



Tarea 6

Profesor: Carlos A. Sing Long
Estudiante: Iván Vergara Lam

Problema 1

Se considera el objeto definido por:

$$u(x, y) = \text{rect}(x)\text{rect}(y) - \text{rect}(2x)\text{rect}(2y)$$

con

$$\text{rect}(s) = \begin{cases} 1 & |s| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

El gráfico del objeto a estudiar se presenta a continuación.

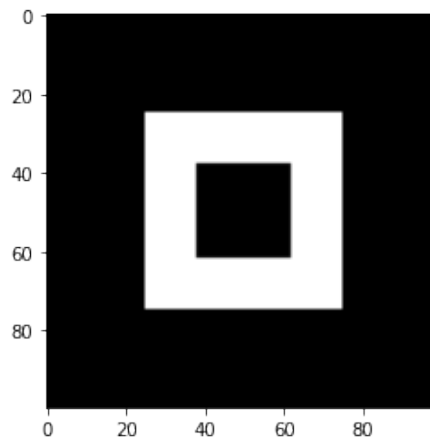


Figura 1: Objeto $u(x, y)$

- (1.1) En primer lugar, se busca determinar los valores de Δk_x y Δk_y para obtener valores de campos de visión (centrados en el origen).

Para ello, se utiliza la relación existente entre estas variables, definida por:

$$\text{FOV}_x = \frac{2\pi}{\Delta k_x} \quad \text{FOV}_y = \frac{2\pi}{\Delta k_y}$$

De esta manera, en los siguientes casos se tiene:

- $(\text{FOV}_x, \text{FOV}_y) = (2, 2) \implies (\Delta k_x, \Delta k_y) = (\pi, \pi)$
- $(\text{FOV}_x, \text{FOV}_y) = (1, 2) \implies (\Delta k_x, \Delta k_y) = (2\pi, \pi)$
- $(\text{FOV}_x, \text{FOV}_y) = (1/2, 2) \implies (\Delta k_x, \Delta k_y) = (4\pi, \pi)$
- $(\text{FOV}_x, \text{FOV}_y) = (1/2, 1) \implies (\Delta k_x, \Delta k_y) = (4\pi, 2\pi)$

(1.2) Para cada par de valores $(\Delta k_x, \Delta k_y)$ se debe determinar el número de muestras necesarias en la dirección x e y para obtener distintas resoluciones.

Para ello se utilizan las siguientes relaciones:

$$N_x = \frac{2\pi}{\Delta k_x \Delta_x} \quad N_y = \frac{2\pi}{\Delta k_y \Delta_y}$$

Además, se tiene la información necesaria para determinar k_x^{\max} y k_y^{\max} .

$$k_x^{\max} = \frac{\pi}{\Delta_x} \quad k_y^{\max} = \frac{\pi}{\Delta_y}$$

De esta manera, en los siguientes casos se tiene:

- $(\Delta_x, \Delta_y) = (1/4, 1/4)$:
 - $(\Delta k_x, \Delta k_y) = (\pi, \pi) \implies (N_x, N_y) = (8, 8)$
 - $(\Delta k_x, \Delta k_y) = (2\pi, \pi) \implies (N_x, N_y) = (4, 8)$
 - $(\Delta k_x, \Delta k_y) = (4\pi, \pi) \implies (N_x, N_y) = (2, 8)$
 - $(\Delta k_x, \Delta k_y) = (2\pi, 2\pi) \implies (N_x, N_y) = (2, 4)$
 - $(k_x^{\max}, k_y^{\max}) = (4\pi, 4\pi)$
- $(\Delta_x, \Delta_y) = (1/20, 1/20)$:
 - $(\Delta k_x, \Delta k_y) = (\pi, \pi) \implies (N_x, N_y) = (40, 40)$
 - $(\Delta k_x, \Delta k_y) = (2\pi, \pi) \implies (N_x, N_y) = (20, 40)$
 - $(\Delta k_x, \Delta k_y) = (4\pi, \pi) \implies (N_x, N_y) = (10, 40)$
 - $(\Delta k_x, \Delta k_y) = (2\pi, 2\pi) \implies (N_x, N_y) = (10, 20)$
 - $(k_x^{\max}, k_y^{\max}) = (20\pi, 20\pi)$
- $(\Delta_x, \Delta_y) = (1/100, 1/100)$:
 - $(\Delta k_x, \Delta k_y) = (\pi, \pi) \implies (N_x, N_y) = (200, 200)$
 - $(\Delta k_x, \Delta k_y) = (2\pi, \pi) \implies (N_x, N_y) = (100, 200)$
 - $(\Delta k_x, \Delta k_y) = (4\pi, \pi) \implies (N_x, N_y) = (50, 200)$
 - $(\Delta k_x, \Delta k_y) = (2\pi, 2\pi) \implies (N_x, N_y) = (50, 100)$
 - $(k_x^{\max}, k_y^{\max}) = (100\pi, 100\pi)$

