Teorija zvezdanih spektara -vežbe 2 (ravnotežne raspodele čestica)-

U slučaju klasičnog kolektiva (različivih) slobodnih čestica plazme u stanju termodinamičke ravnoteže (TDR), koje se pokoravaju Maksvel-Bolcmanovoj statistici, sudarnim procesima se uspostavljaju Maksvelova raspodela čestica po njihovim brzinama (ili impulsima, odnosno kinetičkim energijama), Bolcmanova raspodela čestica po unutrašnjim energetskim stanjima (stanjima ekscitacije) i Sahina ravnotežna raspodela čestica po stanjima jonizacije. U TDR se uspostavlja i tzv. Plankova ravnotežna raspodela elektromagnetnog zračenja (po energijama, frekvencijama, odnosno talasnim dužinama) i to kroz uzastopne termalne apsorpcije i emisije.

Maksvelov zakon raspodele čestica po brzinama.

Prema Maksvelovoj nerelativističkoj raspodeli, koncentracija čestica, dn_{v_i}, u delu prostora van spoljašnjih polja, čije su vrednosti i-te $(i = x, y, z)$ komponente vektora brzine $(\vec{v})$ između v_i i $v_i + dv_i$, nezavisno od konkretnih vrednosti druge dve komponente, data je sa:

$$dn_{v_i} = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-mv_i^2/2kT} dv_i.$$

Zapravo, verovatnoća da čestica ima vrednost i-te komponente brzine u intervalu između v_i i $v_i + dv_i$, nezavisno od toga kolike su vrednosti druge dve komponente, iznosi dn_{v_i}/n, odnosno čestice imaju Gausovu raspodelu verovatnoće po komponentama vektora brzine centriranu na nulu (komponente brzine v_i imaju nultu srednju vrednost, $\langle v_i \rangle = 0$). Sa porastom temperature sredine izraženije je i samo rasipanje vrednosti (raste disperzija, varijansa) pojedinačnih komponenti vektora brzine oko njihove (nulte) srednje vrednosti (važi $\langle v_i^2 \rangle = kT/m,\ \forall i$).

Broj čestica u jedinici zapremine $dn_{\vec{v}}$, čije komponente brzine termalnog kretanja baš uzimaju vrednosti između v_x i $v_x + dv_x$, v_y i $v_y + dv_y$, odnosno v_z i $v_z + dv_z$, jednak je:

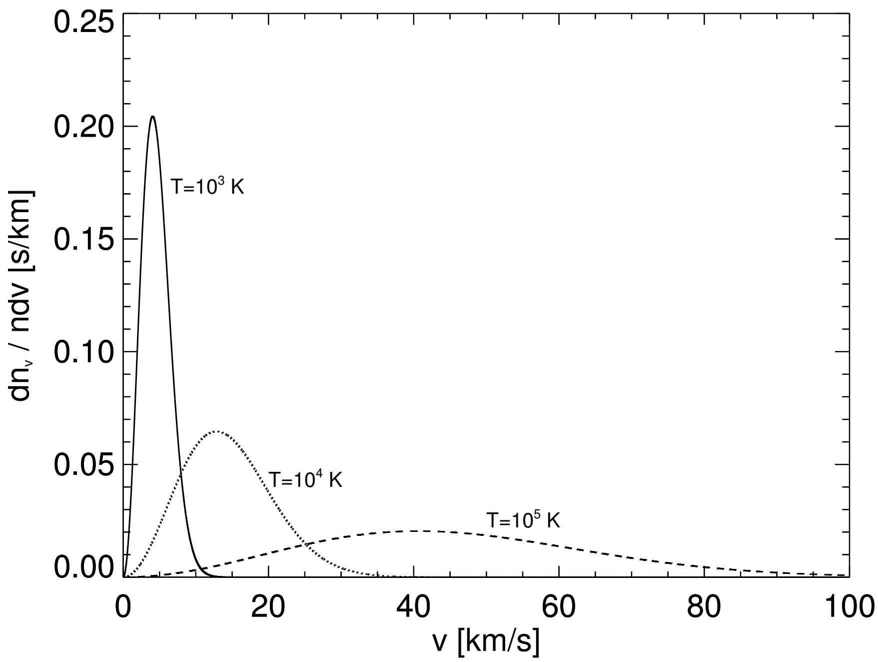
$$dn_{\vec{v}} = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} d^3\vec{v},\ \ d^3\vec{v} \equiv dv_x dv_y dv_z.$$

Kako su pojedinačne komponente vektora brzine čestica u TDR statistički nezavisne veličine, verovatnoća da čestica istovremeno ima komponente brzine između v_x i $v_x + dv_x$, v_y i $v_y + dv_y$, v_z i $v_z + dv_z$, jednaka je proizvodu verovatnoća da se vrednosti komponenti brzine nezavisno nalaze u intervalu između v_i i $v_i + dv_i$, $dn_{\vec{v}}/n = \prod_i (dn_{v_i}/n)$, pri čemu je, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.

Ako sa dn_v označimo koncentraciju čestica čiji intenziteti vektora brzine $(v \equiv \|\vec{v}\|)$ imaju vrednosti između v i $v + dv$, nezavisno od pravca i smera samog vektora brzine, onda možemo pisati:

$$dn_v = 4\pi n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} dv.$$

Primetimo i da je Maksvelova raspodela čestica po brzinama zapravo izotropna. Ukoliko element zapremine u prostoru brzina predstavimo pomoću adekvatnih sfernih koordinata $d^3v \equiv v^2 \sin\theta d\theta d\varphi dv$, možemo lako zaključiti da je broj onih (vektora) brzina čiji su intenziteti između v i $v + dv$ jednak upravo $4\pi v^2$, odnosno da važi da je $dn_v = 4\pi v^2 dn_{\vec{v}}$. Sa povećanjem temperature sistema maksimum gustine raspodele čestica po intenzitetima brzina opada i pomera se ka sve većim vrednostima intenziteta brzine (vidi sliku 1). Srednji intenzitet brzine jednak je $\sqrt{8kT/\pi m}$. Najverovatniji intenzitet brzine odgovara maksimumu raspodele verovatnoće i jednak je $\sqrt{2kT/m}$. Konačno, kvadratni koren iz srednje vrednosti kvadrata intenziteta brzine (tzv. srednja kvadratna brzina), za Maksvelovu raspodelu čestica po intenzitetima brzina, je jednaka $\sqrt{3kT/m}$. Drugim rečima, rasipanje intenziteta brzine oko srednje vrednosti (disperzija brzina) raste sa porastom temperature. Kako sledi da su vrednosti svih pomenutih, referentnih intenziteta brzina reda veličine $\sqrt{kT/m}$, jasno je zašto je uobičajeno da se ta vrednost koristi za ocenu intenziteta brzine termalnog kretanja čestica.



