

PRENOS ZRAČENJA (FORMIRANJE SPEKTARA) U ZVEZDANIM ATMOSFERAMA

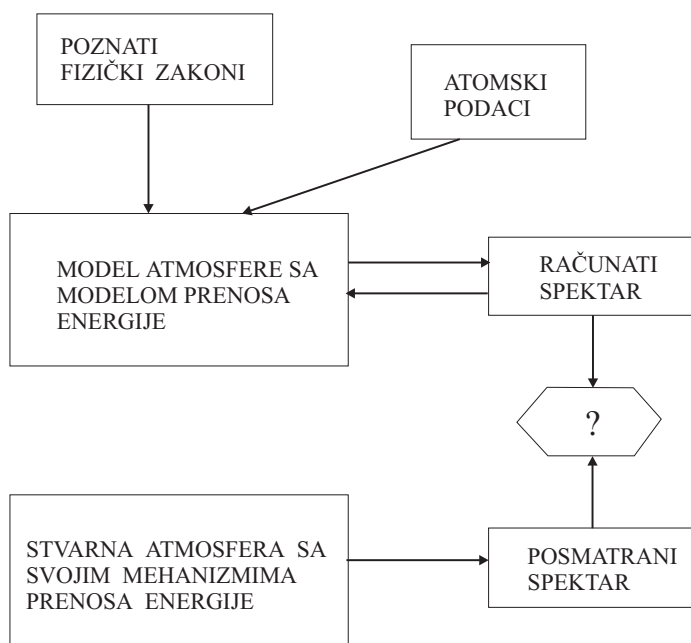
Spektar zračenja kao izvor informacija

Energija koju zvezde emituju stvara se duboko u njihovoj unutrašnjosti u termonuklearnim reakcijama. Na temperaturama višim od 10^7 K lakša jezgra fuzionišu u teža pri čemu se oslobadja energija u vidu visoko energetskog gama-zračenja i neutrina. Dok neutrimi skoro bez interakcija napuštaju zvezdu, fotonima su, zbog čestih interakcija sa česticama zvezdane plazme i malih srednjih slobodnih putanja, potrebni milioni godina da prokrče sebi put ka površini. U dubokoj i vreloj unutrašnjosti zvezde koja je gornjim slojevima termički izolovana od hladne međuzvezdane sredine, zračenje ima skoro **ravnotežnu** (Plankovu) raspodelu po frekvencijama. Spektralna raspodela zračenja se sa udaljavanjem od centra zvezde, iz sloja u sloj, menja u skladu sa promenom fizičkih uslova (pre svega temperature). Zračenje se kroz apsorpcije i reemisije prenosi do površine (fotosfere) odakle se emituje u međuzvezdani prostor. Kroz interakcije sa česticama atmosferskog gasa (atomima, jonima i elektronima) zračenje konačno dobija **posmatranu** raspodelu (posmatrani spektar). Posmatrana spektralna raspodela zračenja je određena fizičkim uslovima koji vladaju u atmosferi i sadrži informaciju o njima. Spektar zvezde je ne-Plankovski kontinuum ispresecan tamnim apsorpcionim linijama.

Zračenje se menja u skladu sa svojstvima materije kroz koju prolazi, ali i utiče na njena svojstva. Tako je spektar izlaznog zračenja rezultat interakcija zračenja i materije u zvezdanoj atmosferi uz istovremeno učešće drugih fizičkih fenomena (magnetno polje, rotacija, turbulencija). Spektar je odraz hemijskih i fizičkih osobina atmosfere i sadrži obilje informacija o njenim termodinamičkim i strukturnim osobinama. Ove informacije smo naučili da dešifrujemo zahvaljujući rezultatima laboratorijskih istraživanja izvršenih pod poznatim uslovima (o nekim kvalitativnim i direktnim metodama na kraju (prilog)). Manje direktni metodi koji obuhvataju modeliranje su glavno orudje u dobijanju astrofizičke informacije. Upravo je cilj teorije zvezdanih atmosfera da razvije metode kojima se iz posmatranog spektra

može dobiti tražena informacija.

U rešavanju ovog zadatka se najčešće koristi tzv. sintetički pristup. Korišćenjem poznatih fizičkih zakona postulira se model atmosfere i model prenosa energije u njoj. Rezultat je računata raspodela energije izlaznog zračenja po frekvencijama - računati spektar. Računati spektar se poredi sa posmatranim¹ koji daje realna atmosfera zvezde sa svojim mehanizmima prenosa energije. Pretpostavljeni atmosferski model i teorija prenosa se modifikuju i proračun se ponavlja do slaganja sa posmatranjem. Model koji daje najbolje slaganje sa posmatranjem se onda uzima kao tačna reprezentacija površinskih slojeva zvezde.



Pod redukovanim problemom podrazumeva se prenos energije u zadatom atmosferskom modelu - date stratifikacije temperature i pritiska. Rešavanje ovog problema je neophodan korak u rešavanju opšteg problema konstrukcije modela zvezdanih atmosfera.

¹ Obično se poredе indikatori neke fizičke veličine (temperature ili pritiska) u spektru (npr. određene spektralne linije, nagib kontinuuma, skok u raspodeli neprekidnog spektra (Balmerov, Pašenov))

Šta je "zvezdana atmosfera"?

Geometrijski, zvezdanu atmosferu možemo definisati kao prelaznu oblast izmedju zvezdane unutrašnjosti i medjuzvezdane sredine. Na zvezdi ne postoji granica izmedju unutrašnjosti i atmosfere, jer je zvezdana materija svuda u stanju plazme i isti fizički principi važe u obe ove oblasti. Granicu postavljamo mi nazivajući atmosferom one spoljne slojeve iz kojih nam stiže zračenje, odnosno one slojeve u kojima se formira posmatrani spektar.¹

Skoro svo vidljivo zračenje zvezde potiče iz najdubljeg i najgušćeg sloja atmosfere - fotosfere. Sjaj fotosfere određuje sjaj zvezde pa otuda i potiče naziv - "fotosfera" - "sfera svetlosti". U fotosferi se formira najveći deo spektra vidljivog zračenja – posmatrani neprekidni spektar (kontinuum), kao i većina apsorpcionih linija (slabe linije i krila jakih linija). Za većinu zvezda fotosfera je relativno tanka. Debljina Sunčeve fotosfere iznosi nekoliko stotina kilometara. Debljina fotosfere zvezde obrnuto je proporcionalna ubrzanju sile teže na njenoj površini. Tako se zvezde džinovi i superdžinovi odlikuju veoma proširenim atmosferama. Zvezde poznih spektralnih klasa sa potfotosferskim konvektivnim zonama, iznad fotosfere imaju razredjene i vrele hromosfere i korone koje karakteriše emisioni (linijski) spektar. Doprinos ovih oblasti kontinuumu u vidljivom delu spektra je zanemarljiv. Ispod fotosfere je nedostupna posmatranju unutrašnjost zvezda.

Već su prva istraživanja pokazala da se energija kroz fotosferu prenosi prvenstveno **zračenjem**. Prenos energije provodjenjem (kondukcijom) ne igra bitnu ulogu.² Konvekcija kao mehanizam prenosa energije može biti od značaja u dubljim slojevima fotosfera zvezda koje imaju potfotosferske konvektivne zone.

Kako modeliramo atmosfere?

Izgled spektra jedne zvezde zavisi od fizičkih uslova koji vladaju u njenoj atmosferi. Sa druge strane, fizička svojstva atmosfere su određena istovremenim delovanjem raznih medjusobno povezanih fizičkih procesa.

Pri modeliranju zvezdanih atmosfera zahteva se da osnovni fizički zakoni - zakoni održanja (mase, impulsa, energije) budu ispunjeni. Ovi zakoni, kao i fizički procesi (fenomeni) koje treba uzeti u obzir, izražavaju se u obliku jednačina čijim se rešavanjem dobijaju fizički uslovi u modelu. Međutim,

¹ Osim toga, unutrašnjost i atmosfera zvezde se razmatraju odvojeno, jer aproksimacije koje važe u jednoj oblasti ne moraju važiti i u drugoj.

² Kondukcija je značajna samo za unutrašnjost belih patuljaka i vrele korone.

rešavanje jednačina koje opisuju sve relevantne i međusobno povezane fizičke procese medju različitim česticama (atomima, jonima, elektronima, molekulima i fotonima) je ekstremno komplikovan problem. Pošto je problem u opštem obliku teško rešiti pribegava se raznim aproksimacijama kojima dolazimo do jednostavnijih modela za opisivanje realnih uslova u atmosferama.

Geometrija: Najčešće se pretpostavlja da je atmosfera izdeljena na *homogene, plan-paralelne ili sferno-simetrične slojeve*.

Plan-paralelnu geometriju možemo koristiti ako je "debljina" atmosfere mnogo manja od radijusa zvezde. Medjutim, u slučaju proširenih atmosfera (npr. džinova i superdžinova) neophodno je koristiti sferno simetričnu geometriju.

Pretpostavka homogenosti je grublja aproksimacija. Homogenost znači jedno - dimenzionalnost (parametri stanja sredine zavise samo od jedne koordinate - radijalnog rastojanja: $\rho(r)$, $p(r)$, $T(r)$). Posmatranja Sunca jasno ukazuju na to da su horizontalni slojevi nehomogeni. Mnoge nehomogenosti potiču od hidrodinamičkih fenomena u konvektivnoj zoni. Tako se samo za zvezde bez jakih konvektivnih zona (zvezde ranih spektralnih klasa) može smatrati da imaju homogene atmosfere.

Stacionarnost: Zanimarujemo vremenski zavisne fenomene: pulsacije, širenje omotača, vremenski promenljiva magnetna polja. Pretpostavljamo da su funkcije raspodele čestica gasa i zračenja (fotonskog gasa) nezavisne od vremena.

Statičnost: Zanimarujemo sva brzinska polja, kretanja malih razmera (talasi, granulacija) i velikih razmera (supergranulacija, diferencijalna rotacija, makroturbulencija). Pretpostavljamo da je atmosfera u *hidrostatičkoj* ravnoteži, tj. da pritisak gasa (i zračenja) uravnotežava gravitaciju.

Energetska (radijativna) ravnoteža: U atmosferama zvezda nema izvora energije. Kroz njih se energija samo prenosi ka spolja i to tako da je ukupna količina energije (na svim talasnim dužinama) koja se izrači jednaka ukupnoj količini energije koja udje kroz donju granicu fotosfere. Pretpostavlja se da se prenosi zračenjem i zanemaruju se ostali načini prenosa energije (kondukcija (provodjenje), konvekcija, talasi).

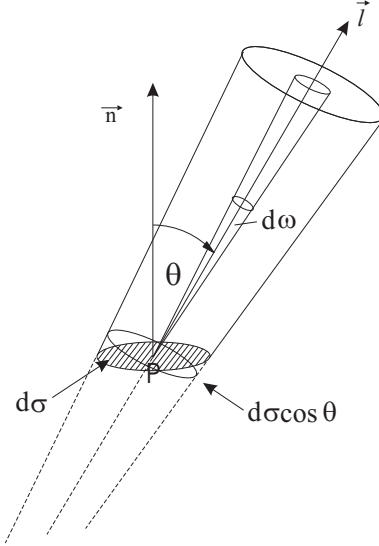
Pretpostavke (2), (3) i (4) su povezane jer ne razmatraju hidrodinamičke efekte. Medjutim, brzinska polja postoje kako na Suncu tako i na drugim zvezdama (npr. superdžinovi). Kompletna teorija zvezdanih atmosfera bi morala da uzme u obzir raznolikost hidrodinamičkih fenomena i odredi razmenu energije izmedju radijativnih i neradijativnih načina prenosa energije.

Polje zračenja

Definišimo najpre veličine koje karakterišu polje zračenja.

Specifični intenzitet zračenja $I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t)$

Veličina koja potpuno opisuje frekventnu, prostornu, ugaonu i vremen-sku raspodelu fotona je specifični intenzitet zračenja. Definišimo specifični intenzitet zračenja frekvencije ν u nekoj tački atmosfere $P(\vec{r})$ koje se prostire u pravcu \vec{l} u trenutku t . Uočimo u atmosferskom sloju elementarnu površinu $d\sigma$ koja sadrži tačku P. Neka je \vec{n} normala na tu površinu (slika 1), a \vec{l} pravac prostiranja zračenja koji sa normalom zaklapa ugao θ . Neka je \vec{l} osa konusa prostornog ugla $d\omega$. Ako kroz svaku tačku površine $d\sigma$ povučemo pravce paralelne konusu $d\omega$ dobićemo sličan konus $d\Omega$. Površinu njegovog preseka normalnu na pravac \vec{l} u tački P označimo sa $d\sigma \cos \theta$.



Sl.1. Specifični intenzitet zračenja

Količina energije zračenja dE_ν , na frekvencijama u intervalu $(\nu, \nu + d\nu)$, koja za vreme dt prodje kroz element površine $d\sigma$ unutar prostornog ugla $d\omega$ oko pravca \vec{l} koji sa normalom \vec{n} na površinu gradi ugao θ proporcionalna je $d\sigma \cos \theta d\nu d\omega dt$, tj.

$$dE_\nu = I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) d\sigma \cos \theta d\nu d\omega dt .$$

Koeficijent proporcionalnosti je specifični intenzitet zračenja frekven-cije ν , u tački \vec{r} , koje se prostire u pravcu \vec{l} u trenutku t . Definiše se kao

količina energije u jediničnom frekventnom intervalu koja prolazi kroz jediničnu površinu normalnu na pravac prostiranja, u jediničnom prostornom uglu, u jedinici vremena:

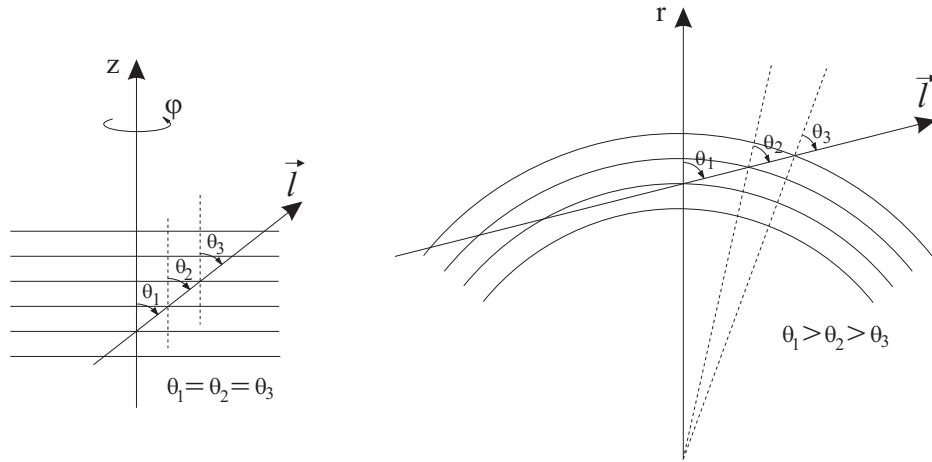
$$I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) = \frac{dE_\nu}{d\sigma \cos \theta d\nu d\omega dt} \quad \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ s Hz sr}} \right] .$$

Specifični intenzitet zračenja daje potpun opis raspodele fotona - sadrži kompletnu informaciju o frekventnoj, prostornoj, ugaonoj i vremenskoj zavisnosti polja zračenja.

Ovde ćemo razmatrati stacionarne - vremenski nezavisne probleme, pa ćemo imati:

$$I_\nu \neq I_\nu(t) \rightarrow I_\nu(\vec{r}, \vec{l}) .$$

Razmatraćemo, zatim, jedno-dimenzionalne probleme u plan-paralelnoj ili sfernoj geometriji, tj. smatraćemo da je atmosfera izdijeljena u niz **homogenih** plan-paralelnih ili sfernih slojeva (slika 2), tako da se svojstva sredine menjaju samo duž jedne koordinate. U plan-paralelnoj geometriji homogeni slojevi su ravni konstantnog z (sve veličine su nezavisne od x i y koordinate tj. svi izvodi po x i y su jednaki nuli). Pravac \vec{l} definišemo pomoću polarnog ugla θ i azimutalnog ugla φ .



Sl. 2. Plan-paralelna i sferna geometrija.

Jednodimenzionalnost znači nezavisnost svih veličina od φ (osna ili azimutalna simetrija).

U plan-paralelnoj atmosferi ćemo imati: $I_\nu(\vec{r}, \vec{l}) \rightarrow I_\nu(z, \theta)$ (z -osa je usmerena ka posmatraču), a u sferno simetričnoj: $I_\nu(\vec{r}, \vec{l}) \rightarrow I_\nu(r, \theta)$.

Nadalje ćemo koristiti samo plan-paralelnu geometriju.

Srednji intenzitet zračenja $J_\nu(z)$

Srednji intenzitet zračenja $J_\nu(z)$ u nekoj tački atmosfere $P(z)$ se definiše kao srednja vrednost specifičnog intenziteta $I_\nu(z, \theta)$ po svim prostornim uglovima, tj.

$$J_\nu(z) = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu(z, \theta) d\omega \quad .$$

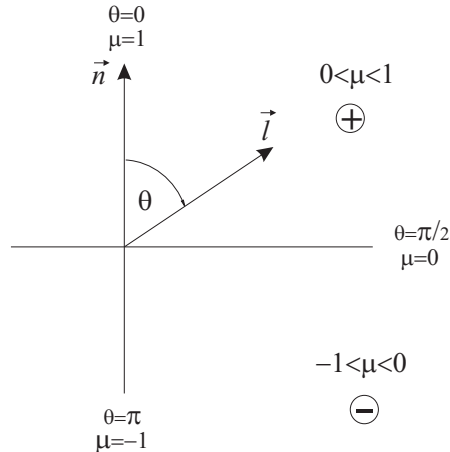
Zamenjujući izraz za prostorni ugao u sfernim koordinatama

$$d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

gde je $0 \leq \theta \leq \pi$ i $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ imamo:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi I_\nu(z, \theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi I_\nu(z, \theta) \sin \theta d\theta$$

Uobičajeno je da se promenljiva θ zameni sa $\mu = \cos \theta$:



Sl. 3. Izlazno I_ν^+ i ulazno I_ν^- zračenje.

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_0^\pi I_\nu(z, \theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(z, \mu) d\mu$$

Ako je polje zračenja izotropno:

$$J_\nu = I_\nu \quad .$$

Fluks zračenja $\mathcal{F}_\nu(z)$

Fluks zračenja predstavlja količinu energije zračenja u jediničnom intervalu frekvencija koja **u svim pravcima** prodje kroz (ili sa) jediničnu(e) površinu(e) u jedinici vremena, tj. rezultujući protok energije zračenja kroz jediničnu površinu.

Prethodno smo videli da je količina energije zračenja koja prodje kroz površinu $d\sigma$ pod uglom θ u odnosu na normalu unutar prostornog ugla $d\omega$ za vreme dt u intervalu frekvencija $\nu, \nu + d\nu$ jednaka

$$dE_\nu = I_\nu(z, \theta) d\sigma \cos \theta d\nu d\omega dt \quad .$$

Integracijom ovog izraza po svim pravcima dobijamo rezultujuću količinu energije zračenja dE_ν^* koja prolazi kroz površinu $d\sigma$:

$$dE_\nu^* = d\sigma d\nu dt \int I_\nu(z, \theta) \cos \theta d\omega \quad ,$$

tj, s obzirom da je za $\theta > \pi/2$, $\cos \theta < 0$, dE_ν^* predstavlja višak energije koja za vreme dt u intervalu $d\nu$ prodje kroz $d\sigma$ ka spolja u odnosu na energiju koja prodje ka unutra.

Ova veličina je, po definiciji, jednaka $\mathcal{F}_\nu d\sigma d\nu dt$ odakle imamo:

$$\mathcal{F}_\nu(z) = \frac{dE_\nu^*}{d\sigma d\nu dt} = \int_{4\pi} I_\nu(z, \theta) \cos \theta d\omega \quad .$$

da je fluks zračenja ¹ $\mathcal{F}_\nu(z)$ rezultujući protok energije kroz jediničnu površinu, u jedinici vremena i u jediničnom frekventnom intervalu.

¹ U opštem slučaju fluks je vektor (definisan u nekom pravcu) $\vec{\mathcal{F}}_\nu = \int I_\nu(\vec{r}, \vec{l}) \vec{l} d\omega$. U azimutalnoj simetriji samo je komponenta \mathcal{F}_z ovog vektora različita od nule.

$$\mathcal{F}_\nu(z) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi I_\nu(z, \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta = 2\pi \int_{-1}^1 I_\nu(z, \mu) \mu d\mu \quad .$$

Za izotropno zračenje ($I_\nu \neq I_\nu(\mu)$):

$$\mathcal{F}_\nu = 0$$

Fluks je mera anizotropnosti polja zračenja.

Momenti intenziteta zračenja

U teorijskoj astrofizici, često se koriste integrali specifičnog intenziteta zračenja po pravcima, tj. po uglovima.

Prema Eddingtonu, uobičajeno je da se koristi posebna notacija za moment nultog reda - **srednji intenzitet**

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(z, \mu) d\mu \quad ,$$

moment prvog reda - **Eddingtonov fluks**

$$H_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(z, \mu) \mu d\mu \quad ,$$

moment drugog reda - tzv. **K-integral**

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(z, \mu) \mu^2 d\mu \quad .$$

Uopšte, n-ti moment polja zračenja se može definisati kao:

$$M_\nu^{(n)}(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(z, \mu) \mu^n d\mu \quad .$$

Za izotropno zračenje: $J_\nu = I_\nu$, $H_\nu = 0$, $K_\nu = \frac{1}{3}J_\nu = \frac{1}{3}I_\nu$.

