



Tarea 3

Profesor: Carlos A. Sing Long
Estudiante: Iván Vergara Lam

Problema 1

(1.1) Dada la función:

$$\mu(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & |x_1| \leq \frac{1}{2} \text{ y } |x_2| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Si se grafica lo anterior, se obtiene:

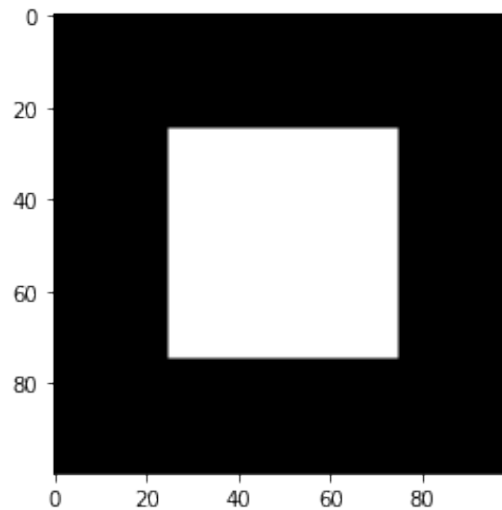


Figura 1: Cuadrado de lado 1

Calculando la transformada de Radon:

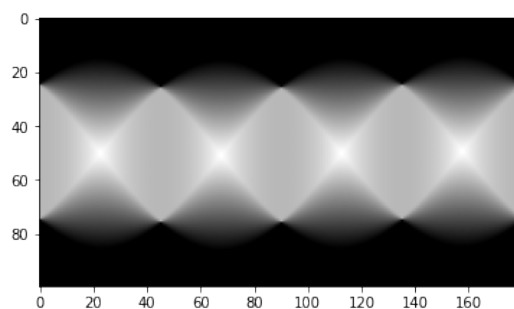


Figura 2: Transformada de Radon de un cuadrado de lado 1

Lo anterior se puede obtener analíticamente al calcular las proyecciones generadas por el cuadrado para distintos ángulos y superponiéndolos.

(1.2) Dada la función:

$$\mu(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Si se grafica lo anterior, se obtiene:

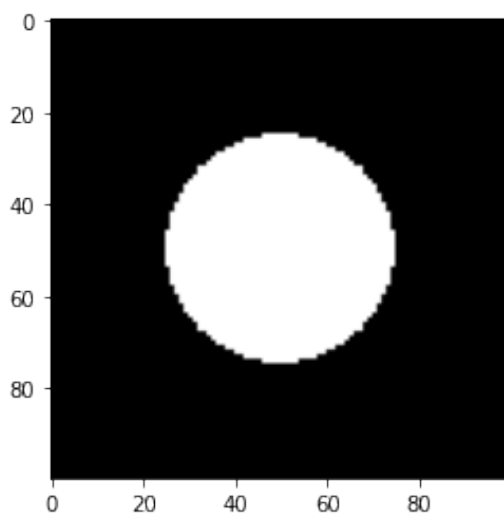


Figura 3: Círculo de radio 1/2

Se puede notar que la expresión $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1/2$ corresponde a un disco de radio 1/2. Por lo tanto, para facilitar el desarrollo matemático es conveniente utilizar coordenadas polares.

De esta manera, el cambio de variable se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Sea $f \in \mathbb{R}^2$, la transformada de Radon está dada por:

$$\mathcal{R}f(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p \cos \theta - s \sin \theta, p \sin \theta + s \cos \theta) ds$$

Considerando $\vec{\xi} = (\cos \theta, \sin \theta)$ y utilizando la definición de δ , se tiene que la transformada de Radon está dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\mu(x_1, x_2) &= \int_{disco} \mu(x_1, x_2) \delta(p - x_1 \xi - x_2 \xi) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{disco} \mu(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta) \delta(p - u) dudv \end{aligned}$$

Utilizando que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}) \delta(r - \vec{r}) dr = f(\vec{r})$$