Slika 1: Maksvelova gustina raspodele protona po intenzitetima brzina za tri različite vrednosti temperatura.

Konačno, broj nerelativističkih čestica u jedinici zapremine koje imaju kinetičke energije termalnog kretanja ($\mathcal{E}_{\rm kin} = mv^2/2$) između $\mathcal{E}_{\rm kin}$ i $\mathcal{E}_{\rm kin} + d\mathcal{E}_{\rm kin}$, jednak je:

$$dn_{\mathcal{E}_{\rm kin}} = \frac{2n}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}}\sqrt{\mathcal{E}_{\rm kin}}\, e^{-\mathcal{E}_{\rm kin}/kT} d\mathcal{E}_{\rm kin}.$$

Vrednost najverovatnije termalne energije (one $\mathcal{E}_{\rm kin}$ za koju raspodela verovatnoće ima maksimum) je upravo $kT/2$, dok je intenzitet brzine čestica koje imaju baš toliku termalnu kinetičku energiju jednak $\sqrt{kT/m}$. Jasno je i da važi $\langle\mathcal{E}_{\rm kin}\rangle = m\langle v^2\rangle/2 = 3kT/2$ (srednja kinetička energija translatornog termalnog kretanja).

Maksvelov zakon definiše kinetičku temperaturu $T = T_{\rm k}$.

Bolcmanova raspodela atoma/jona po stanjima ekscitacije.

Uopšteno, u Maksvel-Bolcmanovoj statistici broj atoma n energije E u 1 cm^3 dat je preko:

$$n(E) = Ce^{-E/kT}.$$

Konkretno, broj atoma na k-tom pobuđenom nivou (naseljenost nivoa) iznosi:

$$n_k = \text{const}\ g_k\ e^{-\chi_k/kT_\text{B}},$$

gde je g_k statistička težina nivoa k, odnosno broj načina na koje elektron može doći na k-ti nivo, a χ_k predstavlja energiju (potencijal) ekscitacije u odnosu na osnovni nivo. Ravnotežna naseljenost nekog nivoa određena je samo temperaturom.

Ako osnovni nivo označimo sa $k = 0$, tada je $\chi_0 = 0$, a ako označimo sa $k = 1$, onda je $\chi_1 = 1$ (vidi kasnije u zadacima). Odnos naseljenosti dva energetska nivoa je dat preko:

$$\frac{n_k}{n_{k'}} = \frac{g_k}{g_{k'}}\ e^{-\chi_{kk'}/kT_\text{B}}, \qquad \chi_{kk'} = \chi_k - \chi_{k'}.$$

U praksi je pogodno logaritmovati prethodni izraz:

$$\log\frac{n_k}{n_{k'}} = \log\frac{g_k}{g_{k'}} - \theta\ \chi_{kk'}, \qquad \theta = \frac{\log e}{kT_\text{B}} \approx \frac{5040}{T_\text{B}}, \qquad T_\text{B}\ [\text{K}], \qquad \chi_{kk'}\ [\text{eV}],$$

$$k = 1.38\times10^{-16}\ \text{erg/K} = \frac{1.38\times10^{-16}}{1.602\times10^{-12}}\ \text{eV/K} = 8.617\times10^{-5}\ \text{eV/K}.$$

Temperatura definisana Bolcmanovom raspodelom je temperatura ekscitacije $T = T_\text{B}$.

Sahina raspodela po stanjima jonizacije.

Iznad diskretnih, vezanih stanja u atomu/jonu, postoji kontinuum nivoa gde slobodni elektron više nije vezan za atom/jon. Sva vezana stanja karakteriše $E < 0$, a da bi elektron postao slobodan potrebno je dodati odgovarajuću energiju u sistem. Sahina formula daje broj jonizovanih u odnosu na broj neutralnih atoma:

$$\frac{n^+}{n_0} = 2\frac{1}{n_\mathrm{e}}\frac{g^+}{g_0}\frac{(2\pi mkT_\mathrm{j})^{3/2}}{h^3}\ e^{-\chi_j/kT_\mathrm{j}},$$

gde je n_e koncentracija elektrona, $m \equiv m_\mathrm{e}$ masa elektrona, g^+ statistička težina jona, a g_0 statistička težina atoma i to u osnovnim stanjima, dok je χ_j energija jonizacije iz osnovnog stanja.

Stepen jonizacije zavisi i od temperature i od elektronske koncentracije. Kako definicija pojma temperature inače nije jedinstvena, već zavisi od procesa koji se koristi pri njenom određivanju, pomoću Sahine formule se nalazi tzv. temperatura jonizacije T_j.

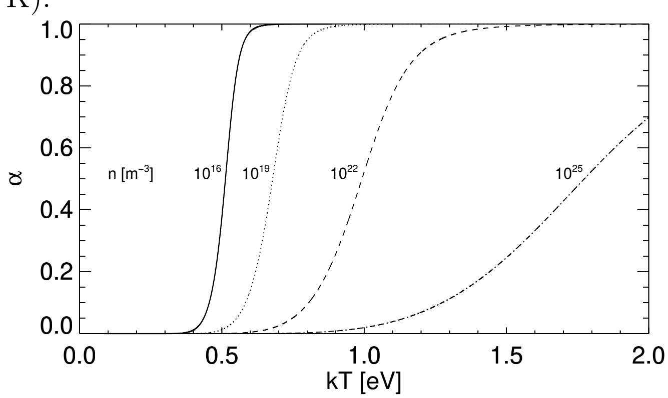
Sahina raspodela za vodoničnu plazmu, pri stepenu jonizacije definisanim baš preko $\alpha \equiv n_{\mathrm{H\,II}}/(n_{\mathrm{H\,I}} + n_{\mathrm{H\,II}})$, ima sledeći oblik:

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = \frac{(2\pi m_\mathrm{e})^{3/2}}{h^3}\frac{(kT)^{5/2}}{p}e^{-\mathcal{E}_\mathrm{jon}/kT},$$

gde je T temperatura, $\mathcal{E}_\mathrm{jon} = 13.598$ eV, a gasni pritisak $p = (n_{\mathrm{H\,I}} + n_{\mathrm{H\,II}} + n_\mathrm{e})kT$.

U Sunčevoj fotosferi (recimo za vrednosti $T = 5800$ K, $p = 10^{4.1}$ Pa $= 10^{5.1}$ dyn/cm^2, $p_\mathrm{e} = 10^{0.2}$ Pa $= 10^{1.2}$ dyn/cm^2) plazma veoma slabo jonizovana, odnosno ako pretpostavimo vodoničnu plazmu dobija se da je $\alpha \approx 10^{-4}$. Sa druge strane, za fotosferu jedne vrele zvezde (npr. za $T = 40800$ K, $p = 10^{3.22}$ Pa $= 10^{4.22}$ dyn/cm^2, $p_\mathrm{e} = 10^{2.94}$ Pa $= 10^{3.94}$ dyn/cm^2) imamo da je $\alpha \approx 1$.