Gustina energije zračenja $\rho_\nu(z)$

Gustina energije zračenja je količina energije zračenja u jediničnom frekventnom intervalu sadržana u jedinici zapremine.

Količina energije koja za vreme dt prodje kroz element površine $d\sigma$ pod uglom θ u odnosu na normalu, unutar prostornog ugla $d\omega$ i u intervalu frekvencija $\nu, \nu + d\nu$ je:

$$dE_\nu = I_\nu(z, \theta) d\sigma \cos \theta d\omega d\nu dt \quad .$$

Očito da ta količina energije zauzima zapreminu $d\sigma \cos \theta c dt$ gde je c -brzina zračenja u vakuumu. Količina energije po jedinici zapremine je onda:

$$\frac{dE_\nu}{dV} = \frac{1}{c} I_\nu d\nu d\omega$$

što je, po definiciji, $\delta\rho_\nu d\nu$, pa sledi da je u ovom razmatranom slučaju $\delta\rho_\nu = \frac{1}{c} I_\nu d\omega$.

U opštem slučaju, međjutim, kada na datu zapreminu pada zračenje iz svih mogućih pravaca, gustina zračenja ρ_ν se dobija kao:

$$\rho_\nu(z) = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I_\nu(z, \theta) d\omega = \frac{4\pi}{c} J_\nu(z)$$

Za izotropno zračenje je $\rho_\nu = (4\pi/c) I_\nu$.

Pritisak zračenja $p_\nu(z)$

Svaki foton ima impuls jednak $h\nu/c$. Kada atom apsorbuje foton, on dobija impuls $h\nu/c$ u pravcu kretanja fotona. Time fotoni (zračenje) vrše pritisak na atome.

Pošto zračenje nosi impuls, snopu zračenja možemo pridružiti pritisak. Impuls koji odgovara energetskom paketu dE_ν je dE_ν/c . Uzimajući komponentu impulsa normalnu na površinu, po jedinici površine i u jedinici vremena, dobijamo izraz za pritisak:

$$\delta p_\nu d\nu = \frac{dE_\nu \cos \theta}{d\sigma c dt} = \frac{(I_\nu d\sigma \cos \theta d\omega d\nu dt) \cos \theta}{c d\sigma dt} = \frac{(I_\nu \cos^2 \theta d\omega) d\nu}{c} \quad .$$

Integracijom po svim prostornim uglovima, pritisak zračenja je:

$$p_\nu(z) = \frac{1}{c} \int I_\nu(z, \theta) \cos^2 \theta d\omega = \frac{4\pi}{c} K_\nu(z) \quad .$$

Za izotropno zračenje:

$$p_\nu = \frac{4\pi}{c} K_\nu = \frac{4\pi}{c} \frac{I_\nu}{3} = \frac{1}{3} \rho_\nu \quad .$$

Prenos zračenja

Intenzitet zračenja ostaje nepromenjen ukoliko na njegovom putu nema ni izvora ni ponora zračenja (invarijantnost intenziteta).

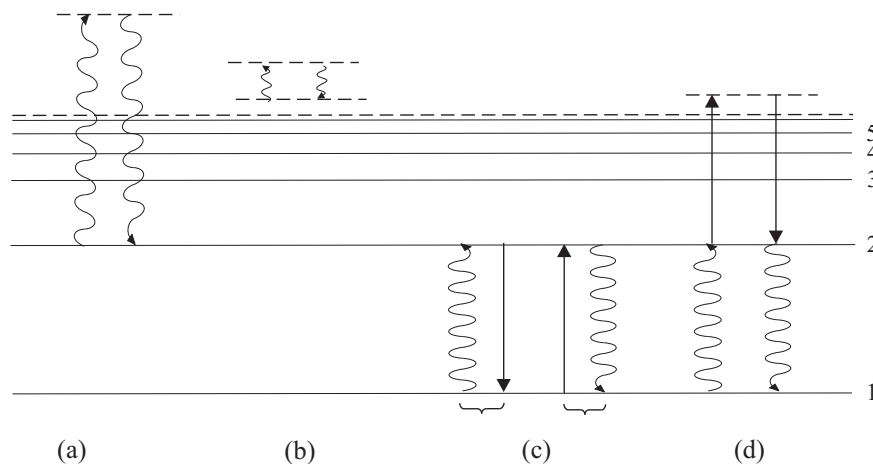
Ako se, međutim, zračenje prostire kroz sredinu koja apsorbira/emituje, intenzitet zračenja se menja duž pravca prostiranja. Mi ćemo izvesti jednačinu koja opisuje promenu specifičnog intenziteta zračenja usled interakcija zračenja i materije - jednačinu prenosa zračenja. Upoznajmo se zato najpre sa mogućim načinima interakcije zračenja i materije.

Interakcija zračenja i materije

Procesi interakcije zračenja i materije: apsorpcija, emisija i rasejanje opisuju se pomoću odgovarajućih makroskopskih koeficijenata. Pre nego što ih definišemo, uočimo razliku između tzv. prave (termalne) apsorpcije/emisije i rasejanja.

Termalna apsorpcija/emisija

U procesima prave tj. termalne apsorpcije, energija apsorbovanog fotona se pretvara u termalnu energiju čestica gasa. Obično se kaže da je foton "termalizovan". Obrnuto, termalnom emisijom nazivamo proces pri kome se termalna energija gasa pretvara u energiju zračenja. Količina emitovane energije onda zavisi samo od parametara stanja gasa (temperature i koncentracije). Pomoću ova dva procesa uspostavlja se lokalna ravnoteža između polja zračenja i stanja gasa.



Sl. 4. Procesi termalne apsorpcije (emisije).

Neki primeri (sl.4) termalne apsorpcije/emisije su: (a) fotojonizacija /radijativna rekombinacija; (b) slobodno-slobodni prelaz u polju jona /zakoč-

no zračenje; (c) fotoekscitacija praćena sudarnom deekscitacijom /sudarna ekscitacija praćena radijativnom deekscitacijom; (d) fotoekscitacija praćena sudarnom jonizacijom /sudarna rekombinacija praćena radijativnom deekscitacijom.

Rasejanje¹

Za razliku od termalne apsorpcije/emisije pri kojoj foton biva uništen /stvoren, pri rasejanju foton ostaje saćuvan. On tada najćešće samo menja pravac prostiranja i, eventualno mada neznatno, frekvenciju (energiju). Kolićina energije koja je reemitovana u procesu rasejanja zavisi samo od intenziteta zraćenja, a ne od parametara stanja gasa.

Rasejanje omogućava fotonima da predju znatnija rastojanja u atmosferi bez vezivanja za lokalne uslove. Rasejanje narušava proces lokalnog uravnotežavanja gasa i zraćenja.

Primeri rasejanja su: (a) apsorpcija i reemisija, tj. rasejanje medju vezanim stanjima u atomu (jonu); (b) rasejanje na slobodnim elektronima (Thomson-ovo i Compton-ovo); (c) rasejanje na atomima i molekulima (Rayleigh-evo); (d) rasejanje na ćesticama prašine (Mie).

Promene pravca i frekvencije fotona usled rasejanja opisuju se funkcijama redistribucije (preraspodele) zraćenja.

Jasnu razliku izmedju termalnih procesa i rasejanja moguće je napraviti samo u slućaju atoma sa dva energetska nivoa. Već npr. kod modela atoma sa tri energetska nivoa (sl.5) u slućajevima (a) fluorescencije ili (b) sudarne deekscitacije praćene emisijom fotona ne moćemo reći da je u pitanju bilo koji od ova dva pomenuta procesa.

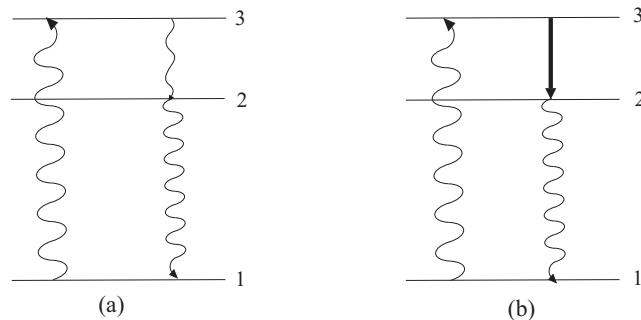
¹ Sve do rada Artura Šustera (Arthur Schuster) objavljenog u Ap.J. 21, 1-22 (1905) ('Radiation through a foggy atmosphere') pri proućavanju prostiranja zraćenja kroz neku masu gasa razmatrani su samo efekti apsorpcije i emisije, a zanemarivani efekti rasejanja. Šuster je prvi razmatrao uticaj rasejane svetlosti na karakteristike propuštenog zraćenja i istakao znaćaj koji procesi rasejanja mogu imati pri interpretaciji prirode zvezdanih atmosfera. Pokazao je da pri prolasku kroz neki sloj gasa zraćenje slabi rasejanjem (nema apsorpcije) po zakonu:

$$I = I_0 / (1 + \tau) \quad ,$$

dakle, znatno sporije nego u slućaju kada sloj samo apsorbuje i kada je slabljenje zraćenja dato izrazom:

$$I = I_0 \exp(-\tau)$$

gde je τ - optićka dubina sloja.



Sl. 5.

Koeficijent ekstinkcije

Slabljenje zračenja pri prolasku kroz neku sredinu opisuje se makroskopskim koeficijentom $\alpha_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t)$ ekstinkcije.

On se definiše tako da je količina energije apsorbovana i rasejana gasnim cilindrom (osnove $d\sigma$ i visine ds) od upadnog snopa zračenja specifičnog intenziteta $I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t)$ u intervalu $\nu, \nu + d\nu$, koje pada normalno na $d\sigma$ i koje se prostire unutar $d\omega$ i u vremenu dt data sa:

$$dE_\nu^{\text{aps}} = \alpha_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) d\sigma ds d\omega d\nu dt \quad .$$

Za statične sredine koeficijent ekstinkcije je izotropan. Koeficijent ekstinkcije α_ν je mera neprozračnosti sredine za zračenje frekvencije ν . Njegova recipročna vrednost je srednja slobodna putanja fotona: $l_\nu = 1/\alpha_\nu$.

Kada želimo da napravimo razliku između procesa termalne apsorpcije i rasejanja, uvodimo odgovarajuće zapreminske koeficijente:

$$\alpha_\nu = \alpha_\nu^t + \alpha_\nu^r \quad .$$

Zapreminski koeficijent ekstinkcije (neprozračnost, engl. opacity) α_ν [cm^{-1}] je dat sa:

$$\alpha_\nu = k_\nu \cdot n = \kappa_\nu \cdot \rho$$

gde je k_ν - koeficijent ekstinkcije po jednoj čestici (atomu, jonu, elektronu) [cm^2], a n je koncentracija čestica koje apsorbuju tj. rasejavaju zračenje na frekvenciji ν , dok je κ_ν koeficijent ekstinkcije po jedinici mase - maseni koeficijent ekstinkcije [cm^2/g], a $\rho = n \cdot m$ - gustina apsorbujuće tj. rasejavajuće materije.

Koeficijent emisije

Koeficijent emisije $e_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t)$ definiše se tako da je količina energije koju emituje element materije poprečnog preseka $d\sigma$ i dužine ds unutar prostornog ugla $d\omega$ u pravcu \vec{l} , u frekventnom opsegu $d\nu$ i u vremenskom intervalu dt :

$$dE_\nu^{\text{em}} = e_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) d\sigma ds d\omega d\nu dt \quad .$$

I ovde možemo razlikovati termalni doprinos i doprinos rasejanja:

$$e_\nu = e_\nu^t + e_\nu^r \quad .$$

Termalna emisija je izotropna za statične sredine. Zavisnost od pravca se javlja samo u pokretnim sredinama usled Doplerovog efekta. Medjutim, kod zračenja emitovanog rasejanjem, kao što ćemo videti, postoji eksplicitna zavisnost od pravca čak i u statičnim sredinama.

Termalna emisija

U izolovanom sistemu na konstantnoj temperaturi (strogoj TDR) važi:

$$e_\nu^t = \alpha_\nu^t \cdot I_\nu = \alpha_\nu^t \cdot B_\nu(T) \quad .$$

Pošto na zvezdama postoji gradijent temperature, u prvoj aproksimaciji možemo pretpostaviti da postoji lokalna ravnoteža zračenja i materije, tj. da poslednja relacija važi pri lokalnim vrednostima temperature:

$$e_\nu^t(\vec{r}) = \alpha_\nu^t(\vec{r}) \cdot B_\nu(T(\vec{r})) \quad .$$

Ova hipoteza lokalne termodinamičke ravnoteže (LTR) pretpostavlja da su naseljenosti nivoa u atomu, emisivnost i neprozračnost isti kao njihove TDR vrednosti na lokalnoj vrednosti temperature T i gustine ρ . Samo polje zračenja odstupa od ravnotežne vrednosti

$$I_\nu(\vec{r}, \vec{l}) \neq B_\nu(T(\vec{r}))$$

i dobija se kao rešenje jednačine prenosa zračenja.

Rasejano zračenje

Promene frekvencije i pravca fotona pri rasejanju opisuju se funkcijama redistribucije, tako da je

$$R(\nu', \vec{l}', \nu, \vec{l}) d\nu' d\nu \frac{d\omega'}{4\pi} \frac{d\omega}{4\pi}$$

verovatnoća da će foton frekvencije u intervalu $(\nu', \nu' + d\nu')$ iz pravca \vec{l}' i prostornog ugla $d\omega'$ biti rasejan u $(\nu, \nu + d\nu)$, \vec{l} i $d\omega$.

Ako sa $\sigma(\vec{r})$ označimo srednji koeficijent rasejanja, verovatnoća da će deo $\sigma(\vec{r})I_{\nu'}(\vec{r}, \vec{l}')$ upadnog snopa zračenja na frekvenciji ν' i unutar prostornog ugla $d\omega'$, intenziteta $I_{\nu'}(\vec{r}, \vec{l}')$, biti uklonjen i rasejan na ν unutar $d\omega$ je:

$$\sigma(\vec{r})R(\nu', \vec{l}', \nu, \vec{l})I_{\nu'}(\vec{r}, \vec{l}')d\nu' d\nu \frac{d\omega'}{4\pi} \frac{d\omega}{4\pi} .$$

Integracijom po frekvencijama i pravcima upadnog zračenja, za ukupnu količinu energije koja je emitovana rasejanjem na frekvenciji ν unutar prostornog ugla $d\omega$ imamo:

$$e_{\nu}^r(\vec{r}, \vec{l})d\nu \frac{d\omega}{4\pi} = \sigma(\vec{r})d\nu \frac{d\omega}{4\pi} \int \frac{d\omega'}{4\pi} \int R(\nu', \vec{l}', \nu, \vec{l})I_{\nu'}(\vec{r}, \vec{l}')d\nu' .$$

Vidimo da je emisijski koeficijent koji potiče od rasejanja funkcija pravca jer zavisi od upadnog polja zračenja.

Ravnotežne raspodele čestica i fotona

(a) Čestice

Razlikujemo 2 vrste čestica:

- sa unutrašnjim energetske stanjima (atomi, joni)
- bez unutrašnjih energetskih stanja (elektroni)

Medju česticama postoje dva tipa interakcija (sudara):

- neelastični (ima promene unutrašnje energije)
- elastični (ima promene samo kinetičke energije).

Fizičko stanje gasa potpuno je određeno funkcijama raspodele svih vrsta čestica po brzinama kao i raspodelama čestica po unutrašnjim energetske stanjima (u slučaju atoma i jona). U izolovanom sistemu će se sudarima tokom vremena uspostaviti ravnotežne raspodele čestica:

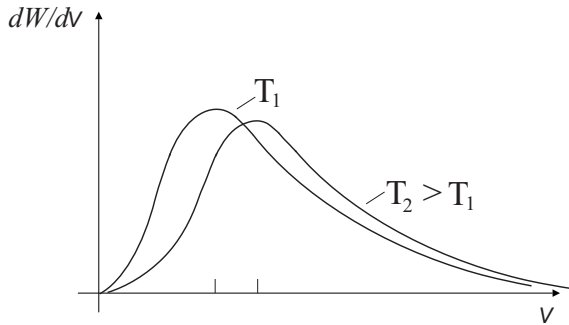
- po brzinama (Maxwell-ova)
- po stanjima ekscitacije (Boltzmann-ova)
- po stanjima jonizacije (Saha-ina).

(1) Maksvelova raspodela čestica po brzinama

Verovatnoća da čestica idealnog gasa van polja sila u stacionarnom stanju ima intenzitet brzine izmedju v i $v + dv$ data je sa:

$$dW = dN(v)/N = N(v)dv/N = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{\alpha^2} e^{-v^2/\alpha^2} \frac{dv}{\alpha}$$

gde je $\alpha = \sqrt{2kT/m}$ - najverovatnija brzina. $dW/dv = N(v)/N$ je deo ukupnog broja čestica gasa koje imaju brzinu u intervalu $(v, v + dv)$.



Sl. 6. Maksvelova raspodela čestica po brzinama.

Vidimo da za $v \rightarrow 0$ i za $v \rightarrow \infty$, $dW/dv \rightarrow 0$. Najverovatnija brzina se nalazi iz: $(\frac{d}{dv}(dW/dv) = 0)$ i iznosi: $v_{max} = \alpha \propto \sqrt{T}$. Maksimum verovatnoće sa porastom temperature opada $((dW/dv)_{v=v_{max}} \propto 1/\sqrt{(T)})$ i pomera se ka većim brzinama ($v_{max} \propto \sqrt{(T)}$). Maksvelov zakon definiše kinetičku temperaturu T_k .

(2) Bolcmanova raspodela atoma (jona) po stanjima ekscitacije

Broj atoma (jona) u jedinici zapremine koji se nalazi u k -tom pobudjenom stanju (na k -tom nivou) tj. **naseljenost k -tog nivoa** je data sa:

$$n_k = const \cdot g_k e^{-\chi_k/kT} .$$

Ovde je g_k - statistička težina k -tog stanja/nivoa (broj načina na koje elektron može da se nadje u k -tom energetskom stanju ili broj podnivoa datog nivoa), a χ_k - energija ekscitacije k -tog nivoa. Vidimo da je ravnotežna naseljenost nekog nivoa određena samo temperaturom.

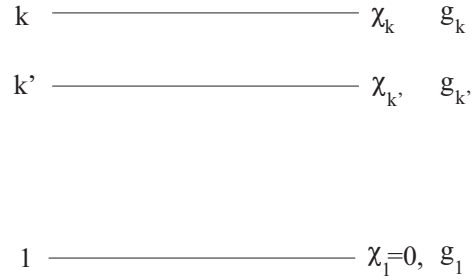
Odnos naseljenosti dva nivoa k i k' dat je Bolcmanovom formulom:

$$\frac{n_k}{n_{k'}} = \frac{g_k}{g_{k'}} e^{-(\chi_k - \chi_{k'})/kT} .$$

Specijalno, za $k' = 1$ (osnovni nivo) imamo:

$$\frac{n_k}{n_1} = \frac{g_k}{g_1} e^{-\chi_k/kT} \quad .$$

Temperatura definisana Bolcmanovom raspodelom je temperatura ekscitacije T_{exc} . Odredjena je relativnim brojem atoma (jona) ekscitovanih na k -ti nivo iznad osnovnog.



Sl. 7. Vezana energetska stanja u atomu.

(3) Sadržina raspodela atoma po stanjima jonizacije

Iznad diskretnih nivoa na kojima je elektron vezan u atomu ($E < 0$) nalazi se kontinuum nivoa u kojima elektron nije vezan za atom ($E > 0$). Minimalna energija potrebna da se atom jonizuje iz osnovnog stanja zove se potencijal jonizacije atoma χ_I .

Jonizacija (kao i ekscitacija) može biti radijativna (apsorpcijom zračenja) i sudarna. Pri tome se energija predata atomu troši na jonizaciju atoma i na kinetičku energiju slobodnog elektrona.

Odnos broja atoma u dva susedna stanja jonizacije i i $i + 1$ dat je formulom Saha:

$$\frac{n_{i+1}}{n_i} = \frac{1}{n_e} \Phi(T) = \frac{1}{n_e} \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{2U_{i+1}}{U_i} e^{-\chi_i/kT}$$

Ovde je $U_i(T) = \sum_k g_k e^{-\chi_k/kT}$ - suma po stanjima (sumiranje se vrši po svim vezanim stanjima u atomu (jonu)). Vidimo da stepen jonizacije zavisi od temperature T i elektronske koncentracije n_e .

Temperatura jonizacije T_{jon} odredjena je relativnim brojem jona datog elementa u raznim stanjima jonizacije.

U izolovanom sistemu sudari dovode do razmene energije medju raznim česticama. Svaki proces je uravnotežen njemu suprotnim. Ovo obezbeđuje

da se svi ovi procesi mogu opisati jednom temperaturom, tj. da je $T_k = T_{exc} = T_{jon}$ (TDR).

Kao što vidimo ima nekoliko načina da se definiše temperatura gasa. Ne postoji jedinstvena definicija temperature. Njena vrednost zavisi od procesa (fenomena) koji se koristi u njenom odredjivanju (brzinska raspodela čestica, stepen ekscitacije, stepen jonizacije).

