

# Teorija Zvezdanih Spektara

## Lekcija 11: Ne-LTR efekti u Spektralnim Linijama

Ivan Milić (AOB / MATF)

13/12/2022

# Podsetnik

- Koeficijenti emisije i apsorpcije u spektralnoj liniji izgledaju ovako:

Diagram illustrating the equations for emission and absorption coefficients in a spectral line, with labels for the components:

**Emission coefficient:**

$$j_{\lambda} = n_u A_{ul} \frac{hc}{\lambda 4\pi} \phi_{\lambda}$$

**Absorption coefficient:**

$$\chi_{\lambda} = (n_l B_{lu} - n_u B_{ul}) \frac{hc}{\lambda 4\pi} \phi_{\lambda}$$

**Labels and Arrows:**

- Populacija gornjeg nivoa** (Upper level population) points to  $n_u$  in the emission equation.
- Einstein-ovi koeficijenti** (Einstein coefficients) points to  $A_{ul}$  and  $B_{ul}$ .
- Apsorpcioni profil** (Absorption profile) points to  $\phi_{\lambda}$  in both equations.
- Populacija donjeg nivoa** (Lower level population) points to  $n_l$  in the absorption equation.

**Text box:**

Danas pričamo o populacijama donjeg i (pogotovo) gornjeg nivoa!

# Zašto “pogotovo gornjeg?”

- Funkcija izvora u liniji:

$$S = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}}$$

- Ako pretpostavimo da stimulisana emisija može biti zanemarena:

$$S \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{n_u}{n_l}$$

- Sada, ako pretpostavimo da je broj atoma u stanju  $l$  mnogo veći od broja atoma u stanju  $u$ , onda je  $n_l \sim n_{\text{tot}}$ , pa funkcija izvora zavisi samo od  $n_u$

## Podsetnik – koherentno rasejanje

- U Ne-LTR smo prepostavili da funkcija izvora ima Plankovski deo i deo sa rasejanjem (ove dve formulacije su ekvivalentne, što ćemo pokazati uskoro)

$$S_{\lambda} = \epsilon B_{\lambda} + (1 - \epsilon) J_{\lambda}$$

- Ovde smo definisali epsilon kao **verovatnoću stvarne apsorpcije (termalizacije) fotona**.
- U rasejanju u spektralnim linijama to će biti:

$$\epsilon = \frac{C_{ul}}{A_{ul} + C_{ul}}$$

- Gde C označava sudarnu (foton pretvoren u termalnu energiju) a A (foton nastavlja dalje) radijativnu de-ekscitaciju.

# Atom sa dva nivoa

- Iako spektralna linija nastaje između dva diskretna energetska nivoa, u principu atomi imaju **mnogo više** energetskih nivoa.
- Jednostavnosti radi, možemo da pretpostavimo da atom ima **samo ta dva nivoa** te da su jedini dozvoljeni prelazi sa gornjeg na donji i obrnuto.
- Te da imamo sudarne i radijativne prelaze.
- Sledeća pretpostavka je da su populacije nivoa **konstantne u vremenu**.
- Onda ukupan broj de-ekscitacija u našem elementu zapremine, u jedinici vremena mora biti jednak broju ekscitacija:

$$n_u(C_{ul} + R_{ul}) = n_l(C_{lu} + R_{lu})$$

Sudarni prelazi      Radijativni prelazi

# Čemu je jednak ukupan broj radijativnih ekscitacija?

- Kako da nadjemo ovo? 2-3 minuta samostalan rad + diskusija

# Čemu je jednak ukupan broj radijativnih ekscitacija?

- = Ukupan broj apsorpcija
- Ukupan broj apsorpcija je srazmeran ukupnoj apsorbovanoj energiji po jedinici zapremine u jedinici vremena.
- Hajdemo korak po korak, kako biste ovo nazvali:

$$dI_{\lambda}^{\text{abs}} = -\chi_{\lambda}^{\text{abs}} I_{\lambda} dl$$

Ovde mislimo na  
ukupan uklonjeni  
intenzitet iz  
snopa, dakle  
apsorpcija +  
rasejanje

