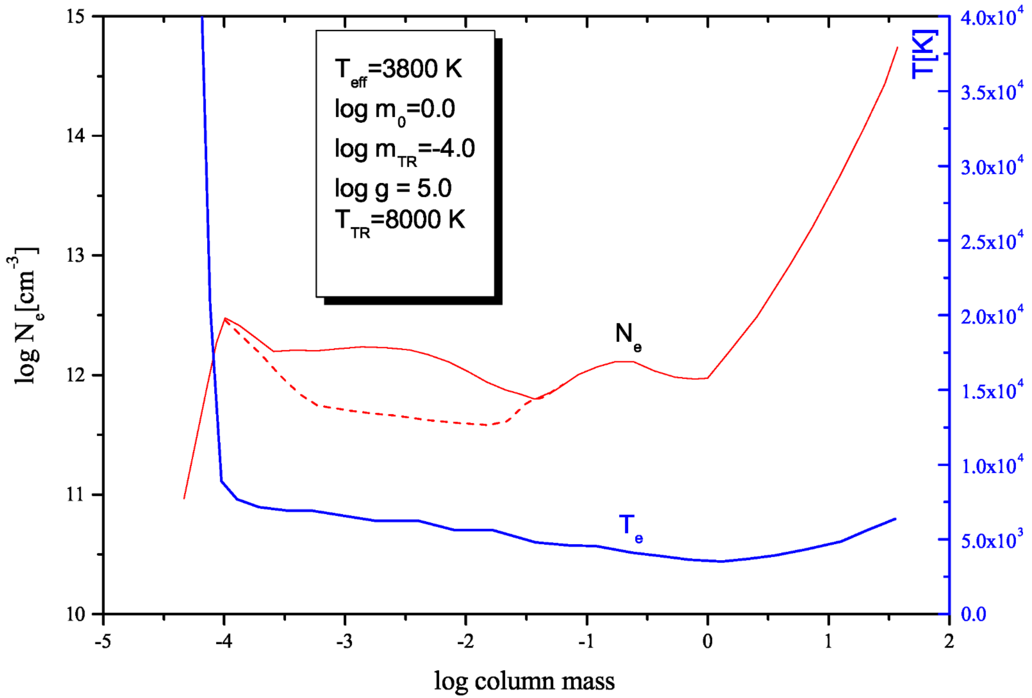


Teorija Zvezdanih Spektara
Lekcija 7: Ne-Siva Atmosfera u Ravnoteži Zračenja

Ivan Milić (AOB / MATF)

08/11/2022

Šta nam je ideja?

- Znamo / zadajemo ukupnu energiju koju zvezda proizvodi / izrači , tj. ukupni **fluks.**
- Znamo / zadajemo i njenu površinsku gravitaciju / hemijski sastav
- **Tražimo strukturu (stratifikaciju) atmosfere (T(z)) koja zadovoljava neke** pretpostavke.
- Za nas su to:

Jednačina Prenosa

$$\mu \frac{dI_\lambda}{dz} = -\chi_\lambda I_\lambda + j_\lambda$$

Ravnoteža Zračenja

$$\int_0^\infty \chi_\lambda S_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \chi_\lambda J_\lambda d\lambda$$

LTR

$$S_\lambda = B_\lambda$$

Specifičan oblik neprozračnosti

$$\chi_\lambda = f(T, p; \lambda)$$

Hajde da prodiskutujemo ove pretpostavke

- Šta od ovih pretpostavki može da se “slomi” i kako?
- Da li smo pokrili sve od ovih pretpostavki / uslova na našim časovima do sada?
- **3-4 minuta samostalan rad i diskusija**

Jednačina Prenosa

$$\mu \frac{dI_\lambda}{dz} = -\chi_\lambda I_\lambda + j_\lambda$$

Ravnoteža Zračenja

$$\int_0^\infty \chi_\lambda S_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \chi_\lambda J_\lambda d\lambda$$

LTR

$$S_\lambda = B_\lambda$$

Specifičan oblik neprozračnosti

$$\chi_\lambda = f(T, p; \lambda)$$

Jednačina prenosa zračenja – uvodni časovi

- **Uvek važi.** Jednačina prenosa zračenja je Bolcmanova jednačina za fotone i ona prosto opisuje kako se intenzitet menja.

- (U specijalnim slučajevima, može da ima drugačiji oblik)

$$\boxed{\mu \frac{dI_\lambda}{dz} = -\chi_\lambda I_\lambda + j_\lambda}$$

$$\int_0^\infty \chi_\lambda S_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \chi_\lambda J_\lambda d\lambda$$

$$S_\lambda = B_\lambda$$

$$\chi_\lambda = f(T, p; \lambda)$$

Ravnoteža zračenja – prošli čas

- Ravnoteža zračenja **ne mora da važi.** Mi smo pretpostavili da se energija prenosi samo zračenjem jer tako ne moramo da uvodimo druge fizičke procese.

