⊛ Кратки подсетник

* Механика и једне кретања

$\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ из:

Њ.З.: $m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$; $\vec{F}_{\rightarrow} = -\vec{F}_{\leftarrow}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ $\Longrightarrow$ $\int$ ⊕ почетни услови за $\vec{r}$ и $\vec{v}$

* Гравитација - сила

$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$; $\vec{g} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}$

(ако је центар у центру тела M)

! потенцијална сила ⊕ конзервативна сила

* Енергија и рад

* кинетичка $T = \frac{1}{2}mv^2$

* потенцијална $U \rightarrow \boxed{\vec{F} = -\nabla U}$

* рад $A = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$

C — произвољна путања

A < 0 - тело врши рад

A > 0 - над њим се врши рад

<u>пример</u> Гравитација

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \Rightarrow \vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$$

* Закони одржања

1) ЗОЕ $T + U = const$

2) ЗОМИ $\vec{L} = const$

3) ЗОИ $\sum_i p_i = const$

* Проблем 2 тела

- 2 тела (m, M) ⊕ гравитација

* Кеплерови закони

1) путање су елипсе

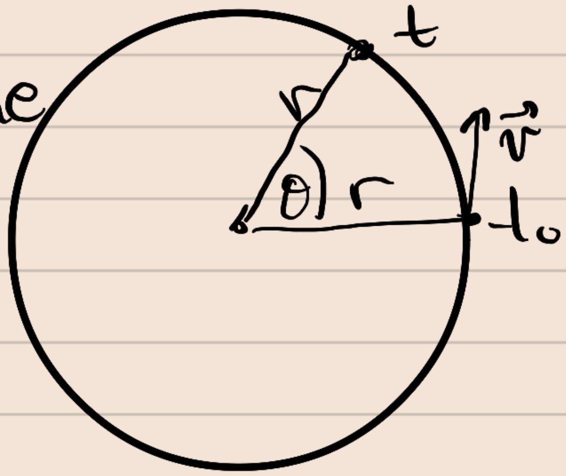
2) однос површине коју пребрише $\vec{r}$ у току времена је const.

3) однос величине полуосе и периода је const. (приближно!)

* Криволинијско кретање

Пример кружне орбите

- поларне координате (r, θ)



* $\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\theta}}{dt}$

$\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$

* $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$

* $\vec{v} = const$, $\vec{a} = const$.

$$\Rightarrow \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

$$\vec{F}_g + \vec{F}_{cp} = \vec{0}$$

$$\boxed{-\frac{GMm}{r^2} + m\frac{v^2}{r} = 0} \qquad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

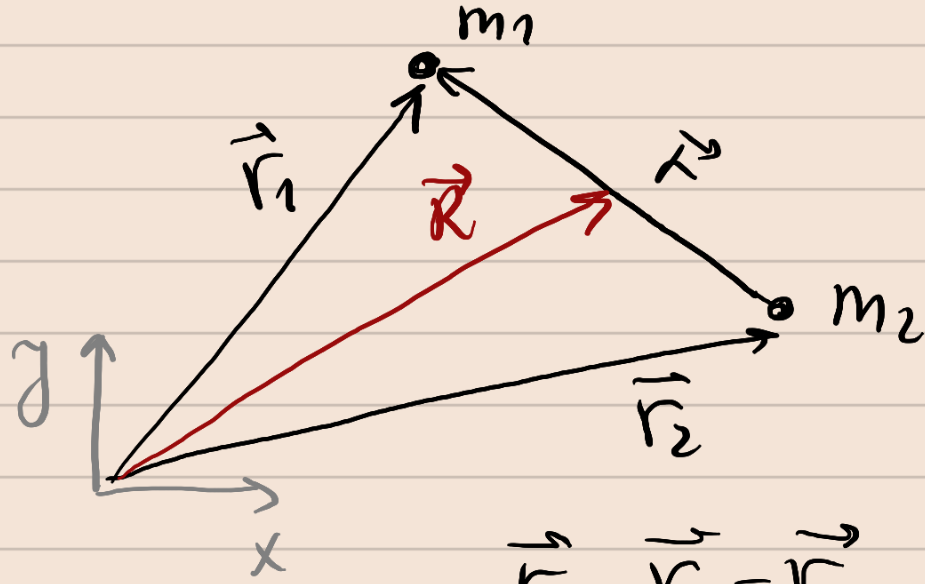
ПРОБЛЕМ 2 ТЕЛА (П2Т)

