TZS Vežbe: Čas 4, 04/11/2022

Ivan Milić

November 18, 2022

Zadatak 1

Danas se bavimo Švarcšild-Milne operatorima. To su operatori (funkcionali) koji preslikavaju funkciju izvora ($S(\tau)$) u neki od momenata intenziteta ($J(\tau)$, $H(\tau)$, $K(\tau)$). Oni, na neki način, moraju da sadrže rešenje jednačine prenosa zrčenja.

- Izvedite izraze za ove operatore i uočite pojavu takozvanih *Eksponencijalnih integrala*:
$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n} dt. \tag{1}$$

- Videćete da ovi operatori imaju oblik: $\int E_n(t)S(t)dt$. Koristeći Python, ili sličan jezik, isplotujte ove "kernel" funkcije i prodiskutujte njihovo ponašanje.

- U praksi, momenti intenziteta se ne dobijaju rešavanjem integrala iznad, već rešavanjem JPZ nekim drugim, numeričkim metodom i integracijom po uglovima. Koristeći formalno rešenje sa prethodnih vežbi nadjite J, H, K za različite oblike $S(t)$.

REŠENJE: (ZA POČETAK, JEDNOSTAVNOSTI RADI FOKUSIRAJMO SE NA JEDNO λ)

SREDNJI INTENZITET JE, PO DEFINICIJI:

$$J = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(\mu)\, d\mu \quad \text{GDE JE } I(\mu) \text{ REŠENJE JPZ.}$$

STVAR JE U TOME ŠTO ZA $\mu > 0$ I $\mu < 0$ IMAMO RAZLIČITE GRANIČNE USLOVE I RAZLIČITO FORMALNO REŠENJE:

ZA $\mu \geq 0$: $$I(\tau,\mu) = \int_{\tau}^{\infty} S(t)\, e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu}$$

ZA $\mu \leq 0$: $$I(\tau,\mu) = \int_{0}^{\tau} S(t)\, e^{-(\tau-t)/|\mu|} \frac{dt}{|\mu|} \quad \left(|\mu| = -\mu \text{ ZA } \mu < 0\right)$$

$$J = \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\int_{\tau}^{\infty} S(t)\, e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu}\, d\mu + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\tau} S(t)\, e^{-(\tau-t)/-\mu} \frac{dt}{-\mu}\, d\mu$$

IDEJA JE DA SPOJIMO OVA DVA U $\int_0^\infty$

ZA PRVI $\int$: $\frac{1}{\mu} = y$; $\mu = \frac{1}{y}$ $\quad d\mu = \frac{-dy}{y^2}$

ZA DRUGI $\int$: $\frac{1}{-\mu} = y$; $\mu = \frac{-1}{y}$ $\quad d\mu = \frac{dy}{y^2}$

$$J = \frac{1}{2}\int_{\infty}^{1}\int_{\tau}^{\infty} S(t)\, e^{-(t-\tau)y}\, \cancel{y} \cdot \frac{-dy}{y^{\cancel{2}}} + \frac{1}{2}\int_{\infty}^{1}\int_{0}^{\tau} S(t)\, e^{-(\tau-t)y}\, \frac{\cancel{y}\, dy}{y^{\cancel{2}}}$$

$$\int_{\infty}^{1} \dots dy = \int_{1}^{\infty} \dots dy \text{ , pa:}$$

$$\boxed{J(\tau) = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} S(t)\, \underbrace{E_1(|\tau - t|)}_{\text{Kernel}}\, dt}$$

Ovo je poznato kao Švarcšildov operator

E_1 je tzv. prvi eksponencijalni integral:

$$E_1(x) = \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-xy}}{y}\, dy$$

Generalno: $E_n(x) = \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-xy}}{y^n}\, dy$

$$H = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(\mu)\,\mu\, d\mu \quad , \quad K = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(\mu)\,\mu^2\, d\mu$$

Lako je videti da:

$$H(\tau) = \frac{1}{2}\int_{\tau}^{\infty} S(t)\, E_2(|\tau - t|)\, dt - \frac{1}{2}\int_{0}^{\tau} S(t)\, E_2(|\tau - t|)\, dt$$

$$K(\tau) = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} S(t)\, E_3(|\tau - t|)\, dt$$

Milneovi operatori

Rešenja drugog i trećeg dela u Jupyter notebooku.