- Konvekcija, talasi, u nekim zvezdama i konduktivni prenos… Moderni 3D modeli zvezdanih atmosfera sadrže sve ove druge procese i **ne moraju** da se oslanjaju na RZ.

$$\mu \frac{dI_\lambda}{dz} = -\chi_\lambda I_\lambda + j_\lambda$$

$$\boxed{\int_0^\infty \chi_\lambda S_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \chi_\lambda J_\lambda d\lambda}$$

$$S_\lambda = B_\lambda$$

$$\chi_\lambda = f(T, p; \lambda)$$

Obratiti pažnju!

- Promaklo je i meni, ali:

- U sivoj atmosferi:

$$S = J$$

- U ne-sivoj atmosferi:

$$\int_0^\infty \chi_\lambda J_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \chi_\lambda S_\lambda d\lambda$$

Odakle ovo?

Pod po kojim pretpostavkama smo izveli ovaj izraz za ravnotežu zračenja?

(Tabla?)

LTR – uvodni časovi

- **Lokalna Termodinamička Ravnoteža** pretpostavlja da **funkcija izvora u nekoj tački ima zavisnost samo od temperature i talasne dužine.**

- Ipak, funkcija izvora zavisi, samim tim od dubine (jer T zavisi od dubine), pa je intenzitet rešenje JPZ. **LTR ne mora da važi!**

$$\mu \frac{dI_\lambda}{dz} = -\chi_\lambda I_\lambda + j_\lambda$$

$$\int_0^\infty \chi_\lambda S_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \chi_\lambda J_\lambda d\lambda$$

$$\boxed{S_\lambda = B_\lambda}$$

$$\chi_\lambda = f(T, p; \lambda)$$

Neprozračnost – 4. čas

- Uvek mora da postoji **neka zavisnost.**
- Ista zavisi od toga koje procese uzimamo u obzir pri računanju neprozračnosti.
- Standardni krivci: Neutralni H, H-, Rejlijevo i Tomsonovo rasejanje, b-f i f-f na ostalim česticama...

$$\mu \frac{dI_\lambda}{dz} = -\chi_\lambda I_\lambda + j_\lambda$$

$$\int_0^\infty \chi_\lambda S_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \chi_\lambda J_\lambda d\lambda$$

$$S_\lambda = B_\lambda$$

$$\boxed{\chi_\lambda = f(T, p; \lambda)}$$

Siva Atmosfera

- Pretpostavljamo da se strukura atmosfere i prenos energije mogu opisati **jednom istom srednjom neprozračnošću.**
- **Sasvim je ok odabrati jednu referentnu talasnu dužinu da predjemo iz visine u optičku dubinu**
- Ali nema garancije da će ta ista optička dubina zaista odgovarati svim momentima jednačine prenosa zračenja.
- Zato je siva atmosfera **aproksimacija!**
- Ona opisuje kompletan prenos energije pa je: $S = B = \sigma T^4$