II Њутнов закон:

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

III Њутнов закон

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12}$$

⊛ уводи се центар масе:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{V} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

може да се покаже да следи из:

$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{0}$$

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

сума сила која дејствује на цм:

$$\vec{F} = m' \vec{A} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ изолован систем!

$$\sum_i \vec{F}^{(i)}_{spolj} = \vec{0}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad ; \quad \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{r} + \vec{R} \qquad M = m_1 + m_2$$

$$\Rightarrow \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{r} + \vec{R}$$

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21} \quad / \cdot m_2$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12} \quad / \cdot m_1$$

$$m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}_1 = m_2 \vec{F}_{21} \qquad \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

$$m_1 m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = m_1 \vec{F}_{12}$$

$\ominus$

$$m_1 m_2 \left(\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 \right) = (m_1 + m_2) \vec{F}_{21}$$

$$\underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}_{= m_*}\ddot{\vec r} = \vec F_{21}$$

$$\Rightarrow \boxed{m_* \ddot{\vec r} = \vec F = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec r}$$

• уводи се:

$$\mu = G(m_1+m_2)$$

$$\boxed{\ddot{\vec r} = -\frac{\mu}{r^3}\vec r}$$ → јдна релативног кретања 2 тела

ЗАКОНИ ОДРЖАЊА

$\boxed{1}$ ЗО момента импулса

деф. $\vec L = m\vec r \times \vec v$

* случај П2Т:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \left(-\frac{\mu}{r^3}\right)\vec{r} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = const = \vec{\chi}}$$

⊛ Ако је сила централна ($\propto \vec{r}$), **кретање се врши у равни.**

<u>доказ.</u>

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = const.$$

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = m\vec{r} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{0}$$

$\Rightarrow \vec{r} \perp \vec{L} \Rightarrow \vec{r}$ увек у xOy равни

(ако узмемо $\vec{L} \propto \vec{e}_z$)

$\boxed{2}$ ЗО енергије (укупне механичке)

деф. $E = T + U = \text{const.}$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}^{2}\right)$$

$$\dot{\vec{r}} \perp \vec{r}$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} \cdot \left(-\frac{\mu}{r^3}\right)\vec{r} =$$

$$= -\frac{\mu}{r^2}\dot{r}$$

$$\frac{d}{\cancel{dt}}\left(\dot{r}^2\right) = -\frac{2\mu}{r^2}\frac{dr}{\cancel{dt}}$$

$$d\left(\dot{r}^2\right) = -\frac{2\mu}{r^2}dr$$

$$\boxed{\dot{r}^2 = \frac{2\mu}{r} + \text{const.}} \qquad \Big/ \cdot \tfrac{1}{2}m_*$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\propto v^2 \qquad \propto \frac{1}{r}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\propto T \qquad \propto -U_g$$

$$\frac{1}{2} m_* \dot{r}^2 - \frac{\mu m_*}{r} = const$$

- Формулисаћемо проблем у цилиндричним координатама:

$$x = r\cos\theta \; ; \; y = r\sin\theta \; ; \; z = z$$

$$\vec{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$$

$$! \; r, \theta = f(t)$$

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta}, \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta}, 0)$$

$$\longrightarrow |\dot{r}|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

Зоми

$$\vec{Z} = (0,0,1) Z$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = r\cos\theta(\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta}) -$$

$$- r\sin\theta(\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta})\vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{L} = r^2\dot{\theta}\vec{e}_z}$$ (ЗОМИ)

$$\dot{\theta} = \frac{L}{r^2}$$

ЗОЕ

$$\dot{r}^2 = \frac{2\mu}{r} + \mathcal{E}$$ $\dot{r} \to$ у цилиндр.

$$\boxed{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \frac{2\mu}{r} + \mathcal{E}}$$

$$\dot{r}^2 + r^2\frac{L^2}{r^4} = \frac{2\mu}{r} + \mathcal{E}$$

$$\dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} = \frac{2\mu}{r} + \mathcal{E}$$

Кеплерове јдне за ограничену путању

$\varepsilon > 0$ - неограничене путање

→ хипербола

$\varepsilon < 0$ - ограничене путање

→ елипса !