- (1.3) Se determinaron los valores que se hubiesen muestreado utilizando las configuraciones obtenidas anteriormente. Para ello, se utilizó la transformada de Fourier de la función $u(x, y)$, la que está dada por:

$$\mathcal{F}\{u\}(v, w) = \text{sinc}(v) \cdot \text{sinc}(w) - \frac{1}{4} \cdot \text{sinc}\left(\frac{v}{2}\right) \cdot \text{sinc}\left(\frac{w}{2}\right)$$

A continuación se muestran los gráficos de las transformadas de Fourier muestreadas obtenidos para cada configuración:

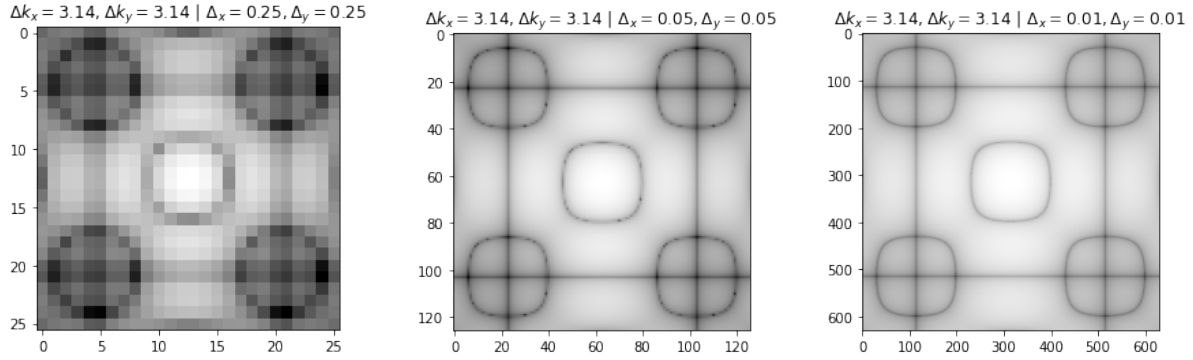


Figura 2: Transformadas de Fourier muestreadas para $(\text{FOV}_x, \text{FOV}_y) = (2, 2)$

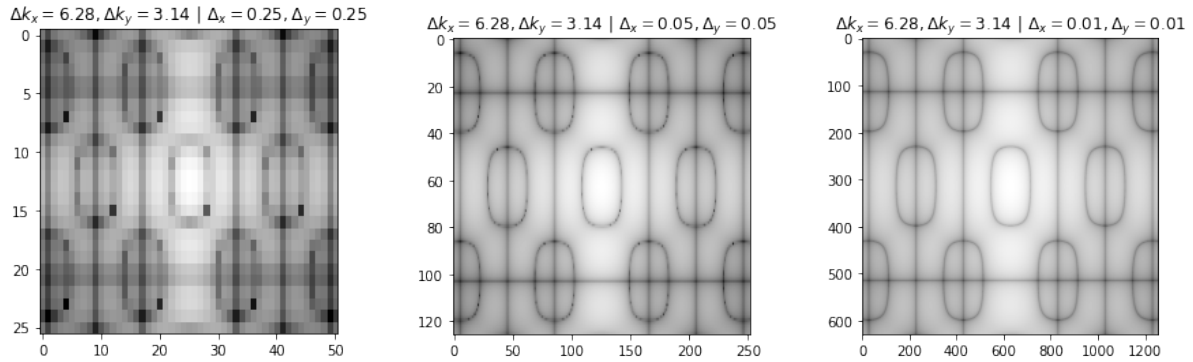


Figura 3: Transformadas de Fourier muestreadas para $(\text{FOV}_x, \text{FOV}_y) = (1, 2)$

