

IBM2101 – Imágenes Biomédicas

2do semestre del 2022

Instituto de Ingeniería Biológica y Médica
Pontificia Universidad Católica de Chile

Tarea #4

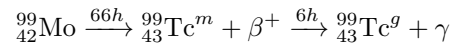
Fecha de entrega: martes 18 de octubre a las 11:59pm

Instructor: Carlos A. Sing Long

Ayudante: Ignacio Contreras

Problema 1: El Tecnecio

En el proceso de obtención de Tecnecio-99m uno típicamente hace uso de la cadena de decaimiento



donde el tiempo indica la vida media. Si comenzamos con una columna de Molibdeno-99, después de un tiempo coexistirá tanto Tecnecio-99m como Tecnecio-99g. En este problema determinaremos el tiempo que debemos esperar para obtener la concentración máxima de Tecnecio-99m.

(1.1) Determine a partir de la vida media de cada elemento el coeficiente de decaimiento radioactivo, y encuentre el número de átomos de Molibdeno-99, Tecnecio-99m y Tecnecio-99g después de t horas. Recuerde que en un comienzo la columna sólo contiene Molibdeno-99. **Sugerencia:** Use la ley de decaimiento radioactivo.

(1.2) Determine en qué instante se maximiza la cantidad de átomos de Tecnecio-99m.

Problema 2: Gammagrafía

En este problema consideramos el efecto de la atenuación lineal en gammagrafía. Para ello, usamos un modelo en 2D. En este caso, consideramos el montaje experimental en la Figura 1a. Supondremos que el detector es 1D y corresponde al segmento

$$\{(0, p) : p \in [0, 1]\}$$

y que tanto la densidad de actividad f como el coeficiente de atenuación μ son iguales a cero fuera del cuadrado

$$\{(z, p) : z, p \in [0, 1]\}.$$

El detector tiene un colimador perfecto con N pixeles cuyos centros están en

$$p_n = \frac{n + 1/2}{N}, \quad n \in \{0, \dots, N - 1\}$$

y cuyo ancho es $\Delta p = 1/N$. El número de fotones $u = u(n)$ detectados por unidad de tiempo en el pixel n está dado por

$$u(n) = \int_{p_n - 0.5\Delta p}^{p_n + 0.5\Delta p} \int_{-0.5\Delta p}^{+0.5\Delta p} \frac{f(p + q, z)}{4\pi z^2} e^{\int_0^{d(q, z)} \mu\left(p + s \frac{q}{d(q, z)}, s \frac{z}{d(q, z)}\right) ds} z dz dq dp$$

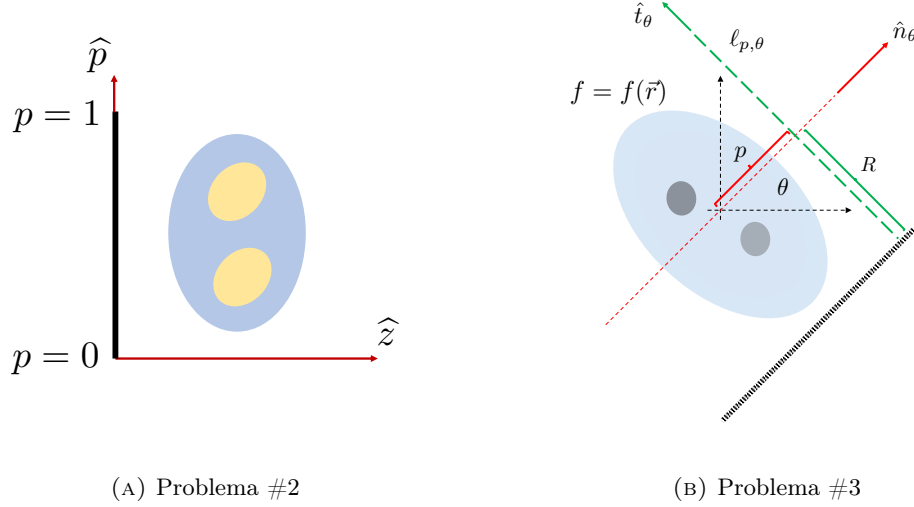


FIGURA 1. Diagramas para el Problema #2 y Problema #3.

donde

$$d(q, z)^2 = q^2 + z^2.$$

Descargue los archivos `scintigraphy_no_attenuation.npz` y `scintigraphy_attenuation.npz` del sitio web. En cada uno de ellos encontrará un vector \mathbf{u} que indica el número de fotones detectados por unidad de tiempo en cada pixel cuando el coeficiente de atenuación es cero, i.e., sólo se obtiene una imagen del radiotrazador, y cuando se encuentra al interior de un material, respectivamente. El número de pixeles es $N = 128$.