тј. $\varepsilon = -\frac{\mu}{a}$

оправдање за ово је дато горе: релација $E = -\frac{GMm}{2a}$

релативна брзина система

$$V^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} = \underbrace{\mu}_{>0}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \geq 0$$

одређивање брзине када је познат положај

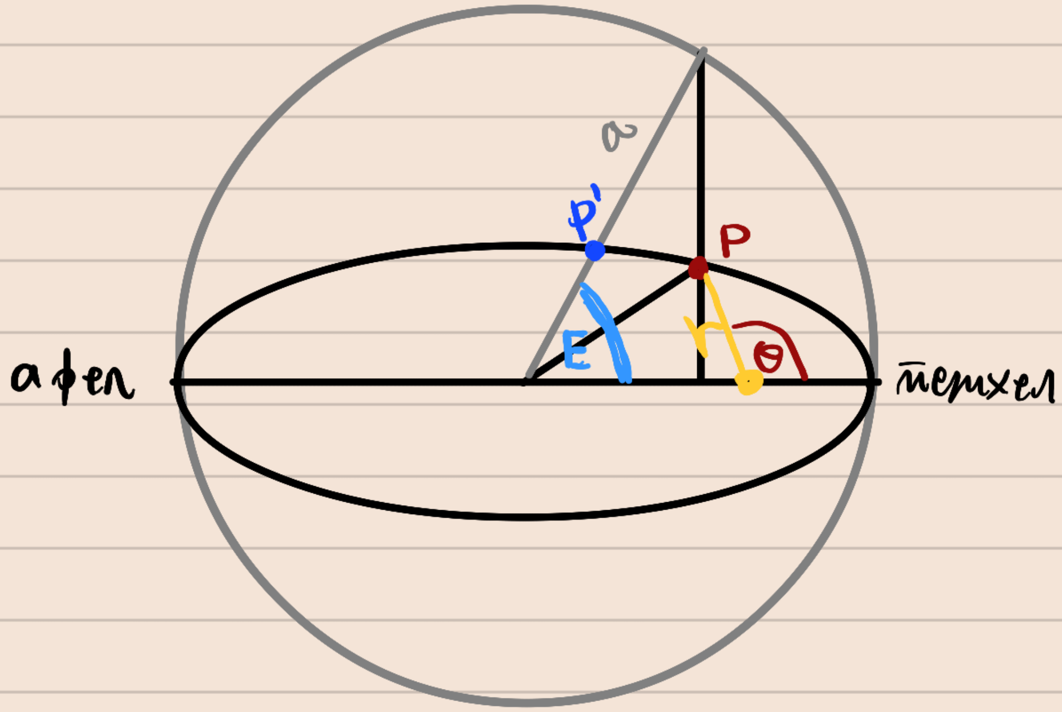
$$\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \geq 0$$

$$2a - r \geq 0$$

$$\boxed{r \leq 2a}$$ ограничена путања

ЕЛЕМЕНТИ ОРБИТЕ

* ПЕРИХЕЛ – тачка најближа Сунцу
* АФЕЛ – тачка најдаља од Сунца



* (r,θ) – поларне координате са центром у центру Сунца

* ЕКСЦЕНТРИЧНА АНОМАЛИЈА E

  $E \in [0, 2\pi)$ + равномерно расте!

* СРЕДЊЕ КРЕТАЊЕ n:

$$\mu = n^2 a^3$$

⊛ СРЕДЊА АНОМАЛИЈА M

$$n(t-\tau)=M$$

τ - тренутак када је планета у перихелу

⊛ ЕКСЦЕНТРИЦИТЕТ e:

$$e=\frac{r_{max}-r_{min}}{r_{max}+r_{min}}$$

⊛ $(r, \theta) = f(t) = ?$ $\quad \dot{\theta} = \frac{\mathcal{L}}{r^2}, \rightarrow \dot{r}^2 + \frac{\mathcal{L}^2}{r^2} = \dots$

$$\dot{r}^2 + \frac{\mathcal{L}^2}{r^2} = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}$$

$$\dot{r}^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} - \frac{\mathcal{L}^2}{r^2}$$

$$\dot{r}^2 = -\frac{\mu}{ar^2}\underbrace{\left(-2ar + r^2 + \frac{\mathcal{L}^2}{\mu}a\right)}_{\mathcal{F}(r)}$$

$$\dot{r}^2 = -\frac{\mu}{2r^2}\mathcal{F}(r)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(r) \leq 0$$

