deformada

- v) Por último, la tracción espacial se define por $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$, donde \mathbf{n} es el vector tangente al eje neutro de cada sección transversal. El vector tangente se puede determinar derivando el mapeo de deformaciones respecto a X_2 , por lo tanto, en esta configuración se cumple que $\mathbf{n} = \left(\frac{dx_1}{dX_2}, \frac{dx_2}{dX_2}\right)$. A continuación, se presenta el campo escalar $\|t\|$ y el campo vectorial $\frac{1}{\|t\|}\mathbf{t}$ sobre la configuración espacial.

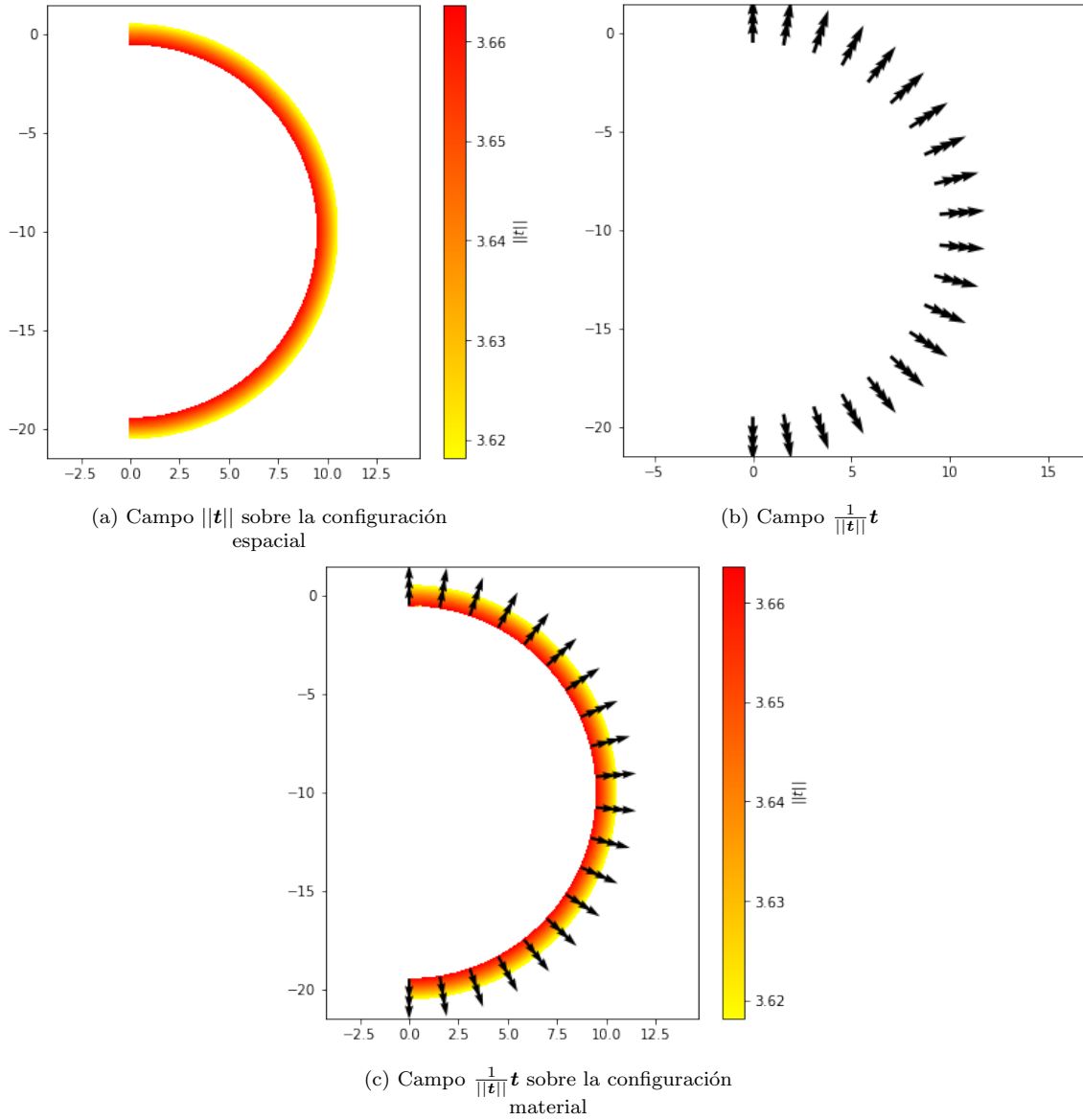


Figura 6: Campo de tracción espacial \mathbf{t} sobre la configuración deformada

Al comparar las figuras obtenidas con las del inciso iv), se puede apreciar que en la configuración material, las tracciones se dirigen hacia el centro y van desde la zona de mayor a menor tracción. En cuanto a la configuración espacial, las tracciones apuntan en forma radial, también desde las zonas de mayor a menor tracción, lo que hace sentido físico, debido a las características simétricas de las deformaciones.

Problema 3. Conservación de movimiento

- i) Se busca demostrar que para un fluido Newtoniano, es decir, $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d}$, que además es incompresible, la ecuación de equilibrio de moméntum lineal se reduce a la ecuación de Navier-Stokes.

En primer lugar, se utilizó la forma local del balance de moméntum lineal, determinado por:

$$\rho\mathbf{a} = \text{div}\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{b} \quad (12)$$

Reemplazando la expresión del enunciado en (12), se tiene:

$$\begin{aligned} \rho\mathbf{a} &= \text{div}(-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d}) + \rho\mathbf{b} \\ \frac{D\mathbf{a}}{Dt} &= \text{div}(-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d}) + \rho\mathbf{b} \\ \rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{v}\right) &= \text{div}(-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d}) + \rho\mathbf{b} \\ \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{v} &= \frac{1}{\rho}\text{div}(-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d}) + \mathbf{b} \\ \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\text{div}(-p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d}) - \mathbf{b} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Por la linealidad de la divergencia, la expresión anterior se puede escribir como:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\text{div } p\mathbf{I} - \frac{2\mu}{\rho}\text{div } \mathbf{d} - \mathbf{b} = 0 \quad (14)$$

Como se esta trabajando con el tensor identidad, se cumple que:

$$\text{div } p\mathbf{I} = \nabla p \quad (15)$$

En cuanto a la segunda expresión, se cumple que:

$$\text{div } \mathbf{d} = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{v} \quad (16)$$

Finalmente, utilizando (15) y (16) en la expresión (14), se tiene que:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{\mu}{\rho}\Delta\mathbf{v} - \mathbf{b} = 0 \quad (17)$$

■

- ii) Se tiene la expresión

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} \quad \forall \mathbf{x} \in \varphi(B_0, t) \quad (18)$$

1. Utilizando la expresión (18) y reemplazando en la ecuación de conservación de moméntum lineal enunciada en (12), se tiene:

$$\begin{aligned} \rho\mathbf{a} &= \text{div}(-p\mathbf{I}) + \rho\mathbf{b} \\ \rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{v}\right) &= -\nabla p + \rho\mathbf{b} \end{aligned}$$

■

2. Si se vuelve a considerar un fluido Newtoniano incompresible, es necesario emplear la expresión (17). Si, además, se considera que el flujo es de tipo *creeping*, se cumple que:

$$\overline{(\rho \dot{\mathbf{v}})} = 0 \quad (19)$$

En primer lugar, se escala la expresión (17) por ρ , lo que resulta en:

$$\overline{(\rho \dot{\mathbf{v}})} + \nabla p - \mu \Delta \mathbf{v} - \rho \mathbf{b} = 0$$