(b) Fotoni

Za razliku od čestičnog gasa, fonski gas nema fiksni broj čestica i fotoni praktično međusobno ne interaguju.

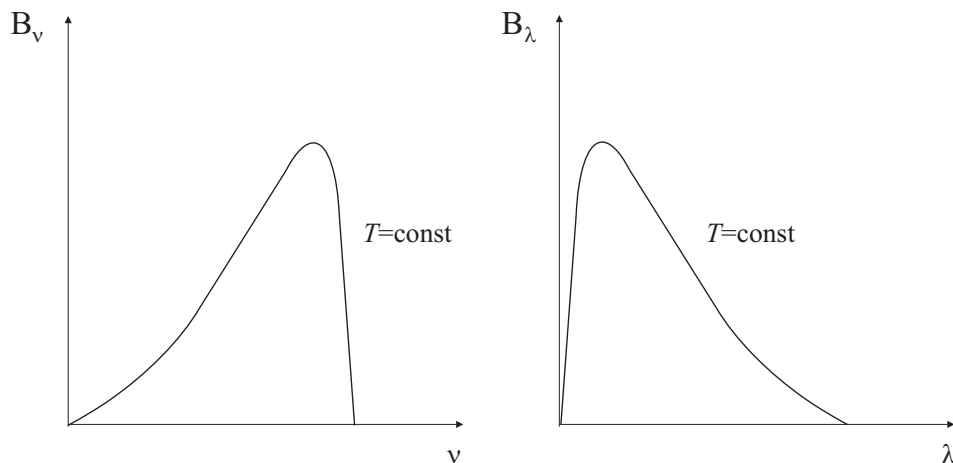
Medju fotonima i česticama moguće su takodje dve vrste interakcija ("sudara"):

- elastični (rasejanje)
- neelastični (apsorpcija/emisija).

Ravnotežna raspodela zračenja (fotona) po frekvencijama ostvaruje se kroz interakcije fotona sa atomima (uzastopne apsorpcije i emisije) u izolovanom sistemu na konstantnoj temperaturi (crno telo). Data je Plankovom funkcijom $I_\nu = B_\nu(T)$.

Ravnotežno zračenje je homogeno i izotropno i funkcija je samo frekvencije i temperature.

$$I_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$



Sl. 8. Plankova raspodela zračenja po (a) frekvencijama i (b) talasnim dužinama.

Izlazni fluks zračenja apsolutno crnog tela je:

$$\mathcal{F}_\nu^+ = 2\pi \int_0^1 I_\nu \mu d\mu = 2\pi B_\nu(T) \int_0^1 \mu d\mu = 2\pi B_\nu(T) \cdot \frac{1}{2} = \pi B_\nu(T)$$

odnosno, ukupni fluks zračenja (na svim ν) sa jedinice površine crnog tela je (Štefan–Bolcmanov zakon):

$$\mathcal{F}^+ = \pi \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \pi B = \sigma T^4$$

Iz $\int B_\lambda d\lambda = \int B_\nu d\nu$ sledi

$$B_\lambda = B_\nu \frac{d\nu}{d\lambda}$$

odnosno

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad .$$

Frekvenciju zračenja na kojoj crno telo maksimalno emituje nalazimo iz

$$\left(\frac{\partial B_\nu}{\partial \nu}\right) = 0$$

odakle sledi da je

$$\nu_{max} = a \cdot T \quad .$$

Slično, talasnu dužinu na kojoj crno telo maksimalno zrači nalazimo iz:

$$\left(\frac{\partial B_\lambda}{\partial \lambda}\right) = 0$$

odakle sledi:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} \quad .$$

(Vinov zakon pomeranja).

Uočimo da $\nu_{max} \neq \frac{c}{\lambda_{max}}$ jer, s obzirom da je $d\nu = \frac{c}{\lambda^2} d\lambda$, u raznim delovima spektra jednakim intervalima talasnih dužina odgovaraju različiti intervali frekvencija.

Temperatura polja zračenja

Iako zvezde nisu apsolutno crna tela njihova spektralna raspodela se može aproksimirati krivom zračenja apsolutno crnog tela. Nekoliko kriterijuma najboljeg fita posmatrane i teorijske krive daje nekoliko vrednosti temperatura:

- ista visina krivih (posmatrane i Plankove) na nekoj λ daje tzv. temperaturu sjaja
- iz položaja maksimuma emitovane energije (Wien-ovog zakona pomeranja) dobijamo tzv. temperaturu boje
- iz razlike flukseva na dve talasne dužine u spektru - indeksa boje (raspodele energije u odredjenom opsegu talasnih dužina) dobijamo temperaturu boje
- izjednačavanjem površine ispod krive raspodele zračenja zvezde sa površinom ispod odgovarajuće Plankove krive pomnoženoj sa π ($\mathcal{F} = \pi I$) dobijamo efektivnu temperaturu.

Primenom ovih kriterijuma na određivanje površinske temperature Sunca dobijene su vrednosti koje se kreću u intervalu 5600K–6100K.

Kada bi zvezda zračila kao crno telo sve dobijene vrednosti temperature bi bile jednake. Međutim, zvezde nisu izolovani sistemi. Na njima postoji grad T i otvorena granica kroz koju zračenje slobodno izlazi. Osim toga, neprozračnost gasa je različita za zračenje raznih frekvencija, pa zračenje koje primamo stiže sa raznih dubina u atmosferi na kojima vladaju različiti fizički uslovi. Kao rezultat svega toga raspodela zračenja koje napušta zvezdu se razlikuje od Plankove raspodele.

U Sunčevoj fotosferi je grad $T = 3000\text{K}/300\text{km} \approx 10^{-4}\text{K/cm}$. Srednja slobodna putanja čestica je manja od 1cm. Na tom rastojanju je T skoro konstantna pa možemo smatrati da čestice imaju pomenute ravnotežne raspodele.

Međutim, fotoni mogu preći ogromna rastojanja pre nego što budu apsorbovani. Tako npr. sa dubine $h = 170\text{km}$ 40% fotona od ukupnog broja emitovanih na toj dubini uspeva da stigne do površine. Znači, srednja slobodna putanja fotona je velika. Na tom rastojanju promene temperature mogu biti znatne (do 3000K u slučaju Sunca). Dakle, možemo smatrati da čestice imaju ravnotežne raspodele, ali da to nije slučaj sa zračenjem ($I_\nu \neq B_\nu(T)$). Ono što pretpostavljamo je da je u svakoj maloj oblasti atmosfere odnos koeficijenata e_ν i α_ν isti kao u slučaju TDR:

$$\frac{e_\nu(\vec{r})}{\alpha_\nu(\vec{r})} = B_\nu(T(\vec{r}))$$

tj. da važi zakon Kirhoha (na lokalnoj temperaturi). Ova aproksimacija (LTR) uzima u obzir postepenu promenu temperature od sloja do sloja. Zračenje je u termalnoj ravnoteži sa materijom na lokalnoj temperaturi kroz procese prave (termalne) apsorpcije i emisije. Međutim, zračenje nije u TDR sa materijom:

$$I_\nu \neq B_\nu(T) !$$

već se intenzitet zračenja dobija rešavanjem jednačine prenosa.

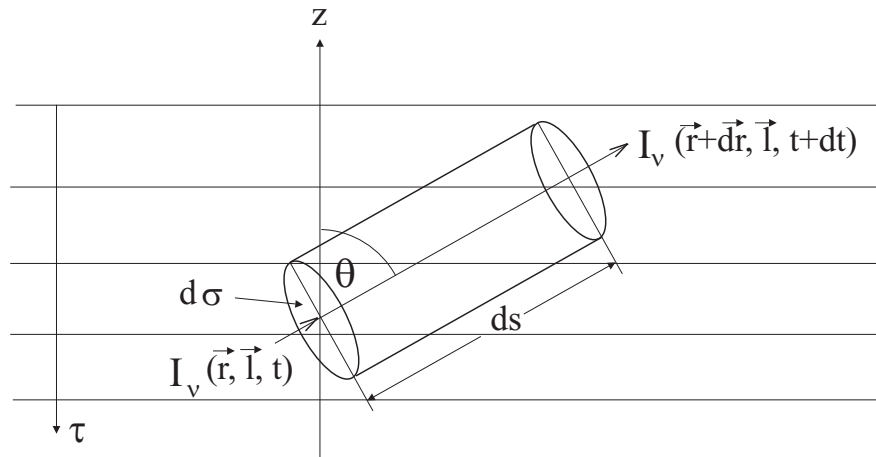
Kako raspodela fotona nije ravnotežna, kroz interakcije zračenja i gasa ni funkcije raspodele čestica gasa više ne mogu biti ravnotežne. U opštem slučaju, problem treba tretirati u tzv. **ne-LTR** (ne-lokalnoj termodinamičkoj ravnoteži).

Da li se može primeniti LTR, ili se mora razmatrati opštiji slučaj, ne-LTR, zavisi od relativnog značaja sudara između samih čestica gasa, s jedne strane, i "sudara" čestica gasa i zračenja, s druge.

Jednačina prenosa zračenja

Razmatrajmo sada prenos zračenja kroz sredinu koja i apsorbuje i emituje zračenje.

Posmatrajmo elementarnu zapreminu cilindričnog oblika površine osnove $d\sigma$ normalne na pravac prostiranja zračenja \vec{l} i visine ds .



Sl. 9. Promena specifičnog intenziteta zračenja pri prolasku kroz element zapremine gasa.

Neka je dE_ν^{ul} količina energije zračenja unutar frekventnog intervala $(\nu, \nu + d\nu)$ koja za vreme dt ulazi u cilindar unutar prostornog ugla $d\omega$:

$$dE_\nu^{ul} = I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) d\sigma d\omega d\nu dt \quad .$$

Neka je dE_ν^{izl} količina energije zračenja u istom frekventnom intervalu koja za isto vreme dt i unutar istog prostornog ugla $d\omega$ izlazi iz cilindra. Zbog interakcija sa gasom unutar cilindra intenzitet zračenja se menja, tako da imamo:

$$dE_\nu^{izl} = I_\nu(\vec{r} + d\vec{r}, \vec{l}, t + dt) d\sigma d\omega d\nu dt \quad .$$

Do promene ulaznog intenziteta (energije) zračenja pri prolasku kroz cilindričnu zapreminu gasa dolazi delom zbog toga što sam gas unutar cilindra zrači (termalna emisija), kao i zato što se zračenje iz drugih pravaca rasejava u dati pravac \vec{l} (emisija rasejanjem). Količina energije koju emituje cilindar u pravcu \vec{l} unutar istog prostornog ugla $d\omega$, za isti vremenski interval dt i unutar istog frekventnog intervala $d\nu$ biće:

$$dE_\nu^{em} = e_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) d\sigma ds d\omega d\nu dt \quad .$$

S druge strane, dolazi do slabljenja intenziteta zračenja u cilindru. Količina apsorbovane¹⁾ energije je:

$$dE_\nu^{aps} = \alpha_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) d\sigma ds d\omega d\nu dt \quad .$$

Primetimo ovde da koeficijenti e_ν i α_ν sadrže odgovarajuće doprinose termalnih procesa i rasejanja.

Napišimo jednačinu koja pokazuje da je razlika između količine energije koja izlazi i one koja ulazi u cilindar jednaka razlici gasom unutar cilindra emitovane i apsorbovane energije:

$$[I_\nu(\vec{r} + d\vec{r}, \vec{l}, t + dt) - I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t)] d\sigma d\omega d\nu dt = [e_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) - \alpha_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t)] d\sigma ds d\omega d\nu dt$$

Kako je

$$I_\nu(\vec{r} + d\vec{r}, \vec{l}, t + dt) = I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) + dI_\nu = I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) + \left[\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} \right] ds$$

¹⁾ Pravom apsorpcijom i rasejanjem zračenja iz pravca \vec{l} u druge pravce.

imamo

$$[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}] I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) = e_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) - \alpha_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) \quad .$$

U pravouglom koordinatnom sistemu izvod duž zraka može da se izrazi kao:

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial s} = (\frac{\partial x}{\partial s})(\frac{\partial I_\nu}{\partial x}) + (\frac{\partial y}{\partial s})(\frac{\partial I_\nu}{\partial y}) + (\frac{\partial z}{\partial s})(\frac{\partial I_\nu}{\partial z}) = l_x \frac{\partial I_\nu}{\partial x} + l_y \frac{\partial I_\nu}{\partial y} + l_z \frac{\partial I_\nu}{\partial z}$$

gde su (l_x, l_y, l_z) komponente jediničnog vektora \vec{l} .

Jednačinu možemo prepisati kao:

$$[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{l} \cdot \nabla)] I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) = e_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) - \alpha_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) \quad .$$

S obzirom da razmatramo plan-paralelnu atmosferu sa z-osom usmerenom u pravcu normale na slojeve i orijentisanu ka spolja imamo:

$$l_z = \vec{l} \cdot \vec{e}_z = \cos\theta = \mu \quad ,$$

dok su izvodi po x i y jednaki nuli. Dalje, pretpostavljamo stacionarnost, tj. da se ni jedna razmatrana veličina ne menja u toku vremena. U statičnoj atmosferi koeficijent ekstinkcije (neprozračnost) neće biti funkcija pravca μ . Koeficijent emisije u statičnoj atmosferi ne zavisi od pravca ako je rasejanje izotropno.

Tako, jednačina prenosa sa gore nabrojanim pretpostavkama postaje:

$$\mu \frac{dI_\nu(z, \mu)}{dz} = e_\nu(z) - \alpha_\nu(z) I_\nu(z, \mu) \quad (*)$$

odnosno, ako umesto koordinate z sve veličine izrazimo kao funkcije dubine u atmosferi h (gde je $dh = -dz$):

$$\mu \frac{dI_\nu(h, \mu)}{dh} = \alpha_\nu(h) I_\nu(h, \mu) - e_\nu(h) \quad .$$

Jednačinu prenosa možemo napisati u još jednom obliku, uvođenjem dve nove veličine. Podelimo jednačinu (*) sa $-\alpha_\nu(z)$. Umesto skale visine z , ili geometrijske dubine h , sada možemo uvesti skalu optičke dubine τ_ν na sledeći način:

$$d\tau_\nu = -\alpha_\nu(z) dz = \alpha_\nu(h) dh$$

Integracijom od gornje granice atmosfere z_{\max} ($\tau_\nu = 0$) do neke tačke z (τ_ν) u atmosferi

$$\int_0^{\tau_\nu} d\tau_\nu = - \int_{z_{\max}}^z \alpha_\nu(z') dz' \quad .$$

imamo:

$$\tau_\nu(z) = \int_z^{z_{\max}} \alpha_\nu(z') dz' \quad .$$

Optička dubina je mera ukupne neprozračnosti u pravcu vizure. Optička dubina raste sa geometrijskom dubinom, od nule na gornjoj granici atmosfere ($z = z_{\max}$), i predstavlja meru neprozračnosti sredine na zračenje određene talasne dužine (koliko duboko spoljni posmatrač može videti unutar atmosfere). Ako je $\tau_\nu > 1$ kaže se da je sredina optički gusta (debela), a ako je $\tau_\nu < 1$ da je optički retka (tanka).

Posmatrajmo sada najjednostavniji primer jednačine prenosa i njenog rešenja. Neka zračenje prolazi kroz sredinu koja samo apsorbuje. Tada jednačina prenosa ima oblik:

$$\mu \frac{dI_\nu(z, \mu)}{dz} = -\alpha_\nu(z) I_\nu(z, \mu) \quad .$$

Integracijom od z do z_{\max} imamo:

$$I_\nu(z_{\max}, \mu) = I_\nu(z, \mu) e^{-\int_z^{z_{\max}} \frac{\alpha_\nu(z')}{\mu} dz'}$$

tj.

$$I_\nu(\tau_\nu = 0, \mu) = I_\nu(\tau_\nu, \mu) e^{-\tau_\nu/\mu} \quad .$$

Intenzitet zračenja pri prolasku kroz apsorbujući sloj slabi po eksponencijalnom zakonu. Zračenje emitovano na nekoj optičkoj dubini τ u atmosferi ima verovatnoću jednaku $e^{-\tau}$ da izađe iz nje (za $\mu = 1$). U tablici su date neke vrednosti ove verovatnoće za razne vrednosti τ :

τ	$e^{-\tau}$
0.01	0.99
0.5	0.60
0.67	0.51
1	0.37
2	0.14
5	0.007
10	$5 \cdot 10^{-5}$

Još jedna veličina koja opisuje neprozračnost je l_ν - *srednja slobodna putanja fotona*, tj. srednje rastojanje koje foton frekvencije ν može preći kroz sredinu bez interakcije. Jednostavno je povezana sa koeficijentom ekstinkcije homogene sredine. Kako je verovatnoća da foton predje optičko rastojanje τ_ν jednaka $e^{-\tau_\nu}$, srednji predjeni optički put je

$$\bar{\tau}_\nu = \int_0^\infty \tau_\nu e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu = 1 \quad .$$

Srednje geometrijsko rastojanje koje foton predje u homogenoj sredini, definisano kao srednja slobodna putanja l_ν , sledi onda iz:

$$\bar{\tau}_\nu = \alpha_\nu \cdot l_\nu = 1$$

tj. imamo da je:

$$l_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu} \quad .$$

Pošto je $1/\alpha_\nu$ - srednja slobodna putanja fotona, vidimo da je $\tau_\nu(z)$ - broj srednjih slobodnih putanja na frekvenciji ν duž pravca vizure od z_{max} do z .

Uvodjenjem još jedne nove veličine - funkcije izvora $S_\nu(\tau_\nu)$ koja je definisana kao odnos ukupnog koeficijenta emisije i ukupnog koeficijenta apsorpcije (ekstinkcije):

$$S_\nu(\tau_\nu) = \frac{e_\nu(\tau_\nu)}{\alpha_\nu(\tau_\nu)}$$

jednačina prenosa dobija oblik:

$$\mu \frac{dI_\nu(\tau_\nu, \mu)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\tau_\nu, \mu) - \frac{e_\nu(\tau_\nu)}{\alpha_\nu(\tau_\nu)} = I_\nu(\tau_\nu, \mu) - S_\nu(\tau_\nu) \quad .$$

Možemo razlikovati nekoliko slučajeva (modela) prenosa zračenja u zavisnosti od oblika koeficijenata prenosa e_ν i α_ν , tj. funkcije izvora:

1) Ako je $S_\nu = e_\nu/\alpha_\nu = B_\nu(T)$ i $I_\nu = B_\nu(T)$ što je slučaj u sredini $T=\text{const}$, odnosno ako je $I_\nu = S_\nu$ iz gornje jednačine sledi da je I_ν konstantno (nema prenosa energije - TDR);

2) Ako u sredini u kojoj je $\text{grad}T \neq 0$ postoje samo procesi termalne apsorpcije/ emisije, onda je $S_\nu = e_\nu^t/\alpha_\nu^t = B_\nu(T^*)$, tj. **zračenje je u termalnoj ravnoteži sa materijom na lokalnoj temperaturi T^*** , ali $I_\nu \neq B_\nu(T^*)$ (zračenje nije u TDR sa materijom) već je rešenje jednačine

prenosa sa poznatom funkcijom izvora $S_\nu = B_\nu(T^*)$. Jednačina prenosa je onda obična diferencijalna jednačina prvog reda koja se može rešiti za svako ν i μ (prenos zračenja u LTR);

3) Ako sva izračena energija potiče od fotona rasejanih u razmatranom pravcu (slučaj čistog rasejanja) i ako je rasejanje izotropno:

$$de_\nu = \frac{1}{4\pi} \alpha_\nu I_\nu d\omega$$

i $\alpha_\nu \neq \alpha_\nu(\mu)$,

$$e_\nu = \frac{1}{4\pi} \alpha_\nu \int I_\nu d\omega$$

sledi da je

$$S_\nu = e_\nu / \alpha_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\omega = J_\nu \quad .$$

Jednačina prenosa je integro–diferencijalna.

4) Ako je funkcija izvora data sa:

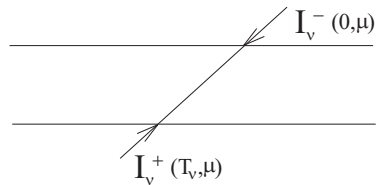
$$S_\nu = \frac{e_\nu}{\alpha_\nu} = \frac{\alpha_\nu^t}{\alpha_\nu^t + \alpha_\nu^r} B_\nu(T) + \frac{\alpha_\nu^r}{\alpha_\nu^t + \alpha_\nu^r} \int \int I'_\nu(\vec{l}') R(\nu' \vec{l}', \nu, \vec{l}) d\nu' \frac{d\omega'}{4\pi}$$

tj. kao težinska srednja vrednost termalnih procesa (B_ν) i rasejanja (integral rasejanja), onda je specifični intenzitet zračenja rešenje jednačine prenosa koja je integro–diferencijalna (u opštem slučaju, funkcija izvora sadrži integral specifičnog intenziteta zračenja i po uglovima i po frekvencijama). U specijalnom slučaju kada je rasejanje koherentno (frekvencija upadnog i rasejanog fotona su iste) i izotropno:

$$S_\nu = L_\nu B_\nu(T) + (1 - L_\nu) J_\nu \quad ,$$

Granični uslovi

Da bismo rešili jednačinu prenosa potrebno je da definišemo (zadamo) granične uslove. Postoje dva astrofizički značajna problema: (1) sloj (u plan–paralelnoj geometriji) ili ljuska (u sfernoj geometriji) konačne debljine i (2) sredina (kao što je npr. zvezdana atmosfera) koja ima otvorenu gornju granicu, ali je tako optički neprozračna da se može smatrati da je donja granica na beskonačno velikoj optičkoj dubini (polu–beskonačna atmosfera).



