Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituto de Ingeniería Biológica y Médica
IBM2101 – Imágenes Biomédicas
2do Semestre del 2022

Tarea 5

Profesor: Carlos A. Sing Long
Estudiante: Iván Vergara Lam

Problema 1

(1.1) A partir de lo estudiado, la reflectividad de intensidad se define por:

$$R_I = \frac{I_r}{I_i} = \frac{p_r^2}{p_i^2} = \frac{(Z_2 \cos\theta_i - Z_1 \cos\theta_t)^2}{(Z_2 \cos\theta_i + Z_1 \cos\theta_t)^2} \tag{1}$$

Mientras tanto, la transmititividad de intensidad está dado por:

$$T_I = \frac{I_t}{I_i} = \frac{Z_1}{Z_2}\frac{p_t^2}{p_i^2} = \frac{4 \cdot Z_1 Z_2 \cos^2\theta_t}{(Z_2 \cos\theta_i + Z_1 \cos\theta_t)^2} \tag{2}$$

Se busca un valor para el ángulo de incidencia θ_i que maximiza las funciones descritas anteriormente. Para ello se utiliza la Ley de Snell, que enuncia lo siguiente:

$$c_1 \cdot \sin\theta_t = c_2 \cdot \sin\theta_i$$

Al despejar la variable θ_t de la expresión anterior, se tiene:

$$\theta_t = \arcsin\left(\frac{c_2}{c_1} \cdot \sin\theta_i\right)$$

Se utiliza la siguiente identidad trigonométrica:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

De esta manera, se cumple que:

$$\cos\theta_t = \cos\left(\arcsin\left(\frac{c_2}{c_1} \cdot \sin\theta_i\right)\right)$$
$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \cdot \sin\theta_i\right)^2}$$

Reemplazando esta expresión en (1) y (2), se obtiene:

$$R_I = \frac{\left(Z_2 \cos\theta_i - Z_1 \sqrt{1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \cdot \sin\theta_i\right)^2}\right)^2}{\left(Z_2 \cos\theta_i + Z_1 \sqrt{1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \cdot \sin\theta_i\right)^2}\right)^2} \tag{3}$$

$$T_I = \frac{4 \cdot Z_1 Z_2 \left(\sqrt{1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \cdot \sin\theta_i\right)^2}\right)^2}{\left(Z_2 \cos\theta_i + Z_1 \sqrt{1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \cdot \sin\theta_i\right)^2}\right)^2} \tag{4}$$

Para encontrar el ángulo de incidencia θ_i que maximiza estas expresiones, se derivan e igualan a 0. De esta manera, se tiene:

$$\frac{d}{d\theta_i} R_I = \frac{4\ Z_1 Z_2\ (c_1^2 - c_2^2) \sin\theta_i\ \left(Z_1 \sqrt{1 - (\frac{c_2}{c_1} \cdot \sin\theta_i)^2} - Z_2 \cos\theta_i\right)}{c_1^2\ \sqrt{1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \cdot \sin\theta_i\right)^2} \cdot \left(Z_1 \sqrt{1 - (\frac{c_2}{c_1} \cdot \sin\theta_i)^2} + Z_2 \cos\theta_i\right)^3}$$

$$\frac{d}{d\theta_i} T_I = \frac{8\ Z_1 Z_2^2\ (c_1^2 - c_2^2) \sin\theta_i}{c_1^2 \left(Z_1 \sqrt{1 - (\frac{c_2}{c_1}\ \cdot \sin\theta_i)^2} + Z_2 \cos\theta_i\right)^3}$$

Se debe considerar que dentro de un medio se cumple: $Z_0 = c_0 \cdot \rho_0$
Por lo tanto, para obtener las expresiones anteriores en términos de las impedancias y densidades, basta con hacer los siguientes reemplazos:

$$c_2 = \frac{Z_1}{\rho_1} \qquad c_2 = \frac{Z_2}{\rho_2} \qquad \frac{c_2}{c_1} = \frac{Z_1 \cdot \rho_2}{Z_2 \cdot \rho_1}$$

Así, se obtiene que el valor que maximiza tanto el coeficiente de reflexión como el coeficiente de transmisión corresponde a $\theta_i = 0$, es decir, cuando el rayo incidente es ortogonal a la interfaz. El sentido físico de lo anterior radica en que, en el caso de la onda transmitida, esta no presenta ninguna obstrucción al atravesar la interfaz y cambiar de medio. Mientras tanto, en el caso de la onda reflejada, esta posee únicamente una componente ortogonal a la interfaz, lo que elimina las pérdidas de energía en direcciones paralelas a la superficie.