Ovo "abs" se  
odnosi samo na  
apsorpciju, bez  
stimulisane  
emisije

# Čemu je jednak ukupan broj radijativnih ekscitacija?

- = Ukupan broj apsorpcija
- Ukupan broj apsorpcija je srazmeran ukupnoj apsorbovanoj energiji po jedinici zapremine u jedinici vremena.
- Hajdemo korak po korak, kako biste ovo nazvali:

$$dI_{\lambda}^{\text{abs}} = -\chi_{\lambda}^{\text{abs}} I_{\lambda} dl$$

- Apсорbovana energija po jedinici zapremine, u jedinici vremena, po jediničnom prostornom uglu. Podelimo sa energijom jednog fotona da predjemo na broj apsorpcija:

$$\frac{dn_{\lambda}^{\text{abs}}}{dt} h\nu = -n_l B_{lu} \frac{h\nu}{4\pi} \phi_{\lambda} I_{\lambda}$$



# Čemu je jednak ukupan broj radijativnih ekscitacija?

- = Ukupan broj apsorpcija. Moramo dakle da ovo integralimo po pravcima i talasnim dužinama:

$$\frac{dn_{\lambda}^{\text{abs}}}{dt} h\nu = -n_l B_{lu} \frac{h\nu}{4\pi} \phi_{\lambda} I_{\lambda}$$

$$\frac{dn^{\text{abs}}}{dt} = n_l B_{lu} \frac{1}{4\pi} \oint \int I_{\lambda} \phi_{\lambda} d\lambda d\hat{\Omega} = n_l B_{lu} \bar{J}$$

Broj radijativnih  
ekscitacija u  
jedinici vremena -  
učestanost (eng:  
rate) ekscitacije

Integral rasejanja,  
srednji intenzitet  
integraljen po  
apsorpcionom  
profilu

# Radijativne de-ekscitacije

- Imamo dva procesa: Spontanu i stimulisanu emisiju
- Ako pretpostavimo da su emisioni i apsorpcioni profil isti i primenimo prethodnu logiku (**tabla ako zatreba**) dobijamo:

$$\frac{dn^{\text{em}}}{dt} = n_u A_{ul} + n_u B_{ul} \bar{J}$$

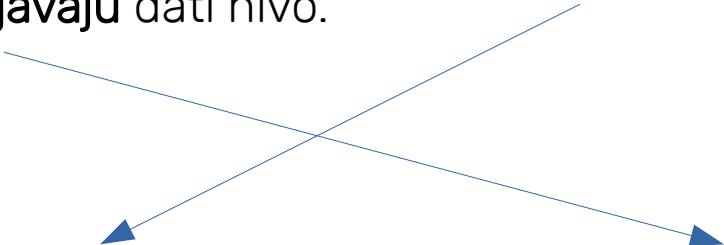
Einstein-ov  
koeficijent  
spotane emisije je  
sam po sebi  
učestanost

Integral rasejanja,  
srednji intenzitet  
integraljen po  
apsorpcionom  
profilu

- Poslednji korak je da dodamo sudarne procese i da izjednačimo ekscitacije i de-ekscitacije

# Statistička ravnoteža

- Populacije gornjeg i donjeg nivoa su konstantne u vremenu – broj ekscitacija jednak broju de-ekscitacija
- Malo generalnije: učestanost procesa koji **naseljavaju** dati nivo je jednak učestanosti procesa koji **raseljavaju** dati nivo.
- Npr. za nivo  $n_u$ :


$$n_l(B_{lu}\bar{J} + C_{lu}) = n_u(B_{ul}\bar{J} + A_{ul} + C_{ul})$$

- **Tabla / diskusija:** Pokazati da se za donji nivo dobija ista jednačina.
- Ako su nam date sve veličine sem populacija, kako da ih dobijemo?