Analitički modeli Sivih Atmosfera

Švarcšild-Šusterovo rešenje

$$\boxed{S(\tau) = F(\tau + \frac{1}{2})}$$

LTR

$$\boxed{T^4(\tau) = T_{ef}^4(\tau + 1/2)}$$

E-B relacija

Limb darkening

$$\boxed{\frac{I(0,\mu)}{I(0,1)} = \frac{2}{3}(\mu + \frac{1}{2})}$$

$$I^{SS}(0,0) = 0.33\, I(0,1)$$

Eddington-ovo rešenje

$$\boxed{S(\tau) = \frac{3}{4}F(\tau + \frac{2}{3})}$$

LTR

$$\boxed{T^4(\tau) = \frac{3}{4}T_{ef}^4(\tau + \frac{2}{3})}$$

$$T = T_{ef} \text{ na } \tau = 2/3$$

E-B relacija

Limb darkening

$$\boxed{\frac{I(0,\mu)}{I(0,1)} = \frac{3}{5}(\mu + \frac{2}{3})}$$

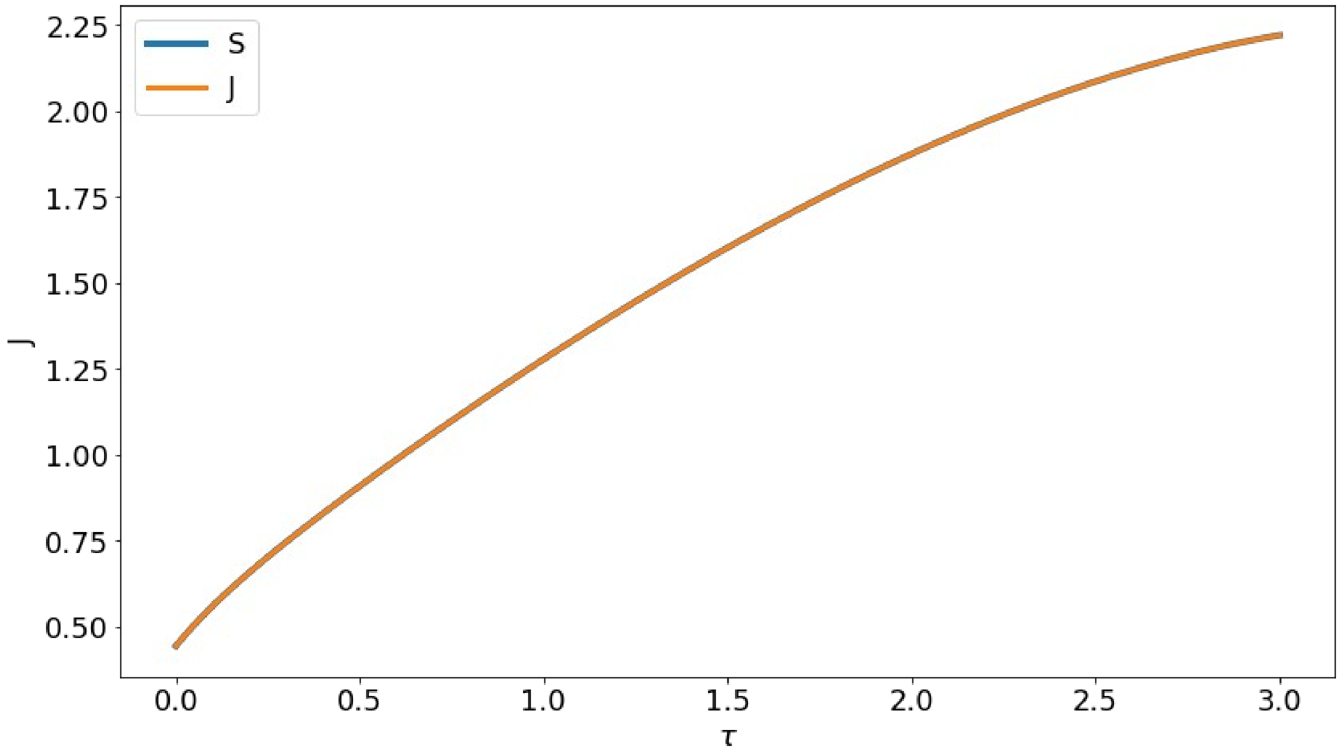
$$I^{Ed}(0,0) = 0.40\, I(0,1)$$

Numeričko rešenje sive atmosfere u RZ

- Dobijeno iterativnim rešavanjem:

$$J(\tau) = \Lambda_\tau[S] = \int_0^\infty S(t)E_1(|\tau - t|)dt$$

$$S(\tau) = J(\tau)$$

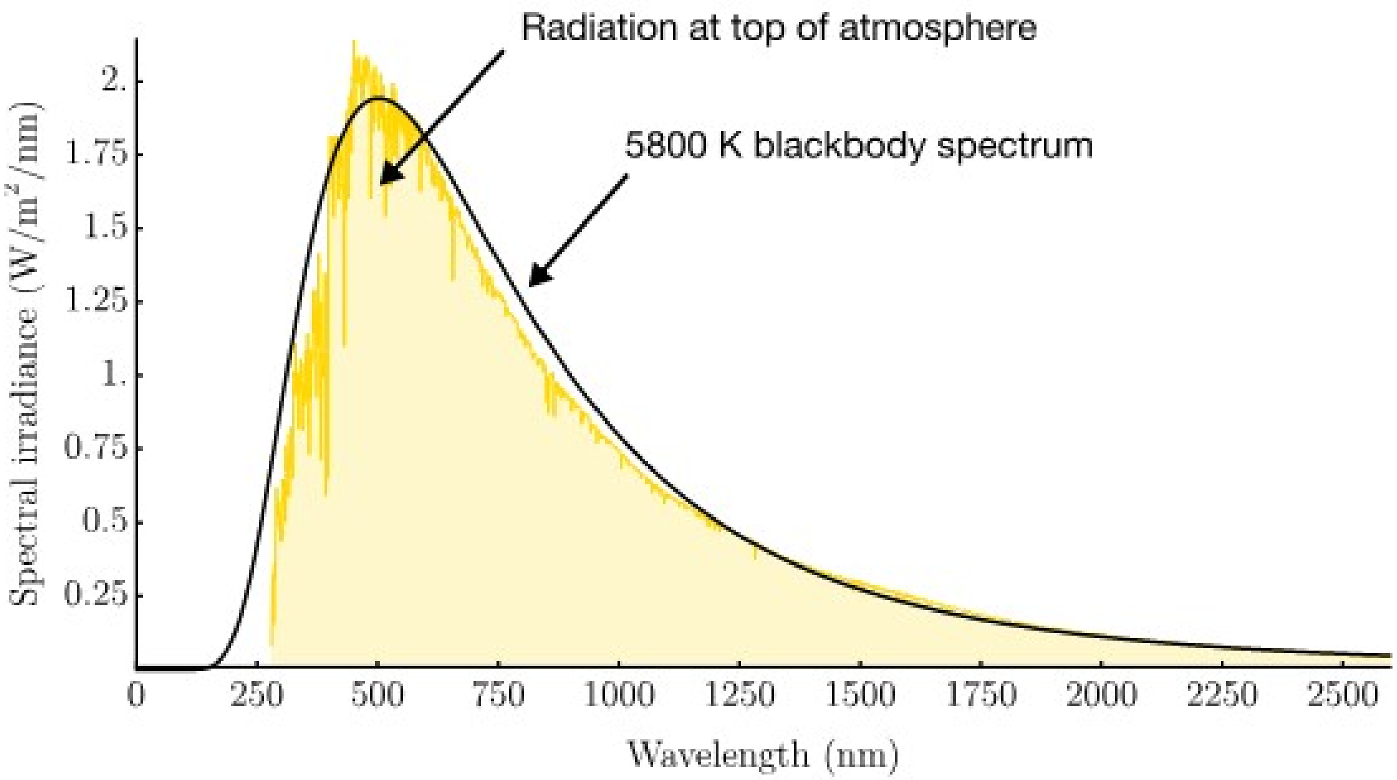


Kviz pitanje:

- Kakav je izlazni spektar sive atmosfere?

