IBM2101 – Imágenes Biomédicas
2do semestre del 2022

Instituto de Ingeniería Biológica y Médica
Pontificia Universidad Católica de Chile

Tarea #1

Fecha de entrega: martes 30 de agosto a las 11:59pm

Instructor: Carlos A. Sing Long
Ayudante: Ignacio Contreras

Problema 1: La resolución

Definimos la **resolución** de un sistema de formación de imágenes como **la mínima distancia** R a la que pueden estar dos fuentes puntuales antes que sean indistinguibles en la imagen formada. Un sistema de formación de imágenes lineal e invariante bajo traslaciones genérico con resolución R se puede modelar como la convolución con una función Gaussiana

$$g_\sigma(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{2\sigma^2}}, \tag{1}$$

donde σ se debe escoger apropiadamente, $\vec{x} = (x_1, x_2)$ y $|\vec{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2$. Consideramos entonces el sistema T_σ

$$T_\sigma u(\vec{x}) = \iint g_\sigma(\vec{x} - \vec{y}) u(\vec{y})\, d\vec{y}. \tag{2}$$

En otras palabras, la PSF[1] del sistema es la función Gaussiana en (1). En este problema determinaremos la resolución de T_σ.

(1.1) Considere la función auxiliar unidimensional

$$w(x) = e^{\frac{-(x+a)^2}{2\sigma^2}} + e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Muestre que la condición de primer orden para encontrar un punto crítico de w se puede escribir como

$$\frac{x}{a} = \tanh\left(\frac{a^2}{\sigma^2}\frac{x}{a}\right), \tag{3}$$

donde tanh es la tangente hiperbólica. De esta ecuación deduzca que cuando $a < \sigma$ la función w sólo tiene **un máximo global** mientras que para $a < \sigma$ la función tiene **dos máximos globales**. Interprete su resultado en términos de un sistema de formación de imágenes.

Sugerencia: Interprete la ecuación (3) gráficamente; grafique tanh y use el hecho que

$$\begin{aligned} \tanh(x) &< x \qquad x > 0, \\ \tanh(x) &> x \qquad x < 0. \end{aligned}$$

[1] *Point Spread Function*

(1.2) Suponga que el objeto u que observa a través del sistema T_R consiste de dos fuentes situadas en $\vec{x}_1 = 0$ y $\vec{x}_2 = (d, 0)$. Modelamos esta señal como

$$u = \delta_{\vec{x}_1} + \delta_{\vec{x}_2}.$$

Verifique que si $d < 2\sigma$ entonces $T_\sigma u$ tiene un sólo máximo, mientras que si $d > 2\sigma$ entonces $T_\sigma u$ tiene dos máximos. Concluya que $R = 2\sigma$.

Sugerencia: Al escribir la condición de primer orden, observe que debe realizar el mismo análisis que en (1.1).

(1.3) En sus propias palabras, ¿por qué es razonable modelar un sistema de resolución R a través de la transformación T_σ? ¿Qué tipo de simetría tiene la función g_σ?

(1.4) Suponga que se tienen dos sistemas de formación de imágenes en cascada, cada uno con resolución R_1 y R_2. Verifique que si cada sistema se modela usando (2) entonces el sistema completo tiene resolución

$$R_3^2 = R_1^2 + R_2^2.$$

Compare la resolución del sistema resultante con aquella de los sistemas en cascada. ¿Se puede mejorar la resolución añadiendo sistemas en cascada?

Sugerencia: Explique por qué es razonable modelar cada sistema utilizando $T_{R_1/2}$ y $T_{R_2/2}$. Luego, demuestre que $T_{R_1/2}T_{R_2/2} = T_{R_2/2}T_{R_1/2} = T_{R_3/2}$, en otras palabras, que al componer $T_{R_1/2}$ con $T_{R_2/2}$ obtenemos una convolución por una función Gaussiana. Recuerde usar el teorema de convolución.

(1.5) Otra forma de cuantificar la resolución es a través de la FWHM[2] de la PSF. Verifique que la FWHM de la función Gaussiana en (1) es

$$\text{FWHM} = 2\sigma\sqrt{2\log 2} = R\sqrt{2\log 2}.$$

Concluya que usar la FWHM puede subestimar la resolución del sistema en un 17 %.

Problema 2: El efecto de Gibbs

Considere el *fantoma de Shepp-Logan*, una imagen 2D estándar para probar la reconstrucción de imágenes. Descargue de Canvas la imagen `shepp_logan.png`.

(2.1) Utilice la transformada de Fourier 2D en `numpy` en la imagen, luego, seleccione una sección central cuadrada de 64×64, y haga todas las otras entradas fuera de ese cuadrado igual a cero. Llamaremos a esta imágen P_K. Ahora, utilice la transformada inversa 2D de Fourier en la nueva imagen. Comente sus resultados.