Na slici 2 je prikazana zavisnost stepena jonizacije vodonične plazme od temperature, $\alpha(T)$, i to za različite vrednosti ukupne koncentracije čestica ($n \equiv n_{\mathrm{H\,I}} + n_{\mathrm{H\,II}} + n_\mathrm{e}$). Sledi da se pri sve manjim gustinama sredine, visok stepen jonizacije plazme može ostvariti već pri temperaturama bitno manjim od one koja odgovara energiji jonizacije vodonika ($\mathcal{E}_\mathrm{jon}/k \approx 157741$ K).



Slika 2: Zavisnost stepena jonizacije vodonične plazme α od temperature, odnosno kT [eV], pri različitim vrednostima ukupne koncentracije čestica n [m^{-3}] (1 m^{-3} = 10^{-6} cm^{-3}).

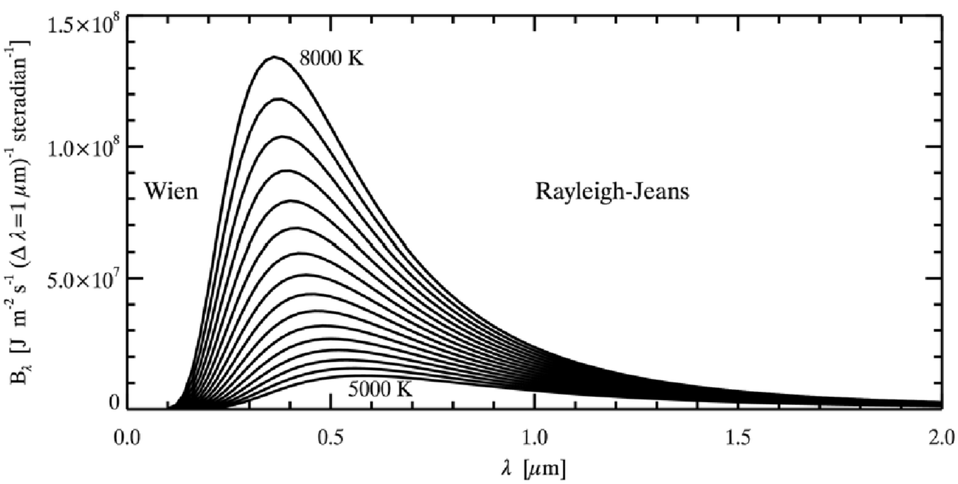
Plankova raspodela.

U slučaju termodinamičke ravnoteže polje zračenja je homogeno i izotropno, a specifični intenzitet elektromagnetnog zračenja je opisan Plankovom raspodelom (vidi sliku 3). Tada se za gustinu radijativne energije monohromatskog zračenja može pisati:

$$\rho_\nu(T) = \frac{4\pi}{c} I_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

kako je:

$$I_\nu \equiv B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$



Slika 3: Plankova raspodela $B_\lambda(T)$.

Plankova ravnotežna raspodela fotona važi pri TDR uslovima dok se u LTR aproksimaciji, koja je dobra u dubljim slojevima zvezdanih fotosfera, raspodela zračenja po energijama određuje rešavanjem odgovarajuće jednačine prenosa zračenja. Uz $x \equiv h\nu/kT = hc/\lambda kT$, Plankova raspodela, odnosno specifični intenzitet ravnotežnog polja zračenja, I_ν, I_λ se može zapisati na sledeći način:

$$\nu I_\nu = \lambda I_\lambda = \frac{2k^4T^4}{h^3c^2} \frac{x^4}{e^x - 1}.$$

Prema Vinovom zakonu pomeranja, sa porastom temperature maksimum ravnotežnog zračenja se pomera ka sve višim frekvencijama, odnosno kraćim talasnim dužinama. Takođe, prema tzv. Štefan-Bolcmanovom zakonu, ukupna količina energije koju izrači jedinica površine TDR plazme u jedinici vremena u svim pravcima i na svim frekvencijama proporcionalna je T^4. Naime, $\mathcal{F}_\nu^+ = 2\pi B_\nu(T) \int_0^1 \mu d\mu = \pi B_\nu(T)$. Onda je $\mathcal{F}^+ = \pi \int B_\nu(T) d\nu = \pi B$ ($B = \sigma T^4/\pi$, $\mathcal{F}^+ = \pi B$, $\mathcal{F}^+ = \sigma T^4$).

Kada je uspostavljena potpuna TDR tada su temperature određene iz Maksvelove, Bolcmanove, Sahine i Plankove raspodele međusobno jednake, odnosno postoji jedna temperatura koja karakteriše sve gore navedene procese.

1. Odrediti broj pobuđenih atoma $n_{i,k}$ u funkciji ukupnog broja atoma n_i u datom stanju jonizacije i.

Rešenje. Neka $\chi_{i,k}$ predstavlja potencijal ekscitacije (energiju ekscitacije) u odnosu na osnovni nivo. Takođe, $n_{i,k}$ je broj atoma u i-tom stanju jonizacije koji su ekscitovani na k-ti nivo. Dodatno, $n_{i,0}$ predstavlja broj atoma u i-tom stanju jonizacije na osnovnom nivou ($k = 1, 2, 3, ...$ - pobuđena stanja, 0 - osnovno, odnosno ne pobuđeno stanje $n = 1$). Na osnovu Bolcmanove raspodele možemo pisati:

$$\frac{n_{i,k}}{n_{i,0}} = \frac{g_{i,k}}{g_{i,0}} e^{-\chi_{i,k}/kT} \quad \Rightarrow$$

$$n_{i,k} = g_{i,k} \frac{n_{i,0}}{g_{i,0}} e^{-\chi_{i,k}/kT}. \tag{$*$}$$

Sa druge strane imamo:

$$n_i = \sum_k n_{i,k} = \sum_k \frac{n_{i,0}}{g_{i,0}} \; g_{i,k} \; e^{-\chi_{i,k}/kT} \quad \Rightarrow$$

$$n_i = \frac{n_{i,0}}{g_{i,0}} \sum_k g_{i,k} \; e^{-\chi_{i,k}/kT} = \frac{n_{i,0}}{g_{i,0}} \; U_i(T), \qquad U_i(T) = \sum_k g_{i,k} \; e^{-\chi_{i,k}/kT},$$

gde je sa $U_i(T)$ označena particiona funkcija. Dakle, imamo:

$$\frac{n_{i,0}}{g_{i,0}} = \frac{n_i}{U_i(T)}.$$

Konačno, zamenom prethodnog izraza u (*), dobijamo:

$$\frac{n_{i,k}}{n_i} = \frac{g_{i,k}}{U_i(T)} \; e^{-\chi_{i,k}/kT}.$$

2. Odrediti broj vodonikovih atoma ekscitovanih na nivo $n = 2$ i $n = 3$ (prvo i drugo pobuđeno stanje - $k = 1, 2$, dok je $n = 2, 3$) u odnosu na broj atoma u osnovnom stanju ($n = 1$) i to na $T = 5000$ K, 10000 K i 20000 K ($kT \approx 0.4 - 1.7$ eV). Poznate su vrednosti $\chi_{21} = 10.204$ eV i $\chi_{31} = 12.094$ eV.