• нацртати $\mathcal{F}(r)$:

$$r^2 - 2ar + \frac{\mathcal{L}^2 a}{\mu} = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4\frac{\mathcal{L}^2 a}{\mu}}}{2}$$

$$r_{1,2} = a \pm a\sqrt{1 - \frac{\mathcal{L}^2}{a\mu}}$$

$$\Rightarrow \quad r_1 \geq r \geq r_2$$

$$r_1 = r_{max} = a\left(1 + \sqrt{1 - \frac{\mathcal{L}^2}{a\mu}}\right)$$

$$r_2 = r_{min} = a\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mathcal{L}^2}{a\mu}}\right)$$

→ растојања перихела и афела!

⊛ $r_1 + r_2 = 2a$ – видимо из елипсе

$$e \overset{\text{деф.}}{=} \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = \frac{2a\sqrt{1 - \frac{\mathcal{L}^2}{a\mu}}}{2a} = \sqrt{1 - \frac{\mathcal{L}^2}{a\mu}}$$

$$\Rightarrow r_1 = a(1+e) \quad \wedge \quad r_2 = a(1-e)$$

⊛ $r_1 \cdot r_2 = a^2(1-e^2)$

⊛ $\mathcal{L}^2 = a\mu(1-e^2)$

КЕПЛЕРОВА ЈД-НА

• решење проблема 2 тела
– у параметарском облику:

$$\boxed{r = a(1 - e\cos E)} \qquad r \in [r_2, r_1]$$

$$\dot{r}^2 = -\frac{\mu}{ar^2}\underbrace{\left(-2ar + r^2 + \frac{\mathcal{Z}^2}{\mu}a\right)}_{F(r)}$$

$$F(r) = r^2 - 2ar + \frac{\mathcal{Z}^2}{\mu}a =$$

$$= a^2(1 - e\cos E)^2 - 2a^2(1 - e\cos E) + $$
$$+ \frac{a}{\mu}a\mu(1 - e^2)$$

$$= -a^2 + a^2e^2\cos^2 E + a^2(1 - e^2)$$

$$= -a^2e^2\sin^2 E$$

$$\Rightarrow \quad \dot{r}^2 = + \frac{\mu}{ar^2} a^2 e^2 \sin^2 E$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 r^2 = \mu a e^2 \sin^2 E$$

$$\frac{dr}{dt} r = \sqrt{\mu a e^2 \sin^2 E}$$

$$r = a(1 - e\cos E)$$

$$dr = + ae \sin E \, dE$$

$$\frac{a\cancel{e}\,\cancel{\sin} E\, dE}{dt} a(1-e\cos E) = \sqrt{\mu a \cancel{e}^2 \cancel{\sin}^2 E}$$

$$dE(1 - e\cos E) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\, dt \qquad // \int$$

$$E - e\sin E \Big|_{E_1}^{E_2} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,(t_2 - t_1)$$

* као референтни тренутак бирамо перихел: $t=\tau$, $E=0$

$$E - e\sin E = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,(t-\tau)$$

* ако уведемо средње кретање:

$$E - e\sin E = n\,(t-\tau)$$

КЕПЛЕРОВА ЈД-НА

* ако уведемо средњу аномалију

$$M = n\,(t-\tau)\,, \quad M \in [0, 2\pi)$$

расте једнако са временом!