Una de las maneras de evitar lo observado en (2.1) es utilizar una “ventana”. En particular, una buena opción es utilizar “ventana Hamming”.

(2.2) Explique de la documentacĩon de `numpy` qué hace la “ventana Hamming”. Genere una ventana en 2 dimensiones con el siguiente código:

```
n = nump.yhamming(64)
hamming2d = numpy.sqrt(np.outer(n,n))
```

[2] *Full-Width at Half-Maximum*

Luego, debe agregar ceros al array para que pueda ser multiplicada con otra matriz de tamaño mayor. Haga esto ejecutando:

```
hamming2d_pad = numpy.pad(ham2d,(N/2,N/2))
```

donde $N = 256 - 64$. Multiplique la imagen P_K en el dominio de Fourier con la ventana y utilice la transformada inversa. Comente sus resultados con respecto a la pregunta (2.1).

Problema 3: Tarjeta de prueba, resolución y aberraciones

Una forma experimental de determinar la resolución de un sistema es construyendo un *fantoma de resolución* o una *tarjeta de prueba*[3] que contiene figuras de resolución conocida. Descargue de Canvas el archivo `Zone720-HardEdge-A-Crop-Resize.png` que representa una tarjeta de prueba. La imagen tiene 4096×4096 pixeles. Supondremos que esta tarjeta tiene dimensiones de 1 m × 1 m. De este modo, los pixeles representan muestras tomadas cada $\Delta x = \Delta y = 2^{-12}$ cm. Por tanto, la resolución horizontal y vertical es de $\approx 0{,}25$ mm y el pixel (m, n) representa la posición

$$\vec{x}_{m,n} = \left(\left(\tfrac{1}{2} + m\right) \Delta x, \quad \left(\tfrac{1}{2} + n\right) \Delta y \right), \qquad m, n \in \{0, \dots, 4095\}.$$

Desde ahora llamamos u a esta tarjeta de prueba

(3.1) Construya sistemas de la forma (2) correspondientes a las resoluciones

$$R \in \{2{,}5 \text{ mm}, 5 \text{ mm}, 7{,}5 \text{ mm}, 1 \text{ cm}, 2{,}5 \text{ cm}, 5 \text{ cm}\}.$$

Use Python para calcular el efecto de aplicar el sistema a la tarjeta de prueba u. Discuta el efecto que tiene la resolución R en la imagen $T_{R/2}u$ que obtiene. ¿Tiene la distorsión una dirección privilegiada? ¿Qué detalles se pierden cuando R aumenta?

Nota: En total son 6 figuras.

(3.2) Cuando la PSF no es radialmente simétrica ocurren **aberraciones**. Consideramos la PSF

$$h_\sigma(\vec{x}) = \frac{1}{5\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{50\sigma^2}(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(x_1 + x_2)^2}$$

y denotamos H_σ el sistema asociado a esta PSF. Repita los experimentos que realizó en (3.1) usando ahora este sistema. Discuta el efecto que tiene la resolución R en la imagen $H_{R/2}u$ que obtiene. ¿Tiene la distorsión una dirección privilegiada? ¿Qué detalles se pierden cuando R aumenta? ?En qué direcciones?

Problema 4: Muestreo y aliasing

En este problema usaremos la tarjeta de prueba del Problema #3 para estudiar el efecto de **muestreo** y **aliasing**. Nuevamente denotamos como u la tarjeta de prueba.

(4.1) Calcule la DFT de u. Si denotamos $\widehat{u}$ la DFT de u entonces grafique en Python $\log(1 + |\widehat{u}|)$. ¿Decae la transformada de Fourier de u rápidamente?

---

[3] También llamada *resolution chart*.

Nota: ¡Recuerde usar `fftshift` para centrar las frecuencias!

(4.2) Muestree u usando **1 de cada 8 pixeles**. Esto implica una reducción de la resolución de la imagen de $\approx 0{,}25$ mm a $\approx 1{,}25$ mm. Grafique en Python la señal muestreada Su como una imagen de 512×512 pixeles, y su DFT $\widehat{Su}$. Discuta los artefactos visuales que aparecen en Su y la relación entre $\widehat{u}$ y $\widehat{Su}$.

(4.3) Para reducir los artefactos visuales se hace uso de *dealiasing*. Antes de muestrear u convolucionamos la señal por un filtro Gaussiano con $R = 1{,}25$ mm. Grafique en Python Su y $ST_{R/2}u$. ¿Se eliminan algunos de los artefactos visuales en Su?

(4.4) Grafique en Python $\widehat{Su}$ y $\widehat{ST_{R/2}u}$. Discuta el efecto de aplicar un filtro en el aliasing en frecuencia.