## Funkcija izvora u atomu sa dva nivoa:

- Generalni izraz za funkciju izvora (uvek važi):

$$S = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}}$$

- A jednačina statističke ravnoteže izgleda ovako:

$$n_l (B_{lu} \bar{J} + C_{lu}) = n_u (B_{ul} \bar{J} + A_{ul} + C_{ul})$$

- **Tabla:** Pokazati da je funkcija izvora u liniji linearna kombinacija Plankove funkcije (B) i integrala rasejanja ( $\bar{J}$ ).

Funkcija izvora u atomu sa dva nivoa:

$$S = \epsilon B + (1 - \epsilon)\overline{J}$$

- Gde epsilon sada ima malko komplikovaniji oblik:

$$\epsilon = \frac{C_{ul}(1 - e^{-hc/\lambda kT})}{A_{ul} + C_{ul}(1 - e^{-hc/\lambda kT})} \approx \frac{C_{ul}}{A_{ul} + C_{ul}}$$

- *Obratite pažnju da pri izvodjenju ovog izraza moramo da izvedemo relacije izmedju sudarne ekscitacije i de-ekscitacije na osnovu LTR uslova!*

## Atom sa dva nivoa u ne-LTR

- Opet imamo spregnuće. Ovaj put spregnute su JPZ i jednačina statističke ravnoteže:

$$\mu \frac{dI_\lambda}{d\tau \phi_\lambda} = I_\lambda - S$$

$$S = \epsilon B + (1 - \epsilon) \frac{1}{2} \int \int I_\lambda \phi_\lambda d\lambda d\mu$$

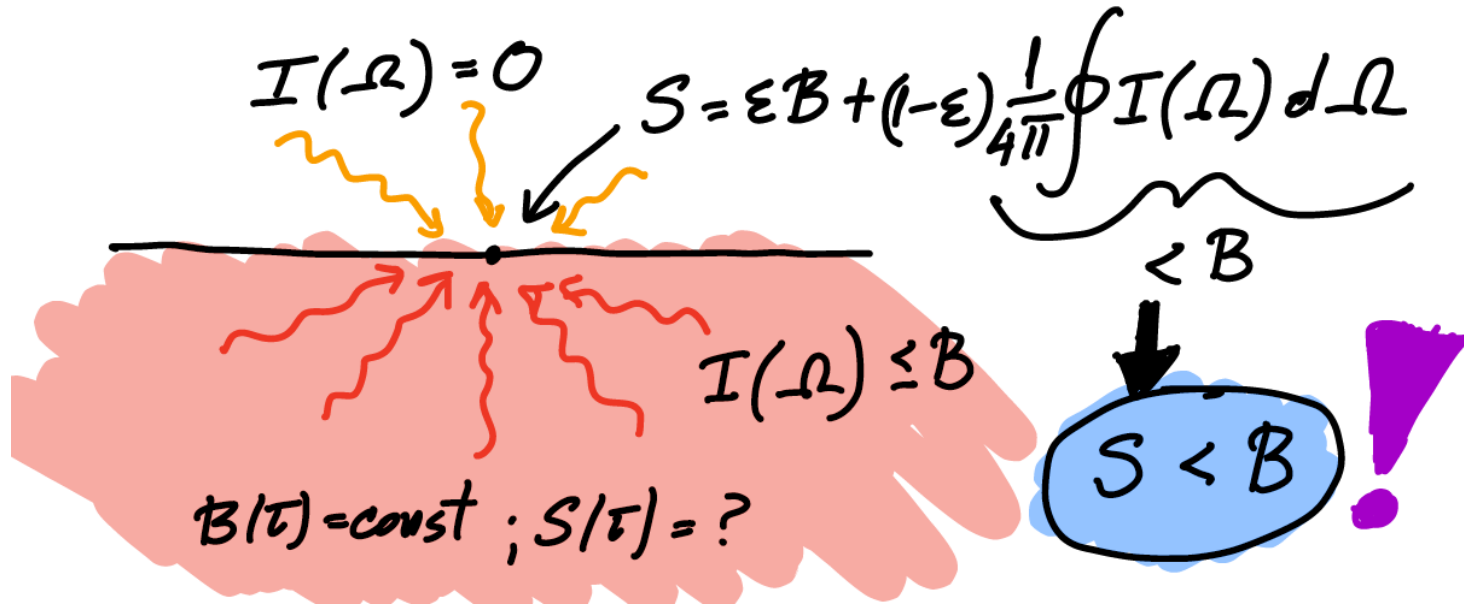
- Opet ih, po potrebi možemo napisati kao jednu integro-diferencijalnu jednačinu.
- Postoji tačno semi-analitičko rešenje, postoje direktna i iterativna numerička rešenja. **Više o tome na vežbama.**