$\theta = ?$

$$r^2 \dot{\theta} = \mathcal{L}$$

$$r = a(1 - e\cos E)$$

$$\mathcal{L}^2 = \mu a(1-e^2)$$

$$a^2 (1 - e\cos E)^2 \, \dot{\theta} = \sqrt{\mu a (1-e^2)}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dE} \, \frac{dE}{dt} = \frac{\sqrt{\mu a (1-e^2)}}{a^2 (1-e\cos E)^2}$$

$$n(t-\tau) = E - e\sin E$$

$$\frac{dt}{dE} = \frac{1}{n}(1 - e\cos E)$$

$$\frac{d\theta}{dE} \, \frac{\cancel{n}}{(1-\cancel{e\cos E})} = \cancel{\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}} \, \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos E)^{\cancel{2}}}$$

$$\frac{d\theta}{dE} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}$$

→ може да се интеграли помоћу смене $E \to \operatorname{tg} \frac{E}{2}$

[...]

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

КЕПЛЕРОВИ ЗАКОНИ

$\boxed{1}$ путање су елипсе:

$$\frac{d\theta}{dE} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}$$

$$\hookrightarrow \operatorname{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{dE}{d\theta} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\theta}$$

$$\frac{d\theta}{dE}\cdot\frac{dE}{d\theta} = \frac{1-e^2}{(1-e\cos E)(1+e\cos\theta)} = 1$$

$$r = a(1-e\cos E)$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

парам. јдна елипсе

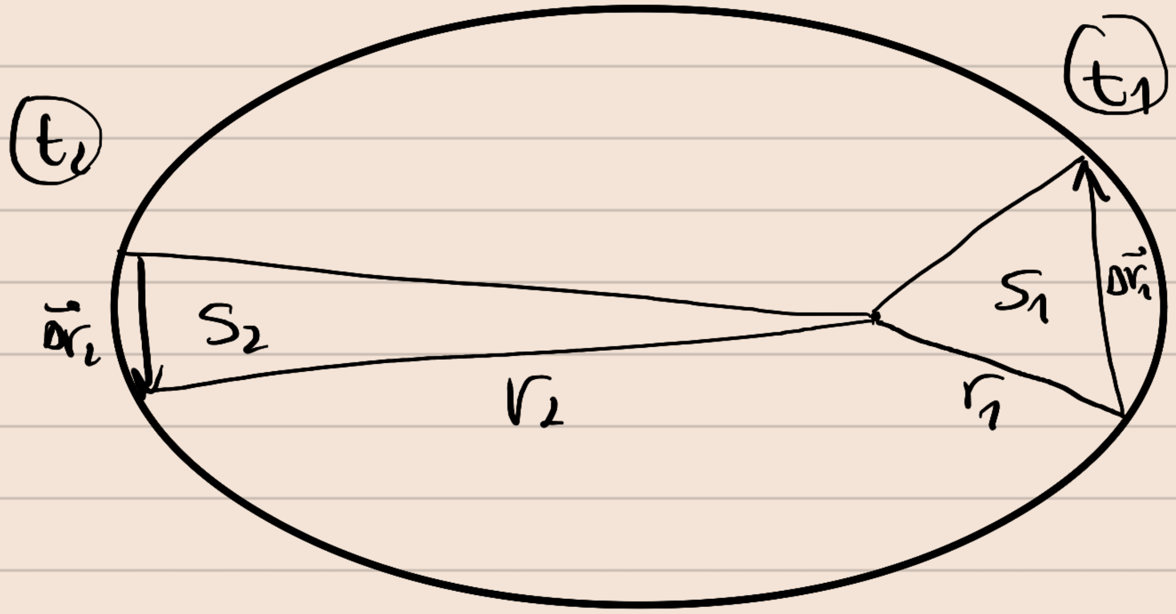
$\boxed{2}$ вектор положаја пребрише једнаке површине за исти Δt

$$r^2\dot{\theta} = \mathcal{L}$$

$$\vec{\mathcal{L}} = \vec{r} \times \vec{v} = |\vec{r}||\vec{v}| \underbrace{\sin\sphericalangle(\vec{r}, \vec{v})}_{1} \vec{e}_z$$

$$\mathcal{L} = rv$$

$$v = \frac{\mathcal{L}}{r} = r\dot{\theta}$$



$$S_1 = \frac{1}{2} r_1 \cdot v_1 t_1 = \frac{1}{2} r_1 \frac{\mathcal{L}}{r_1} = \frac{1}{2}\mathcal{L} = \text{const}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} r_2 \cdot v_2 t_2 = \frac{1}{2} r_2 \frac{\mathcal{L}}{r_2} = \frac{1}{2}\mathcal{L} = S_1$$

