Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituto de Ingeniería Biológica y Médica
IBM2101 – Imágenes Biomédicas
2do Semestre del 2022

Tarea 4

Profesor: Carlos A. Sing Long
Estudiante: Iván Vergara Lam

Problema 1

La ley de decaimiento radioactivo estipula que el cambio en el número de átomos radioactivos por unidad de tiempo es proporcional al numero de átomos radioactivos.

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

La expresión anterior tiene por solución:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

La radioactividad corresponde a la tasa de desintegraciones:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N \implies A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

De esta manera, la vida media corresponde al tiempo a partir del cual la radioactividad se ve reducida a la mitad, lo que ocurre cuando:

$$\tau_{1/2} = \frac{\log 2}{\lambda}$$

(1.1) Sea N_0 la concentración inicial de Molibdeno-99 en el sistema, se puede determinar, en base a lo anterior, su decaimiento, el que está dado por:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t)$$

Al resolver la ecuación anterior:

$$N_1(t) = N_0 e^{-\lambda t} \tag{1}$$

En el caso del Tecnecio-99m se cumple que:

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = -\lambda_2 N_2(t) + \lambda_1 N_1(t) \tag{2}$$

Reemplazando (1) en (2), se obtiene:

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = -\lambda_2 N_2(t) + \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

Multiplicando por $e^{\lambda_2 t}$, se obtiene:

$$e^{\lambda_2 t}\frac{dN_2(t)}{dt} = -e^{\lambda_2 t}\lambda_2 N_2(t) + \lambda_1 N_0 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$$

$$e^{\lambda_2 t}\frac{dN_2(t)}{dt} + e^{\lambda_2 t}\lambda_2 N_2(t) = \lambda_1 N_0 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$$

Se puede notar que la expresión anterior se puede reescribir como:

$$\frac{d[e^{\lambda_2 t}N_2(t)]}{dt} = \lambda_1 N_0 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$$

Integrando a ambos lados, se obtiene:

$$e^{\lambda_2 t}N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}N_0 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + C \tag{3}$$

Para un tiempo $t = 0$, la expresión queda expresada por:

$$e^{\lambda_2\cdot 0}N_2(0) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}N_0 e^{(\lambda_2-\lambda_1)\cdot 0} + C$$

Estableciendo la condición inicial $N_2(t=0) = 0$

$$0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}N_0 + C$$

$$C = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}N_0$$

Reemplazando C en (3), se obtiene la expresión para el Tecnecio-99m:

$$e^{\lambda_2 t}N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}N_0 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}N_0$$

$$N_2(t) = \frac{N_0\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

Por último, para el Tecnecio-99g, el decaimiento está dado por:

$$\frac{dN_3(t)}{dt} = \lambda_2 N_2(t)$$

Cuya solución para la ecuación diferencial corresponde a:

$$N_3(t) = \frac{N_0\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}e^{-\lambda_2 t} - \frac{N_0\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}e^{-\lambda_1 t} + N_0$$

(1.2) Para determinar el tiempo en que se maximiza la cantidad de átomos de Tecnecio-99m se debe derivar la expresión obtenida en el inciso (1.1) e igualar a 0, así:

$$\begin{aligned}\frac{dN_2(t)}{dt} = \frac{N_0\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) &= 0\\ \frac{N_0\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}) &= 0\\ \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} &= 0\end{aligned}$$

Se reemplazan los valores teóricos de $\lambda_1 = \frac{\mathrm{Ln}(2)}{66}$ y $\lambda_2 = \frac{\mathrm{Ln}(2)}{6}$ y resolviendo mediante software computacional, se obtiene que el tiempo en que se maximiza la cantidad de átomos de Tecnecio-99m corresponde a:

$$t_{max} = 22{,}83 \text{ horas}$$

Problema 2

(2.1) Al graficar las imágenes adquiridas con y sin atenuación, se obtiene el siguiente gráfico:

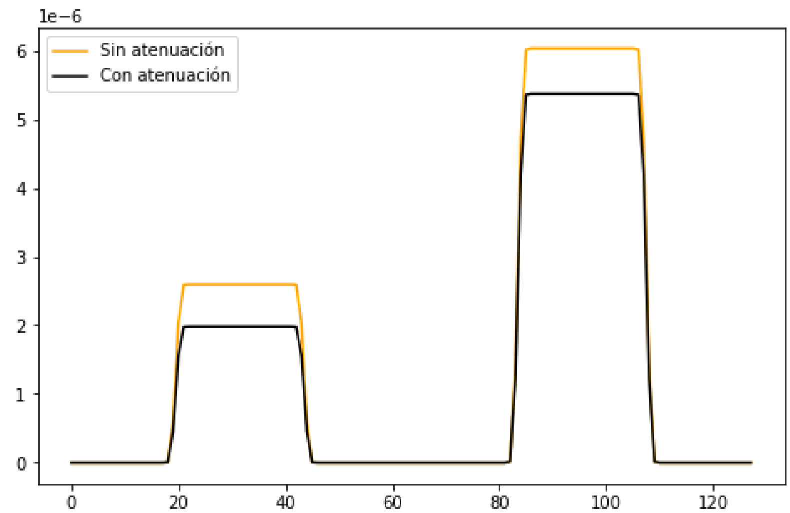

Figura 1: Número de fotones detectados por unidad de tiempo

El efecto que tendrá la atenuación en la imagen adquirida influirá en la cantidad de energía absorbida por el detector, proveniente de cada una de las fuentes, lo anterior se verá reflejado en la intensidad de la luz presente en la imagen.

A partir de lo observado en el gráfico, considerando una atenuación constante y una distribución uniforme de la materia, se puede inferir que la fuente de radioactividad más alejada del detector corresponde a la fuente de la izquierda, es decir, la que se encuentra entre los 20 y 45 pixeles, aproximadamente.

(2.2) Para corregir la atenuación, se definió una función dependiente del coeficiente de atenuación μ_0 y de la distancia Δz. De esta manera, luego de probar con varias combinaciones, se obtuvo un resultado satisfactorio, determinado al utilizar un coeficiente de atenuación μ_0 correspondiente al promedio de los coeficientes de atenuación de la fuente más alejada y de la fuente más cercana, y una distancia $\Delta z = 0{,}2$.

Los gráficos obtenido se muestra a continuación:

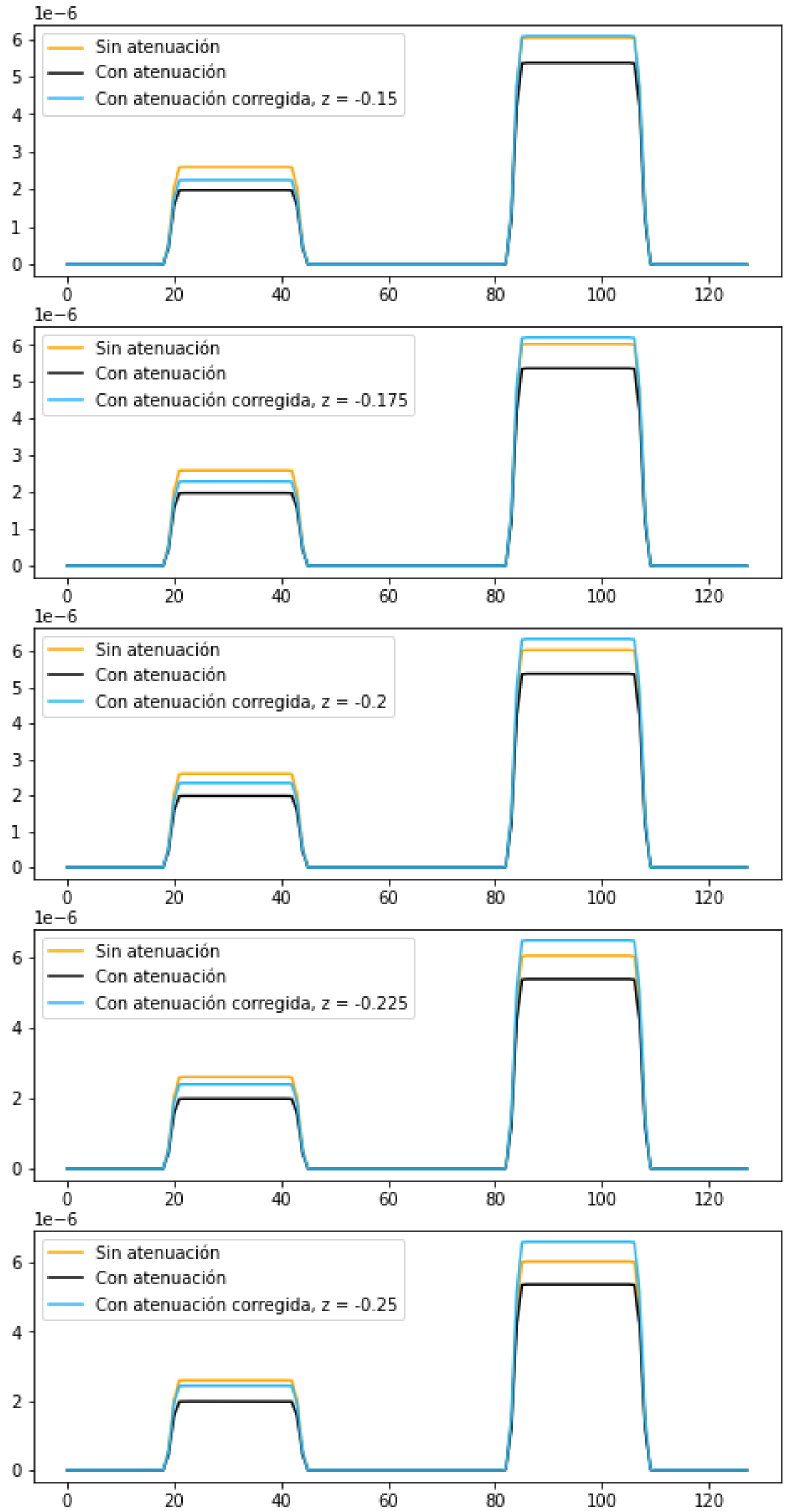

Figura 2: Número de fotones detectados por unidad de tiempo

Problema 3

(3.1) En primer lugar, se grafican los sinogramas entregados, se presentan a continuación:

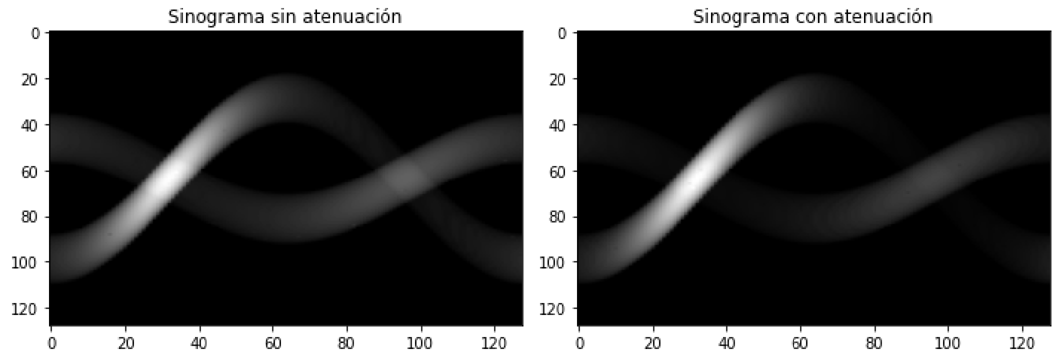

Figura 3: Sinogramas con y sin atenuación

A simple vista, se puede apreciar que la atenuación se ve reflejada en una pérdida de información en el sinograma, lo que, en la imagen, debería verse como una menor intensidad de luz. Además, se puede inferir que la imagen reconstruida debe ser una configuración de dos discos.

(3.2) Se reconstruyeron las imágenes utilizando la transformada de Radón, haciendo uso de un filtro tipo rampa, las imágenes obtenidas se muestran a continuación:

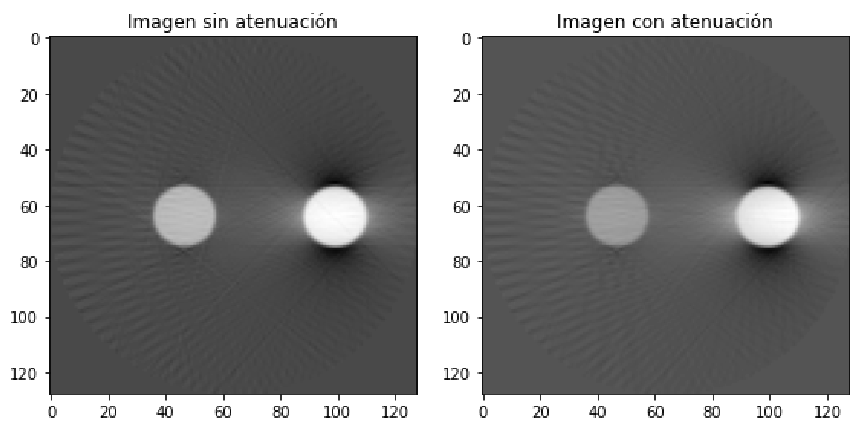

Figura 4: Imágenes reconstruidas con y sin atenuación

Se puede observar que las regiones más intensas corresponden, en ambos casos, a los discos de la derecha, lo que tiene correlación con lo obtenido en el problema 2, ya que los discos de la derecha corresponden a las fuentes que detectan mayor cantidad de fotones por unidad de tiempo, es decir, más intensidad de la luz.

Luego, la atenuación se puede identificar en la diferencia de resolución entre ambas imágenes, debido a que, en el caso atenuado, los discos se visualizan de manera más borrosa y menos clara.

(3.3) Para determinar una expresión matemática, basta notar que, por enunciado, el coeficiente de atenuación μ toma un valor constante, por lo tanto, la expresión corresponde a:

$$\frac{1}{4\pi(R+z)^2} \cdot e^{-\mu \int_{-R}^{z} ds} \implies \frac{1}{4\pi(R+z)^2} \cdot e^{-\mu(R+z)}$$