Se obtiene:

$$\mathcal{R}\mu = \int_{-\sqrt{1/4-p^2}}^{\sqrt{1/4-p^2}} \mu(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta) dv$$

Si $\mu = 1$, se tiene que:

$$\int_{-\sqrt{1/4-p^2}}^{\sqrt{1/4-p^2}} 1 dv = 2\sqrt{1/4-p^2}$$

Finalmente:

$$\mathcal{R}\mu = \begin{cases} 2\sqrt{1/4-p^2} & \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

El resultado se puede visualizar gráficamente a continuación:

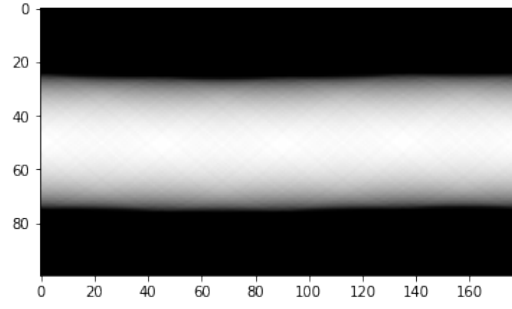


Figura 4: Transformada de Radon de un disco de radio 1/2

Problema 2

(2.1) Realizando un ajuste en la posición x_1 en la expresión obtenido anteriormente, se obtiene:

$$\mathcal{R}\mu(x_1 + \frac{d}{2}, x_2) = \mathcal{R}\mu(p + \frac{d}{2} \cos \theta, \theta) = 2\sqrt{r^2 - (p + \frac{d}{2} \cos \theta)^2}$$

$$\mathcal{R}\mu(x_1 - \frac{d}{2}, x_2) = \mathcal{R}\mu(p - \frac{d}{2} \cos \theta, \theta) = 2\sqrt{r^2 - (p - \frac{d}{2} \cos \theta)^2}$$

Aplicando linealidad de la transformada de Radon, el resultado se puede obtener a través de la suma de ambas transformadas, de esta manera:

$$\mathcal{R}\mu = 2\sqrt{r^2 - (p + \frac{d}{2} \cos \theta)^2} + 2\sqrt{r^2 - (p - \frac{d}{2} \cos \theta)^2}$$

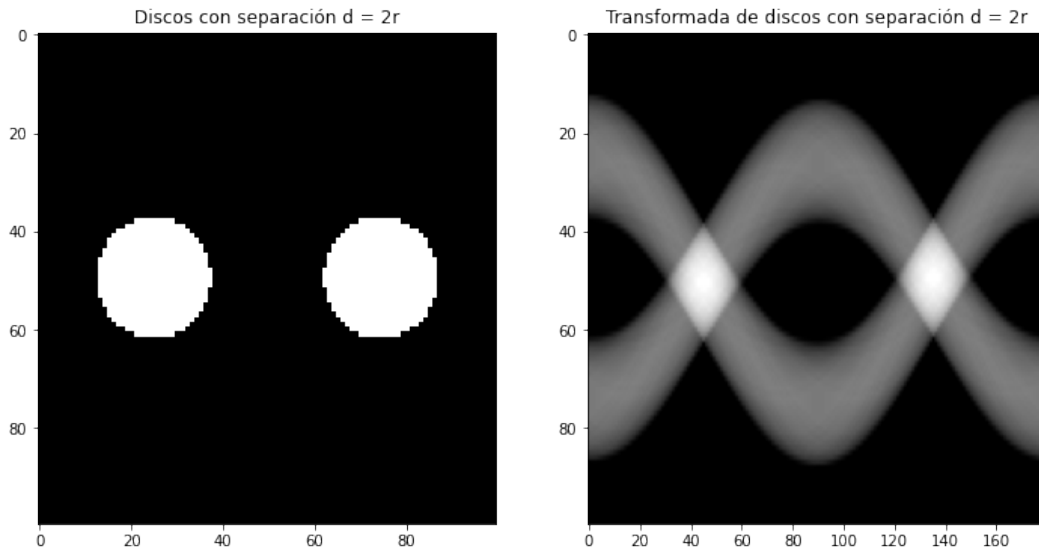


Figura 5: Discos separados por $d = 2r$ y su transformada de Radon

(2.2) Para verificar el ángulo en que la separación es máxima y mínima se graficaron los discos con distintas distancias entre ellos y sus respectivas transformadas de Radon, los resultados se presentan a continuación:

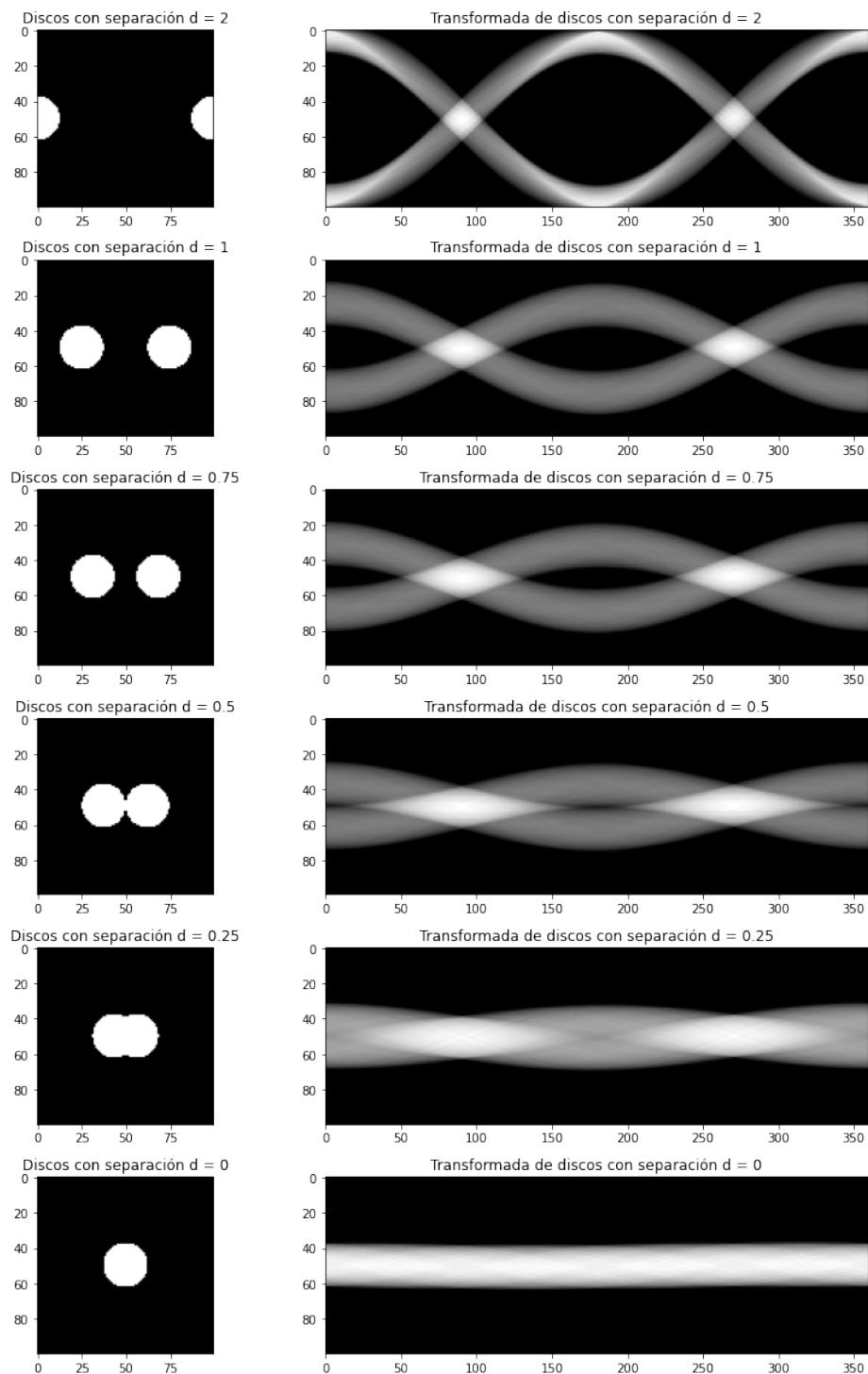


Figura 6: Discos y sus transformadas de Radon

Se puede notar que en todos los gráficos coinciden los puntos de máxima y mínima superposición. De esta manera, se puede observar que la máxima superposición se alcanza en $\theta = 90^\circ$ y $\theta = 270^\circ$. Mientras que la mínima superposición, es decir, cuando estas están más separadas, se obtiene en $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 180^\circ$.

- (2.3) Al tomar la transformada de Radon de los sistemas de discos con distintas separaciones, se puede notar que el mínimo Δp al que se debe muestrear para distinguir ambos círculos es de $\Delta p = r$, donde r representa el radio de cada círculo. Lo anterior se puede evidenciar gráficamente en la siguiente figura:

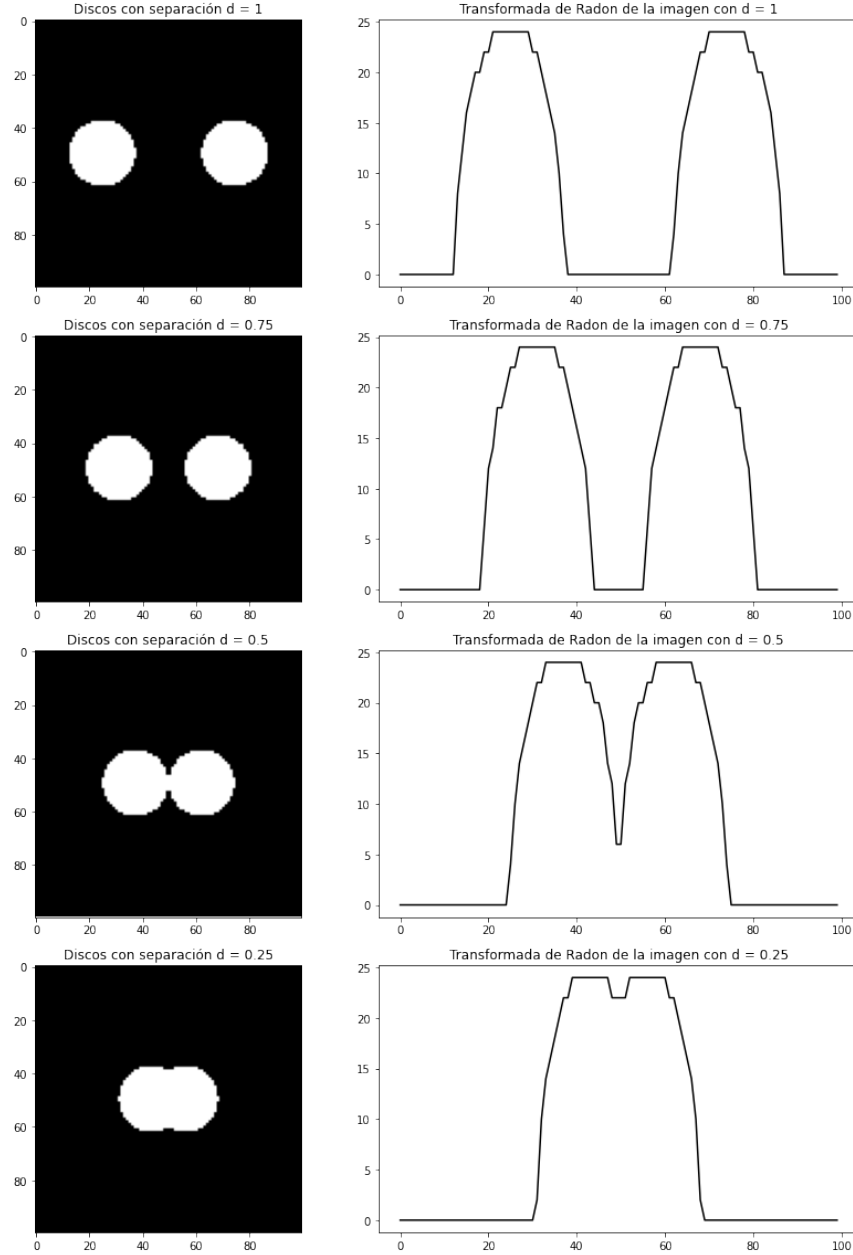


Figura 7: Discos y sus transformadas de Radon

En este caso, $\Delta p = r = 0,5$.

Problema 3

En primer lugar, se graficó el sinograma entregado, presentado a continuación:

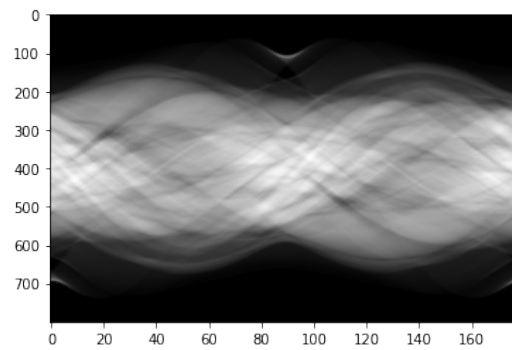


Figura 8: Sinograma

Luego, para determinar la imagen a la que se debe llegar, se utilizó la función `iradon`, con lo que se obtuvo la siguiente imagen:

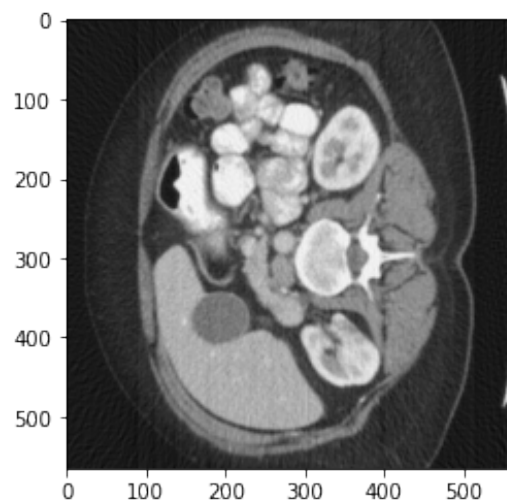


Figura 9: Retroproyección filtrada usando función `iradon`

Se puede observar que la imagen corresponde a una tomografía axial computada de abdomen.

- (3.1) Para encontrar la retroproyección filtrada usando técnicas en el dominio de Fourier se utilizó como base el código presente en el siguiente [repositorio](#).

El código realiza primeramente un filtrado de tipo rampa, el que es transformado al dominio de la frecuencia, al igual que la imagen de sinograma, posteriormente son multiplicados entre sí. Por último, al resultado obtenido se le aplica la transformada inversa de Fourier, para regresar al dominio del espacio.

Posteriormente, se realiza la retroproyección utilizando un nuevo sistema coordenado centrado en el origen de la imagen, y sumando las retroproyecciones generadas en cada ángulo. Así, se obtiene la siguiente imagen:

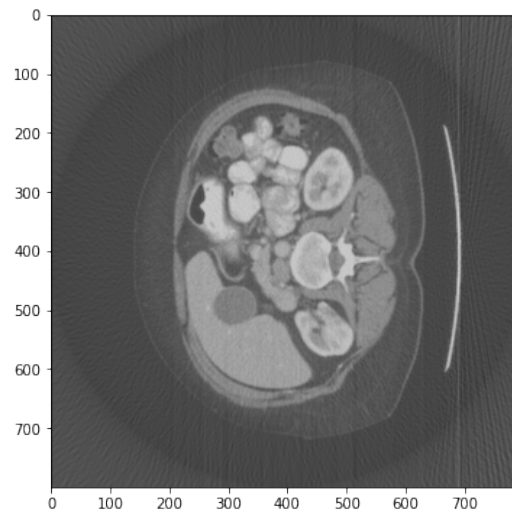


Figura 10: Retroproyección filtrada usando técnicas en Fourier

Se puede apreciar que la imagen también corresponde a la tomografía axial computada, pero presenta una serie de líneas que interfieren con la imagen, esto puede deberse a un submuestreo en la variable p .

- (3.2) Para encontrar la retroproyección filtrada usando técnicas en el dominio del espacio, se utilizó la transformada de Hilbert. El código utilizado fue basado en un código desarrollado en ayudantías del ramo de semestres anteriores.

El código opera utilizando la derivada como un operador capaz de resaltar las curvas de la imagen, permitiendo obtener la retroproyección a través del sinograma original. De esta manera, la imagen obtenida fue la siguiente:

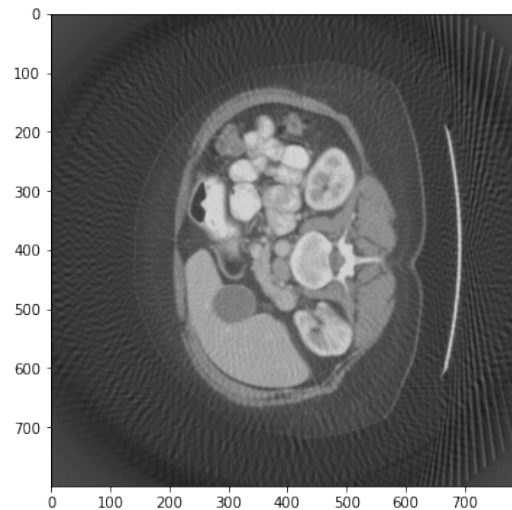


Figura 11: Retroproyección filtrada usando técnicas en el espacio

Se puede apreciar, al igual que en el inciso 3.1, la imagen también corresponde a la tomografía axial computada, pero en este caso presenta muchas más líneas que interfieren con la imagen.

- (3.3) Comparando ambos resultados, se puede observar a simple vista que la imagen obtenida mediante técnicas en el dominio de Fourier es mucho más clara que la obtenida mediante métodos en el dominio del espacio.

Pese a lo anterior, se puede notar que ninguno de los dos es exactamente igual a la imagen reconstruida utilizando la función `iradon`, ya que ambos presentan las líneas que interfieren con la imagen final.

Como solución alternativa surgió la opción de sumar ambos resultados por separado, lo que sorprendentemente generó una imagen más clara y más semejante a la obtenida con la función `iradon`, el resultado se presenta a continuación:

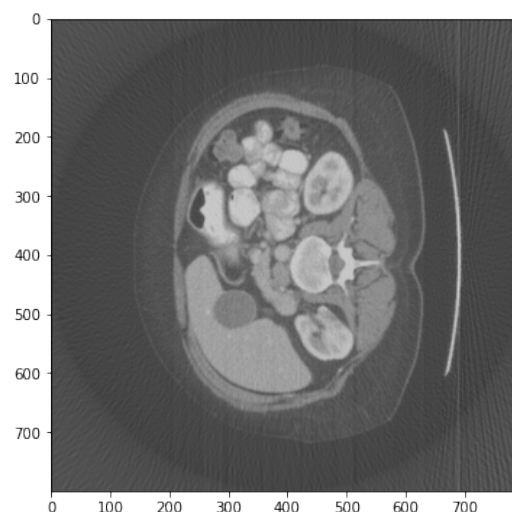


Figura 12: Imagen obtenida mediante la suma de retroproyecciones