формулација: $\frac{1}{2} r^2 \frac{dv}{dt} = \text{const.}$

однос велике полуосе и периода је (приближно) константан за све планете

$$\mu = n^2 a^3 \quad ; \quad n = \frac{2\pi}{T}$$

$$\mu = G(m_1 + m_2)$$

$$G(m_1+m_2) = \frac{4\pi^2}{T^2} a^3$$

$$\frac{G m_1}{4\pi^2}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = \frac{a^3}{T^2}$$

за $m_1 = M_\odot$, $m_2 = m_p$

$$m_2 << m_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{G m_1}{4\pi^2} \approx \frac{a^3}{T^2}$$

– грешка за Јупитер $\sim 10^{-3}$

⊛ брзина кретања тела (m):

$$v^2 = G(M+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

за $m << M \Rightarrow G(M+m) \rightarrow GM$

$$v^2 \propto \frac{1}{a}$$

→ од брзине зависи путања!

→ брзина по кругу т.ј.: a:

$$v_k = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

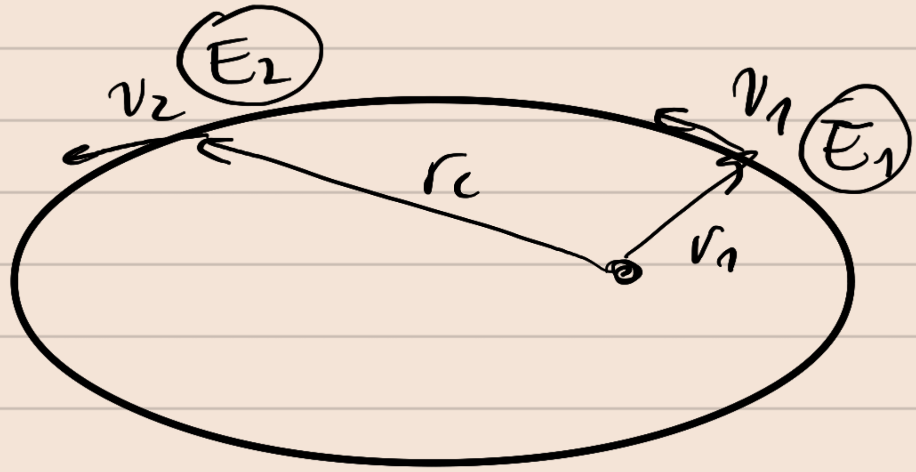
→ параболична брзина:

$$v_p = \sqrt{\frac{2\mu}{a}}$$

$v_k < v < v_p \rightarrow$ елипса

$v > v_p \rightarrow$ хипербола

* укупна енергија:



ЗОЕ

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2} = E$$

ЗОМИ

$$L = mr_1v_1 = mr_2v_2 = const$$

$$\rightarrow v_1 = \frac{L}{mr_1}, \quad v_2 = \frac{L}{mr_2}$$

[...]

$$\frac{L^2}{2m^2} = \frac{GM}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}$$

* збир енергија у 2 произвољне тачке

$$E_1 + E_2 = 2E$$

$$\frac{1}{2} m \left(v_1^2 + v_2^2\right) - \gamma M m \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = 2E$$

$$\frac{1}{2} \frac{L^2}{m} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right) - \gamma M m \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = 2E$$

$$\gamma M m \left[\frac{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] = 2E$$

$$\frac{r_1^2 + r_2^2}{(r_1 + r_2)\, r_1 r_2} - \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} =$$

$$= \frac{\cancel{r_1^2} + \cancel{r_2^2} - \cancel{r_1^2} - 2\cancel{r_1 r_2} - \cancel{r_2^2}}{(r_1 + r_2)\, \cancel{r_1 r_2}} =$$

$$= -\frac{2}{r_1 + r_2}$$

$$-\frac{2GMm}{r_1+r_2} = 2E$$

$$E = -\frac{GMm}{r_1+r_2}$$

показали смо: $r_1+r_2=2a$

$$\Rightarrow \boxed{E = -\frac{GMm}{2a}}$$

укупна енергија тела на елиптичној путањи