## Šta su posledice ne-LTR?

- [illegible]

# Šta su posledice ne-LTR?

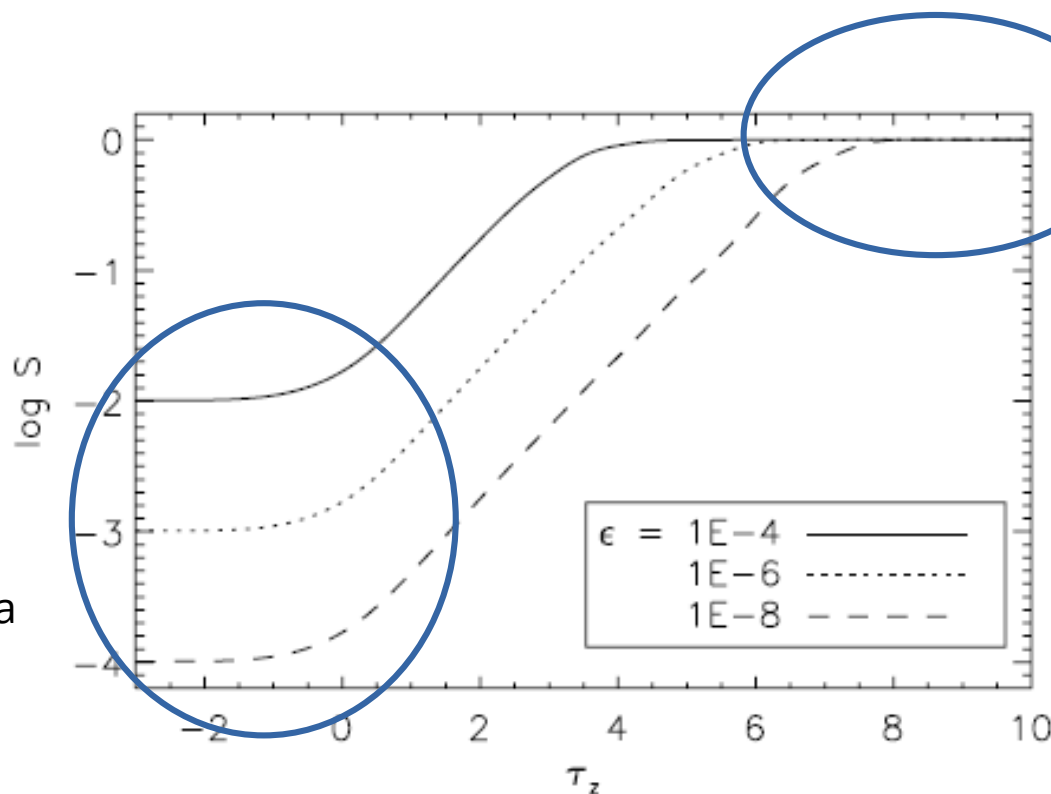
- Hajde da sami odgovorimo na to pitanje.
- Zamislite da imamo, zadatu, izotermalnu atmosferu ( $B = \text{const}$ ).
- Pretpostavite  $\epsilon = 0$ .
- Ubedite sebe (i mene) da će funkcija izvora pasti ispod  $B$  na vrhu atmosfere.