Slika 10.

(1) Za sloj konačne debljine Z i ukupne optičke dubine T_ν ($\tau_\nu = 0$ na strani bližoj posmatraču) jednoznačno rešenje se dobija ako su zadati ulazni intenziteti zračenja na obe granične površine:

na $\tau_\nu = 0$: $I_\nu^-(0, \mu) = I_\nu(\tau_\nu = 0, \mu < 0)$

na $\tau_\nu = T_\nu$: $I_\nu^+(T_\nu, \mu) = I_\nu(\tau_\nu = T_\nu, \mu > 0)$

(2) Polubeskonačna atmosfera

- na gornjoj granici atmosfere nema ulaznog zračenja $I_\nu^-(0, \mu) = 0$ (to nije dobra aproksimacija ako je zvezda u blizini drugog intenzivnog izvora zračenja, npr. u tesno dvojnem sistemu),

- kao donji granični uslov pri analitičkom rešavanju jednačine prenosa možemo zahtevati da za $\tau_\nu \rightarrow \infty$ važi:

$$\lim_{\tau_\nu \rightarrow \infty} I_\nu(\tau_\nu, \mu) e^{-\tau_\nu/\mu} = 0$$

tj. da intenzitet zračenja na velikim optičkim dubinama teži konačnoj vrednosti.

Pri numeričkom rešavanju, donji granični uslov možemo pisati u tzv. difuznoj aproksimaciji i intenzitet izraziti pomoću lokalne vrednosti funkcije izvora i njenog gradijenta¹⁾:

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = S_\nu(\tau_\nu) + \mu \frac{dS_\nu}{d\tau_\nu} \quad .$$

Formalno rešenje jednačine prenosa (Rešenje jednačine prenosa zračenja sa poznatom funkcijom izvora)

Razmatraćemo plan-paralelnu polu-beskonačnu atmosferu. Smatraćemo funkciju izvora poznatom. Tada jednačina prenosa zračenja predstavlja linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda sa konstantnim koeficijentima.

¹⁾ U nultoj aproksimaciji, na velikim optičkim dubinama, imamo $I_\nu^o = S_\nu$. U prvoj aproksimaciji imamo $\mu dI_\nu^o/d\tau_\nu = I_\nu^1 - S_\nu$ odakle sledi da je $I_\nu^1 = S_\nu + \mu dS_\nu/d\tau_\nu$.

Za nalaženje opšteg rešenja možemo koristiti *metod varijacije konstanti*. Prvo rešavamo homogenu linearnu jednačinu:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{I_\nu}{\mu}$$

Dobijamo rešenje u obliku:

$$\ln I_\nu = \frac{\tau_\nu}{\mu} + \ln C_\nu$$

odnosno

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = C_\nu e^{\tau_\nu/\mu} \quad (*)$$

Sada tražimo opšte rešenje nehomogene jednačine:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} - \frac{I_\nu}{\mu} = -\frac{S_\nu}{\mu}$$

u obliku $I_\nu = C_\nu(\tau_\nu)e^{\tau_\nu/\mu}$, gde pretpostavljamo da C_ν nije konstanta već nova nepoznata funkcija τ_ν (što je smisao metoda). Da bismo našli funkciju $C_\nu(\tau_\nu)$ i time rešenje, zamenjujemo (*) u nehomogenu jednačinu i dobijamo:

$$\frac{dC_\nu}{d\tau_\nu} = -\frac{1}{\mu} S_\nu e^{-\tau_\nu/\mu} \quad .$$

Integracijom dobijamo

$$C_\nu(\tau_\nu) = - \int_{c_1}^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) e^{-t_\nu/\mu} \frac{dt_\nu}{\mu}$$

gde je $c_1 = c_1(\mu)$ - konstanta čija vrednost zavisi od graničnih uslova.

Opšte rešenje je onda oblika:

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = -e^{\tau_\nu/\mu} \int_{c_1}^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) e^{-t_\nu/\mu} \frac{dt_\nu}{\mu}$$

odnosno:

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = - \int_{c_1}^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) e^{-(t_\nu - \tau_\nu)/\mu} \frac{dt_\nu}{\mu} \quad (**).$$

Da bismo dobili partikularno rešenje treba zadati početni (granični) uslov.

Na površini ($\tau_\nu = 0$) ulazno zračenje ($\mu < 0$) je nula, pa je:

$$I_\nu^-(0, \mu) = - \int_{c_1}^0 S_\nu(t_\nu) e^{-t_\nu/\mu} \frac{dt_\nu}{\mu} = 0$$

odakle sledi da je $c_1 = 0$. Intenzitet ulaznog zračenja u nekoj tački P atmosfere na optičkoj dubini τ_ν u pravcu μ je onda dat sa:

$$I_\nu^-(\tau_\nu, \mu) = - \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) e^{-(t_\nu - \tau_\nu)/\mu} \frac{dt_\nu}{\mu} .$$

Vidimo da ulazno zračenje na dubini τ_ν predstavlja sumu doprinosa funkcija izvora $S_\nu(t_\nu)$ na svim dubinama od površine do τ_ν ($0 < t_\nu < \tau_\nu$) oslabljenih na putu od t_ν do τ_ν duž pravca μ za faktor $e^{-(t_\nu - \tau_\nu)/\mu}$.

Možemo, po analogiji, neposredno izraziti intenzitet izlaznog zračenja u tački P atmosfere na dubini τ_ν u pravcu μ kao:

$$I_\nu^+(\tau_\nu, \mu) = \int_{\tau_\nu}^\infty S_\nu(t_\nu) e^{-(t_\nu - \tau_\nu)/\mu} \frac{dt_\nu}{\mu} ,$$

tj. kao sumu doprinosa S_ν na svim optičkim dubinama $t_\nu > \tau_\nu$.

Posmatrajmo opšte rešenje. Možemo integral u (**) pisati kao $\int_{\tau_\nu}^{c_1} = \int_{\tau_\nu}^\infty - \int_{c_1}^\infty$. Prvi integral na desnoj strani je I_ν^+ . Drugi integral treba da teži nuli. Sa graničnim uslovom za I_ν^+ na $\tau_\nu \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\tau_\nu \rightarrow \infty} I_\nu^+ e^{-\tau_\nu/\mu} = \lim_{\tau_\nu \rightarrow \infty} \int_{c_1}^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) e^{-(t_\nu)/\mu} \frac{dt_\nu}{\mu} = 0 ,$$

($e^{\tau_\nu/\mu}$ teži beskonačnosti brže od S_ν) sledi da je $c_1 = \infty$.

Slični izrazi kao za specifični intenzitet zračenja se mogu napisati i za momente intenziteta. Izvršimo integraciju po uglovima (pravcima) pretpostavljajući da je $S_\nu(t_\nu)$ izotropno. Rastavljajući integral $\int_{-1}^1 I_\nu(\tau_\nu, \mu) \mu^n d\mu$ za $-1 \leq \mu \leq 1$ na dva intervala $(-1, 0)$ i $(0, +1)$ i primenjujući izraze za $I_\nu^+(\tau_\nu, \mu)$ i $I_\nu^-(\tau_\nu, \mu)$ prethodno izvedene imamo:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 I_\nu(\tau_\nu, \mu) \mu^n d\mu = \\ & \int_0^1 \mu^n d\mu \int_{\tau_\nu}^\infty S_\nu(t_\nu) e^{-(t_\nu - \tau_\nu)/\mu} \frac{dt_\nu}{\mu} + \int_{-1}^0 \mu^n d\mu \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) e^{-(t_\nu - \tau_\nu)/\mu} \frac{dt_\nu}{-\mu} . \end{aligned}$$

Uvodeći u prvom članu smenu $1/\mu = y$, a u drugom $-1/\mu = y$ i zamenjujući redosled integracija imamo:

$$\int_{-1}^1 I_\nu(\tau_\nu, \mu) \mu^n d\mu =$$

$$\int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu) dt_\nu \int_1^{\infty} e^{-(t_\nu - \tau_\nu)y} \frac{dy}{y^{n+1}} + (-1)^n \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) dt_\nu \int_1^{\infty} e^{-(\tau_\nu - t_\nu)y} \frac{dy}{y^{n+1}} =$$

$$\int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu) E_{n+1}(t_\nu - \tau_\nu) dt_\nu + (-1)^n \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) E_{n+1}(\tau_\nu - t_\nu) dt_\nu ,$$

gde su uvedene integro-eksponencijalne funkcije $E_n(x)$ definisane kao:

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xy}}{y^n} dy = \int_0^1 e^{-x/\mu} \mu^{n-1} \frac{d\mu}{\mu}$$

$x > 0; n = 1, 2, \dots$

Napišimo sada Švarcšildovu jednačinu za srednji intenzitet:

$$\begin{aligned} J_\nu(\tau_\nu) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(\tau_\nu, \mu) d\mu = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu) E_1(t_\nu - \tau_\nu) dt_\nu + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) E_1(\tau_\nu - t_\nu) dt_\nu = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} S_\nu(t_\nu) E_1|t_\nu - \tau_\nu| dt_\nu \end{aligned}$$

i Milnove jednačine za fluks:

$$\begin{aligned} F_\nu(\tau_\nu) &= 2 \int_{-1}^1 I_\nu(\tau_\nu, \mu) \mu d\mu = \\ &= 2 \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu) E_2(t_\nu - \tau_\nu) dt_\nu - 2 \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) E_2(\tau_\nu - t_\nu) dt_\nu \end{aligned}$$

i za K_ν integral:

$$K_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2} \int_0^\infty S_\nu(t_\nu) E_3 |t_\nu - \tau_\nu| dt_\nu \quad .$$

Pošto se integrali u gornjim izrazima često sreću u teoriji prenosa zračenja, pisanje je skraćeno korišćenjem operatora:

$$\Lambda_\tau \{ \dots \} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \{ \dots \} E_1 |t - \tau| dt$$

$$\Phi_\tau \{ \dots \} = 2 \int_\tau^\infty \{ \dots \} E_2 (t - \tau) dt - 2 \int_0^\tau \{ \dots \} E_2 (\tau - t) dt$$

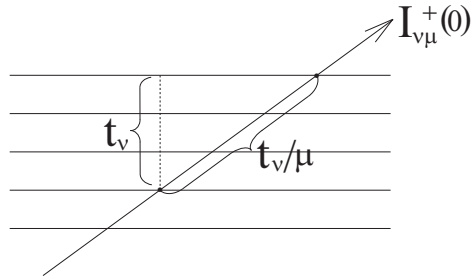
$$X_\tau \{ \dots \} = 2 \int_0^\infty \{ \dots \} E_3 |t - \tau| dt$$

Tako imamo:

$$J_\nu(\tau_\nu) = \Lambda_\tau \{ S_\nu(t_\nu) \}$$

$$F_\nu(\tau_\nu) = \Phi_\tau \{ S_\nu(t_\nu) \}$$

$$K_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{4} X_\tau \{ S_\nu(t_\nu) \} \quad .$$



Slika 11.

Veličina koju izračunavamo a koju poredimo sa posmatranjem je izlazni intenzitet zračenja (sa gornje granice atmosfere, $\tau_\nu = 0$):

$$I_\nu^+(0, \mu) = \int_0^\infty S_\nu(t_\nu) e^{-t_\nu/\mu} \frac{dt_\nu}{\mu}$$

odnosno izlazni fluks zračenja:

$$F_{\nu}^{+}(0) = 2 \int_0^1 I_{\nu}^{+}(0, \mu) \mu d\mu = 2 \int_0^{\infty} S_{\nu}(t_{\nu}) E_2(t_{\nu}) dt_{\nu} \quad .$$

Izlazni fluks predstavlja sumu funkcija izvora na svakoj dubini pomnoženih sa funkcijom $E_2(t_{\nu})$ koja obračunava apsorpciju od date dubine. Pritom se sumiranje vrši po svim dubinama sa kojih zračenje daje neki doprinos fluksu na površini.

Eddington-Barbier relacija

Vidimo da izlazni intenzitet zračenja

$$I_{\nu}^{+}(0, \mu) = \int_0^{\infty} S_{\nu}(t_{\nu}) e^{-t_{\nu}/\mu} \frac{dt_{\nu}}{\mu} \quad (*)$$

predstavlja težinsku srednju vrednost funkcije izvora duž pravca vizure. Težinska funkcija je deo energije emitovane na dubini t_{ν} koji stigne do površine duž optičkog puta t_{ν}/μ (slika 11).

Pretpostavimo sada da je funkcija izvora linearna funkcija optičke dubine:

$$S_{\nu}(\tau_{\nu}) = a_{\nu} + b_{\nu} \tau_{\nu} \quad .$$

Onda je izlazni intenzitet zračenja

$$I_{\nu}(0, \mu) = \int_0^{\infty} (a_{\nu} + b_{\nu} t_{\nu}) e^{-t_{\nu}/\mu} \frac{dt_{\nu}}{\mu} = a_{\nu} + b_{\nu} \mu$$

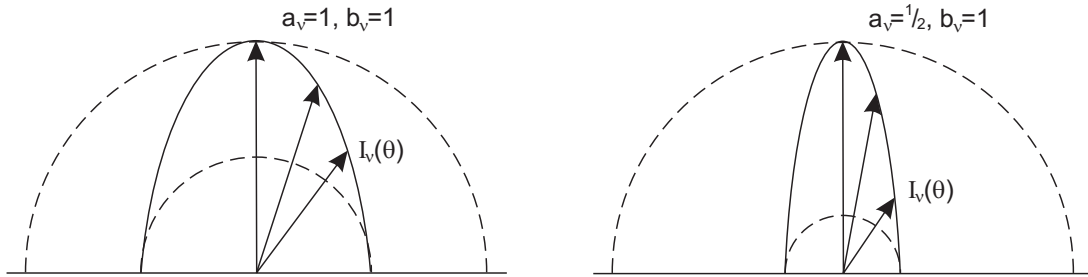
odnosno

$$I_{\nu}(0, \mu) = S_{\nu}(\tau_{\nu} = \mu) \quad ,$$

tj. jednak je vrednosti funkcije izvora na jediničnoj optičkoj dubini duž pravca vizure $(\tau_{\nu}/\mu = 1)^1$. Ova relacija se zove Eddington - Barbije relacija. Ona omogućava da se posmatrani specifični intenzitet zračenja neposredno poveže sa uslovima u atmosferi.

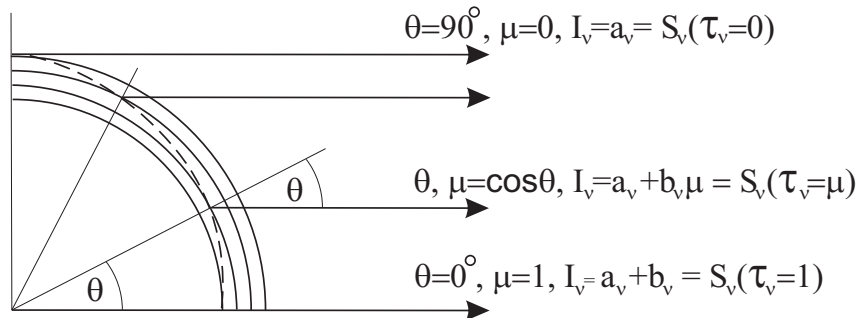
¹ Ako posmatramo zračenje u pravcu μ (koji sa normalom na sloj zaklapa ugao θ), jedinična optička dubina u pravcu vizure je na radijalnoj optičkoj dubini $\tau_{\nu} = \mu$ (sl. 11).

Izlazni intenzitet zračenja u raznim pravcima μ , tj. ugaona raspodela izlaznog intenziteta zračenja $I_\nu(0, \mu) = a_\nu + b_\nu \mu$, može se prikazati polarnim dijagramom za razne vrednosti koeficijenata a_ν i b_ν (sl.12).



Slika 12.

Sunce je jedina zvezda koja je dovoljno blizu da možemo videti njen disk i da možemo meriti intenzitet zračenja sa raznih tačaka njene površine. Pošto Sunce posmatramo sa velike udaljenosti možemo smatrati da su snopovi zračenja koje primamo iz raznih tačaka njegove površine paralelni. Gledajući ka centru Sunčevog diska mi vidimo zračenje koje izlazi u pravcu normale na njegovu površinu ($\theta = 0$), dok gledajući ka rubu vidimo zračenje koje izlazi pod uglom $\theta = 90^\circ$. Dakle, gledajući ka centru intenzitet zračenja je maksimalan: $I_\nu = a_\nu + b_\nu$, a ka rubu minimalan: $I_\nu = a_\nu$ (potamnjenje ka rubu). Intenzitet zračenja koje izlazi pod uglom θ u odnosu na lokalnu normalu predstavlja sjaj diska na ugaonom rastojanju θ od centra diska (sl. 13), pa $I_\nu^+(0, \mu)$ predstavlja raspodelu sjaja po disku Sunca.

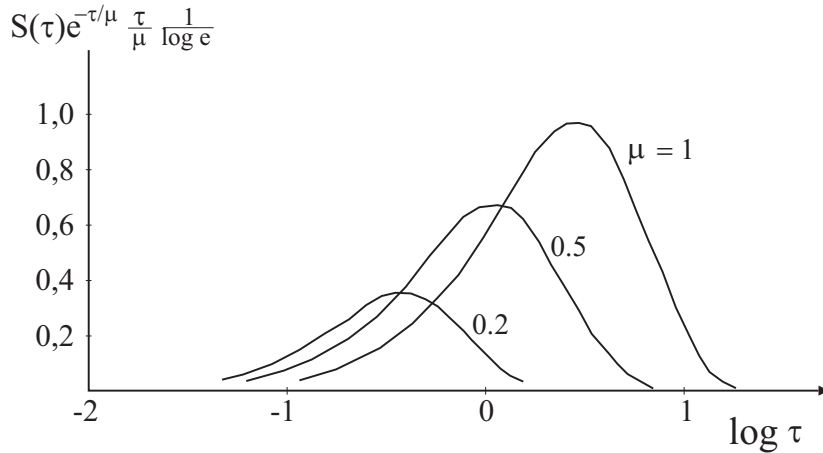


Slika 13.

Prema Edington–Barbije relaciji, vidimo da je u pravcu centra diska intenzitet zračenja jednak funkciji izvora S_ν na optičkoj dubini $\tau_\nu = 1$, a ka rubu jednak funkciji izvora S_ν na površini $\tau_\nu = 0$. Uzrok potamnjenja, dakle, leži u tome što se funkcija izvora $S(\tau_\nu)$ u atmosferi smanjuje sa smanjenjem

optičke dubine τ_ν . Pretpostavimo da je $S_\nu = B_\nu(T)$. Tada smanjenje $S_\nu(\tau_\nu)$ sa smanjenjem τ_ν potiče od opadanja temperature sa visinom u atmosferi. Gledajući ka centru posmatramo zračenje iz dubljih (toplijih) slojeva, dok gledajući ka rubu posmatramo više (hladnije) slojeve atmosfere. Tako, posmatrajući raspodelu sjaja po disku Sunca, od centra diska ($\mu = 1$) ka rubu ($\mu = 0$), mi zapravo dobijamo informaciju o raspodeli funkcije izvora sa dubinom $S(\tau_\nu)$, $0 \leq \tau_\nu \leq 1$. Aproximirajući funkciju izvora Plankovom funkcijom (LTR), dobijamo raspodelu temperature sa optičkom dubinom $T(\tau_\nu)$ (**empirijski model fotosfere**).

Pri primeni Edington - Barbije relacije ne treba zaboraviti da je ona izvedena pod pretpostavkom da je funkcija izvora linearna funkcija optičke dubine. U opštem slučaju, kao što vidimo iz jednačine (*), izlaznom intenzitetu zračenja ne daje doprinos samo funkcija izvora na dubini $\tau_\nu = \mu$, već svoj doprinos daju funkcije izvora i sa svih drugih dubina. Doprinos pojedinih slojeva izlaznom intenzitetu zračenja prikazan je na slici 14. Na slici su prikazane tzv. **funkcije doprinosa** – podintegralne funkcije u izrazu (*) za tri pravca ($\mu = 0.2, 0.5, 1$). Vidimo da je sa približavanjem ka rubu (npr. $\mu = 0.2$), intenzitet izlaznog zračenja (površina ispod krive) sve manji (potamnjenje ka rubu) i da se formira u sve višim slojevima (maksimum krive odgovara manjim τ).



Sl. 14.

Za razliku od Sunca, kod zvezda možemo posmatrati samo fluks zračenja (integral specifičnog intenziteta po svim pravcima $0 < \mu < 1$). Tada imamo:

$$\mathcal{F}_\nu(0) = \pi F_\nu(0) = 2\pi \int_0^1 I_{\nu\mu}^+(0) \mu d\mu = 2\pi \int_0^1 (a_\nu + b_\nu \mu) \mu d\mu = \pi(a_\nu + \frac{2}{3} b_\nu)$$

tj. Edington-Barbije relaciju za fluks:

$$F_\nu(0) = a_\nu + \frac{2}{3}b_\nu = S_\nu(\tau_\nu = \frac{2}{3}) \quad .$$

Fluks zračenja koji emituje jedinica površine zvezde jednak je funkciji izvora na optičkoj dubini $\tau_\nu = 2/3$.