Considerando la condición (19), se tiene:

$$\mu \Delta \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (20)$$

■

3. Por último, considerando que la fuerza viscosa es lineal (y biyectiva) a la velocidad, se tiene que:

$$\mu \nabla \mathbf{v} = T(\mathbf{v}) \quad (21)$$

Reemplazando la igualdad (21) en la expresión (20), se tiene lo siguiente:

$$T(\mathbf{v}) - \nabla p + \rho \mathbf{b} = 0$$

Si, además, $\mathbf{b} = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) - \nabla p &= 0 \\ T(\mathbf{v}) &= \nabla p \end{aligned}$$

Operando por la izquierda a ambos lados por el tensor inverso de \mathbf{T} , es decir \mathbf{T}^{-1} , se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{v} &= \mathbf{T}^{-1} \nabla p \\ \mathbf{v} &= \mathbf{T}^{-1} \nabla p \end{aligned}$$

■

Anexo: Códigos

```
#!/usr/bin/env python
# coding: utf-8

## Tarea 2 - Introducción a la Biomecánica
### Pregunta 2

# Importación de librerías

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definición de parámetros

global L
global h
global R
global mu
global lambda_

L = 10
h = 1
R = 10
mu = 1
lambda_ = 10

# Creación de la matriz

B_x = np.linspace(0, L, 500)
B_y = np.linspace(-h / 2, h / 2, 100)

BB_x, BB_y = np.meshgrid(B_x, B_y)

# Ploteo sin deformación

fig = plt.figure(figsize=(8,4))
plt.fill(BB_x, BB_y, color='#ABABAB')
plt.axis('equal')
plt.xlim(-0.1, 10.1)
plt.plot()

# Función de deformación

def phi(x, y):
    xx = (y + R) * np.sin(np.pi * x / L)
    yy = (y - (y + R) * (1 - np.cos(np.pi * x / L)))

    return xx, yy

# Creación de malla deformada

BB_XX, BB_YY = phi(BB_x, BB_y)

# Ploteo con deformación

fig = plt.figure(figsize=(6, 6))
plt.plot(BB_x, BB_y, color='#ABABAB')
plt.plot(BB_XX, BB_YY, color='#2E2E2E', linewidth=2)
plt.axis('equal')
plt.ylim(-21.5, 1.5)
plt.plot()

# Definición de tensor gradiente de deformación

F = np.zeros((*BB_x.shape, 2, 2))
F.shape

# Instanciación de tensores P y sigma

P = np.zeros(BB_x.shape)
P_11 = np.zeros(BB_x.shape)
P_12 = np.zeros(BB_x.shape)
P_21 = np.zeros(BB_x.shape)
P_22 = np.zeros(BB_x.shape)

s = np.zeros(BB_x.shape)
s_11 = np.zeros(BB_x.shape)
s_12 = np.zeros(BB_x.shape)
s_21 = np.zeros(BB_x.shape)
s_22 = np.zeros(BB_x.shape)

T_norm = np.zeros(BB_x.shape)

t_norm = np.zeros(BB_x.shape)

# Inverse transpose matrix

def inv_transp(A):
    return np.linalg.inv(A.transpose())

# Vector tangente

vec_N = np.array([1, 0])

# Cálculo de tensores de deformación

for i in range(len(BB_x[:, 0])):
    for j in range(len(BB_y[0, :])):
        local_x = BB_x[i, j]
        local_y = BB_y[i, j]

        # Gradiente de deformación
        local_F = np.array([
            [np.pi / L * (local_y + R) * np.sin(np.pi * local_x / L), \
             np.cos(np.pi * local_x / L)], \
            [np.pi / L * (local_y + R) * np.sin(np.pi * local_x / L), \
             np.cos(np.pi * local_x / L)]
        ])

        # Transpuesta de F
        local_F_t = local_F.transpose()

        # Inversa de la transpuesta de F
        local_F_it = inv_transp(local_F)

        # Determinante de F
        J = abs(np.pi / L * (local_y + R))