Rešenje. Neka sada osnovno stanje numerišemo preko n, odnosno $n = 1$ i iskoristimo Balcmanovu formulu:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\chi_{2,1}/kT}, \qquad \frac{n_3}{n_1} = \frac{g_3}{g_1} e^{-\chi_{3,1}/kT},$$

gde je statistička težina $g_n = 2n^2$ za vodonik i vodoniku slične jone, pa je $g_1 = 2$. Bolcmanova konstanta je:

$$k = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg/K} = 8.617 \times 10^{-5} \text{ eV/K}, \qquad 1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-12} \text{ erg}.$$

Jasno je da je $n_2/n_1 \approx n_2/n$, pošto je prema prethodnom zadatku:

$$\frac{n_2}{n} = \frac{g_2}{U} e^{-\chi_{2,1}/kT}, \qquad U = g_1 + g_2 e^{-\chi_{2,1}/kT} + g_3 e^{-\chi_{3,1}/kT} + \cdots \approx g_1 = 2.$$

Kako se sumiranje vrši po svim nivoima (njih beskonačno mnogo) uočavamo problem divergencije particione funkcije U. Ipak, divergencija u realnosti nestaje kako će za atome/jone u plazmi (atomi nisu izolovani u prostoru) biti moguća ekscitacija samo konačnog broja (najnižih nivoa). Ako nije potrebna visoka numerička tačnost dovoljno je izjednačiti $U \approx g_1$.

Konačno imamo:

$$T = 5000 \text{ K} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_2}{n_1} = 2.07 \times 10^{-10}, \quad \frac{n_3}{n_1} = 5.67 \times 10^{-12}$$

$$T = 10000 \text{ K} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_2}{n_1} = 2.88 \times 10^{-5}, \quad \frac{n_3}{n_1} = 7.14 \times 10^{-6}$$

$$T = 20000 \text{ K} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_2}{n_1} = 1.07 \times 10^{-2}, \quad \frac{n_3}{n_1} = 8.02 \times 10^{-3}$$

3. Razmotriti odnos broja jona u dva susedna stanja jonizacije.

Rešenje. Sahina formula, malo drugačije zapisana nego u uvodu, daje:

$$\frac{n_{i+1,0}}{n_{i,0}} \cdot n_{\mathrm{e}} = \frac{2(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \; \frac{g_{i+1,0}}{g_{i,0}} \; e^{-\chi_i/kT}. \qquad (*)$$

Ako je n_{i+1} ukupan broj atoma u $i+1$ -om stanju jonizacije, tada iz Bolcmanove raspodele (vidi prvi zadatak) imamo:

$$\frac{n_{i+1,0}}{n_{i+1}} = \frac{g_{i+1,0}}{U_{i+1}} e^{-\chi_{i+1,0}/kT} = \frac{g_{i+1,0}}{U_{i+1}}, \qquad \chi_{i+1,0} = 0.$$

Slično važi:

$$\frac{n_{i,0}}{n_i} = \frac{g_{i,0}}{U_i} e^{-\chi_{i,0}/kT} = \frac{g_{i,0}}{U_i}, \qquad \chi_{i,0} = 0.$$

Deljenjem prethodna dva izraza dobijamo:

$$\frac{n_{i+1,0}}{n_{i,0}} = \frac{n_{i+1}}{n_i} \; \frac{g_{i+1,0}}{g_{i,0}} \; \frac{U_i}{U_{i+1}}. \qquad (**)$$

Kada izraz (**) zamenimo u (*) imamo:

$$\frac{n_{i+1}}{n_i} \cdot n_{\mathrm{e}} = \frac{2(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \; \frac{U_{i+1}}{U_i} \; e^{-\chi_i/kT}, \qquad \chi_i \equiv \chi_{i,\infty},$$

gde $\chi_{i,\infty}$ predstavlja jonizacioni potencijal i-tog stanja jonizacije. Gornji izraz se može zapisati i preko elektronskog pritiska:

$$\frac{n_{i+1}}{n_i} \cdot p_{\mathrm{e}} = \frac{2(2\pi m)^{3/2}}{h^3} (kT)^{5/2} \; \frac{U_{i+1}}{U_i} \; e^{-\frac{\chi_{i,\infty}}{kT}}, \qquad p_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{e}} kT.$$

Često se koristi i logaritam Sahine raspodele:

$$\log \frac{n_{i+1}}{n_i} = -0.1761 - \log p_{\mathrm{e}} + \log \frac{U_{i+1}}{U_i} + 2.5 \log T - \frac{5040}{T} \chi_{i,\infty}, \quad T\ [\mathrm{K}], \;\; p_{\mathrm{e}}\ [\mathrm{dyn/cm^2}], \;\; \chi_{i,\infty}\ [\mathrm{eV}],$$

$$h = 6.626 \times 10^{-27}\ \mathrm{erg\ s}, \quad m \equiv m_{\mathrm{e}} = 9.105 \times 10^{-28}\ \mathrm{g}, \quad 1\ \mathrm{dyn} = 1\ \mathrm{g\ cm/s^2} = 10^{-5}\ \mathrm{kg\ m/s^2},$$
$$1\ \mathrm{erg} = 10^{-7}\ \mathrm{J}.$$

4. Odrediti broj jona (II) atoma vodonika (protona) u odnosu na broj neutralnih (I) vodonikovih atoma za uslove $T = 6000$ K, 10000 K i 20000 K ($kT \approx 0.5 - 1.7$ eV) i $p_\mathrm{e} = 10$ dyn/cm^2.

