Задача 1

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & -7 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad AB=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & -7 & -4 & 3 \\ 6 & 2 & 4 & 2 \\ -4 & -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$(AB)x = 0.$

Решим СЛУ методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & -7 & -4 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -7 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -7 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -7 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -7 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -22 & -11 & 11 & 0 \\ 0 & -26 & -13 & 13 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -7 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -7 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Ответ $x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

Задача 2 (Считаем, что $A^0 = E$)

$$A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3t \\ -2 & -4 & 6-5t \\ 0 & 0 & -4+t \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 3t^2-24t \\ 16 & 16 & -5t^2+40t-48 \\ 0 & 0 & t^2-8t+16 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -64 & 0 & 3t^3-36t^2+144t \\ -96 & -64 & -5t^3+60t^2-240t+288 \\ 0 & 0 & t^3-12t^2+48t-64 \end{bmatrix}$$

Чтобы найти минимальный многочлен для матрицы A, решим СЛУ $Bx=0$, где $B =$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 16 & -64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3t & 3t^2-24t & 3t^3-36t^2+144t \\ 0 & -2 & 16 & -96 \\ 1 & -4 & 16 & -64 \\ 0 & 6-5t & -5t^2+40t-48 & -5t^3+60t^2-240t+288 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4+t & t^2-8t+16 & t^3-12t^2+48t-64 \end{bmatrix}$$

$Bx = 0$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{c} 1. \\ 2. \\ 3. \\ 4. \\ 5. \end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -4 & 16 & -64 & 0 \\
0 & -1 & 8 & -48 & 0 \\
0 & 3t & 3t^2-24t & 3t^3-36t^2+144t & 0 \\
1 & -4+t & t^2-8t+16 & t^3-12t^2+48t-64 & 0 \\
0 & 6-5t & -5t^2+40t-48 & -5t^3+60t^2-240t+288 & 0
\end{array}\right)$$

$\Leftrightarrow$ Сделаем преобразование:

$5. = 5. + 3. + 2 \cdot 4.$

$$\begin{array}{c} 1. \\ 2. \\ 3. \\ 4. \\ 5. \end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -4 & 16 & -64 & 0 \\
0 & -1 & 8 & -48 & 0 \\
0 & 3t & 3t^2-24t & 3t^3-36t^2+144t & 0 \\
1 & -4+t & t^2-8t+16 & t^3-12t^2+48t-64 & 0 \\
2 & -2 & -16 & 160 & 0
\end{array}\right)$$

$\Leftrightarrow$ Сделаем преобразование:

$4. = 3. - 3 \cdot 4.$

$$\begin{array}{c} 1. \\ 2. \\ 3. \\ 4. \\ 5. \end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -4 & 16 & -64 & 0 \\
0 & -1 & 8 & -48 & 0 \\
0 & 3t & 3t^2-24t & 3t^3-36t^2+144t & 0 \\
-3 & 12 & -48 & 192 & 0 \\
2 & -2 & -16 & 160 & 0
\end{array}\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 16 & -64 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -48 & 0 \\ 1 & -1 & -8 & 80 & 0 \\ 0 & 3t & 3t^2-24t & 3t^3-36t^2+144t & 0 \end{array}\right)$$

$\underline{t=0}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 16 & -64 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -48 & 0 \\ 1 & -1 & -8 & 80 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 16 & -64 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -48 & 0 \\ 0 & 3 & -24 & 144 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 16 & -64 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -48 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -16 & 128 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 48 & 0 \end{array}\right)$$

$\underline{t\neq 0}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 16 & -64 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -48 & 0 \\ 1 & -1 & -8 & 80 & 0 \\ 0 & 3 & 3t-24 & 3t^2-36t+144 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 16 & -64 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -48 & 0 \\ 1 & -1 & -8 & 80 & 0 \\ 0 & 1 & t-8 & t^2-12t+48 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 16 & -64 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -48 & 0 \\ 1 & -1 & -8 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & t & t(t-12) & 0 \end{array}\right)$$

$\Leftrightarrow$ $\underline{\text{поскольку } t\neq 0}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 16 & -64 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -48 & 0 \\ 1 & -1 & 8 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t-12 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow^*$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 16 & -64 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -48 & 0 \\ 1 & -1 & 8 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b-12 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 16 & -64 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -48 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 144 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b-12 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 16 & -64 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -48 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b-12 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 16 & -64 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-12 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -16 & 128 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-12 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Updownarrow **$$

$$\Updownarrow **$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 128 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-12 & 0 \end{array}\right)$$

<u>рассмотрим случаи:</u>

1). <u>$b=12$</u> Тогда СЛУ <u>примет вид:</u>

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 128 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2). <u>$b\neq 12$</u> Тогда СЛУ <u>примет вид:</u>

$$\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 128 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-12 & 0 \end{array}\right)$$

Из ④: $b-12\neq 0 \Rightarrow x_4=0$

Из ③: $1\neq 0 \Rightarrow x_3=0.$

Из ②: $x_3=x_4=0$ и $1\neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_2=0.$

Из ①: $x_2=x_3=x_4=0$ и $1\neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1=0.$

Единственное решение -4-

в этом случае: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Решения СЛУ $Bx=0$:

1). $\underline{t=0}$ $\quad x = \begin{pmatrix} 16x_3 - 128x_4 \\ 8x_3 - 48x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

2). $\underline{t=12}$ $\quad x = \begin{pmatrix} -128x_4 \\ -48x_4 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

3). $\underline{t\neq 0,\ t\neq 12}$ $\quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Вернёмся к исходной задаче (найти мин. многочлен для каждого значения параметра $t \in \mathbb{R}$):

1). $\underline{t=0}$ Мин. многочлен: $f(x) = 16 + 8x + x^2$.