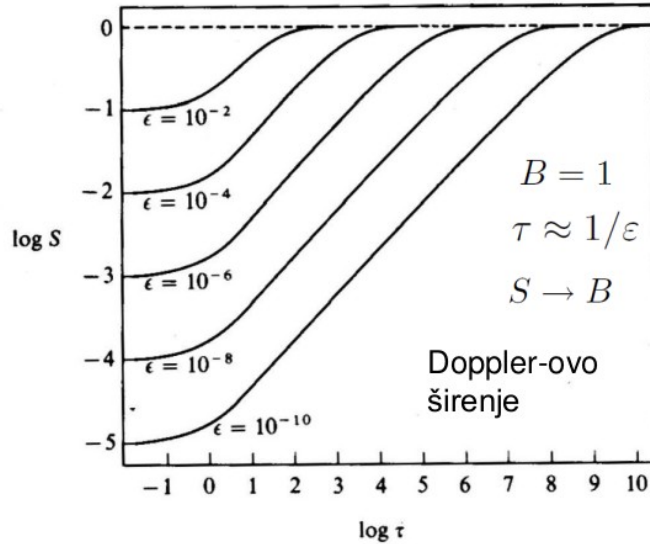
# Tačno rešenje – funkcija izvora bitno pada na vrhu atmosfere

Vrh atmosfere – mala vrednost funkcije izvora. Ovo je zato što fotoni “beže” iz atmosfere, pa  $J$  pada, a samim tim i  $S$ .



Funkcija izvora dostiže Plankovu funkciju duboko u atmosferi. Ovo nema nikakve veze sa gustinom, već sa ukupnom neprozračnošću.

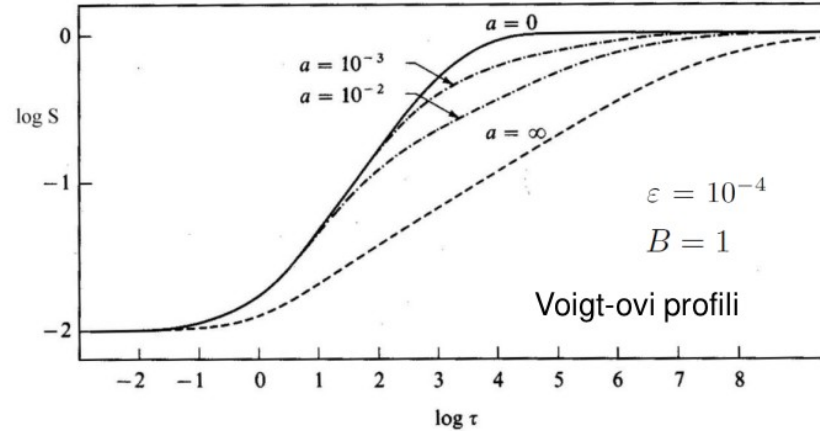
# Funkcije izvora za atom sa dva nivoa sa kompletnom redistribucijom u izotermnoj polu-beskonačnoj atmosferi (Avrett and Hummer 1965)



Rešenje na površini:

$$S^L(0) = \sqrt{\epsilon} B$$

ne zavisi od oblika profila



Dubina termalizacije zavisi od profila:

(Doppler)

$$\Lambda_T \approx \frac{C}{\epsilon}$$

(Lorentz)

$$\Lambda_T \approx \frac{8}{9\epsilon^2}$$

(Voigt)