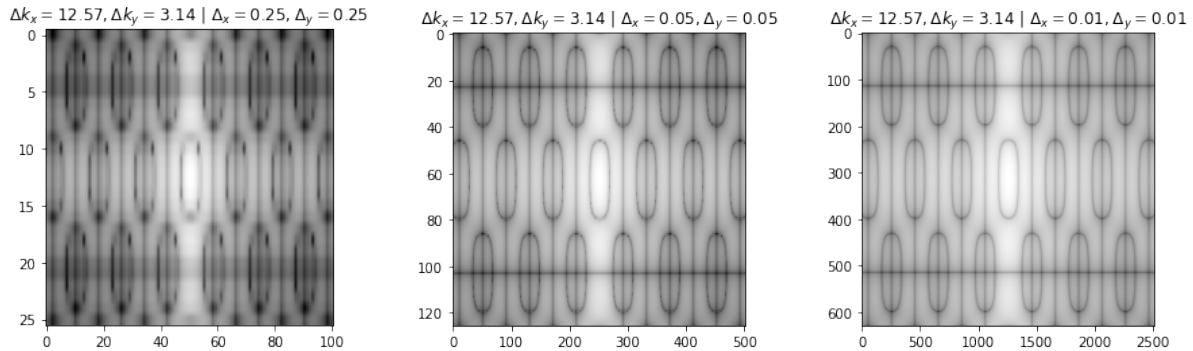


Figura 4: Transformadas de Fourier muestreadas para $(\text{FOV}_x, \text{FOV}_y) = (1/2, 2)$

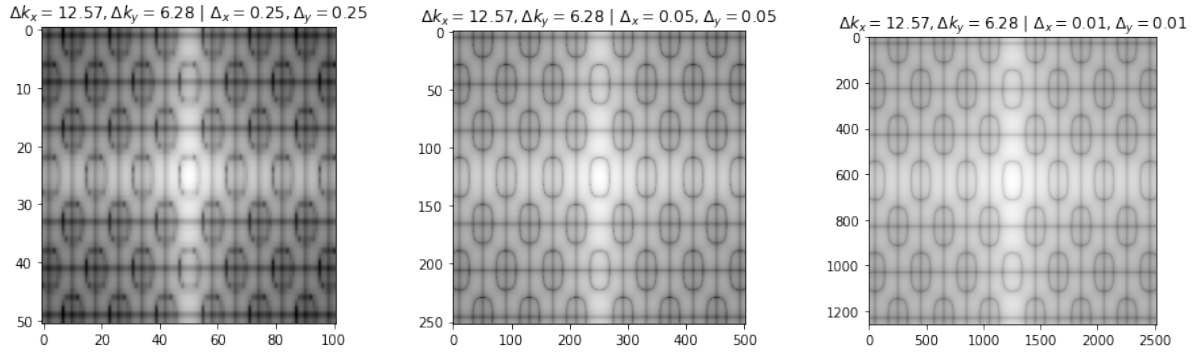


Figura 5: Transformadas de Fourier muestreadas para $(\text{FOV}_x, \text{FOV}_y) = (1/2, 1)$

Posteriormente, se calcularon las transformadas de Fourier inversas de las imágenes muestreadas. Los resultados se exhiben a continuación:

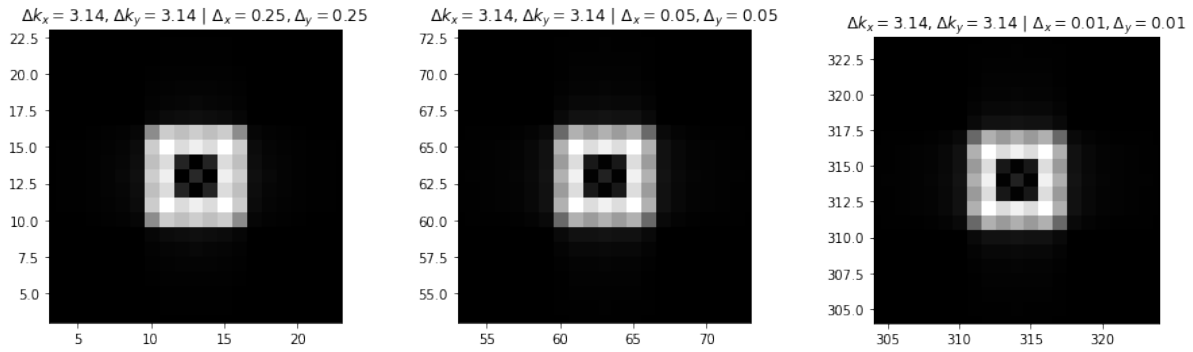


Figura 6: Transformadas de Fourier inversas para $(\text{FOV}_x, \text{FOV}_y) = (2, 2)$