2) $\underline{t=12}$ Мин. многочлен: $f(x) = -128 - 48x + x^3$.

3). $\underline{t\neq 0,\ t\neq 12}$ – ненулевого зануляющего многочлена нет.

Задача 4

Пусть $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix}$.

X коммутирует с A $\Leftrightarrow$ $\underline{AX = XA}$.

$$AX = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4x_1 - 6x_7 & 4x_2 - 6x_8 & 4x_3 - 6x_9 \\ 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 & 2x_4 + 4x_5 + 10x_6 & 2x_7 + 4x_8 + 10x_9 \\ -2x_7 & -2x_8 & -2x_9 \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_2 & 4x_2 & -6x_1 + 10x_2 - 2x_3 \\ 4x_4 + 2x_5 & 4x_5 & -6x_4 + 10x_5 - 2x_6 \\ 4x_7 + 2x_8 & 4x_8 & -6x_7 + 10x_8 - 2x_9 \end{pmatrix}$$

$AX = XA \Rightarrow$ (сравним соотв. эл-ты матриц AX и XA):

(1.) $2x_2 = -6x_7 \Rightarrow$ (т.к. $x_7 = 0$) $\underline{\underline{x_2 = 0}}$

(2.) $-6x_8 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_8 = 0.}}$

(3.) $4x_3 - 6x_9 = -6x_1 + 10x_2 - 2x_3 \Rightarrow$ (т.к. $x_2 = 0$)

$4x_3 - 6x_9 = -6x_1 - 2x_3 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 + x_3 = x_9}}$

(4.) $2x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 4x_4 + 2x_5.$

(5.) $2x_4 + 4x_5 + 10x_6 = 4x_5 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_4 = -5x_6}}$

(6.) $\underbrace{2x_7 + 4x_8}_{=0} + 10x_9 = -6x_4 + 10x_5 - 2x_6 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (т.к. $x_7 = x_8 = 0$) $5x_9 = 5x_5 - x_6 - 3x_4$

(7.) $4x_7 + 2x_8 = -2x_7 \Rightarrow$ (т.к. $x_8 = 0$) $\underline{\underline{x_7 = 0.}}$

(8.) $4x_8 = -2x_8 \Rightarrow \underline{\underline{x_8 = 0.}}$

X (9.) $-2x_9 = -6x_7 + 10x_8 - 2x_9 \Rightarrow$ (т.к. $x_7 = x_8$)

$\underline{\underline{x_9 = x_9}}$

<u>Имеем</u> $\underline{x_2 = x_7 = x_8 = 0.}$; $\underline{x_4 = -5x_6}$

Учитывая это, перепишем ур-е $\underline{AX = XA}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 & k_3 \\ -5k_6 & k_5 & k_6 \\ 0 & 0 & k_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4k_1 & 0 & 4k_3-6k_9 \\ 2k_1-20k_6 & 4k_5 & 2k_3+4k_6+10k_9 \\ 0 & 0 & -2k_9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & k_3 \\ -5k_6 & k_5 & k_6 \\ 0 & 0 & k_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4k_1 & 0 & -6k_1-2k_3 \\ -20k_6+2k_5 & 4k_5 & 30k_6+10k_5-2k_6 \\ 0 & 0 & -2k_9 \end{pmatrix}$$

Сравним соотв. эл-ты получившихся матриц:

1. $4k_3-6k_9=-6k_1-2k_3$
2. $2k_1-20k_6=-20k_6+2k_5 \Leftrightarrow k_1=k_5$
3. $2k_3+4k_6+10k_9=28k_6+10k_5$

Из ④ (из предыдущей серии пунктов):

$2k_1+4k_2+10k_3=4k_4+2k_5 \Rightarrow$ (поскольку $k_1=k_5$)

$\underbrace{2k_2}_{0}+5k_3=2k_4 \Rightarrow 5k_3=2k_4=-10k_6 \Rightarrow$

$\Rightarrow k_3=-2k_6$.

$k_9=k_1+k_3=k_5-2k_6$

Имеем: $k_2=k_7=k_8=0$; $k_4=-5k_6$; $k_3=-2k_6$;

$k_1=k_5$; $k_9=k_5-2k_6$

Таким образом, x_5 и x_6 – свободные переменные, а все остальные выражаются через них:

$$X = \begin{pmatrix} x_5 & 0 & -2x_6 \\ -5x_6 & x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & x_5 - 2x_6 \end{pmatrix}$$

~~[illegible] AX:~~

Перепишем $AX=XA$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 & 0 & -2x_6 \\ -5x_6 & x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & x_5-2x_6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4x_5 & 0 & -8x_6-6x_5+12x_6 \\ 2x_5-20x_6 & 4x_5 & -4x_6+4x_6+10x_5-20x_6 \\ 0 & 0 & -2x_5+4x_6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_5 & 0 & -2x_6 \\ -5x_6 & x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & x_5-2x_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4x_5 & 0 & -6x_5+4x_6 \\ -20x_6+2x_5 & 4x_5 & 30x_6+10x_5-2x_6 \\ 0 & 0 & 4x_6-2x_5 \end{pmatrix}$$

Получаем, что $x_6=0$.,

Ответ: $X = \begin{pmatrix} x_5 & 0 & 0 \\ 0 & x_5 & 0 \\ 0 & 0 & x_5 \end{pmatrix}$, $x_5 \in \mathbb{R}$, т.е.

$X = \lambda E$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.