$$\Lambda_T \approx \frac{8a}{9\epsilon^2}$$

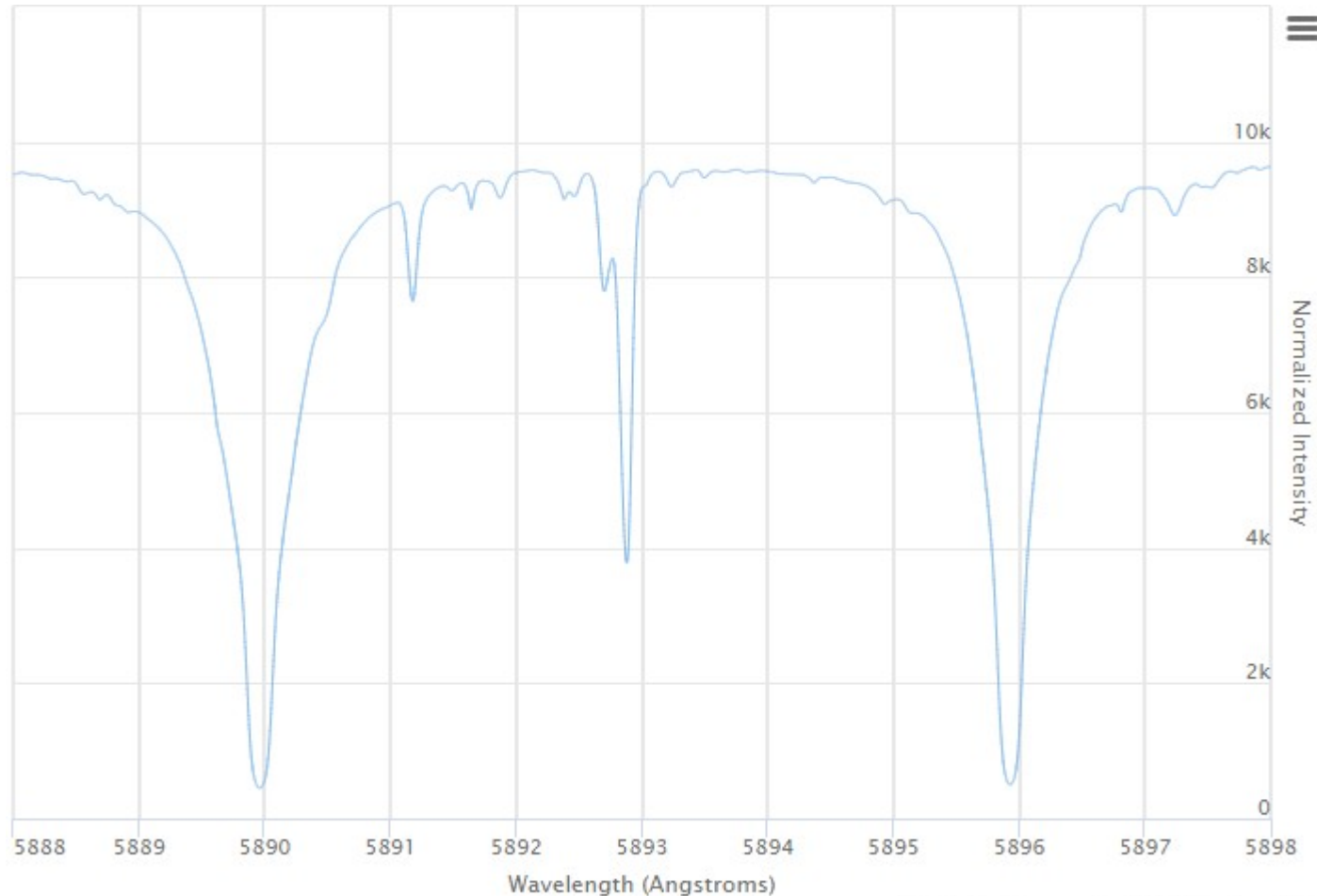
Gubitak fotona kroz površinu teži da smanji funkciju izvora;

Nekoherentno rasejanje povećava dubinu do koje se oseća gubitak fotona.

Za koherentno rasejanje dubina termalizacije je najmanja:

$$\Lambda_T \approx \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$$

Ovo prouzrokuje jako duboko spektralne linije! (Ovo su D linije Natrijuma)