(1.2) Se buscan los valores del ángulo de incidencia, impedancias y velocidades de propagación, tal que sea posible obtener un ángulo de transmisión θ_t de 90°. Para ello, nuevamente se utiliza la Ley de Snell, utilizando la expresión obtenida anteriormente, se tiene:

$$\theta_i = \arcsin\left(\frac{c_1}{c_2} \cdot \sin\theta_t\right)$$

Se busca que el ángulo de transmisión sea igual a 90°: $\theta_t = 90° \implies \sin\theta_t = 1$
Reemplazando el valor en la expresión anterior:

$$\theta_i = \arcsin\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$$

Lo que corresponde a la condición necesaria para obtener un ángulo de transmisión θ_t igual a 90°. Lo anterior implica que exista una reflexión total del rayo incidente y la onda transmitida circule a través de la interfaz.

Problema 2

(2.1) Para identificar el tipo de onda de p_+ y p_-, en primer lugar se grafica la función $\phi(s)$, el resultado se muestra a continuación:

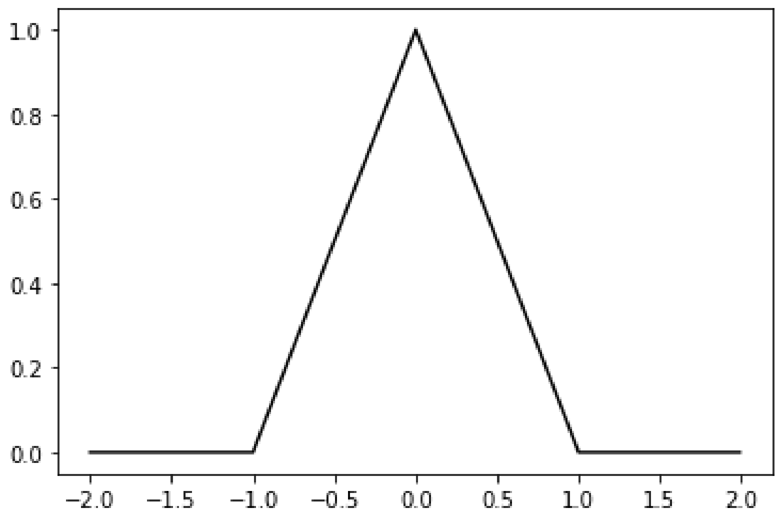

Figura 1: Función $\phi(s)$

Se puede apreciar que la función $\phi(s)$ corresponde a una onda triangular centrada en el origen. Posteriormente, se grafican las ondas p_+ y p_-, se considera un t fijo y una velocidad de propagación $c_1 = 1435\ \frac{m}{s}$. De esta manera, se obtiene lo siguiente:

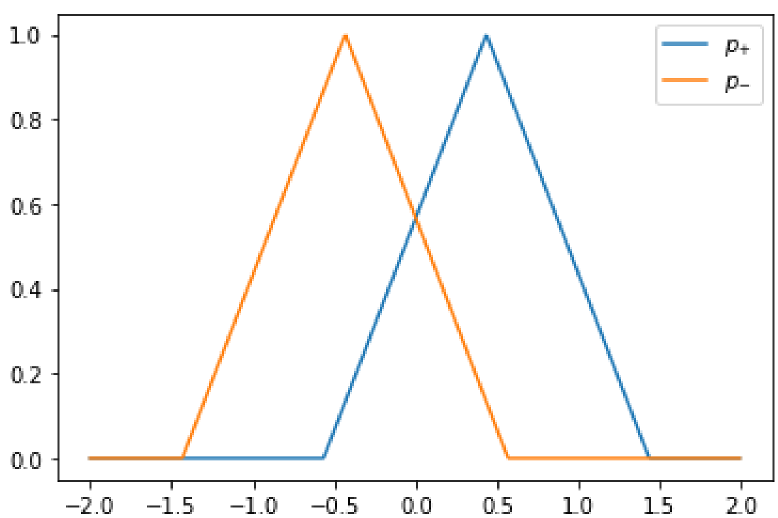

Figura 2: Ondas acústicas planas p_+ y p_-

Como era de esperarse, las ondas acústicas corresponden a dos funciones triangulares $\phi(s)$ desplazadas en $c_1 t$ y $-c_1 t$ respecto al origen.

(2.2) Para maximizar la amplitud de la onda, se debe minimizar el argumento de la función. De esta manera, para el caso de la onda p_+ se tiene:

$$\text{Max}\{\phi(x - c_1 t)\} \implies \text{Min}\{|x - c_1 t|\}$$

Por lo tanto, para cualquier valor de t, se debe cumplir:

$$\begin{aligned} x - c_1 t &= 0 \\ x &= c_1 t \end{aligned}$$

De manera análoga, en el caso de p_- se debe cumplir:

$$\begin{aligned} x + c_1 t &= 0 \\ x &= -c_1 t \end{aligned}$$

En el caso en que $t = 0$, la posición en la que se encuentra el máximo se determina por:

$$\begin{aligned} p_+(x, t = 0) &= \phi(x - c_1 \cdot 0) \qquad & p_-(x, t = 0) &= \phi(x + c_1 \cdot 0) \\ p_+(x, 0) &= \phi(x) & p_-(x, 0) &= \phi(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el máximo tanto en p_+ como en p_- corresponde al máximo de $\phi(x)$, como esta corresponde a una onda triangular centrada en el origen, la posición en la que se encuentra el máximo en $t = 0$ corresponde a $x = 0$.

(2.3) Para el siguiente apartado, se supone que existe una interfaz en la posición $x = L$ con $L > 1$ tal que el material en $x > L$ tiene una velocidad de propagación c_2 e impedancia Z_2.

(2.3.1) Para encontrar el instante en que el punto de máxima amplitud de la onda incidente alcanza la interfaz, se utiliza la expresión obtenida en el inciso anterior, como $x > L$, se trabaja únicamente con la onda p_+. De esta manera, la máxima amplitud se encuentra cuando se cumple la siguiente condición:

$$\begin{aligned} x - c_1 t &= 0 \\ x &= c_1 t \end{aligned}$$

Del enunciado, se tiene que se debe cumplir $x = L$. Reemplazando lo anterior:

$$L = c_1 \tau \implies \tau = \frac{L}{c_1}$$

(2.3.2) Para encontrar la amplitud de la onda reflejada y transmitida en cada instante se utilizan las reflectividades y transmitividades de intensidad definidas en (3) y (4), respectivamente. Como la onda viaja en dirección perpendicular a la interfaz, se tiene que el ángulo de incidencia $\theta_i = 0$. Reemplazando esto en las expresiones, se tiene:

$$R_I = \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{(Z_2 + Z_1)^2} \qquad T_I = \frac{4\ Z_1 Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2}$$

Por lo tanto, la onda reflejada corresponde a:

$$\begin{aligned} \phi_R &= p_+ \cdot R_I \\ \phi_R &= \phi(x - c_1 t) \cdot \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{(Z_2 + Z_1)^2} \end{aligned}$$

En cuanto a la onda transmitida, esta está dada por:

$$\begin{aligned} \phi_T &= p_+ \cdot T_I \\ \phi_T &= \phi(x - c_1 t) \cdot \frac{4\ Z_1 Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2} \end{aligned}$$

(2.3.3) Como la onda reflejada posee la misma naturaleza y se encuentra en el mismo medio que la onda incidente, viajan a la misma velocidad, por lo tanto, se demoran el mismo tiempo en llegar. De esta manera, el tiempo que le toma a la onda reflejada en alcanzar el transductor corresponde a:

$$t_f = 2\ \tau = 2\ \frac{L}{c_1}$$