Ako pretpostavimo LTR ($S_\nu(\tau_\nu) = B_\nu(\tau_\nu)$) imamo:

$$F_\nu(0) = B_\nu(T(\tau_\nu = 2/3))$$

da je izlazni fluks zračenja jednak Plankovoj funkciji na temperaturi koja je na monohromatskoj optičkoj dubini $\tau_\nu = 2/3$. Za razne frekvencije ν u spektru, optička dubina $\tau_\nu = 2/3$ se nalazi na raznim geometrijskim dubinama h . Zavisnost optičke dubine od ν potiče od zavisnosti koeficijenta ekstinkcije α_ν od ν (sredina je različito neprozračna za zračenje raznih frekvencija (talasnih dužina)). Zato pretpostavimo da imamo neki srednji koeficijent ekstinkcije α kome odgovara srednja optička dubina τ (aproksimacija sive atmosfere: $\alpha \neq f(\nu)$). U svojoj atmosferi optička dubina $\tau = 2/3$ se za svako ν nalazi na jednoj istoj geometrijskoj dubini.

Pretpostavljajući sivu atmosferu imamo da je:

$$F_\nu(0) = B_\nu(T(\tau = 2/3)) \quad ,$$

odnosno da je raspodela fluksa izlaznog zračenja po frekvencijama data raspodelom zračenja crnog tela na temperaturi koja je na dubini $\tau = 2/3$.

Ako uporedimo ovako dobijeni fluks zračenja (integraljen po svim frekvencijama):

$$\mathcal{F}(0) = \pi F(0) = \pi \int_0^\infty F_\nu(0) d\nu = \pi \int_0^\infty B_\nu(T(\tau = 2/3)) d\nu = \sigma T^4(\tau = 2/3)$$

sa fluksom zračenja zvezde po definiciji

$$\mathcal{F}(0) = \pi F(0) = \sigma T_{\text{ef}}^4$$

vidimo da je efektivna temperatura - temperatura na srednjoj optičkoj dubini $\tau = 2/3$:

$$T_{\text{ef}} = T(\tau = 2/3) \quad .$$

Sa te dubine verovatnoća bekstva fotona je 0.5 i ta se dubina može smatrati efektivnom dubinom formiranja kontinuuma.

Podsetimo se da su dobijeni rezultati izvedeni i da važe pod sledećim pretpostavkama:

- funkcija izvora je linearna funkcija optičke dubine,
- aproksimacija LTR,
- aproksimacija sive atmosfere.

Ravnoteža zračenja

Energija koja se u jezgru zvezde oslobadja TN reakcijama prenosi se ka spolja, napuštajući zvezdu po prolasku kroz spoljašnje slojeve (atmosferu).

U atmosferi zvezde nema izvora energije. Atmosfera samo prenosi ukupnu energiju koju prima iz dubljih slojeva ka spolja. Pošto možemo smatrati da se temperatura ni Sunca a ni ostalih stabilnih zvezda u toku vremena ne menja, to znači da se energija izračena na površini mora stalno nadoknadjivati iznutra, tj. da je količina energije koja odozdo udje u atmosferu u jedinici vremena jednaka količini energije koja u jedinici vremena izadje iz atmosfere. Odavde sledi da ukupan energetska fluks mora biti konstantan sa dubinom. Dok se iz sloja u sloj u atmosferi može menjati spektralna raspodela zračenja, kao i udeo radijativnog i neradijativnog (konvektivnog) načina prenosa energije, **ukupan energetska fluks mora ostati konstantan (uslov energetske ravnoteže).**

Dva su osnovna načina prenosa energije u zvezdanim atmosferama: zračenje i konvekcija. Kondukcija je neefikasna. Švarcsild je pokazao da u fotosferskim slojevima Sunca dominira prenos energije zračenjem. Tada se uslov energetske ravnoteže svodi na uslov radijativne ravnoteže (ravnoteže zračenja). Mnoge analize izvršene od tada pokazale su da za zvezde slične Suncu radijativna ravnoteža postoji do $\tau = 1$, dok ispod tog sloja zbog jonizacije vodonika atmosfera postaje nestabilna na konvekciju. Kod svih zvezda spektralnih klasa poznijih od F5 ispod fotosfere postoje konvektivne zone. Kod zvezda ranijih spektralnih klasa radijativna ravnoteža postoji unutar celog spoljašnjeg omotača zvezde.

Formulišimo uslov ravnoteže zračenja matematički. Da bi unutar nekog elementa zapremine temperatura ostala konstantna potrebno je da je ukupna količina energije koju taj element primi u jedinici vremena jednaka ukupnoj količini energije koju u jedinici vremena izgubi. Kako se energija prenosi prvenstveno zračenjem ovaj uslov energetske ravnoteže se svodi na uslov ravnoteže zračenja, pa imamo da ukupna količina energije koju element za-

premine u jedinici vremena apsorbuje mora biti jednaka ukupnoj količini energije koju u jedinici vremena emituje:

$$E^{\text{aps}} = E^{\text{em}} \quad . \quad (1)$$

Posmatrajmo element zapremine cilindričnog oblika površine osnove $d\sigma$ i visine ds i zračenje koje pada pod nekim uglom θ na površinu osnove. Od količine energije $dE_\nu = I_{\nu\mu} d\sigma \cos\theta d\omega d\nu dt$ unutar frekventnog intervala $d\nu$ koja ulazi unutar prostornog ugla $d\omega$ za vreme dt , element gasa koeficijenta ekstinkcije α_ν će na putu $ds/\cos\theta$ apsorbovati deo:

$$dE_\nu^{\text{aps}} = \alpha_\nu dE_\nu ds / \cos\theta = \alpha_\nu I_{\nu\mu} ds d\sigma d\omega d\nu dt$$

odnosno na svim frekvencijama i u svim prostornim uglovima

$$E^{\text{aps}} = d\sigma ds dt \int_0^\infty d\nu \int \alpha_\nu I_{\nu\mu} d\omega \quad .$$

Ako je

$$dE_\nu^{\text{em}} = e_\nu d\sigma ds d\omega d\nu dt$$

količina energije koju emituje element gasa zapremine $d\sigma ds$ unutar prostornog ugla $d\omega$, frekventnog intervala $d\nu$ za isto vreme dt , onda se za ukupnu količinu energije koju emituje cilindrična zapremina na svim frekvencijama i svim prostornim uglovima dobija:

$$E^{\text{em}} = d\sigma ds dt \int_0^\infty d\nu \int e_\nu d\omega \quad .$$

Zamenom u (1) sledi uslov ravnoteže zračenja u obliku:

$$\int_0^\infty \int \alpha_\nu I_{\nu\mu} d\nu d\omega = \int_0^\infty \int e_\nu d\nu d\omega \quad . \quad (2)$$

Jednačina prenosa zračenja i uslov ravnoteže zračenja su osnovne jednačine teorije zvezdanih atmosfera.

U slučaju da su koeficijenti prenosa (koeficijent ekstinkcije i emisije) izotropni ($\neq f(\mu)$) imamo:

$$\int_0^\infty \alpha_\nu J_\nu d\nu = \int_0^\infty \alpha_\nu S_\nu d\nu \quad . \quad (3)$$

Posledice ravnoteže zračenja:

1) Integralimo jednačinu prenosa zračenja u obliku:

$$\mu \frac{dI_\nu(h, \mu)}{dh} = \alpha_\nu(h) I_\nu(h, \mu) - e_\nu(h)$$

po svim frekvencijama i svim prostornim uglovima. Imamo da je

$$\frac{d}{dh} \int_0^\infty d\nu \int I_\nu(h, \mu) \mu d\omega = \frac{d}{dh} \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu(h) d\nu = 0$$

odnosno da se ukupan fluks zračenja u plan-paralelnoj atmosferi ne menja sa dubinom:

$$\mathcal{F}(h) = \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu(h) d\nu = \pi F(h) = \text{const} \quad . \quad (4)$$

Integralni fluks je karakteristika jedne zvezde, odnosno njene atmosfere. Spektralni sastav zračenja se menja sa dubinom (na većim dubinama, višim temperaturama, dominira zračenje viših frekvencija), ali ukupni fluks ostaje konstantan. Umesto njega se, kao karakteristika zvezde, češće koristi efektivna temperatura T_{ef} koja se može smatrati nekom vrstom srednje temperature fotosfere ili onog atmosferskog sloja koji emituje najveći deo zračenja. Ona se definiše kao temperatura apsolutno crnog tela koje sa jedinice površine izrači u jedinici vremena istu količinu energije kao zvezda:

$$\mathcal{F}^{C.T.} = \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu d\nu = \pi \int_0^\infty I_\nu d\nu = \pi \int_0^\infty B_\nu d\nu = \sigma T^4$$

$$\mathcal{F}_* = \pi F = \sigma T_{ef}^4 \quad .$$

2) Integralimo sada jednačinu prenosa zračenja u obliku:

$$\mu \frac{1}{\alpha_\nu(h)} \frac{dI_\nu(h, \mu)}{dh} = I_\nu(h, \mu) - S_\nu(h)$$

primenjujući $\int d\nu \int \mu d\omega$. Imamo:

$$\mathcal{F} = 4\pi \int \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{dK_\nu}{dh} d\nu = c \int \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{dp_\nu}{dh} d\nu = \text{const} \quad . \quad (5)$$

Da bismo integralili po ν moramo znati $\alpha_\nu(\nu)$. Najjednostavnije je da pretpostavimo da $\alpha_\nu = \alpha \neq f(\nu)$ (aproksimacija sive atmosfere).

Onda imamo:

$$\mathcal{F} = c \frac{1}{\alpha} \frac{dp^{zr}}{dh} \quad .$$

Pritisak zračenja možemo izraziti pomoću K-integrala

$$p^{zr} = \frac{4\pi}{c} K$$

koji se na velikim optičkim dubinama (izotropno zračenje) može aproksimativno pisati kao

$$K \approx \frac{1}{3} J \approx \frac{1}{3} B = \frac{1}{3} \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

tako da najzad imamo

$$\mathcal{F} = \frac{c}{\alpha} \frac{4\pi}{c} \frac{4}{3\pi} \sigma T^3 \frac{dT}{dh} = \frac{16}{3} \frac{\sigma}{\alpha} T^3 \frac{dT}{dh} \quad . \quad (6)$$

Vidimo da je energetski fluks povezan sa gradijentom temperature. Protok termalne energije se vrši samo u pravcu opadanja temperature (prenos energije u zvezdanoj atmosferi zahteva da temperatura u njoj opada ka spolja). Da bi se prenela veća količina energije potreban je strmiji gradijent temperature, a ako je prenos energije iz nekog razloga otežan (veće α) potreban je takodje strmiji gradijent temperature da bi se prenela ista količina energije. Činjenica da je temperaturski gradijent u atmosferi određen ukupnim energetske fluksom (6) omogućava da se teorijska temperaturska stratifikacija u atmosferi dobije iz uslova ravnoteže zračenja.

Temperaturska stratifikacija u sivoj atmosferi u LTR i u ravnoteži zračenja

Pretpostavljajući da je atmosfera siva najpre ćemo iz uslova ravnoteže zračenja izvesti zakon promene funkcije izvora sa dubinom $S(\tau)$. Zatim ćemo, pretpostavljajući LTR ($S(\tau) = B(T(\tau))$), povezati S sa temperaturom T kako bismo dobili raspodelu temperature sa optičkom dubinom (temperatursku stratifikaciju u sivoj atmosferi).

Rešenje u sivoj atmosferi

Pretpostavljajući da koeficijent ekstinkcije ne zavisi od frekvencije ($\alpha_\nu \neq f(\nu)$), jednačina prenosa zračenja postaje:

$$\mu \frac{1}{\alpha(h)} \frac{dI_\nu(h, \mu)}{dh} = I_\nu(h, \mu) - S_\nu(h) \quad .$$

Umesto skale monohromatske optičke dubine (za svaku frekvenciju ν) sada imamo jednu, srednju, skalu optičke dubine

$$d\tau = \alpha dh \quad .$$

Integracijom jednačine prenosa po svim frekvencijama i uvođenjem integralnih veličina

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu \quad , \quad S = \int_0^\infty S_\nu d\nu$$

dobijamo za svaki pravac μ po jednu jednačinu:

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = I(\tau, \mu) - S(\tau) \quad .$$

Pretpostavljamo da su koeficijenti prenosa nezavisni od pravca, pa je i funkcija izvora izotropna.

Uslov ravnoteže zračenja (3) sa pretpostavkom da $\alpha_\nu \neq f(\nu)$ postaje

$$J(\tau) = S(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) d\mu \quad . \quad (7)$$

Tako se može napisati tzv. Milnova jednačina

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = I(\tau, \mu) - J(\tau)$$

čije rešenje zadovoljava istovremeno i jednačinu prenosa zračenja i uslov ravnoteže zračenja.

Ona se u integralnom obliku može pisati kao

$$J(\tau) = \Lambda_\tau \{S(t)\} = \Lambda_\tau \{J(t)\} = \frac{1}{2} \int_0^\infty J(t) E_1|t - \tau| dt \quad .$$

Tačno rešenje ove jednačine je dao Hopff. Nulti moment gornje diferencijalne jednačine (primena $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu$) je:

$$\frac{1}{4} \frac{dF}{d\tau} = 0$$

odakle sledi $F = \text{const.}$ Prvi moment (primena $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu d\mu$) je:

$$\frac{dK}{d\tau} = \frac{F}{4}$$

odakle sledi tačan integral:

$$K(\tau) = \frac{1}{4}F\tau + C \quad . \quad (8)$$

S druge strane, uslov radijativne ravnoteže za sivu atmosferu (7) glasi:

$$S(\tau) = J(\tau) \quad .$$

Da bismo dobili $S(\tau)$ tj. $J(\tau)$ potrebna je veza izmedju $J(\tau)$ i $K(\tau)$. Pretpostavimo da se intenzitet zračenja može aproksimirati kao linearna funkcija pravca (što je dobra aproksimacija na velikim optičkim dubinama gde je anizotropnost polja zračenja mala):

$$I(\tau, \mu) = I_0(\tau) + I_1(\tau)\mu \quad .$$

Tada, iz definicionih izraza za momente specifičnog intenziteta zračenja dobijamo:

$$J(\tau) = I_0(\tau)$$

$$F(\tau) = \frac{4}{3}I_1(\tau)$$

i

$$K(\tau) = \frac{1}{3}I_0(\tau) = \frac{1}{3}J(\tau) \quad .$$

J i K su na velikim optičkim dubinama linearne funkcije τ . Medjutim, kako je blizu površine anizotropnost zračenja najveća, aproksimacija $J = 3K$ je gruba i sledi da linearna zavisnost J od τ ne važi za celu atmosferu.

Metodom diskretnih ordinata može se dobiti tačno rešenje koje je dobio Hopf:

$$J(\tau) = \frac{3}{4}F(\tau + q(\tau)) \quad (9)$$

gde je $q(\tau)$ - Hopfova funkcija. Na površini je njena vrednost $q(0) = 1/\sqrt{3} = 0.57$, a na velikim $\tau \rightarrow \infty, q(\infty) = 0.71$.

Konstanta C u izrazu za $K(\tau)$ se onda može dobiti iz veze između $J(\tau)$ i $K(\tau)$ na velikim optičkim dubinama (iz donjeg graničnog uslova):

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} [3K(\tau) - J(\tau)] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\frac{3}{4}F\tau + C' - \frac{3}{4}F\tau - \frac{3}{4}Fq(\tau)] = 0$$

odakle sledi da je $C = \frac{1}{3}C' = \frac{1}{4}Fq(\infty)$. Tako imamo:

$$K(\tau) = \frac{1}{4}F[\tau + q(\infty)] \quad . \quad (10)$$

Iz uslova ravnoteže zračenja sledi zakon promene funkcije izvora sa optičkom dubinom:

$$S(\tau) = J(\tau) = \frac{3}{4}F[\tau + q(\tau)] \quad .$$

Ako još pretpostavimo da važi LTR ($S(\tau) = B(\tau)$) dobijamo i raspodelu temperature sa dubinom u sivoj atmosferi u LTR i ravnoteži zračenja (R.Z):

$$S(\tau) = B(\tau) = \frac{\sigma T^4(\tau)}{\pi} = \frac{3}{4} \frac{\sigma T_{ef}^4}{\pi} [(\tau + q(\tau))] \quad ,$$

tj.

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4}T_{ef}^4 [(\tau + q(\tau))] \quad . \quad (11)$$

Aproksimativna rešenja sivog problema

Potrebno je rešiti jednačinu prenosa zračenja:

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = I(\tau, \mu) - S(\tau) \quad (12)$$

zajedno sa uslovom ravnoteže zračenja:

$$S(\tau) = J(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) d\mu \quad . \quad (13)$$

Vidimo da zamenjujući jedn.(13) u jedn. (12) dobijamo integro-diferencijalnu jednačinu. Da bismo je numerički rešili neophodno je da izvršimo

diskretizaciju promenljivih. Tako, integral po pravcima zamenjujemo kvadraturnom sumom i dobijamo sistem od NP integro-diferencijalnih jednačina, gde je NP ukupan broj pravaca za koje tražimo rešenje. Da bismo dobili što tačnije rešenje potrebno je da broj pravaca (kvadraturnih tačaka) bude što veći.

Medjutim, sa izvesnim usrednjavanjima intenziteta po pravcima mogu se dobiti jednostavna aproksimativna rešenja koja dosta jasno ilustruju uslove u zvezdanim atmosferama.

Švarcšild - Šuster-ov metod

Izvršimo usrednjavanje intenziteta zračenja po polusferama, za izlazno

$$I^+(\tau) = \int_0^1 I(\tau, \mu) d\mu$$

i za ulazno zračenje:

$$I^-(\tau) = \int_{-1}^0 I(\tau, \mu) d\mu \quad .$$

Integraleći (12) prvo po $\int_0^1 d\mu$ i koristeći $\int_0^1 I(\tau, \mu) \mu d\mu \approx \bar{\mu}^+ \int_0^1 I(\tau, \mu) d\mu = \bar{\mu}^+ I^+(\tau)$ gde je $\bar{\mu}^+ = \int_0^1 \mu d\mu = 1/2$, imamo:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} I^+(\tau) = I^+(\tau) - S(\tau) \quad .$$

Integraleći zatim (12) po $\int_{-1}^0 d\mu$ slično dobijamo:

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} I^-(\tau) = I^-(\tau) - S(\tau) \quad .$$

Sabiranjem ovih dveju jednačina za usrednjene intenzitete po pravcima gornje, odnosno donje polusfere, imamo:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} [I^+(\tau) - I^-(\tau)] = [I^+(\tau) + I^-(\tau)] - 2S(\tau) \quad .$$

S obzirom da je $S(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) d\mu = \frac{1}{2} (I^+(\tau) + I^-(\tau))$ desna strana prethodnog izraza je jednaka nuli, pa sledi da je $I^+(\tau) - I^-(\tau) = \text{const.}$ Može se pokazati da je ova razlika izlaznog i ulaznog usrednjenog zračenja jednaka astrofizičkom fluksu:

$$F(\tau) = 2 \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) \mu d\mu = 2 \cdot \frac{1}{2} [I^+(\tau) - I^-(\tau)] \quad .$$

Oduzimanjem dveju jednačina imamo:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} [I^+(\tau) + I^-(\tau)] = I^+(\tau) - I^-(\tau) = F \quad ,$$

odakle sledi da je

$$\frac{1}{2} [I^+(\tau) + I^-(\tau)] = S(\tau) = F\tau + C \quad .$$

Konstanta integracije C se određuje iz uslova na granici. Na gornjoj granici je:

$$C = S(0) = \frac{1}{2} I^+(0) = \frac{1}{2} F$$

pa je, konačno, rešenje za funkciju izvora u sivoj atmosferi u ravnoteži zračenja dato sa:

$$S(\tau) = F\left(\tau + \frac{1}{2}\right) \quad .$$

Eddingtonovo rešenje

Eddington je pretpostavio da aproksimacija $J(\tau) = 3K(\tau)$, za koju smo videli da je dobra na velikim optičkim dubinama, važi svuda u atmosferi.

Primenjujući $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu$ na jedn. (12) imamo:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) \mu d\mu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) d\mu - S(\tau) \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu$$

odnosno

$$\frac{1}{4} \frac{dF}{d\tau} = J(\tau) - S(\tau) = 0$$

odakle imamo da je $F = \text{const.}$

Primenjujući sada $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu d\mu$ na (12) imamo:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) \mu^2 d\mu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) \mu d\mu - S(\tau) \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu d\mu$$

odnosno

$$\frac{dK(\tau)}{d\tau} = \frac{F}{4} \quad .$$

K-integral možemo aproksimirati na sledeći način:

$$K(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) \mu^2 d\mu \approx \frac{1}{2} \bar{\mu}^2 \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) d\mu = \frac{1}{3} J(\tau) = \frac{1}{3} S(\tau) ,$$

gde je $\bar{\mu}^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu = \frac{1}{3}$. Iz

$$\frac{1}{3} \frac{dS(\tau)}{d\tau} = \frac{F}{4}$$

sledi da je

$$S(\tau) = \frac{3}{4} F \tau + C$$

gde se C dobija iz uslova na $\tau = 0$: $C = S(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 I(0, \mu) d\mu = \frac{F}{2}$ s obzirom da je $F = 2 \int_0^1 I(0, \mu) \mu d\mu = 2\bar{\mu} \int_0^1 I(0, \mu) d\mu = \int_0^1 I(0, \mu) d\mu = 2J(0)$. Tako, konačno, imamo:

$$S(\tau) = \frac{3}{4} F \left(\tau + \frac{2}{3} \right) .$$

Aproksimacija $K(\tau) = \frac{1}{3} J(\tau)$ se naziva Edingtonova I aproksimacija, a $F = 2J(0)$ Edingtonova II aproksimacija.