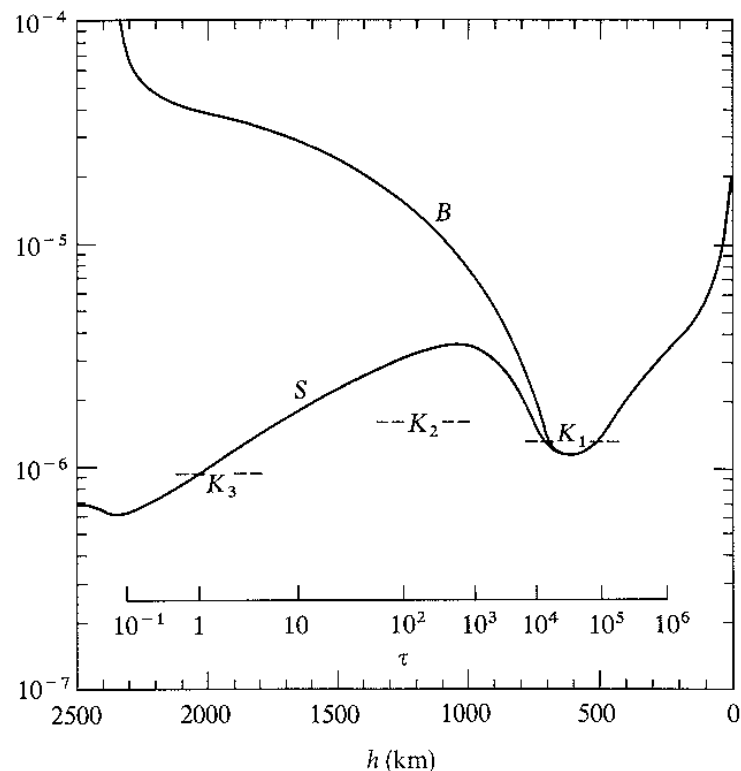
# Šokantno-frapantan zaključak

- U prisustvu ne-LTR efekata čak i u izotermalnoj atmosferi dobijamo apsorpcionu liniju!
- U realističnoj atmosferi (npr Sunčevoj), ovo dovodi da u jakim, ne-LTR spektralnim linijama, funkcija izvora ima sledeći trend:

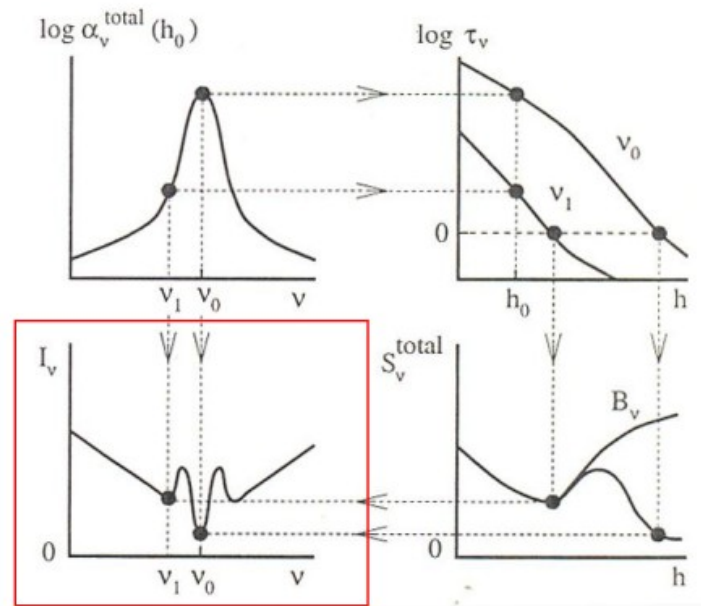
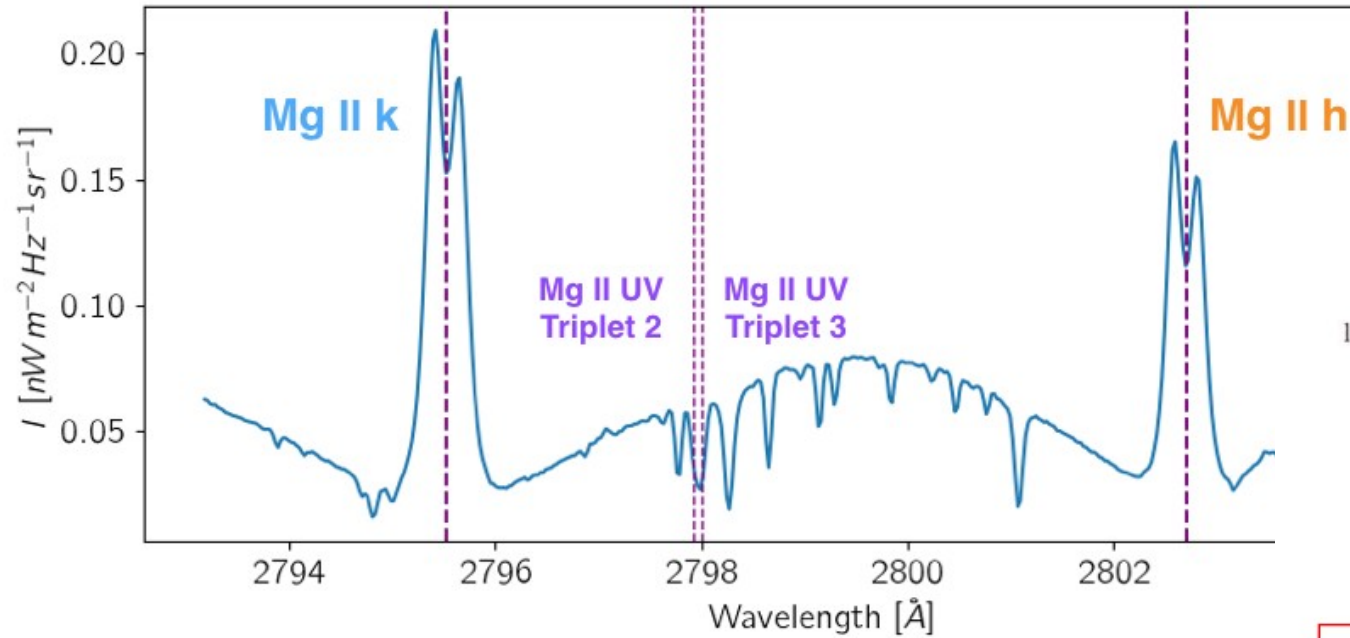
**Opada** – fotosferski pad temperature