Kviz pitanje:

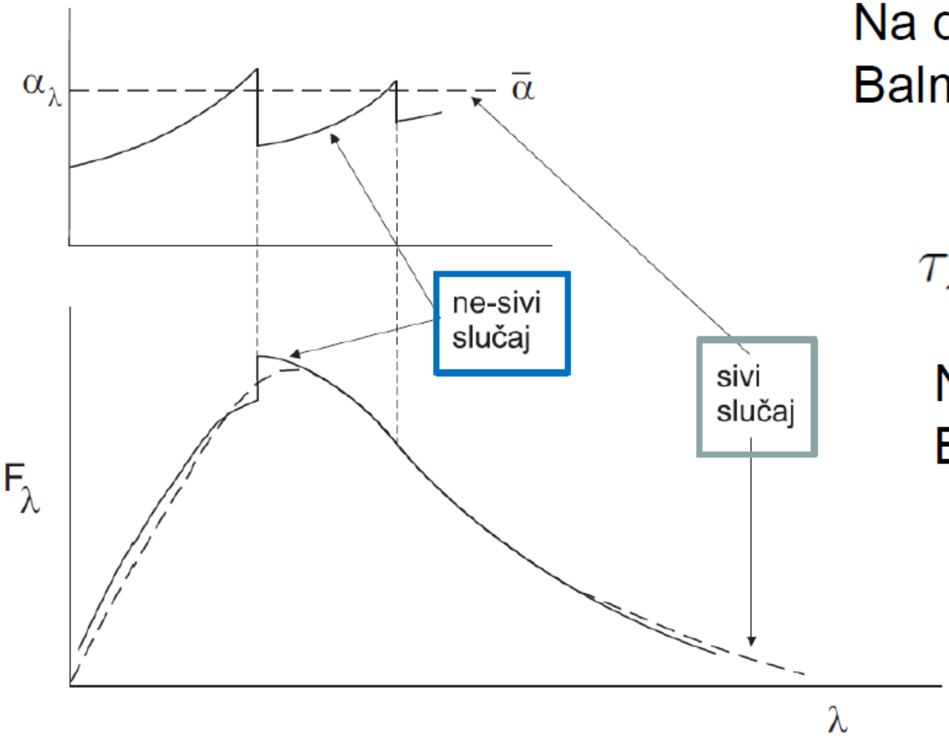
- Kakav je izlazni spektar sive atmosfere? **Spektar apsolutno crnog tela na $T = T_{eff}$**



Šta možemo bolje / dalje?

- Pretpostavimo da Eddingtonova aproksimacija važi: F = S (tau = 2/3)

Ako koeficijent apsorpcije zavisi od λ, optička dubina $\tau_\lambda = 2/3$ odgovaraće različitim geometrijskim dubinama.



Na dugotalasnoj strani Balmerovog diskontinuiteta

$$\chi_\lambda^+ < \chi \Rightarrow h^+ > h$$

$$\tau_\lambda = \tau = 2/3 \qquad \boxed{T(h^+) > T(h)}$$

Na kratkotalasnoj strani Balmerovog diskontinuiteta

$$\chi_\lambda^- > \chi \Rightarrow h^- < h$$

$$\boxed{T(h^-) < T(h)}$$

Šta možemo bolje / dalje?

- Očigledno, da **relaksiramo pretpostavku sive atmosfere.**
- Drugo pitanje koje se prirodno nameće je: **Kakva je raspodela temperature po visini?**

Atmosfera u hidrostatičkoj ravnoteži

- **Vratimo se na sivu atmosferu.** (Ubedićemo se da ovo važi i za ne-sivu atmosferu).
- **Nemamo** način da prizovemo skalu visina pošto smo sve izračunali u skali optičke dubine.
- Treba nam jedna dodatna pretpostavka – hidrostatička ravnoteža.

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g; \ \Big| \times \frac{-1}{\chi}$$

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{\rho}{\chi} g = \frac{g}{\kappa}$$

$$\chi = \chi(p, T)$$

$$T(z) = ?; p(z) = ?$$

Računanje atmosferske strukture.