Tako, umesto tačne Hopfove funkcije $q(\tau)$, dobijamo da je $q(\tau) = 2/3$. Najveća greška dobijenog aproksimativnog rešenja za funkciju izvora je na površini $(\frac{\Delta J}{J})_{\tau=0} = \frac{J^{Ed} - J^{ex}}{J^{ex}} = \frac{2/3 - q(0)}{q(0)} = 0.15$ (15%). Pošto izvršimo jednu Λ iteraciju greška se smanjuje na svega 1%.

Pretpostavljajući da važi LTR: $S(\tau) = B(\tau) = \sigma T^4 / \pi$, dobijamo Edingtonovo rešenje za raspodelu temperature sa optičkom dubinom u svojoj atmosferi u ravnoteži zračenja i LTR:

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4} T_{ef}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right) .$$

Vidimo da je $T = T_{ef}$ na $\tau = 2/3$ (mesto formiranja kontinuuma). Odnos površinske i efektivne temperature u Edingtonovom rešenju je: $T(0)/T_{ef} = (1/2)^{1/4} = 0.841$, dok tačno rešenje sa $q(0) = 1/\sqrt{3}$ daje: $T(0)/T_{ef} = (\sqrt{3}/4)^{1/4} = 0.8114$.

Potražimo još raspodelu sjaja po disku Sunca, pretpostavljajući da se funkcija izvora sa optičkom dubinom menja prema Švarcsild-Šusterovom (SS), odnosno prema Edingtonovom rešenju (Ed) (linearna funkcija optičke dubine). Iz $I(0, \mu) = \int_0^\infty S(t) e^{-t/\mu} dt / \mu$ sledi da je

$$I^{SS}(0, \mu) = F \left(\mu + \frac{1}{2} \right) ,$$

odnosno

$$I^{Ed}(0, \mu) = \frac{3}{4} F(\mu + \frac{2}{3}) \quad .$$

Zakon potamnjenja ka rubu je onda:

$$\frac{I(0, \mu)}{I(0, 1)} = \frac{2}{3}(\mu + \frac{1}{2})$$

za Švarcšild–Šusterovo rešenje, odnosno

$$\frac{I(0, \mu)}{I(0, 1)} = \frac{3}{5}(\mu + \frac{2}{3})$$

za Edingtonovo rešenje. Vidimo da je na samom rubu $I^{SS}(0, 0) = 0.33 I(0, 1)$, odnosno $I^{Ed}(0, 0) = 0.40 I(0, 1)$. Prema Edingtonovom rešenju intenzitet zračenja sa ruba Sunčevog diska je 40% centralnog intenziteta, što je u dobroj saglasnosti sa posmatranjem Sunca u vidljivom delu spektra (vidi tablicu¹).

μ	posmatranje	R.Z. (Š–Š)	R.Z. (Ed)	K.R.
1	1	1	1	1
0.8	0.92	0.87	0.88	0.8
0.6	0.81	0.73	0.76	0.6
0.44	0.70	0.63	0.66	0.44
0.2	0.49	0.47	0.52	0.20
0	0.40	0.33	0.40	0

Još nekoliko reči o vezi gradijenta temperature i fluksa.

Na velikim optičkim dubinama ($\tau \gg 1$) možemo smatrati da su ispunjeni uslovi LTR ($S(\tau) = B(\tau)$). Ako integralimo jednačinu prenosa zračenja:

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = I(\tau, \mu) - B$$

¹ Švarcšildov rad iz 1906. godine u kome je on uvodeći pretpostavku ravnoteže zračenja izveo zakon potamnjenja ka rubu završava se tablicom u kojoj poredi posmatrano Sunčevo potamnjenje ka rubu sa rezultatom zasnovanim na pretpostavci ravnoteže zračenja (R.Z) i konvektivne ravnoteže (K.R). Poređenje sa posmatranjem je pokazalo da u fotosferi važi radijativna ravnoteža, a ne konvektivna kako se očekivalo na osnovu posmatrane Sunčeve granulacije. Adijabatski gradijent je strmiji i dovodi do jakog potamnjenja ka rubu ($\frac{I(0, \mu)}{I(0, 1)} = \mu^{4\frac{\gamma-1}{\gamma}}$).

po pravcima, koristeći $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu d\mu$ dobijamo poznati rezultat:

$$\frac{dK}{d\tau} = \frac{F}{4} \quad .$$

Koristeći $K = \frac{1}{3}J = \frac{1}{3}B$ odavde imamo:

$$F = 4 \frac{dK}{d\tau} = \frac{4}{3} \frac{dB}{d\tau} = -\frac{4}{3} \frac{1}{\alpha} \frac{dB}{dT} \frac{dT}{dz} \quad .$$

Ovo je jednačina difuzije. Činjenica da postoji fluks zračenja koji napušta zvezdu govori o gradijentu temperature i o porastu temperature ka unutra. Ova jednačina opisuje sporo isticanje (difuziju) zračenja iz rezervoara velikog kapaciteta.

Istu jednačinu dobijamo i ako, kao što smo već činili, aproksimiramo intenzitet zračenja na velikim optičkim dubinama sledećim izrazom:

$$I(\tau, \mu) \approx S(\tau) + \mu \frac{dS}{d\tau} = B(\tau) + \mu \frac{dB}{d\tau} \quad .$$

Momenti specifičnog intenziteta zračenja su onda:

$$\begin{aligned} J(\tau) &= B(\tau) \\ \frac{F(\tau)}{4} &= \frac{1}{3} \frac{dB}{d\tau} \\ K(\tau) &= \frac{1}{3} B(\tau) \quad . \end{aligned}$$

Izraz za fluks je identičan prethodnoj jednačini difuzije.

Koristeći izraz za fluks, izraz za specifični intenzitet zračenja možemo prepisati kao:

$$I(\tau, \mu) = B(\tau) + \frac{3}{4} F \mu \quad ,$$

odnosno kao:

$$I(\tau, \mu) = B(\tau) + \frac{3}{4} F \mu = I_0(\tau) + I_1(\tau) \mu$$

gde smo sa $I_0(\tau)$ i $I_1(\tau)$ označili izotropni, tj. anizotropni član intenziteta. Odnos anizotropnog i izotropnog člana je onda

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{3F}{4B} = \frac{3}{4} \left(\frac{T_{ef}}{T} \right)^4 \quad .$$

Vidimo da je na velikim optičkim dubinama gde je $T \gg T_{ef}$, anizotropnost sve manja. Isto važi i za odnos brzine isticanja energije i samog energetskeg sadržaja (gustine energije zračenja):

$$\frac{\pi F/c}{\frac{4\pi}{c} B} = \frac{1}{4} \left(\frac{T_{ef}}{T} \right)^4 \quad .$$

Koeficijent apsorpcije u kontinuumu

Slabljenje zračenja pri prolasku kroz neku sredinu zavisi od frekvencije zračenja i od svojstava same sredine.

Da bismo odredili neprozračnost neke sredine za zračenje frekvencije ν , moramo izračunati koliki je deo ukupnog broja čestica sposoban da apsorbuje na toj frekvenciji. Na primer, da bismo izračunali koeficijent ekstinkcije na $\lambda = 656.3 \text{ nm}$, koja odgovara Balmerovoj liniji vodonika $H\alpha$, moramo znati koliki se deo vodonikovih atoma nalazi u neutralnom stanju i koji je deo vodonikovih atoma od toga ekscitovan na drugi energetske nivo. Apsorpcija pri slobodno-slobodnim prelazima zavisi od brzine slobodnog elektrona, pa je potrebno znati i raspodelu slobodnih elektrona po brzinama. Dakle, da bismo odredili koeficijent ekstinkcije moramo znati stepen ekscitacije, stepen jonizacije i raspodelu po brzinama.

Pre nego što definišemo koeficijent apsorpcije u kontinuumu, opišimo sve relevantne procese u atomu.

Procese u atomu najjednostavnije možemo prikazati koristeći Borov model atoma. Razmatraćemo, jednostavnosti radi, vodonik i vodoniku slične jone, tj. jone koji su izgubili sve sem jednog elektrona.

Ukupna energija elektrona vezanog na n -toj orbiti u atomu jednaka je zbiru njegove kinetičke i potencijalne energije i data je sa:

$$E_n = -\frac{Ze^2}{2r_n} < 0$$

Zamenom izraza za radijus n -te orbite (koji dobijamo koristeći postulat kvantovanja ugaonog momenta: $mv_n r_n = n\frac{h}{2\pi}$ i koristeći $\frac{mv_n^2}{r_n} = \frac{Ze^2}{r_n^2}$) imamo

$$E_n = -\frac{C}{n^2}$$

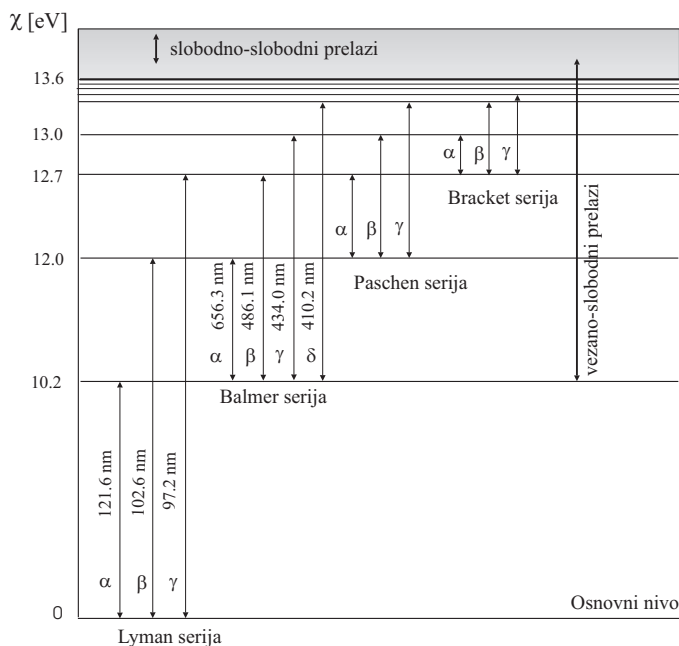
tako da je $E_1 = -13.6 \text{ eV}$, a $E_\infty = 0$. Energija slobodnog elektrona (koji nije vezan u atomu) je pozitivna ($E_{\text{kin}} > E_{\text{pot}}$). Pošto nije vezan za atom, elektron može imati bilo koju energiju $E > 0$.

S druge strane, potencijal ekscitacije na n -ti nivo je:

$$\chi_n = E_n - E_1 = C(1 - \frac{1}{n^2}) > 0 \quad .$$

Tako je $\chi_1 = 0$, a $\chi_\infty = C = -E_1 = 13.6\text{eV}$. Dakle, potencijal ekscitacije je:

$$\chi_n = \chi_\infty \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) .$$



Sl. 17

Do prelaza sa i -tog na k -ti nivo ($i < k$) može doći kada atom primi energiju ili u sudaru ili apsorpcijom fotona energije

$$h\nu_{ik} = \chi_k - \chi_i$$

tj.

$$h\nu_{ik} = \chi_\infty \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right) .$$

U zavisnosti od toga da li su i -ti i k -ti nivoi vezani (b-bound) ili slobodni (f-free) doći će do tri moguće vrste prelaza: (a) vezano-vezani (b-b); (b) vezano-slobodni (b-f) i (c) slobodno-slobodni (f-f) prelazi.

Svi prelazi (apsorpcije/emisije) unutar jonizacije granice se nazivaju vezano-vezani i oni definišu linijski spektar.

Sada ćemo detaljnije razmotriti one prelaze koji dovode do apsorpcije/emisije zračenja na nekoj frekvenciji ν u neprekidnom spektru. To su: vezano-slobodni (slobodno-vezani) i slobodno-slobodni prelazi.

U vezano-slobodnim prelazima elektrona dolazi do jonizacije atoma. Proces apsorpcije fotona čija je energija $h\nu$ veća od energije veze elektrona u atomu (energije jonizacije sa n -tog nivoa)¹:

$$h\nu \geq \chi_\infty - \chi_n$$

tako da se deo energije apsorbovanog fotona troši na kinetičku energiju slobodnog elektrona

$$h\nu = (\chi_\infty - \chi_n) + \frac{1}{2}mv^2$$

naziva se **fotojonizacija**. Pošto foton koji jonizuje atom može imati bilo koju vrednost energije $h\nu \geq \chi_\infty - \chi_n$, ovaj proces doprinosi apsorpciji zračenja u neprekidnom spektru. Suprotan proces zahvata slobodnog elektrona proizvoljne kinetičke energije jonom uz emisiju zračenja naziva se **rekombinacija**. Konačno, slobodno-slobodni prelazi su prelazi pri kojima

¹ Minimalna (granična) frekvencija koju moraju imati fotoni da bi doveli do jonizacije atoma sa n -tog nivoa nalazimo iz:

$$h\nu_g = \chi_\infty - \chi_n = \chi_\infty - \chi_\infty\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \chi_\infty \frac{1}{n^2}$$

odakle je

$$\nu_g = \frac{\chi_\infty}{h} \frac{1}{n^2} \quad .$$

Odnosno, svi fotoni $\lambda < \lambda_g = \frac{c}{\nu_g} = 91.2 \frac{n^2}{Z^2} [nm]$ dovešće do fotojonizacije atoma.

Granice serija

Seriya	n	$\lambda_g [nm]$
Lyman	1	91.2
Balmer	2	364.6
Paschen	3	820.4
Brackett	4	1459.0
Pfund	5	2279.0

Cela Lyman serija linija ($91.2 < \lambda < 121.6nm$) leži u UV oblasti, Balmerova serija linija ($364.6nm < \lambda < 656.3nm$) u vidljivoj i bliskoj UV, dok ostale leže u IC oblasti spektra. Kontinualna apsorpcija u vidljivom delu spektra potiče uglavnom od Paschen-ovog kontinuuma ($\lambda < 820.4nm$), tj. od prelaza sa $n = 3$. Balmerov kontinuum je u UV ($\lambda < 364.6nm$).

elektron menja kinetičku energiju na račun energije apsorbiranog/emitiranog fotona. I ovde se mogu apsorbovati/emitovati fotoni bilo koje frekvencije

$$h\nu = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2 \quad .$$

Verovatnoće svih ovih prelaza karakterišu se odgovarajućim koeficijentima.

Pošto je vodonik najobilniji, najvažniji u apsorpciji i najjednostavniji (teorijski) definićemo koeficijent apsorpcije k_ν za jedan atom vodonika, tj. za vodoniku slične jone, sa samo jednim elektronom koji se kreće u polju naelektrisanja Ze po orbiti glavnog kvantnog broja n .

Vezano–slobodni prelazi

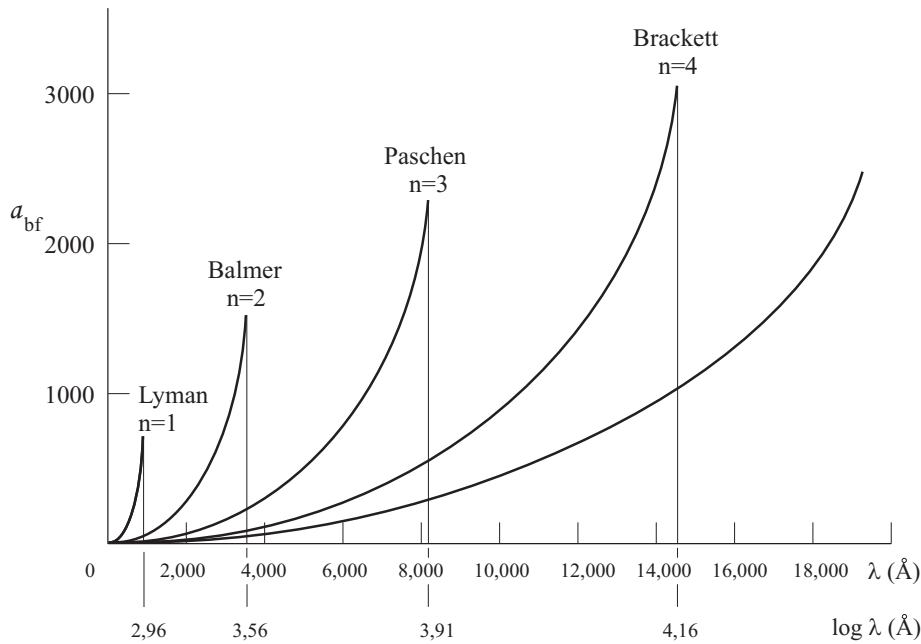
Klasični izraz za koeficijent apsorpcije pri vezano-slobodnom prelazu (b-f) po jednom atomu vodonika u stanju sa glavnim kvantnim brojem n izveo je Kramers (1923) i modifikovao Gaunt (1930):

$$k_\nu^{b-f} = Cg_{bf} \frac{1}{\nu^3 n^5}, (\nu \geq \nu_g)$$

Gaunt faktor g_{bf} je ≈ 1 za frekvencije u optičkom delu spektra. ν_g je najmanja frekvencija koju foton mora imati da bi jonizovao atom sa n -tog nivoa. Za ν_g , atomski koeficijent apsorpcije je, s obzirom da je $\nu_g \propto \frac{1}{n^2}$, dat sa:

$$k_{\nu_g}^{b-f} \propto n \quad .$$

Vidimo da za frekvencije koje odgovaraju granicama serija atomski koeficijent apsorpcije raste sa porastom glavnog kvantnog broja, dok za $\nu \geq \nu_g$ opada kao ν^{-3} . Na slici je prikazana njegova zavisnost od λ .



Sl.18.

Da bi se dobio ukupni (zapreminski) koeficijent apsorpcije na datoj frekvenciji ν u kontinuumu potrebno je obračunati sve vezano-slobodne prelaze sa svih nivoa $n \geq n_g$, gde je n_g - glavni kvantni broj najnižeg nivoa sa koga se atom može jonizovati apsorpcijom fotona frekvencije ν . Doprinos apsorpcije sa n -tog nivoa, naseljenosti n_n , data je izrazom:

$$k_{\nu}^{b-f} \cdot n_n = C \frac{g_{bf}}{\nu^3 n^5} \frac{n_1}{g_1} g_n e^{-\chi_n/kT} .$$

Ukupnom zapreminskom koeficijentu apsorpcije na frekvenciji ν daju svoj doprinos svi prelazi sa svih nivoa $n \geq n_g$ tako da imamo:

$$\alpha_{\nu}^{b-f} = \sum_{n=n_g}^{\infty} k_{\nu}^{b-f} n_n = C' \frac{n_1}{g_1} \frac{1}{\nu^3} \sum_{n=n_g}^{\infty} \frac{g_n}{n^5} g_{bf} e^{-\frac{\chi_n}{kT}} .$$

Pošto se $\frac{n_1}{g_1}$ može izraziti pomoću Bolcman-Sahine formule preko elektronske n_e i jonske n^+ koncentracije imamo:

$$\alpha_{\nu}^{b-f} = f(n_e, n^+, T, \nu) ,$$

tj. da je zapreminski koeficijent apsorpcije u kontinuumu koji potiče od vezano-slobodnih prelaza funkcija ν, n_e, n^+ i T .

Slobodno–slobodni prelazi

Pri sudaru sa jonom elektron menja svoju trajektoriju i brzinu. Za vreme sudara elektron može da apsorbuje foton čija energija ide na povećanje kinetičke energije elektrona:

$$h\nu = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2 \quad .$$

Apsorpcija zavisi od brzine elektrona jer se pri manjoj brzini elektrona povećava verovatnoća apsorpcije fotona. Kramers je dao izraz za atomski koeficijent apsorpcije usled slobodno–slobodnih prelaza elektrona čija je brzina u intervalu $(v, v + dv)$:

$$dk_\nu^{f-f} = C'' Z_{ef}^2 g_{ff} \frac{1}{v} \frac{1}{\nu^3} dv \quad .$$

Integracijom po svim brzinama, pretpostavljajući da je raspodela elektrona po brzinama Maksvelova $f^M(v)$, dobija se:

$$k_\nu^{f-f} = C'' g_{ff} \frac{Z'^2}{\nu^3} \int \frac{1}{v} f(v) dv = C^* \frac{1}{\nu^3} \frac{1}{\sqrt{T}} g_{ff} \quad .$$

Množeći ovaj izraz sa brojem elektrona i brojem jona u jedinici zapremine dobija se, najzad, zapreminski koeficijent apsorpcije usled slobodno–slobodnih prelaza:

$$\alpha_\nu^{f-f} = C^* \frac{n_e n^+}{\sqrt{T}} g_{ff} \frac{1}{\nu^3} = f(n_e, n^+, T, \nu) \quad .$$

Negativan jon vodonika

Kod hladnih zvezda ($T < 8000$ K) vodonik je neutralan i nalazi se uglavnom u osnovnom stanju. Zbog toga bismo očekivali malu apsorpciju u vidljivom delu spektra jer, kao što smo videli, njoj najveći doprinos daju prelazi sa trećeg energetskog nivoa atoma vodonika u kontinuum. Međutim, kod hladnih zvezda posmatranja su pokazala veliku neprozračnost. Nju ne može objasniti ni apsorpcija težim elementima jer je težih elemenata sa niskom energijom jonizacije malo. Wildt je 1939. godine pokazao da bitnu ulogu u apsorpciji vidljive svetlosti igraju negativni joni vodonika $H^- = H + e^-$. Energija veze elektrona u H^- jonu je $E = 0.75$ eV. Postoji samo jedno vezano stanje. Zbog male energije veze, tj. male energije neutralizacije

$H^- + E \rightarrow H + e^-$ joni H^- se mogu formirati samo u sredinama niske temperature. H^- je najznačajniji izvor apsorpcije u kontinuumu kod hladnih zvezda, spektralnih klasa F, G i K.