        # Logaritmo de J
        try:
            log_J = np.log(J)
        except:
            log_J = 1

        # Tensor de Piola Kirchhoff
        local_P = mu * (local_F - local_F_it) + lambda_ * log_J * local_F_it

        P_11[i, j] = local_P[0, 0]
        P_12[i, j] = local_P[0, 1]
        P_21[i, j] = local_P[1, 0]
        P_22[i, j] = local_P[1, 1]

        # Tensor de Cauchy
        local_s = local_P @ local_F_t / J

        s_11[i, j] = local_s[0, 0]
        s_12[i, j] = local_s[0, 1]
        s_21[i, j] = local_s[1, 0]
        s_22[i, j] = local_s[1, 1]

        # Tracción material
        local_T = local_P @ vec_N

        T_norm_local = np.linalg.norm(local_T)
        T_norm[i, j] = T_norm_local

        # Tracción espacial
        vec_n = np.array([np.sin(np.pi * local_x / L), np.cos(np.pi * local_x / L)])
        local_t = local_s @ vec_n

        t_norm_local = np.linalg.norm(local_t)
        t_norm[i, j] = t_norm_local

# Plot P_11

plt.figure(figsize=(8, 4))
fig = plt.pcolor(BB_x, BB_y, P_11, cmap='autumn_r', shading='auto')
plt.colorbar(fig, label = r'$P_{11}$')
plt.axis('equal')
plt.xlim(-0.1, 10.1)
plt.show()

# Plot P_12

plt.figure(figsize=(8, 4))
fig = plt.pcolor(BB_x, BB_y, P_12, cmap='autumn_r', shading='auto')
plt.colorbar(fig, label = r'$P_{12}$')
plt.axis('equal')
plt.xlim(-0.1, 10.1)
plt.show()

# Plot P_22

plt.figure(figsize=(8, 4))
fig = plt.pcolor(BB_x, BB_y, P_22, cmap='autumn_r', shading='auto')
plt.colorbar(fig, label = r'$P_{22}$')
plt.axis('equal')
plt.xlim(-0.1, 10.1)
plt.show()

# Plot s_11

plt.figure(figsize=(6, 6))
fig = plt.pcolor(BB_XX, BB_YY, s_11, cmap='autumn_r', shading='auto')
plt.colorbar(fig, label = r'$\sigma_{11}$')
plt.axis('equal')
plt.ylim(-21.5, 1.5)
plt.show()

# Plot s_12

plt.figure(figsize=(6, 6))
fig = plt.pcolor(BB_XX, BB_YY, s_12, cmap='autumn_r', shading='auto')
plt.colorbar(fig, label = r'$\sigma_{12}$')
plt.axis('equal')
plt.ylim(-21.5, 1.5)
plt.show()

# Plot s_22

plt.figure(figsize=(6, 6))
fig = plt.pcolor(BB_XX, BB_YY, s_22, cmap='autumn_r', shading='auto')
plt.colorbar(fig, label = r'$\sigma_{22}$')
plt.axis('equal')
plt.ylim(-21.5, 1.5)
plt.show()

# Plot ||T||

plt.figure(figsize=(8, 4))
fig = plt.pcolor(BB_x, BB_y, T_norm, cmap='autumn_r', shading='auto')
plt.colorbar(fig, label = r'$||T||$')
plt.axis('equal')
```

```

plt.xlim(-0.1, 10.1)
plt.show()

# Creación de malla para tracción material
B_x_r = np.linspace(0, L, 20)
B_y_r = np.linspace(-h / 2, h / 2, 3)

# Creación de malla para tracción espacial
BB_x_r, BB_y_r = np.meshgrid(B_x_r, B_y_r)
BB_XX_r, BB_YY_r = phi(BB_x_r, BB_y_r)

# Creación de vectores de tracción material y espacial
T = np.zeros((2, *BB_x_r.shape))
t = np.zeros((2, *BB_x_r.shape))

# Cálculo de tensores de deformación
for i in range(len(BB_x_r[:, 0])):
    for j in range(len(BB_y_r[0, :])):
        local_x = BB_x_r[i, j]
        local_y = BB_y_r[i, j]

        # Gradiente de deformación
        local_F = np.array([
            [np.pi / L * (local_y + R) * np.cos(np.pi * local_x / L), \
             np.sin(np.pi * local_x / L)],