- Za ovaj proces su nam potrebni: $T(\tau), p_0 = p(\tau = 0), g$

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{\rho}{\chi} g$$

Računanje doprinosa svih relevantnih procesa

$$\rho_0 = f(T_0, p_0)$$

$$\chi_0 = f(T_0, p_0)$$

Kada znamo ova dva, možemo dalje da integralimo na dole itd..

$$p_1 = p_0 + \frac{dp}{d\tau}(\tau_1 - \tau_2) \rightarrow p_1, \rho_1$$

Numerička integracija (može da bude i komplikovanija, ako želimo da preciznije izračunamo izvod)

Mapiranje optičke dubine na *z* osu

- Sad znamo pritisak svuda po dubini, a usput smo odredili i neprozračnost u svakoj tački.
- Možemo da izračunamo z (numerički) kao:

$$\tau_i - \tau_{i-1} = (z_{i-1} - z_i)\frac{\chi_i + \chi_{i-1}}{2}$$

- Krenemo od bilo koje granice (npr z=0 za i = imax) i računamo u suprotnom pravcu.
- Opet, možemo koristiti i neku komplikovaniju šemu za integraciju / diferenciranje
- Ovo važi za bilo koju talasnu dužinu na kojoj znamo raspodelu temperature $T(\tau_\lambda)$

Kako izračunati taj "srednji" koeficijent neprozračnosti?

$$\frac{dH_\nu}{\kappa_\nu \rho dh} = J_\nu - S_\nu \qquad \frac{dH}{\kappa \rho dh} = 0$$

$$\frac{dK_\nu}{\kappa_\nu \rho dh} = H_\nu \qquad \frac{dK}{\kappa \rho dh} = H \quad .$$

Imajte u vidu notaciju na ovom slajdu! Pojavljuju se maseni koeficijent apsorpcije i frekvencija

- Srednji $\bar{\kappa}$ po fluksu ili **Čandrasekarov** srednji koeficijent

$$\frac{d\int K_\nu d\nu}{\rho dh} = \int \kappa_\nu H_\nu d\nu = \frac{dK}{\rho dh} = \bar{\kappa} H \qquad \boxed{\bar{\kappa} = \frac{\int_0^\infty \kappa_\nu H_\nu d\nu}{H}}$$

$$\frac{dp_{\mathrm{zr}}}{\rho dh} = \frac{4\pi}{c}\frac{dK}{\rho dh} = \frac{4\pi}{c}\int_0^\infty \kappa_\nu H_\nu d\nu \qquad \frac{dp_{\mathrm{zr}}}{d\bar{\tau}} = \frac{4\pi}{c} H = \frac{\pi F}{c} = \frac{\mathcal{F}}{c} = \frac{\sigma T_{\mathrm{ef}}^4}{c}$$

- **Plankov** srednji koeficijent

$$\boxed{\bar{\kappa}_P = \frac{\int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu(T) d\nu}{B(T)}}$$

- **Roselandov** srednji koeficijent

$$\frac{1}{\rho}\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{dK_\nu}{dh} d\nu = \int_0^\infty H_\nu d\nu = H = \frac{1}{\rho}\frac{1}{\bar{\kappa}_R}\frac{dK}{dh}$$

$$\boxed{\frac{1}{\bar{\kappa}_R} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{dK_\nu}{dh} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dK_\nu}{dh} d\nu}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\bar{\kappa}_R} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}}$$

Ne-siva atmosfera

- Ako želimo da dozvolimo da koeficijent apsorpcije zavisi od talasne dužine situacija se komplikuje.
- Glavni problem je što moramo da izračunamo konkretne vrednosti neprozračnosti, da bismo rešili JPZ.
- Model mora da zadovolji:

$$\mu \frac{dI_\lambda}{dz} = -\chi_\lambda I_\lambda + j\lambda$$

$$\int_0^\infty \int_{-1}^1 I_\lambda(\mu)\mu d\mu d\lambda = \sigma T_{\text{eff}}^4 = \text{const}$$

$$\int_0^\infty B_\lambda d\lambda = \int_0^\infty J_\lambda d\lambda$$

Procedura temperaturske korekcije

- Krenemo od neke nulte aproksimacije (npr siva atmosfera)

$$\int_0^\infty \chi_\lambda B_\lambda(T_0) d\lambda \neq \int_0^\infty \chi_\lambda J_\lambda d\lambda$$

$$\int_0^\infty \chi_\lambda B_\lambda(T_0 + \Delta T) d\lambda = \int_0^\infty \chi_\lambda J_\lambda d\lambda$$