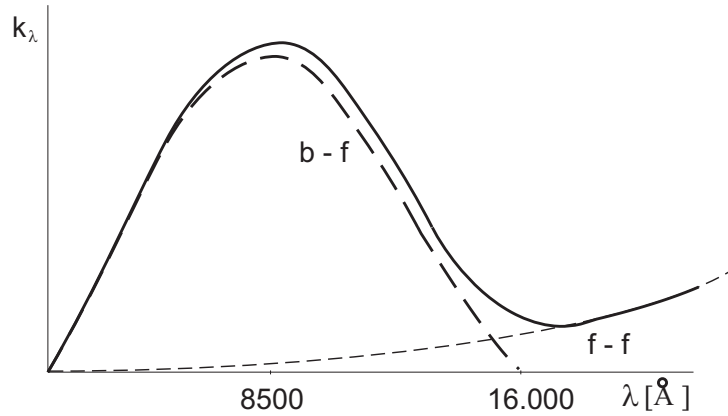
Negativan jon vodonika će se neutralizovati apsorpcijom bilo kog fotona čija je energija $E > 0.754\text{eV}$, odnosno čija je talasna dužina $\lambda < hc/0.754\text{eV}$ ($=1650\text{ nm}$). Pri tome, na talasnim dužinama $\lambda < 1400\text{ nm}$ preovladjuju vezano-slobodni prelazi

$$H^- + h\nu = H + e(v)$$

sa $h\nu = 0.75\text{eV} + \frac{1}{2}mv^2$, a na $\lambda > 1400\text{ nm}$, slobodno - slobodni prelazi

$$H + e(v) + h\nu = H + e(v')$$

gde je $h\nu = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2$.



Sl. 19. Koeficijent apsorpcije po jednom jonu H^- .

Zapreminski koeficijent apsorpcije usled H^- je

$$\alpha_\nu = n_H^- k_\nu^{b-f} + n_H p_e k_\nu^{f-f} = f(T, n_e, n_H, \nu) \quad ,$$

gde je $p_e = n_e kT$ - elektronski pritisak.

Izlazni fluks za hladne zvezde bi mogao biti veliki blizu minimuma na 1600 nm .

Uticaj odstupanja koeficijenta apsorpcije od sivog na raspodelu energije u kontinuumu

Sada ćemo pokazati da zavisnost koeficijenta neprekidne apsorpcije od $\lambda(\nu)$ direktno utiče na oblik neprekidnog spektra.

Videli smo da se sa funkcijom izvora kao linearnom funkcijom optičke dubine u sivoj atmosferi ($\alpha \neq f(\nu)$) i u aproksimaciji LTR dobija:

$$F_\nu(0) = S_\nu(\tau = 2/3) = B_\nu(T(\tau = 2/3)) = B_\nu(T_{\text{ef}}) \quad ,$$

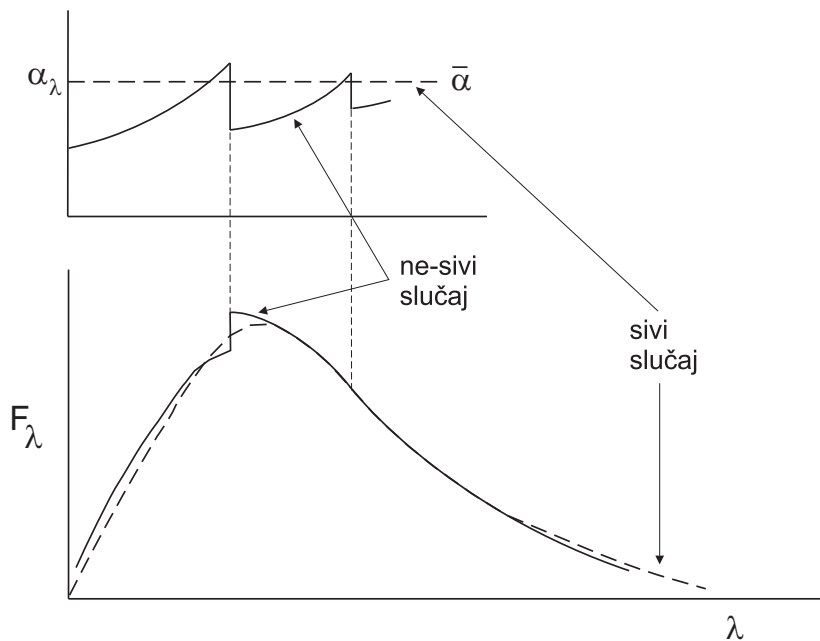
tj. da je raspodela izlaznog fluksa zračenja sa ovim pretpostavkama jednaka Plankovoj na $T_{\text{ef}} = T(\tau = 2/3)$. Videli smo i da u sivoj atmosferi optička dubina $\tau = 2/3$ na svakoj talasnoj dužini λ odgovara istoj geometrijskoj dubini. Ako, međutim, koeficijent apsorpcije zavisi od λ onda će optička dubina $\tau_\lambda = 2/3$ odgovarati različitim geometrijskim dubinama. Posmatrajmo npr. Balmerov diskontinuitet na $\lambda = 364.6 \text{ nm}$. Sa dugotalasne strane (+) ovog diskontinuiteta, tj. na talasnim dužinama većim od 364.6 nm , koeficijent apsorpcije α_λ^+ je manji od srednjeg α pa za istu optičku dubinu $\tau_\lambda = \tau = 2/3$ sledi da je:

$$h^+ > h \quad .$$

Pošto temperatura raste sa dubinom, $T(h^+) > T(h)$. Na dugotalasnoj strani Balmerovog diskontinuiteta zračenje potiče iz dubljih slojeva koji su na višoj temperaturi, pa je izlazni fluks zračenja veći nego u sivoj atmosferi. Na kratkotalasnoj strani ovog diskontinuiteta imamo $\alpha_\lambda^- > \alpha$ odakle sledi da je

$$h^- < h$$

i, prema tome, $T(h^-) < T(h)$. Zračenje na kratkotalasnoj strani Balmerovog diskontinuiteta potiče iz viših slojeva koji su na nižoj temperaturi.



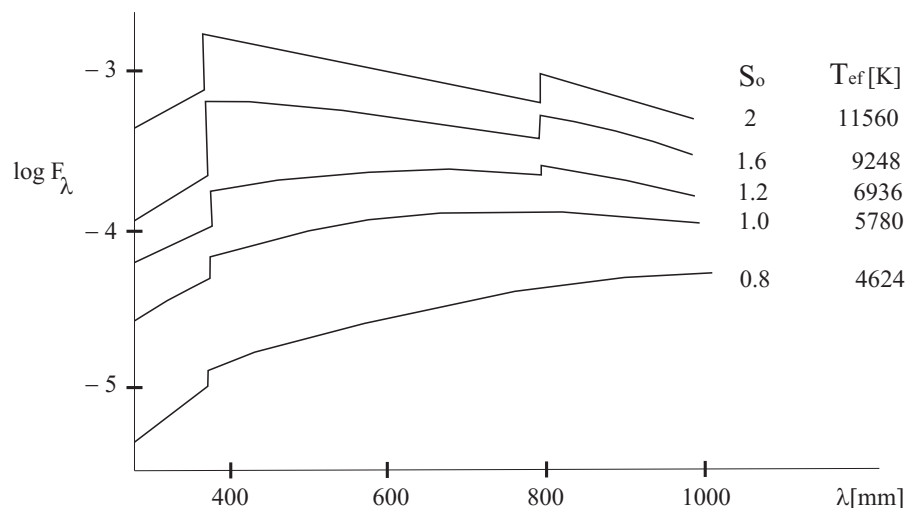
Sl. 20. Fluks zračenja zvezde sa sivom (isprekidana kriva) i ne-sivom atmosferom (puna kriva).

Raspodela izlaznog fluksa zračenja će onda biti kao na slici. Vidimo da zavisnost α_λ od λ direktno utiče na izgled neprekidnog spektra. Vidimo da se diskontinuitet u energetske raspodeli javlja na onim talasnim dužinama na kojima α_λ ima diskontinuitet.

Zavisnost Pašenovog kontinuuma i Balmerovog skoka od temperature i površinske gravitacije

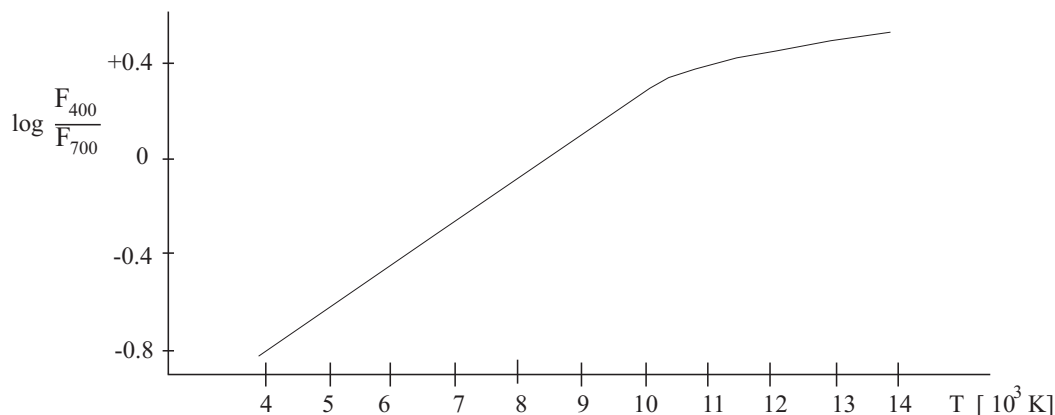
Sledeći grafici pokazuju kako se neke karakteristike neprekidnog spektra menjaju sa temperaturom (tj. sa spektralnom klasom), i sa površinskom gravitacijom (tj. sa klasom luminoznosti). Najpre, sa sl. 21 vidimo kako se menja izgled računatog neprekidnog spektra u apsolutnim jedinicama fluksa kod zvezda različite površinske temperature. Proračun je vršen sa raspodelom temperature $T(\tau)$ koja je dobijena iz Sunčeve raspodele primenom množitelja $S_0 = 0.8, 1, 1.2, 1.6, 2$ (tako da je $T_{\text{ef}} = 5780 \cdot S_0$) i za $g = 2.7 \times 10^4 \text{ cm/s}^2$. Vidimo da se sa povećanjem efektivne temperature povećava apsolutni fluks, menjaju nagib kontinuuma i veličina Balmerovog i Pašenovog skoka. Na slici 22 je prikazano ponašanje nagiba Pašenovog kontinuuma. U spektrima hladnijih zvezda on raste linearno sa porastom temperature. Za zvezde ranijih spektralnih klasa od A0 nagib Pašenovog

kontinuumu je manje osetljiv na temperaturu zvezde.

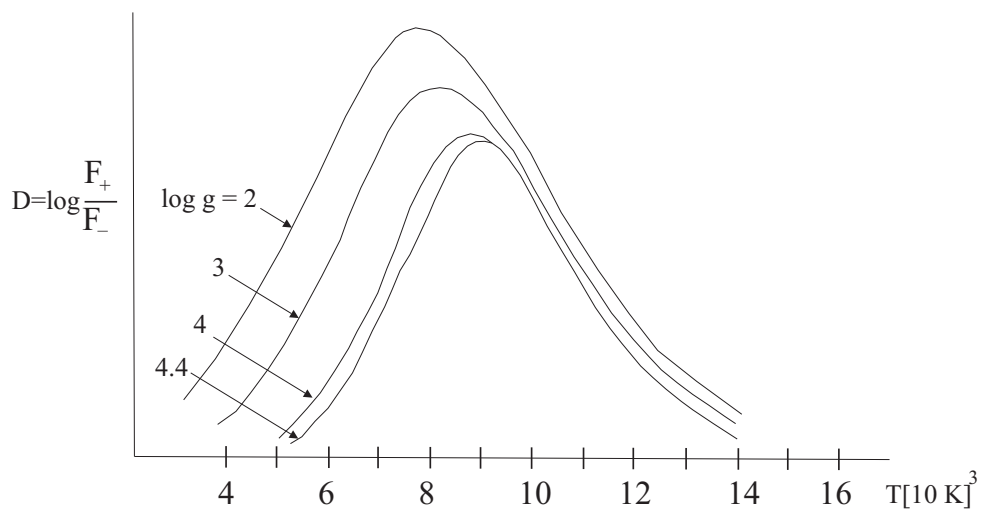


Sl. 21. Fluks zračenja zvezda raznih efektivnih temperatura

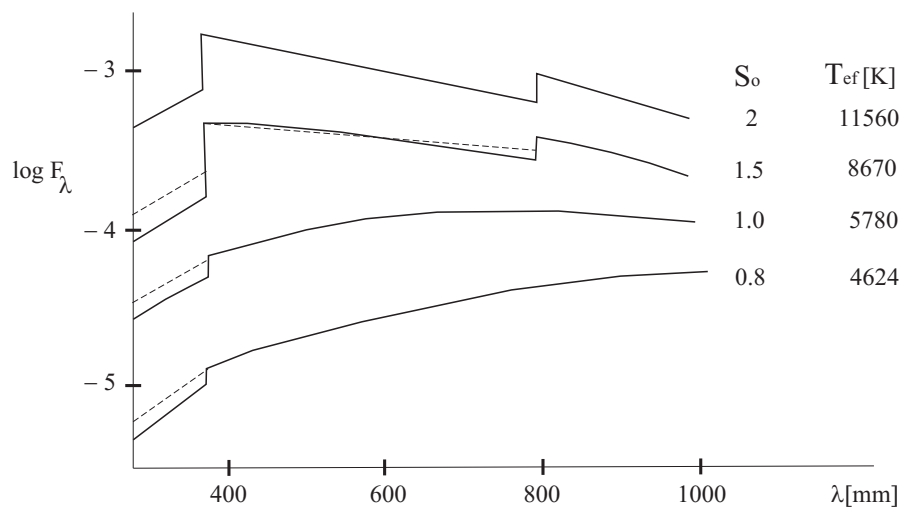
Sa sl. 23 vidimo kako se Balmerov skok menja sa temperaturom. Oblast porasta i opadanja skoka pokazuje dijapazon temperatura u kome neutralni vodonik igra glavnu ulogu u apsorpciji u kontinuumu. Na nižim temperaturama raste uloga H^- , a apsorpcija neutralnim vodonikom se smanjuje zbog malog stepena njegovog pobudjivanja. Pri višim temperaturama, odnosno apsorpcije u Balmerovom i Pašenovom kontinuumu, tj. Balmerov skok se smanjuje pošto se sa povećanjem stepena jonizacije vodonika apsorpcija njime smanjuje.



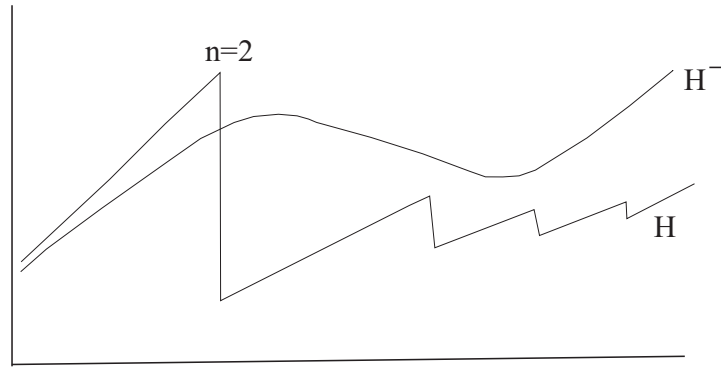
Sl. 22. Nagib Pašenovog kontinuumu u funkciji temperature



Sl. 23. Balmerov skok u funkciji temperature i površinske gravitacije



Sl. 24. Fluks zračenja zvezda različite efektivne temperature i površinske gravitacije: $\log g=2$ (puna linija) i $\log g=4.4$ (isprekidana linija).



Sl. 25.

Na sl. 24 prikazana je zavisnost računatog neprekidnog spektra od ubrzanja sile teže na površini zvezde za nekoliko modela (puna linija odgovara $g = 10^2 \text{ cm/s}^2$, a isprekidana $g = 2.7 \times 10^4 \text{ cm/s}^2$). Za istu površinsku temperaturu, fluks u kontinuumu raste sa porastom površinske gravitacije. Balmerov diskontinuitet je veći kod zvezda manjeg g (džinova). Sa povećanjem g povećava se elektronska koncentracija n_e , koncentracija jona H^- što, kao što se sa sl. 25 vidi dovodi do smanjenja Balmerovog skoka.

Srednji koeficijent apsorpcije (ekstinkcije)

Uvodjenjem odgovarajućeg srednjeg koeficijenta apsorpcije, ne-sivi problem ($\alpha = f(\lambda)$) se svodi na sivi ($\alpha \neq f(\lambda)$) za koji je poznato tačno rešenje koje služi kao polazna aproksimacija u rešavanju ne-sivih problema metodom sukcesivnih aproksimacija. Pitanje je da li se može definisati srednji koeficijent apsorpcije kao neka srednja vrednost monohromatskog koeficijenta apsorpcije tako da integraljenjem monohromatske jednačine prenosa po frekvencijama dobijemo istu kao u sivom slučaju.

Ne-sivi slučaj

(a)

$$\mu \frac{dI_\nu}{\kappa_\nu \rho dh} = I_\nu - S_\nu$$

$$\frac{dH_\nu}{\kappa_\nu \rho dh} = J_\nu - S_\nu$$

$$\frac{dK_\nu}{\kappa_\nu \rho dh} = H_\nu$$

Sivi slučaj

(b)

$$\mu \frac{dI}{\kappa \rho dh} = I - S \quad (1)$$

$$\frac{dH}{\kappa \rho dh} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dK}{\kappa \rho dh} = H \quad (3)$$

Postoji nekoliko definicija srednjeg koeficijenta ekstinkcije.

(1) Srednji $\bar{\kappa}$ po fluksu: Množenjem (3a) sa κ_ν i integraljenjem po ν imamo (3b):

$$\frac{d \int K_\nu d\nu}{\rho dh} = \int \kappa_\nu H_\nu d\nu = \frac{dK}{\rho dh} = \bar{\kappa} H \quad .$$

Odavde sledi da je

$$\bar{\kappa} = \frac{\int_0^\infty \kappa_\nu H_\nu d\nu}{H} \quad .$$

Ova srednja vrednost koeficijenta ekstinkcije se naziva Čandrasekarovo srednje. Fluksevi H_ν u gornjem izrazu su fluksevi (rešenja) u sivoj atmosferi.

Sa ovom srednjom vrednošću gradijent pritiska zračenja (značajan za modele atmosfera zvezda ranih spektralnih klasa) ima jednostavan oblik. Deljenjem izraza

$$\frac{dp_{\text{zr}}}{\rho dh} = \frac{4\pi}{c} \frac{dK}{\rho dh} = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \kappa_\nu H_\nu d\nu$$

sa $\bar{\kappa}$ dobija se

$$\frac{dp_{\text{zr}}}{d\bar{\tau}} = \frac{4\pi}{c} H = \frac{\pi F}{c} = \frac{\mathcal{F}}{c} = \frac{\sigma T_{\text{ef}}^4}{c} \quad .$$

(2) Plankov srednji koeficijent ekstinkcije:

$$\bar{\kappa}_P = \frac{\int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu(T) d\nu}{B(T)}$$

(3) Rosselandov srednji koeficijent ekstinkcije:

Ako želimo da obezbedimo da je $\int_0^\infty H_\nu d\nu = H$ (jedm. (3)), integralimo (3a) i dobijamo

$$\frac{1}{\rho} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dK_\nu}{dh} d\nu = \int_0^\infty H_\nu d\nu = H = \frac{1}{\rho} \frac{1}{\bar{\kappa}_R} \frac{dK}{dh}$$

odakle je

$$\frac{1}{\bar{\kappa}_R} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dK_\nu}{dh} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dK_\nu}{dh} d\nu} \quad .$$

Ovako definisanom srednjom vrednošću, najveća težina je data frekvencijama za koje je neprozračnost najmanja ($\kappa_\nu < \bar{\kappa}_R$). To zračenje dolazi iz

najdubljih slojeva, pa je $\bar{\kappa}_R$ dobra srednja vrednost za dublje slojeve atmosfere. K_ν nije a priori poznato, ali na velikim optičkim dubinama $K_\nu \rightarrow J_\nu/3$, a $J_\nu \rightarrow B_\nu$, pa sledi da je

$$\frac{dK_\nu}{dh} \approx \frac{1}{3} \frac{dJ_\nu}{dh} \approx \frac{1}{3} \frac{dB_\nu}{dT} \frac{dT}{dh}$$

tj.

$$\frac{1}{\bar{\kappa}_R} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu} \quad .$$

U difuznoj aproksimaciji je:

$$H_\nu = \frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{1}{3} \frac{dJ_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{1}{3} \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} = -\frac{1}{3\kappa_\nu\rho} \frac{dB_\nu}{dT} \frac{dT}{dr} \quad .$$

Integracijom po ν imamo:

$$\int H_\nu d\nu = H = -\frac{1}{3\bar{\kappa}\rho} \frac{dB}{dT} \frac{dT}{dr}$$

ako je $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_R$.