Rešenje. Na osnovu prethodnog zadatka je:

$$\log \frac{n_\mathrm{II}}{n_\mathrm{I}} = -0.1761 - \log p_\mathrm{e} + \log \frac{U_\mathrm{II}}{U_\mathrm{I}} + 2.5 \log T - \frac{5040}{T} \chi_{\mathrm{I},\infty}, \quad T\ [\mathrm{K}],\ \ p_\mathrm{e}\ [\mathrm{dyn/cm^2}],\ \ \chi_{\mathrm{I},\infty}\ [\mathrm{eV}],$$

pa dobijamo sledeću tabelu (tabela 1) i grafik (slika 4):

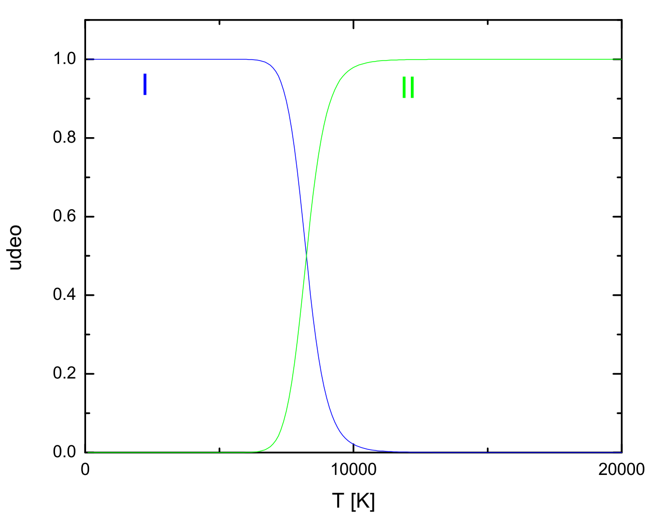
$U_\mathrm{I} = 2$ ($\approx g_1 = 2$; $n = 1$), $\quad U_\mathrm{II} = 1$ (nema degeneracije za proton), $\quad \chi_{\mathrm{I},\infty} = 13.598$ eV

$$\frac{n_\mathrm{I}}{n_\mathrm{uk}} = \frac{1}{1 + n_\mathrm{II}/n_\mathrm{I},}$$

$$\frac{n_\mathrm{II}}{n_\mathrm{uk}} = \frac{n_\mathrm{II}}{n_\mathrm{I} + n_\mathrm{II}} = \frac{n_\mathrm{II}/n_\mathrm{I}}{1 + n_\mathrm{II}/n_\mathrm{I}}.$$

T [K]	$n_\mathrm{II}/n_\mathrm{I}$	$n_\mathrm{I}/n_\mathrm{uk}$	$n_\mathrm{II}/n_\mathrm{uk}$
6000	3.5×10^{-4}	1	0.35×10^{-3}
10000	46.6	0.021	0.979
20000	7.05×10^{5}	0.142×10^{-5}	1

Tabela 1: Rešenje zadatka 4.



Slika 4: Udeo ($n_{\mathrm{I,II}}/n_\mathrm{uk}$) neutralnog (I) i jonizovanog (II) atoma vodonika za različite vrednosti temperature (uz zadatak 4).

5. Odrediti, slično kao i u prethodnom zadatku, broj jednom jonizovanih atoma helijuma u odnosu na broj neutralnih atoma helijuma, za različite temperature i elektronski pritisak od $p_{\mathrm{e}} = 10$ dyn/cm^2.

Rešenje. Neka je $\chi_{\mathrm{I},\infty} = 24.587$ eV i $\chi_{\mathrm{II},\infty} = 54.416$ eV, dok su $U_{II} = 2$ (jedan je elektron, a dva podnivoa osnovnog nivoa, 1s^2) i $U_{\mathrm{I}} = U_{\mathrm{III}} = 1$ (u neutralnom stanju inertan gas, dva elektrona popunjavaju osnovno stanje 1s^2; za potpuno jonizovani helijum ostaje samo jezgro), $g_{\mathrm{I},0} = 1$, $g_{\mathrm{II},0} = 2$. Sada je:

$$\frac{n_{\mathrm{II}}}{n_{\mathrm{I}}} = 10^{-0.8751+2.5\log T-\frac{123918.48}{T}},$$

$$\frac{n_{\mathrm{III}}}{n_{\mathrm{I}}} = 10^{-1.1761+2.5\log T-\frac{123918.48}{T}}, \quad \frac{n_{\mathrm{III}}}{n_{\mathrm{II}}} = 10^{-1.4771+2.5\log T-\frac{274256.64}{T}},$$

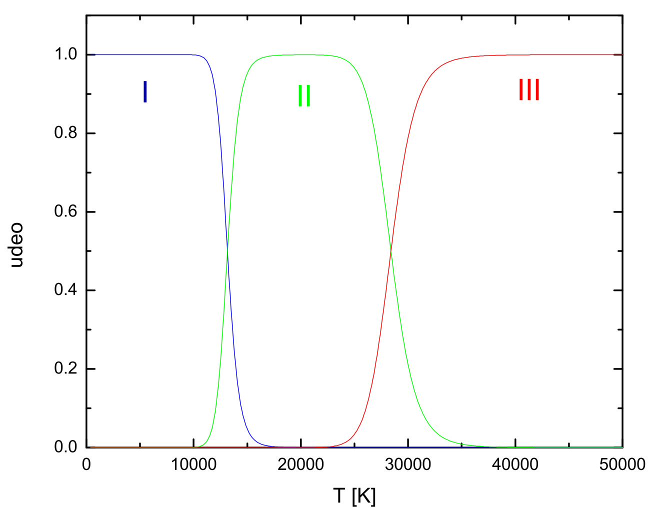
uz:

$$\frac{n_{\mathrm{I}}}{n_{\mathrm{uk}}} = \frac{1}{1+\frac{n_{\mathrm{II}}}{n_{\mathrm{I}}}+\frac{n_{\mathrm{III}}}{n_{\mathrm{I}}}}, \quad \frac{n_{\mathrm{II}}}{n_{\mathrm{uk}}} = \frac{1}{1+\frac{n_{\mathrm{I}}}{n_{\mathrm{II}}}+\frac{n_{\mathrm{III}}}{n_{\mathrm{II}}}}, \quad \frac{n_{\mathrm{III}}}{n_{\mathrm{uk}}} = \frac{1}{1+\frac{n_{\mathrm{I}}}{n_{\mathrm{III}}}+\frac{n_{\mathrm{II}}}{n_{\mathrm{III}}}}.$$

Rešenja su data u tabeli 2 i predstavljena na slici 5.

T [K]	$n_{\mathrm{II}}/n_{\mathrm{I}}$	$n_{\mathrm{III}}/n_{\mathrm{I}}$	$n_{\mathrm{I}}/n_{\mathrm{uk}}$	$n_{\mathrm{II}}/n_{\mathrm{uk}}$	$n_{\mathrm{III}}/n_{\mathrm{uk}}$
10000	5.45×10^{-4}	1.27×10^{-19}	~ 1	0.544×10^{-3}	0.692×10^{-22}
20000	4.82×10^{3}	3.68×10^{-5}	0.2×10^{-3}	~ 1	0.368×10^{-4}
30000	1.54×10^{6}	3.77	0.136×10^{-6}	0.210	0.79
40000	3.41×10^{7}	1.49×10^{3}	0.197×10^{-10}	0.671×10^{-3}	~ 1

Tabela 2: Rešenje zadatka 5.