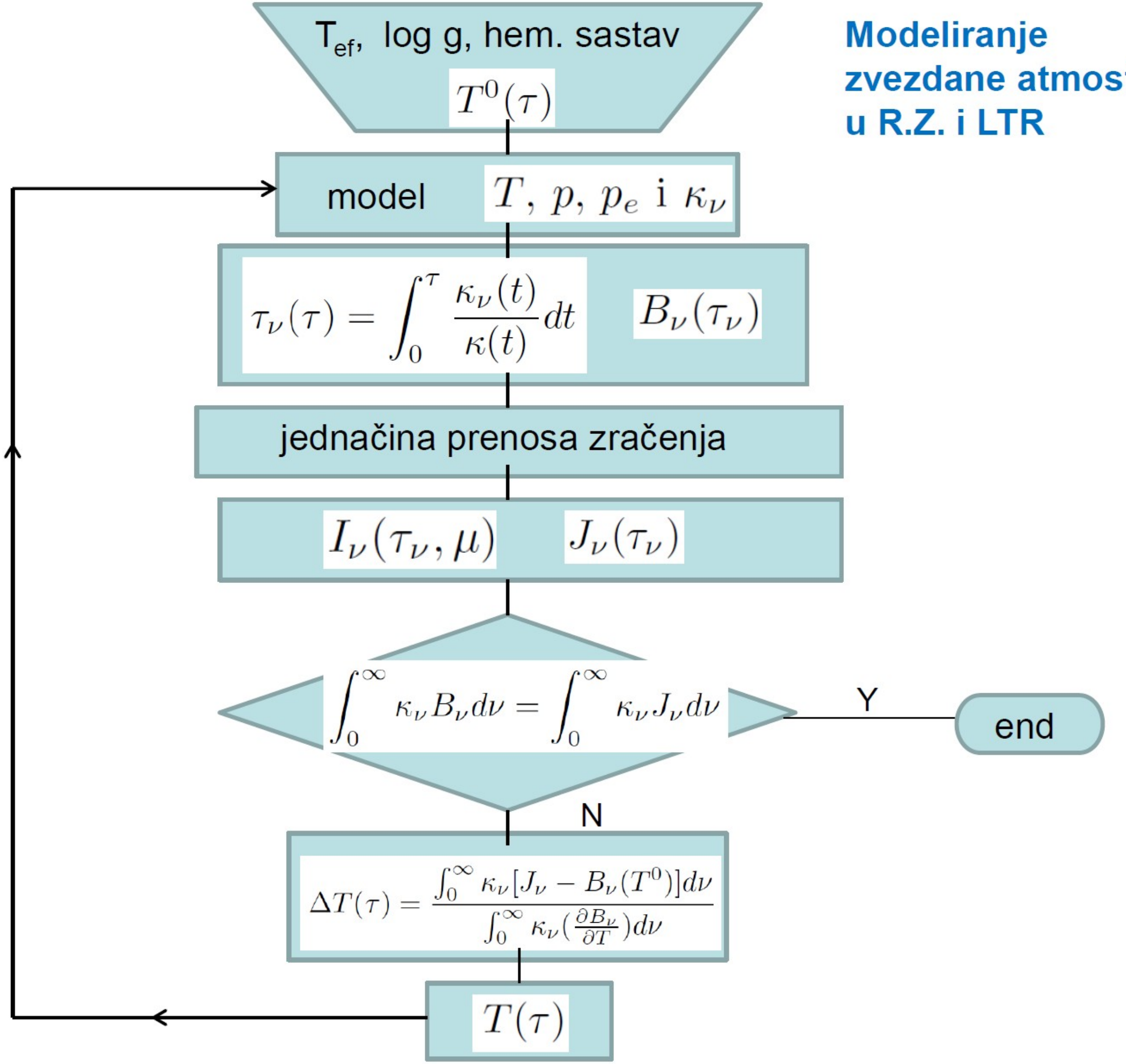
$$B_\lambda(T_0 + \Delta T) = B_\lambda(T_0) + \left(\frac{dB_\lambda}{dT}\right)_{T_0} \Delta T$$

$$\int_0^\infty \chi_\lambda B_\lambda(T_0) d\lambda + \Delta T \int_0^\infty B'_\lambda \chi_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \chi_\lambda J_\lambda d\lambda$$

$$\boxed{\Delta T(\tau) = \frac{\int_0^\infty \chi_\lambda [J_\lambda - B_\lambda] d\lambda}{\int_0^\infty \chi_\lambda \frac{dB_\lambda}{dT} d\lambda}}$$