- (2.1) Grafique las imagenes adquiridas sin y con atenuación. Discuta las diferencias entre ambas y el efecto que tiene la atenuación en la imagen adquirida. Si supone que el coeficiente de atenuación es constante y soportado en una banda vertical, ¿puede inferir cuál de las fuentes de radiactividad está más alejada del detector?
- (2.2) En clases vimos que es razonable suponer que el paciente está en una franja vertical de ancho Δz . Suponga que el coeficiente de atenuación μ es igual a una constante μ_0 en una franja vertical centrada en $z_0 = 0,5$ y de ancho Δz . Use la expresión aproximada obtenida en clases

$$\begin{aligned} u(n) &\approx \frac{\pi \Delta p^2 \Delta z}{4\pi z_0^2} e^{-\int_0^{z_0} \mu(p_n, s) ds} \int_{p_n-0,5\Delta p}^{p_n+0,5\Delta p} f(p_n + q, z_0) dq \\ &= \frac{\pi \Delta p^2 \Delta z}{4\pi z_0^2} e^{-\mu_0 \Delta z} \int_{p_n-0,5\Delta p}^{p_n+0,5\Delta p} f(p_n + q, z_0) dq \end{aligned}$$

para distintos valores de μ_0 y Δz para determinar si puede compensar el efecto de la atenuación.

Problema 3: SPECT

En este problema consideramos un modelo de SPECT en 2D. Consideramos el montaje experimental en la Figura 1b. El detector tiene un colimador perfecto y tiene N pixeles que cubren un rango desde $-p_{\text{máx}}$ a

$+p_{\text{máx}}$. El centro del n -ésimo pixel se encuentra en la posición p_n mientras que su ancho es $\Delta p = 1/N$. Para cada θ el número de fotones detectados por unidad de tiempo en el pixel ubicado en p_n es proporcional a

$$u(p_n, \theta) = \int_{-R}^{\infty} \frac{f(p_n \hat{n}(\theta) + z \hat{t}(\theta))}{4\pi(z+R)^2} e^{-\int_{-R}^z \mu(p\hat{n}(\theta) + s\hat{t}(\theta)) ds} dz$$

donde

$$\hat{n}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{t}(\theta) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Descargue los archivos `spect_no_attenuation.npz` y `spect_attenuation.npz` del sitio web. En cada uno de ellos encontrará la función `u` que indica el número de fotones detectados por unidad de tiempo en cada pixel para cada ángulo θ cuando el coeficiente de atenuación es cero, i.e., sólo se obtiene una imagen del radiotrazador y $\mu = 0$, y cuando se encuentra al interior de un material, respectivamente. Para estos datos $p_{\text{máx}} = 1,1$, $N = 128$, $R = 1,1$ y los ángulos tienen la forma

$$\theta_n = 2\pi \frac{n}{N_\theta}, \quad n \in \{0, \dots, N_\theta - 1\}$$

para $N_\theta = 128$.

- (3.1) Grafique los sinogramas con y sin atenuación. Discuta las diferencias entre ambos y el efecto que tiene la atenuación. ¿Puede inferir la imagen a la que corresponde el sinograma?
- (3.2) Intente reconstruir la imagen a partir de los sinogramas usando la transformada de Radon. Discuta sus resultados. ¿Qué regiones de la imagen son más intensas o menos intensas? ¿A qué se debe este efecto? Discuta.
- (3.3) Una forma de compensar el efecto de la atenuación es suponer que el radiotrazador está contenido en un disco de radio $R_0 < R$ con coeficiente de atenuación constante μ_0 . Determine la expresión que se obtiene para

$$\frac{1}{4\pi(R+z)^2} e^{-\int_{-R}^z \mu(p\hat{n}(\theta) + s\hat{t}(\theta)) ds}$$

en este caso.

- (3.4) Investigue acerca del método de Chang. Implementelo y reconstruya la imagen usando este método. Discuta sus resultados.