Slika 5: Udeo ($n_{\mathrm{I,II,III}}/n_{\mathrm{uk}}$) neutralnog, jednom i potpuno jonizovanog helijuma za različite vrednosti temperature (uz zadatak 5).

6. Odrediti stepen jonizacije atoma vodonika ($\chi_{\mathrm{I},\infty} = 13.6$ eV) u Sunčevoj fotosferi, gde je $T = 6000$ K i $\log p_\mathrm{e} = 1.5$ (pomoć za brzo računanje: $\log 2 = 0.3$, $\log 3 = 0.48$, $\log 5 = 0.7$, $\log 7 = 0.84$; $\log 6000 = \log 3 + \log 2 + 3 = 3.78$).

Rešenje. Imamo $U^+ = 1$, kako je reč o jednom protonu - jedno stanje, $U_0 = 2$, kako na osnovnom nivou elektron može biti u dva stanja - orijentacije spina. Dobijamo onda, uz pomoć Sahine formule:

$$\log \frac{n_\mathrm{II}}{n_\mathrm{I}} = -0.1761 - \log p_\mathrm{e} + \log \frac{U_\mathrm{II}}{U_\mathrm{I}} + 2.5 \log T - \frac{5040}{T} \chi_{\mathrm{I},\infty}, \quad T\,[\mathrm{K}], \;\; p_\mathrm{e}\,[\mathrm{dyn/cm^2}], \;\; \chi_{\mathrm{I},\infty}\,[\mathrm{eV}],$$

da je $\frac{n^+}{n_0} = 10^{-4}$, odnosno jedan od 10^4 atoma vodonika je jonizovan.

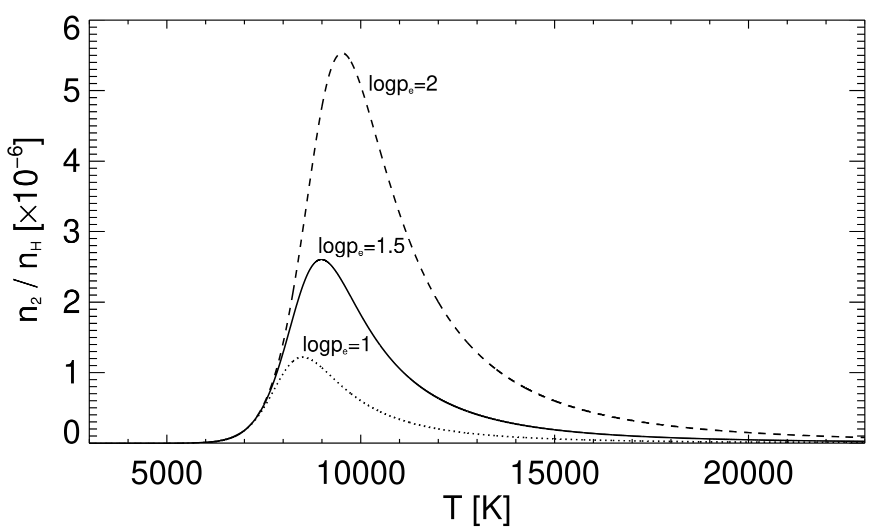
7. Odrediti udeo $n_2/n_{\rm uk}$ atoma vodonika ekscitovanih na prvi pobuđeni nivo ($n = 2$; zavisnost izraženosti (jačine) linija Balmerove serije od temperature) u zavisnosti od temperature za $\log p_{\rm e} = 1, 1.5, 2$. Rezultat predstaviti grafički.

Rešenje. Upotrebom Bolcmanove i Sahine raspodele može se proceniti odnos koncentracija neutralnih atoma vodonika, ekscitovanih na prvo pobuđeno stanje (n_2) prema ukupnoj koncentraciji neutralnih i jonizovanih atoma vodonika ($n_{\rm H} \equiv n_{\rm H\,I} + n_{\rm H\,II}$), za različite vrednosti temperature T i elektronskog pritiska $p_{\rm e}$. Naime, jasno je da važi[1] $n_2/n_{\rm H} = (1-\alpha)n_2/n_{\rm H\,I}$. Sa druge strane, na osnovu zadatka 2 lako se može naći da je $n_2/n_{\rm H\,I} = g_2 e^{-\mathcal{E}_{21}/kT}/\mathcal{U}(T)$, gde je $\mathcal{U}(T) = \sum_{\boldsymbol{n}} g_{\boldsymbol{n}} e^{-\mathcal{E}_{\boldsymbol{n}1}/kT} \approx g_1 + g_2 e^{-\mathcal{E}_{21}/kT} + g_3 e^{-\mathcal{E}_{31}/kT}$ statistička suma elektronskih ekscitacija (particiona funkcija). Rezultati zadovoljavajuće tačnosti mogu se dobiti ukoliko se obračuna samo nekoliko prvih članova particione funkcije[2]. Sada je jasno i zašto su baš (apsorpcione) spektralne linije atoma vodonika (Balmerova serija, u vidljivoj oblasti) najizraženije u spektrima zvezda spektralne klase A (efektivnih temperatura između oko 7500 K i 11000 K). Ovde je iskorišćena Sahina relacija za vodoničnu plazmu u obliku:

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = \frac{(2\pi m_{\rm e})^{3/2}}{h^3}\frac{(kT)^{5/2}}{p}e^{-\mathcal{E}_{\rm jon}/kT},$$

gde je T temperatura, $\mathcal{E}_{\rm jon} = 13.598$ eV, a $p = (n_{\rm H\,I} + n_{\rm H\,II} + n_{\rm e})kT$.

Rešenje je predstavljeno na slici 6.



Slika 6: Odnos koncentracije neutralnih atoma vodonika, ekscitovanih na prvo pobuđeno stanje (n_2) prema ukupnom broju, kako neutralnih tako i jonizovanih atoma vodonika ($n_{\rm H} \equiv n_{\rm H\,I}+n_{\rm H\,II}$), za različite vrednosti T [K] i $p_{\rm e}$ [dyn/cm^2] (1 dyn/cm^2 = 0.1 Pa) – uz zadatak 7.

[1]Kako je $n_{\rm H\,II} = n_{\rm e}$ i $\alpha \equiv n_{\rm H\,II}/(n_{\rm H\,I} + n_{\rm H\,II})$, sledi da je $p = (1+\alpha)p_{\rm e}/\alpha$.