**Raste** – hromosferski rast temperature

**Opada** – neLTR efekti u visokoj hromosferi



# Sada konačno razumemo h & k linije Mg II



## Neki zaključci:

- Rasejanje tj. Ne-LTR dovodi do spregnuća jednačine statističke ravnoteže i jednačine prenosa zračenja
- Da bismo znali intenzitet na jednoj talasnoj dužini i jednom pravcu – moramo da znamo intenzitet na svim talasnim dužinama u svim pravcima
- Rešenje je ne-trivijalno, u generalnom slučaju mora biti numeričko
- Do sada smo gledali slučaj atoma sa dva nivoa – **linearan problem**
- U generalnom slučaju imamo atome sa više nivoa (eng: multilevel atom case).
- Najvažniji rad u ovoj oblasti je verovatno *Rybicki & Hummer (1991): An accelerated lambda iteration method for multilevel radiative transfer*

# Jednačina statističke ravnoteže za atom sa više nivoa

- Populacija svakog od nivoa je konstantna u vremenu.

$$n_i \sum_j (A_{ij} + B_{ij} \bar{J}_{ij} + C_{ij}) = \sum_j n_j (A_{ji} + B_{ji} \bar{J}_{ij} + C_{ji})$$

- Ako napišemo ovo za svaki nivo, jedna jednačina će biti višak (neodredjen sistem).
- Umesto toga, sistem zatvaramo sa:

$$\sum_i n_i = n_{\text{total}}$$

- Gde je  $n_{\text{total}}$  ukupna koncentracija čestica datog elementa (**diskusija**).

# Kako ovo rešiti?

- Ne-LTR u atomima sa više nivoa nije analitički rešiv problem
- Ako bismo raspisali sve zavisnosti dobili bismo ogroman **nelinearan** sistem
- Zato se rešava iterativno:

Pretpostavimo početne vrednosti populacija (npr LTE)

Izračunamo intenzitete ( $a_{ps}$ ,  $e_m \rightarrow J_{PZ}$ )

Izračunamo  $J$

Statistička ravnoteža, dobijamo nove vrednosti populacija

Ponavljamo do konvergencije



# Neka uprošćenja jednačine statističke ravnoteže

- Atom sa dva nivoa, čisto rasejanje (npr. protuberance, filamenti).
- Objasniti 3. zadatak sa prvog domaćeg