            [-np.pi / L * (local_y + R) * np.sin(np.pi * local_x / L), \
             np.cos(np.pi * local_x / L)]
        ])

        # Inversa de la transpuesta de F
        local_F_it = inv_transp(local_F)

        # Determinante de F
        J = abs(np.pi / L * (local_y + R))

        # Logaritmo de J
        try:
            log_J = np.log(J)
        except:
            log_J = 1

        # Tensor de Piola Kirchhoff
        local_P = mu * (local_F - local_F_it) + lambda_ * log_J * local_F_it

        # Tracción material
        local_T = local_P @ vec_N

        T_norm_local = np.linalg.norm(local_T)
        T[0, i, j], T[1, i, j] = local_T[0] / T_norm_local, local_T[1] / T_norm_local

# Plot tracción material
plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.quiver(BB_x_r, BB_y_r, *T, color = 'k')
plt.axis('equal')
plt.xlim(-0.1, 10.1)
plt.show()

# Plot tracción material sobre configuración no deformada
plt.figure(figsize=(8, 4))
fig = plt.pcolor(BB_x, BB_y, T_norm, cmap='autumn_r', shading='auto')
plt.quiver(BB_x_r, BB_y_r, *T, color = 'k')
plt.colorbar(fig, label = r'$||t||$')
plt.axis('equal')
plt.xlim(-0.1, 10.1)
plt.show()

# Plot ||t||
plt.figure(figsize=(6, 6))
fig = plt.pcolor(BB_XX, BB_YY, t_norm, cmap='autumn_r', shading='auto')
plt.colorbar(fig, label = r'$||t||$')
plt.axis('equal')
plt.ylim(-21.5, 1.5)
plt.show()

# Cálculo de tensores de deformación
for i in range(len(BB_x_r[:, 0])):
    for j in range(len(BB_y_r[0, :])):
        local_x = BB_x_r[i, j]
        local_y = BB_y_r[i, j]

        # Gradiente de deformación
        local_F = np.array([
            [np.pi / L * (local_y + R) * np.cos(np.pi * local_x / L), \
             np.sin(np.pi * local_x / L)],
            [-np.pi / L * (local_y + R) * np.sin(np.pi * local_x / L), \
             np.cos(np.pi * local_x / L)]
        ])

        # Transpuesta de F
        local_F_t = local_F.transpose()

        # Inversa de la transpuesta de F
        local_F_it = inv_transp(local_F)

        # Determinante de F
        J = abs(np.pi / L * (local_y + R))

        # Logaritmo de J
        try:
            log_J = np.log(J)
        except:
            log_J = 1

        # Tensor de Piola Kirchhoff
        local_P = mu * (local_F - local_F_it) + lambda_ * log_J * local_F_it

        # Tracción espacial
        vec_n = np.array([np.sin(np.pi * local_x / L), np.cos(np.pi * local_x / L)])
        local_t = local_P @ vec_n

        t_norm_local = np.linalg.norm(local_t)
        t_norm[i, j] = t_norm_local
        t[0, i, j], t[1, i, j] = local_t[0] / t_norm_local, local_t[1] / t_norm_local

# Plot tracción espacial
plt.figure(figsize=(6, 6))
plt.quiver(BB_XX_r, BB_YY_r, *t, color = 'k')
plt.axis('equal')
plt.ylim(-21.5, 1.5)
plt.show()

# Plot tracción espacial sobre configuración deformada
plt.figure(figsize=(6, 6))
fig = plt.pcolor(BB_XX, BB_YY, t_norm, cmap='autumn_r', shading='auto')
plt.quiver(BB_XX_r, BB_YY_r, *t, color = 'k')
plt.colorbar(fig, label = r'$||t||$')
plt.axis('equal')
plt.ylim(-21.5, 1.5)
plt.show()

#### Hecho con :heart: por Iván Vergara Lam

```