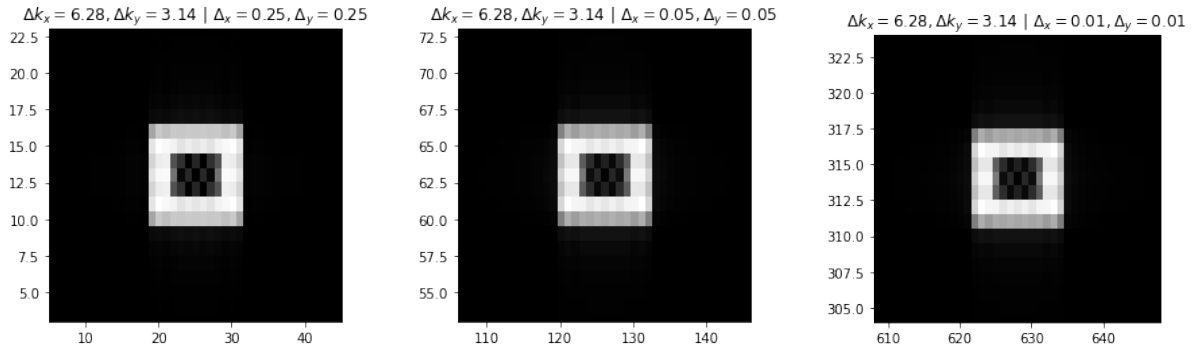


Figura 7: Transformadas de Fourier inversas para $(\text{FOV}_x, \text{FOV}_y) = (1, 2)$

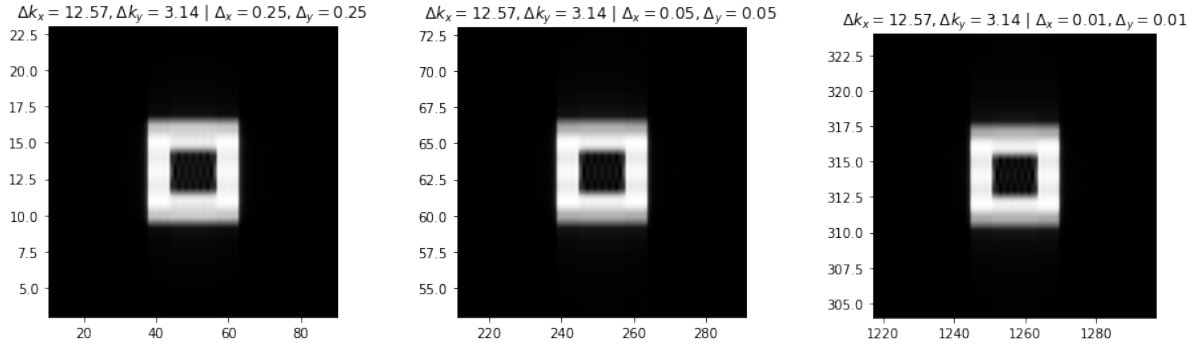


Figura 8: Transformadas de Fourier inversas para $(\text{FOV}_x, \text{FOV}_y) = (1/2, 2)$