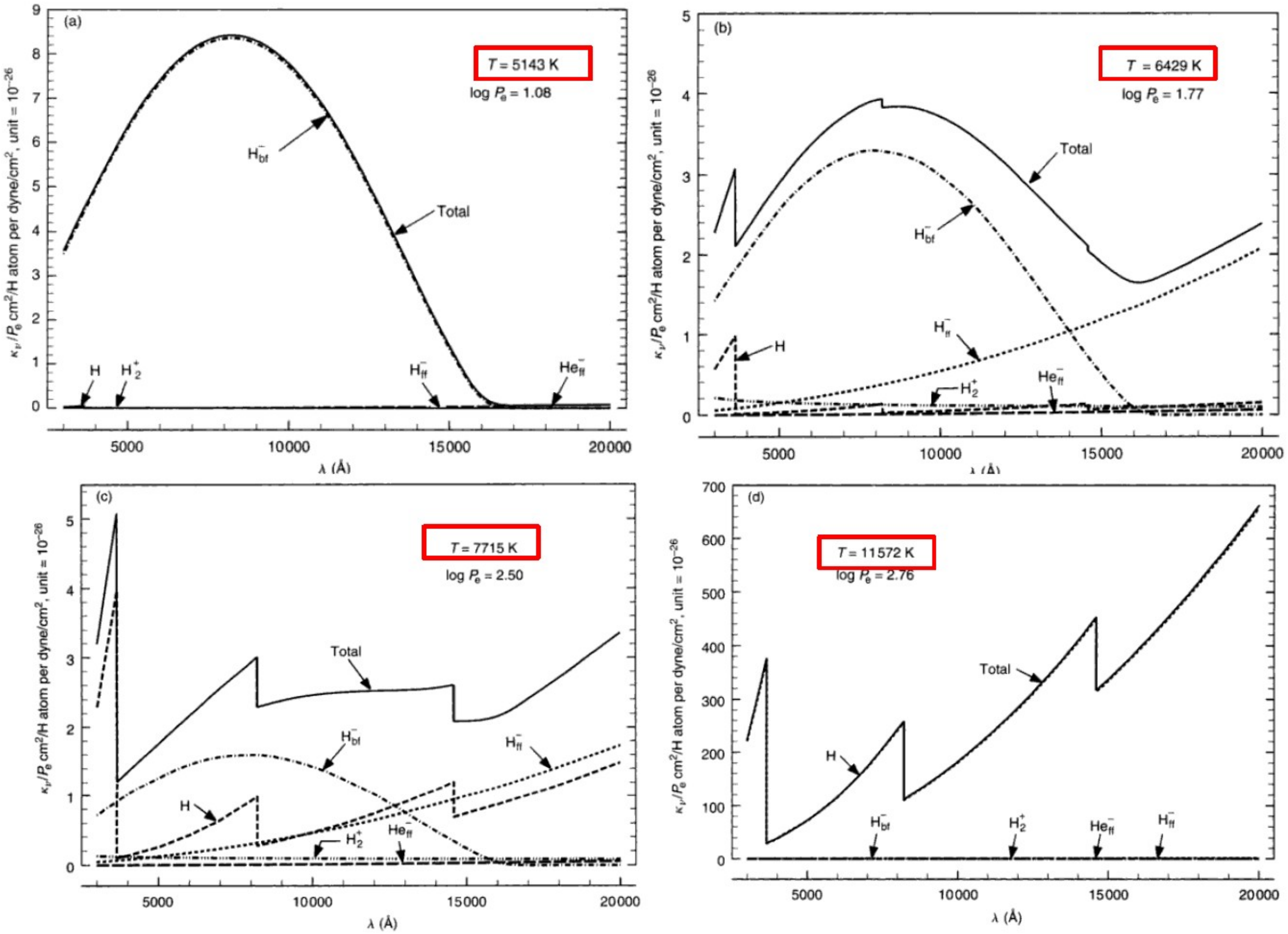
Konačna šema

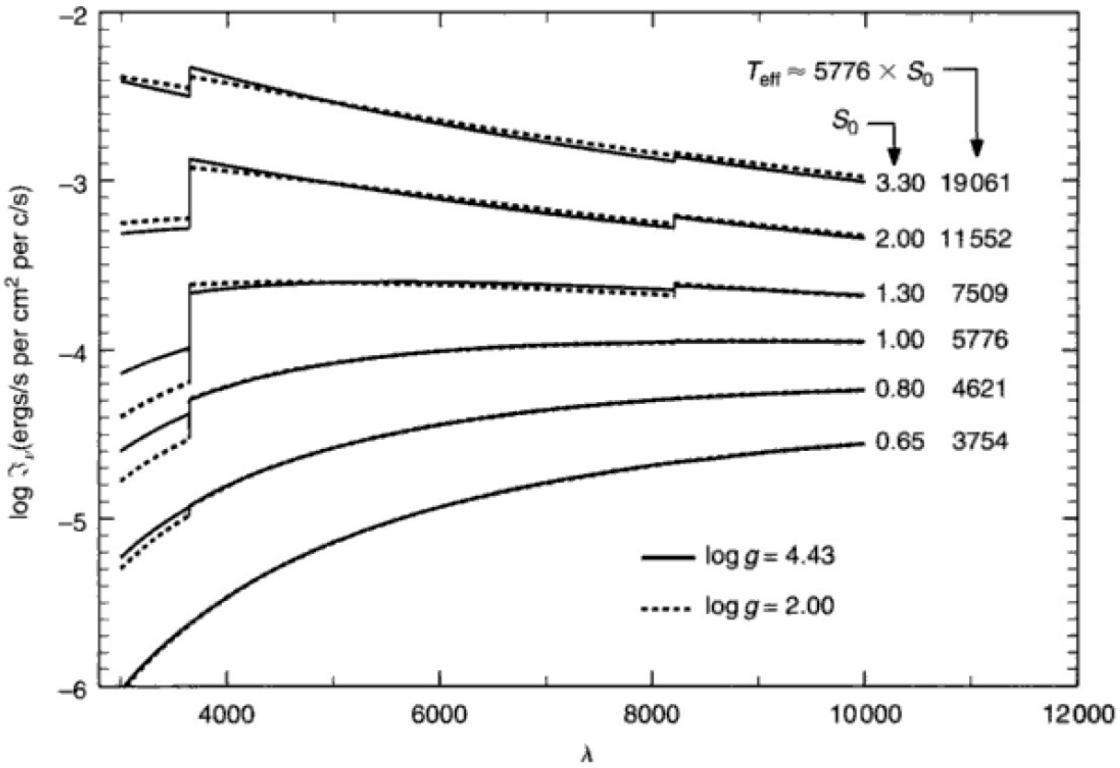
- Ovako možemo da dobijemo konzistentnu strukturu zvezdane atmosfere u LTR koja zadovoljava ravnotežu zračenja.