[2]Pomenute statističke sume (particione funkcije) jedne, izolovane čestice zapravo divergiraju. Naravno, kada je reč o atomima i jonima (koji nisu potpuno ogoljeni) u plazmi, tada je $\mathcal{U}(T)$ konačna suma. Naime, u realnosti pobuda na ona energetska stanja čija je energija manja od srednje termalne energije konstituenata plazme ili pobuda na ona energetska stanja koja odgovaraju udaljnostima od jezgra koja su veća od srednjeg rastojanja čestica u plazmi, upravo dovodi do jonizacije.

Digresija. Zastupljnost se često predstavlja u obliku logaritma relativne zastupljenosti $\log(n_{\mathrm{Z}}/n_{\mathrm{H}}) + 12$. Neka je za atom kiseonika logaritam relativne zastupljenosti 8.83, onda sledi:

$$8.83 = \log(n_{\mathrm{O}}/n_{\mathrm{H}}) + 12 \Rightarrow \frac{n_{\mathrm{O}}}{n_{\mathrm{H}}} = 6.76 \times 10^{-4},$$

što znači da imamo jedan atom kiseonika na 1480 atoma vodonika $(1/6.76\times 10^{-4})$. Slično, ako je za kalcijum logaritam relativne zastupljenosti 6.36, onda imamo jedan atom kalcijuma na oko 436516 atoma vodonika.

8. Za uslove koji u srednjem važe u fotosferi Sunca ($T = 5777$ K, $\log p_\mathrm{e} = 1.5$), proceniti značaj (izraženost) Balmerovih naspram Ca II K apsorpcionih linija.

Rešenje. Od ranije za vodonik sledi da je:

$$\frac{n_\mathrm{HII}}{n_\mathrm{HI}} = 10^{-0.1761-1.5+\log 0.5+2.5\log 5777-\frac{5040}{5777}13.598} = 3.66\times 10^{-5},$$

odnosno imamo jedan jonizovani vodonik na 27322 nautrala. Slično nalazimo i naseljenost prvog pobuđenog nivoa:

$$\frac{n_{\mathrm{H}(n=2)}}{n_{\mathrm{H}(n=1)}} = 4e^{-118408.6957/T} = 5\times 10^{-9},$$

odnosno jedan atom u prvom pobuđenom stanju na 200 miliona atoma u osnovnom stanju.

Sada razmatramo kalcijum i za energiju prve jonizacije imamo $\chi_\mathrm{jon}(\mathrm{Ca\,I}) = 6.11$ eV ($\chi_\mathrm{jon} >> kT$; $T = 5777$ K daje $kT \approx 0.5$ eV). Možemo pisati:

$$\frac{n_\mathrm{CaII}}{n_\mathrm{CaI}} = 10^{-0.1761-1.5+\log\frac{2.30}{1.32}+2.5\log 5777-\frac{5040}{5777}6.11} = 435,$$

odnosno 435 Ca II jona na jedan neutralni atom Ca I (particione funkcije za kalcijum Ca I i Ca II su ovde samo date kako njihov račun izlazi iz okvira ovog kursa; pogledati dodatak D.2. iz knjige Gray: *The Observation and Analysis of Stellar Photospheres*, 2005).

Zanima nas čuvena Fraunhoferova K linija jednom jonizovanog kalcijuma, u oznaci Ca II K (393.37 nm; $2-1$; $\chi_{12} = 3.12$ eV, $g_1 = 2$, $g_2 = 4$). Dobijamo:

$$\frac{n_\mathrm{CaII(n=2)}}{n_\mathrm{CaII(n=1)}} = 3.79\times 10^{-3},$$

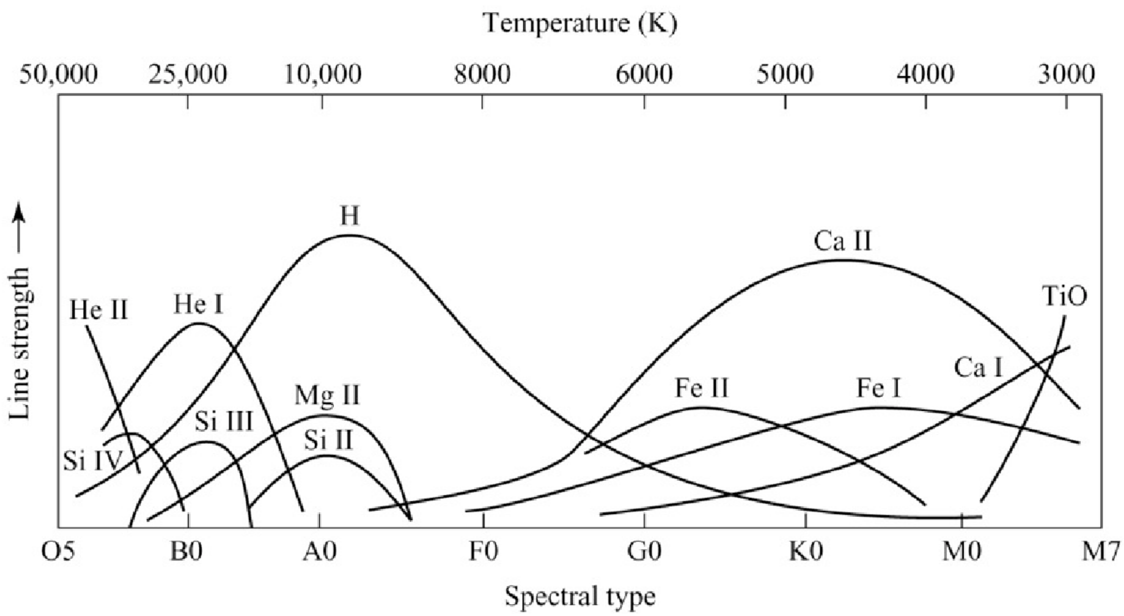
odnosno na jedan jon kalcijuma u prvom pobuđenom stanju dolazi 264 jona kalcijuma u osnovnom stanju (većina je dakle sposobna da proizvede Ca II K liniju).

Konačno, broj jednom jonizovanih atoma kalcijuma u osnovnom stanju prema ukupnom broju atoma i jona kalcijuma je

$$\frac{n_\mathrm{CaII(n=1)}}{n_\mathrm{uk}} \approx \frac{n_\mathrm{CaII(n=1)}}{n_\mathrm{CaII(n=1)}+n_\mathrm{CaII(n=2)}}\frac{n_\mathrm{CaII}}{n_\mathrm{uk}} = \frac{1}{1+n_\mathrm{CaII(n=2)}/n_\mathrm{CaII(n=1)}}\frac{n_\mathrm{CaII}/n_\mathrm{CaI}}{1+n_\mathrm{CaII}/n_\mathrm{CaI}} = 0.994,$$

$$n_\mathrm{CaII} \approx n_\mathrm{CaII(n=1)} + n_\mathrm{CaII(n=2)}, \quad n_\mathrm{uk} = n_\mathrm{CaI} + n_\mathrm{CaII}.$$

Skoro sav kalcijum može formirati Ca II K liniju. Ne zaboravimo, naravno, da mi zapravo imamo jedan kalcijum na 436516 atoma vodonika. Ipak, od tih 436516 atoma vodonika samo je mali broj neutrala i to neutrala u prvom pobuđenom nivou. Zapravo, njih je $436516\cdot 5\times 10^{-9} = 0.00218 = 1/459$. Sledi da ima približno oko 459 više kalcijuma koji može da stvori Ca II K linije nego što ima vodonika koji stvara Balmerove linije. Zato je apsorpciona linija Ca II K izraženija nego Balmerove linije u slučaju zvezda sličnih Suncu (vidi sliku 7).