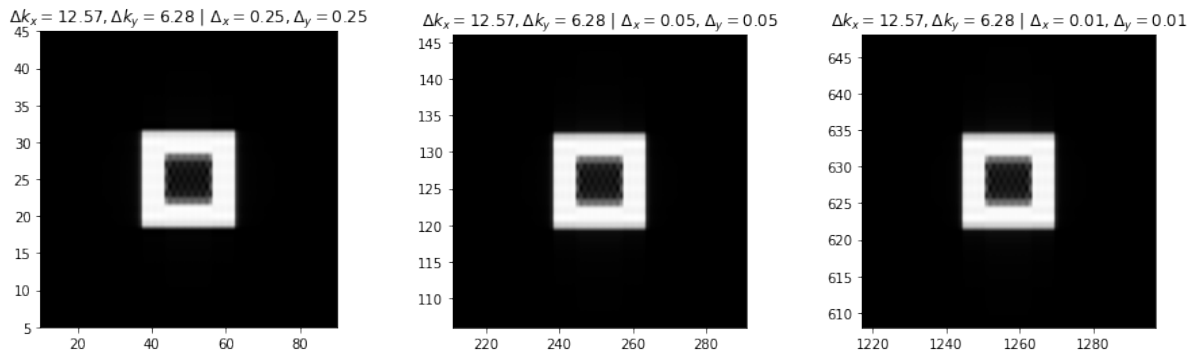


Figura 9: Transformadas de Fourier inversas para $(\text{FOV}_x, \text{FOV}_y) = (1/2, 1)$

Cabe destacar que las figuras en las que $\Delta k_x \neq \Delta k_y$, se realizó un escalamiento por un factor $\alpha = \frac{\Delta k_x}{\Delta k_y}$, con la finalidad de obtener un gráfico cuadrado, comparable con la figura original.

Se puede evidenciar que, a medida que se disminuyen los valores para FOV_x y FOV_y , se presenta un aumento en la resolución de la imagen reconstruida, se nota una mayor continuidad y una disminución en el efecto pixelado.

- (1.3.1) Para el caso en que $(\text{FOV}_x, \text{FOV}_y) = (1/2, 1)$ se puede evidenciar que existe una mayor resolución respecto a las otras series de imágenes. Sin embargo, se presenta un efecto de líneas horizontales, que podría ser generado debido a la diferencia entre Δk_x y Δk_y . De todas maneras, la imagen es significativamente más clara que en las demás configuraciones de FOV.
- (1.3.2) En las 4 configuraciones de FOV, se puede apreciar que en el caso $(\Delta_x, \Delta_y) = (0.25, 0.25)$ se presenta una imagen con menor contraste, en la que el efecto de pixelado es menos notorio, debido a que los tonos grises de los pixeles son más claros que en los otros casos, por lo que constituye una figura más homogénea.

Problema 2

- (2.1) Para poder reconstruir una imagen en el dominio de Fourier utilizando una malla equiespaciada en $[0, 2\pi)$, se deben tomar muestras radiales, que varían en Δr el eje radial y en $\Delta\theta$ en el eje angular. De esta manera, lo que se logra es tomar muchas muestras en el origen, lo que evita la pérdida de información acerca de los contrastes y de los niveles de ruido. Además, evita que los pequeños movimientos del paciente se vean como fantasmas en la imagen, sino que se difuminan a lo largo de la imagen, lo que la hace muy eficiente a la hora de toma de muestras in vivo. Esta malla equiespaciada debe ser trasladada a una grilla cartesiana, siendo este último proceso el conocido como *gridding*.
- (2.2) Se busca determinar T , N_r y N_θ para obtener una reconstrucción con $\text{FOV}_x = \text{FOV}_y = 0,75$ y $\Delta_x = \Delta_y = 0,05$. Para ello es necesario tener en consideración que $\Delta_r = \frac{T}{N_r}$ y $\Delta_\theta = \frac{2\pi}{N_\theta}$ y que la muestra más lejana al origen está a una distancia $r_{\max} = \frac{T(N_r-1)}{N_r}$ del origen.

De esta manera, considerando que la muestra debe ser tomada al centro de cada pixel en forma diagonal, es decir, cuando se forma un ángulo de la forma $\theta = k \cdot \frac{\pi}{4}$, $k \in \{1, 3, 5, 7\}$. Se obtuvo que la separación entre las muestras en el eje radial debe estar dado por $\Delta_r = \Delta_x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \Delta_y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$. Así, el espaciado es de aproximadamente $\Delta_r = 0,0354$.

Teniendo lo anterior en consideración, también fue posible determinar el número de muestras necesarias, siendo esta igual a como si se estuviera trabajando en coordenadas cartesianas, debido a que el radio coincide con la máxima extensión horizontal y vertical. Así $N_r = 15$ muestras. Con ello, se pudo determinar el intervalo temporal entre muestras $T = 0,5303s$.

Finalmente, para determinar el espaciado angular, se utilizó una relación entre el número de muestras en el espacio cartesiano y el perímetro del círculo con el que se tomarán muestras, así, se obtuvo la relación:

$$N_r^2 = 2\pi \cdot N_\theta$$

De esta manera, se obtuvo que $N_\theta = 36$ muestras.