Dijagnostika ne-sivih atmosfera

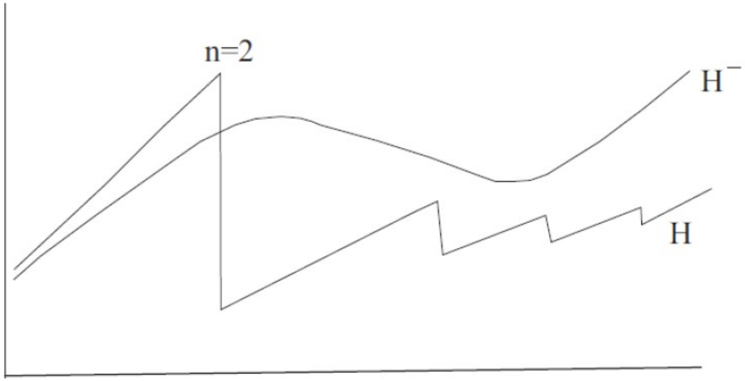
- Zavisnost koeficijenta apsorpcije od talasne dužine ostavlja potpis u spektru

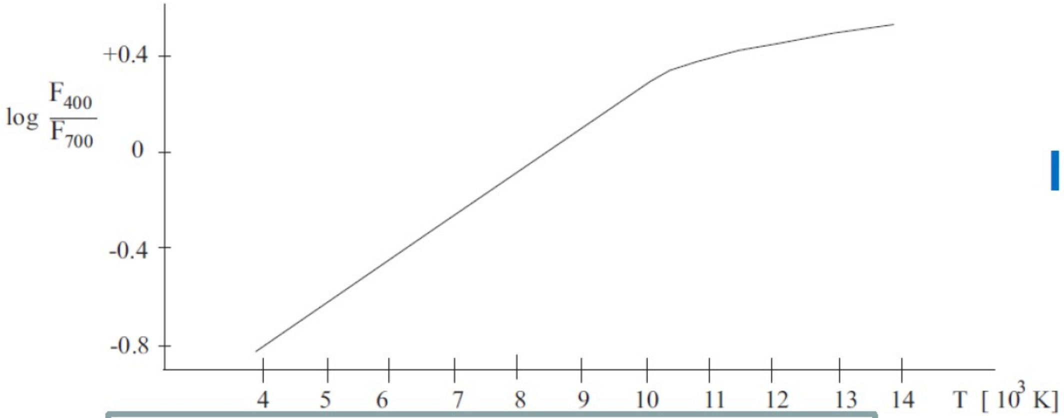




Zavisnost nagiba Pašenovog kontinuuma i veličine Balmerovog skoka od T (spektralne klase) i log g (klase luminoznosti)

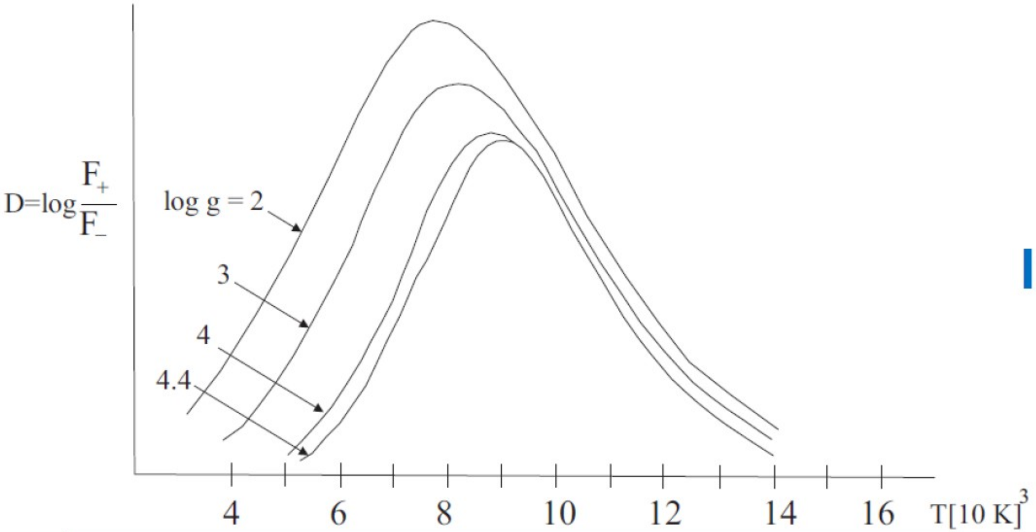
Uticaj log g na veličinu Balmerovog skoka





Sl. 22. Nagib Pašenovog kontinuuma u funkciji temperature

Indikator T



Sl. 23. Balmerov skok u funkciji temperature i površinske gravitacije

Indikator T i p

Ako ostane vremena...

- Nazad na numeričku vežbu od petka!