Slika 7: Jačine nekih značajnih spektralnih linija u zavisnosti od temperature – spektralne klase (uz zadatak 8).

Dodatni zadatak za vežbu 1. Na kojoj temperaturi bi važilo da je $n_{\mathrm{H}(n=1)} = n_{\mathrm{H}(n=2)}$?

Dodatni zadatak za vežbu 2. Nacrtati grafik sličan onom iz zadatka 7 ali za Ca II ($n = 1$). **Digresija.** Osnovni nivo za Ca II je $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s\ ^2S_{1/2}$, $J = 1/2$, $2S + 1 = 2$, $g = 2J + 1$, K linija odgovara prelazu $4p\ ^2P_{3/2}$ - $4s\ ^2S_{1/2}$.

Dodatni zadatak za vežbu 3. Neka je efektivna temperatura Sunca 5772 K. Iz Vinovog zakona pomeranja, izvedenog preko Plankove raspodele $B_\lambda(T)$, važi $\lambda_{\mathrm{max}} = b/T$, gde je $b = 2.898 \times 10^{-3}$ mK, pa je $\lambda_{\mathrm{max}} = 502$ nm. Sa druge strane, iz Vinovog zakona izvedenog preko Plankove raspodele $B_\nu(T)$ sledi $\nu_{\mathrm{max}} = aT$, $a = 5.879 \times 10^{10}$ Hz/K, što daje $\nu_{\mathrm{max}} = 3.39 \times 10^{14}$ Hz. Ako se iskoristi veza da je $\lambda\nu = c$, $c = 2.998 \times 10^8$ m/s, ispada da je $\lambda_{\mathrm{max},\nu} = 883.5$ nm. Objasniti zašto se ove dve talasne dužine razlikuju.

Dodatni zadatak za vežbu 4. Odrediti broj jona (II) atoma vodonika u odnosu na broj neutralnih (I) vodonikovih atoma za uslove $T = 6000$ K, 10000 K, i 20000 K ($kT \approx 0.5 - 1.7$ eV) i $p_{\mathrm{e}} = 100$ dyn/cm^2.

Neke važne konstante i jedinice

$$h \approx 6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\ s} = 6.626 \times 10^{-27}\ \mathrm{erg\ s} = 4.136 \times 10^{-15}\ \mathrm{eV\ s},$$
$$c = 299\ 792\ 458\ \mathrm{m/s} \approx 2.998 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s} = 2.998 \times 10^{10}\ \mathrm{cm/s},$$
$$|q_{\mathrm{e}}| \approx 1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C},$$
$$k \approx 1.381 \times 10^{-23}\ \mathrm{J\ K^{-1}} = 1.381 \times 10^{-16}\ \mathrm{erg\ K^{-1}} = 8.617 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV\ K^{-1}},$$
$$1\ \mathrm{eV} \approx 1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{J},$$
$$1\ \mathrm{J} = 10^{7}\ \mathrm{erg},$$
$$1\ \mathrm{eV\ odgovara}\ \approx 11600\ \mathrm{K},$$
$$\varepsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m},$$
$$\mu_0 \approx 1.257 \times 10^{-6}\ \mathrm{H/m},$$
$$1\ \mathrm{G} = 10^{-4}\ \mathrm{T},$$
$$m_{\mathrm{e}} \approx 9.109 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg} = 9.109 \times 10^{-28}\ \mathrm{g} = 0.511/c^2\ \mathrm{MeV},$$
$$m_{\mathrm{p}} \approx 1.673 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 1.673 \times 10^{-24}\ \mathrm{g} = 938/c^2\ \mathrm{MeV},$$
$$m_{\mathrm{p}}/m_{\mathrm{e}} \approx 1836,$$
$$\sigma \approx 5.670 \times 10^{-8}\ \mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-4}} = 5.670 \times 10^{-5}\ \mathrm{erg\ cm^{-2}\ K^{-4}},$$
$$a = 4\sigma/c \approx 7.566 \times 10^{-16}\ \mathrm{J\ m^{-3}\ K^{-4}} = 7.566 \times 10^{-15}\ \mathrm{erg\ cm^{-3}\ K^{-4}},$$
$$R_{\mathrm{g}} \approx 8.314\ \mathrm{J\ K^{-1}\ mol^{-1}} = 8.314 \times 10^{7}\ \mathrm{erg\ K^{-1}\ mol^{-1}},$$
$$N_{\mathrm{A}} \approx 6.022 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}},\quad 1/N_{\mathrm{A}} \approx 1.660 \times 10^{-24}\ \mathrm{g} = m_{\mathrm{u}},$$
$$m_{\mathrm{H}} \approx 1.0078\ \mathrm{m_u},$$
$$1\ \mathrm{atm} = 101.325\ \mathrm{kPa} = 1.01325\ \mathrm{bar},$$
$$1\ \mathrm{Pa} = 10\ \mathrm{dyne\ cm^{-2}},$$
$$1\ \mathrm{dyn} = 10^{-5}\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{g\ cm/s^2},$$
$$G \approx 6.674 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}} = 6.674 \times 10^{-8}\ \mathrm{cm^3\ g^{-1}\ s^{-2}},$$
$$1\ \mathrm{au} = 149\ 597\ 870.7\ \mathrm{km} \approx 149.6 \times 10^{6}\ \mathrm{km},$$
$$1\ \mathrm{pc} \approx 206264.806\ \mathrm{au} = 3.086 \times 10^{16}\ \mathrm{m} = 3.086 \times 10^{18}\ \mathrm{cm} = 3.262\ \mathrm{ly},$$
$$1\ \text{Å} = 10^{-10}\ \mathrm{m} = 10^{-8}\ \mathrm{cm},$$

$$e \approx 2.718281828459045,$$
$$\pi \approx 3.141592653589793,$$
$$360^\circ = 2\pi\ \mathrm{rad},$$
$$(129600/\pi)^{\square} = 4\pi\ \mathrm{sr},\quad 1^{\square} \equiv 1^{(\circ)^2}.$$