LTR modeli fotosfera (za kontinuum)

Model fotosfere predstavlja tablični prikaz raspodele pritiska i temperature kao funkcije dubine, često standardne optičke dubine u kontinuumu τ_0 (npr. na $\lambda = 500\text{nm}$; τ_{500}) ili srednje optičke dubine (Roselandove, $\bar{\tau}_R$).

Između izgleda spektra i stanja fotosfere nema jednoznačnog odnosa pa nije jednostavno izvesti fizičke karakteristike fotosfere direktno iz posmatranja. Pravi se hipotetički model na osnovu posmatranja i poznatih fizičkih zakona. Model zavisi i od načina na koji se energija prenosi.

Postoje 4 načina prenosa energije: 3 termalna (određena gradijentom temperature) su: zračenje, konvekcija (značajna u dubljim slojevima Sunčeve atmosfere i drugih hladnijih zvezda) i kondukcija (provodjenje - značajno samo u koronama i unutrašnjostima zvezda od degenerisanog gasa) + 1 netermalni - mehanički prenos energije talasima (akustičnim, unutrašnjim gravitacionim, MHD) važan za hromosfere i korone hladnih zvezda, ali ne za fotosfere. Uzimajući u obzir sve načine prenosa energije, uslov energetske ravnoteže se može pisati:

$$F_{uk} = F_{zr} + F_{konv} + F_{prov} + F_{meh} = const \quad .$$

Pošto ćemo nadalje pretpostavljati da je zračenje dominantan način prenosa energije, uslov energetske ravnoteže se svodi na uslov radijativne ravnoteže (ravnoteže zračenja) .

Nabrojmo aproksimacije koje se čine pri konstrukciji standardnog fotosferskog modela:

- 1) plan-paralelna geometrija
- 2) statičnost ($v=0$)
- 3) stacionarnost ($\frac{\partial}{\partial t}=0$)
- 4) magnetno polje se zanemaruje
- 5) ravnoteža zračenja (R.Z)
- 6) lokalna termodinamička ravnoteža (LTR).

Tačke 2)-4) zajedno vode uslovu hidrostaticke ravnoteže.

Pri modeliranju zadate veličine su: efektivna temperatura T_{ef} , površinska gravitacija $g = G\mathcal{M}/R^2 = \text{const}$ i hemijski sastav.

Model se bazira na zahtevu da je ukupni energetski fluks konstantan sa visinom u atmosferi zvezde.

Problem

Pretpostavimo da temperatura u atmosferi raste sa dubinom i da svaki sloj atmosfere zrači kao crno telo na datoj temperaturi. Emitovano zračenje će onda biti suma zračenja crnih tela na raznim temperaturama u nekom opsegu dubina. Ova aproksimacija je poznata kao LTR, jer je pretpostavljeno da su apsorpciona i emisiona svojstva ista kao u TDR pod datim lokalnim uslovima koji se menjaju od tačke do tačke.

Izlazni intenzitet zračenja je integral funkcije izvora:

$$I_{\nu}(0, \mu) = \int_0^{\infty} S_{\nu} e^{-t_{\nu}/\mu} \frac{dt_{\nu}}{\mu} = \int_0^{\infty} B_{\nu}(T) e^{-t_{\nu}/\mu} \frac{dt_{\nu}}{\mu} .$$

Iz posmatranja $I_{\nu}(0, \mu)$, odnosno $F_{\nu}(0)$ želimo da odredimo raspodelu T i κ_{ν} u funkciji visine z . Zapravo, mi na rastojanju r od zvezde posmatramo monohromatski fluks zvezde $\pi F_{\nu}(r)$

$$\pi F_{\nu}(r) = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \pi F_{\nu}(R) = \left(\frac{R}{r}\right)^2 2\pi \int_0^1 I_{\nu}(0, \mu) \mu d\mu = \left(\frac{R}{r}\right)^2 2\pi \int_0^{\infty} B_{\nu}(T) E_2(t_{\nu}) dt_{\nu} ,$$

dok je $\pi F_{\nu}(R) = \pi F_{\nu}(\tau_{\nu} = 0)$ - fluks koji zvezda radijusa R izrači sa jedinice svoje površine. Integracijom po svim frekvencijama imamo:

$$\pi F(r) = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \pi F(R) = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sigma T_{\text{ef}}^4$$

Zadatak se sastoji u tome da se odredi struktura fotosfere tako da prethodne dve jednačine daju rezultate saglasne sa posmatranjem i da bude zadovoljen uslov održanja energije - da se ukupan fluks zračenja ne menja sa visinom z :

$$\frac{L}{4\pi R^2} = \pi F(z) = 2\pi \int_0^\infty \left[\int_{-1}^1 I_\nu(z, \mu) \mu d\mu \right] d\nu = \sigma T_{\text{ef}}^4 = \text{const} \quad .$$

Model, dakle, treba konstruisati tako da zadovolji fizičke zakone i reprodukuje posmatrano zračenje zvezde.

Jednačine koje opisuju strukturu atmosfere

(Ne-siva atmosfera u LTR i ravnoteži zračenja)

Da bi se videlo da li model zadovoljava zakon održanja energije i posmatranja, potrebno je izračunati integrale u jednačinama za izlazni intenzitet zračenja i fluks na svakom nivou z u atmosferi.

Jedan od zahteva pri računanju ovih integrala je da se poznaju apsorpciona svojstva atmosferskog gasa. Apsorpcioni koeficijent κ_ν zavisi od koncentracije atoma na datom energetskom nivou sa koga je dozvoljena apsorpcija fotona ν (koncentracije apsorbera) i od verovatnoće takvog prelaza. Verovatnoće prelaza se ili računaju (kvantno mehaničkim proračunima) ili se mere laboratorijski. Broj apsorbera zavisi od zastupljenosti hemijskog elementa i od dela atoma tog elementa koji je na datom nivou. Poslednje se nalazi kao funkcija T i p_e pomoću jednačina jonizacije (Saha) i ekscitacije (Bolcmana) ako su uslovi u atmosferi bliski LTR.

$$\kappa_\nu = \kappa_\nu(T, p_e, \text{hemijski sastav}) \quad .$$

Računati koeficijent apsorpcije može često biti izvor grešaka u modeliranju (verovatnoće prelaza, greške u jonizacionim i ekscitacionim uslovima, izostavljanje nekog značajnog doprinosa koeficijentu apsorpcije, itd.).

Vidimo da je potrebno da hemijski sastav bude zadat da bi se počelo sa računanjem modela i da se uvedu jednačine koje opisuju fizičko stanje materije da bi odredili p_e i T .

Ukoliko se materija ne nalazi u kretanju i nema magnetnog polja, na materijal unutar nekog elementa zapremine cilindričnog oblika površine osnovne δS i visine δz deluju dve sile: sila gravitacije usmerena ka centru i sila

pritiska ka spolja. Ako su pritisci na dvema osnovama cilindra $p(z)$ i $p(z+\delta z)$ uslov hidrostatičke ravnoteže se može pisati kao:

$$[p(z+\delta z) - p(z)]\delta S + \rho g \delta S \delta z = 0$$

Ako je δz dovoljno malo, $p(z+\delta z)$ se može razviti u Tejlorov red zadržavajući se na članu prvog reda u razvoju:

$$p(z+\delta z) = p(z) + \frac{dp}{dz}\delta z$$

tako da uslov H.R. postaje:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad .$$

Pritisak p je zbir gasnog pritiska i pritiska zračenja ($= p_g + p_{\text{zr}}$). Pritisak zračenja p_{zr} je značajan kod vrlo toplih zvezda. Za tanke atmosfere g se može smatrati konstantnim i jednakim površinskoj vrednosti: $g = G\mathcal{M}/R^2$.

Koristeći $d\tau_\nu = -\kappa_\nu \rho dz$ uslov H.R. se može prepisati kao:

$$\frac{dp}{d\tau_\nu} = \frac{g}{\kappa_\nu} \quad .$$

Vidimo da je za dobijanje ukupnog pritiska p neophodno znati κ_ν . Kao što smo videli, κ_ν zavisi od p_e i T . Prema tome, potrebno je naći T , p , p_e i κ_ν kao funkcije dubine. Moramo imati 4 jednačine za 4 nepoznate veličine. Pored jednačine za κ_ν i jednačine HR moramo imati još dve. Jedna sledi iz uslova jonizacije ravnoteže. Odnos p_e/p mora biti jednak odnosu broja slobodnih elektrona i ukupnog broja slobodnih čestica n_e/n . On se može naći iz jednačine jonizacije primenjene na razne atomske vrste kao funkcije T , p_e i hemijskog sastava:

$$p = p(T, p_e, \text{hemijski sastav}) \quad .$$

Četvrta jednačina je uslov održanja energije (konstantnosti fluksa):

$$\pi F(z) = \sigma T_{\text{ef}}^4 = \text{const} = 2\pi \int_0^\infty d\nu \left[\int_{-1}^1 I_\nu(\tau=0, \mu) \mu d\mu \right] \quad .$$

To je jednačina koja predstavlja deo fizike koju model mora da zadovolji. Ali, ova relacija je suviše komplikovana funkcija fizičkih uslova da bi se direktno koristila.

Zato se u stvarnoj proceduri pretpostavlja relacija $T(\tau_\nu)$ koja predstavlja četvrtu i poslednju jednačinu koja je potrebna. Rešavanjem ovih jednačina dobijamo T , p , p_e i κ_ν kao funkcije τ . Kada se ove veličine nadju imamo probni atmosferski model koji mora da zadovolji jednačinu za ukupni fluks na svakoj dubini z , što je provera da li je pretpostavljena relacija $T(\tau_\nu)$ korektna. Ako nije, mora se probati ponovo. Konstrukcija tačnog atmosferskog modela je iterativna procedura. Pri tome se javljaju dva problema: kako dobiti prvu aproksimaciju za $T(\tau_\nu)$ i kako je popravljati kada nije dovoljno dobra. Kao prvi pokušaj $T^0(\tau_\nu)$ uzima se raspodela temperature u sivoj atmosferi. Često se koristi Edingtonova aproksimacija. U rešavanju drugog problema, popravljavanja relacije $T(\tau)$, može se koristiti nekoliko različitih procedura.

Procedura temperaturske korekcije

Najjednostavnija iterativna procedura je procedura Λ iteracije. Pretpostavimo da smo konstruisali LTR model koristeći $T^0(\tau_\nu)$, zatim da smo rešavanjem jednačine prenosa zračenja sa datom $B_\nu(T^0)$ i skalom optičke dubine τ_ν dobili $I_\nu(\tau_\nu, \mu)$ i $J(\tau_\nu)$ i onda ustanovili da uslov ravnoteže zračenja:

$$\int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu d\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu J_\nu d\nu$$

nije ispunjen, tj. da:

$$\int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu(T^0) d\nu \neq \int_0^\infty \kappa_\nu J_\nu d\nu \quad .$$

Znači da je potrebno korigovati temperatursku raspodelu. Pretpostavimo da $T(\tau) = T^0(\tau) + \Delta T(\tau)$ zadovoljava uslov R.Z. i potražimo $\Delta T(\tau)$ tako da je

$$\int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu(T^0 + \Delta T) d\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu J_\nu d\nu \quad .$$

Razvijmo funkciju $B_\nu(T)$ u red i zadržimo se na prvom izvodu:

$$B_\nu(T^0 + \Delta T) = B_\nu(T^0) + \left(\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\right)_{T^0} \Delta T \quad .$$

Zamenjujući u uslov R.Z. imamo:

$$\int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu(T^0) d\nu + \Delta T \int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \kappa_\nu d\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu J_\nu d\nu$$

odakle je tražena popravka temperature data sa:

$$\Delta T(\tau) = \frac{\int_0^\infty \kappa_\nu [J_\nu - B_\nu(T^0)] d\nu}{\int_0^\infty \kappa_\nu (\frac{\partial B_\nu}{\partial T}) d\nu} .$$

Onda sa popraavljenom raspodelom temperature $T^1(\tau) = T^0(\tau) + \Delta T(\tau)$ i novim modelom ponavljamo proceduru dok ne ispunimo uslov R.Z. sa unapred zadatom tačnošću. Pošto koristimo tekuće $J_\nu = \Lambda_\tau\{B_\nu(T^0)\}$ procedura se zove Λ iteracija: $T^0(\tau) \rightarrow J_\nu \rightarrow \Delta T \rightarrow T(\tau) \rightarrow J_\nu$ itd.

Integracija jednačine hidrostaticke ravnoteže

Da bismo rešili jednačinu hidrostaticke ravnoteže:

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{g}{\kappa} \quad (1)$$

gde je τ skala srednje optičke dubine ili optičke dubine na nekoj standardnoj frekvenciji/talasnoj dužini (npr. 500nm), a $g = GM/R^2$ - zadata površinska gravitacija, potrebno je znati $\kappa = \kappa(p, \tau)$. Kako je $\kappa = \kappa(\text{hem. sastav}, T, p_e)$, sa zadatim hemijskim sastavom, relacijom

$$\frac{p_e}{p} = f(T, \text{hem.sastav})$$

i raspodelom $T(\tau)$ imamo $\kappa = \kappa(p, \tau)$. Sa $\kappa = \kappa(p, \tau)$ možemo numerički rešavati jednačinu (1) sloj po sloj, od površine ka unutra, i dobiti $p(\tau)$. Pritom je potrebno znati (početne) vrednosti pritiska (na površini) $p_0 = p(\tau_0)$ i njegovog prvog izvoda $(\frac{dp}{d\tau})_0 = \frac{g}{\kappa_0}$, jer je na $\tau = \tau_1$:

$$p_1 = p_0 + (\frac{dp}{d\tau})_0 \Delta\tau + \dots$$

Da bi se dobile početne vrednosti, treba naći aproksimativni izraz za $\kappa(p, \tau)$ koji će omogućiti analitičku integraciju jednačine (1). To može biti, napr. $\kappa = \text{const}$. Onda imamo

$$p - p_0 = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{g}{\kappa} dt$$

Za $\tau_0 = 0$, $p_0 = 0$, pa sledi da je

$$p = \frac{g}{\kappa} \tau . \quad (2)$$

Za dato T_{ef} i znajući $T(\tau)$ možemo pretpostaviti vrednost κ , i iz (2) izračunati p . Sa tom prvom aproksimacijom p može se izračunati $\kappa = \kappa(p, T)$. Njegova zamena u (2) daje bolje p , a ono daje bolje $\kappa(p, T)$, bolje p itd. do konvergencije. Vrednost p_0 dobijena na ovaj način treba da se odnosi na najviše slojeve u atmosferi tako da $p_0 \ll p(\tau)$. Numerička integracija obično počinje na $\tau_0 = 10^{-5}$ ili 10^{-4} .

Pošto znamo $p_0 = p(\tau_0)$ i $T_0 = T(\tau_0)$, za ovu dubinu možemo izračunati $\kappa_0(T_0, p_0) = \kappa_0(p_0, \tau_0)$, tj. $(\frac{dp}{d\tau})_0 = \frac{g}{\kappa_0}$. Pretpostavljajući da κ_0 ostaje konstantno na intervalu $\tau_1 - \tau_0$, za dubinu τ_1 imamo:

$$p(\tau_1) = p(\tau_0) + \frac{g}{\kappa_0}(\tau_1 - \tau_0) \quad (3)$$

Na $\tau = \tau_1$ znamo $T(\tau_1)$ i $p(\tau_1)$, dakle $\kappa_1 = \kappa(\tau_1)$. Da bismo popravili $p(\tau_1)$ možemo koristiti srednju vrednost

$$\kappa = \frac{\kappa(\tau_0) + \kappa(\tau_1)}{2} = \frac{\kappa_0 + \kappa_1}{2}$$

i to koristiti u (3) (umesto κ_0) da bismo dobili bolje $p(\tau_1)$. Sa p_1 i κ_1 nalazimo

$$p_2 = p_1 + \frac{g}{\kappa_1}(\tau_2 - \tau_1)$$

i sa $T(\tau_2)$ nalazimo $\kappa_2 = \kappa(\tau_2)$ itd. sve do $\tau = \tau_N$ poslednje tačke u modelu.

Pošto odredimo $p(\tau)$, $p_e(\tau)$, a imamo $T(\tau)$ odredjujemo $\rho(\tau)$ i $\kappa_\nu(\tau)$. Sa $\kappa_\nu(\tau)$ konstruišemo skalu optičke dubine na svakoj frekvenciji

$$\tau_\nu(\tau) = \int_0^\tau \frac{\kappa_\nu(t)}{\kappa(t)} dt \quad .$$

Imamo probni model koji mora da zadovolji uslov ravnoteže zračenja. Sa τ_ν i $T(\tau_\nu)$, tj. $B_\nu(\tau_\nu)$ rešavamo jednačinu prenosa i dobijamo $I_\nu(\tau_\nu, \mu)$, tj. $J_\nu(\tau_\nu)$ ili $F_\nu(\tau_\nu)$. Proveravamo da li je ispunjen uslov ravnoteže zračenja i ako nije korigujemo $T(\tau)$ i ponavljamo opisanu proceduru sa novom $T(\tau)$, i tako do konvergencije...

Dodatak: Spektroskopska informacija

(a) Temperature zvezda

Spektar zvezde sadrži informaciju o temperaturi njenih površinskih slojeva. Procena površinske temperature se može dobiti iz raspodele zvezdane svetlosti po talasnim dužinama (vrelе zvezde najviše zrače na kraćim talasnim dužinama).

O temperaturi površinskih slojeva zvezde možemo zaključiti i identifikovanjem izvora apsorpcionih linija u spektru. Kod najhladnijih zvezda za apsorpciju su odgovorni molekuli i neutralni atomi. Molekuli mogu da opstanu samo na niskim temperaturama. Apsorpcione linije molekula slabe u spektrima toplijih zvezda jer molekuli disociraju ostavljajući neutralne atome kao što je gvoždje da dominiraju spektrom. Kod toplijih zvezda mnogi atomi su jonizovani (sudarima ili zračenjem) pa joni koji tako nastaju apsorbuju na drugim talasnim dužinama u odnosu na one na kojima apsorbuju neutralni atomi istih hemijskih elemenata. Sunčev spektar, npr. ima izražene linije jonizovanog kalcijuma, kao i mnoge slabije linije jonizovanog gvoždja i drugih elemenata. Kod još toplijih zvezda apsorpcione linije su identifikovane sa više puta jonizovanim atomima i elementima kao što je helijum koji mogu biti jonizovani samo u ekstremno vrelim sredinama.

Da bismo tačno odredili vrednost površinske temperature zvezde, neophodno je da izmerimo indikatore u spektru koji su osetljivi na temperaturu. Jedan od indikatora je odnos količine plave i crvene svetlosti čime se meri raspodela sjaja, a merenje se vrši kroz filtre koji propuštaju užе ili šire oblasti plavog i crvenog dela spektra. Drugi temperaturski indikator je relativni intenzitet apsorpcionih linija neutralnog atoma i jona istog elementa. Sa porastom temperature linije jona će biti izražajnije, a linije neutralnih atoma će slabiti.

Manje direktni ali više u upotrebi metodi obuhvataju modeliranje, izuzetno važan metod koji je glavno sredstvo u dobijanju astrofizičke informacije.

Ustanovljeno je da svetlost koja čini zvezdani spektar nastaje na raznim dubinama; **ova oblast iz koje nam stiže zračenje se označava kao zvezdana atmosfera.** Temperatura se u atmosferi menja, najveća je u najdubljim vidljivim slojevima i pada na oko pola te najveće vrednosti na gornjoj granici atmosfere; nema jedne temperature kojom bi se opisala cela atmosfera. Zbog toga se temperatura zvezde definiše preko ukupnog fluksa zračenja, integraljenog po svim talasnim dužinama, koji prolazi kroz atmosferu u prostor. Za plan-paralelnu atmosferu efektivna temperatura atmosfere se definiše kao temperatura na kojoj bi crno telo emitovalo istu količinu en-

ergije po jedinici površine kao zvezda:

$$\sigma T_{ef}^4 = L/4\pi R^2 \quad .$$

L je ukupna izračena energija iz atmosfere, R je radijus zvezde. T_{ef} karakteriše nivo u zvezdanoj atmosferi gde svetlost ima 50:50 šanse da pobegne iz atmosfere u prostor bez ponovne apsorpcije. Slaganje računatih i posmatranih indikatora temperature daje T_{ef} zvezdane atmosfere, a model daje detalje promene T sa dubinom. Za zvezde glavnog niza temperature se mogu razlikovati i do 10 puta (od 3000 K do 30000 K).

Pritisak gasa na površini

Zvezdani spektar takodje sadrži informaciju o sjaju zvezde. Dve zvezde iste efektivne temperature će se razlikovati u sjaju zbog različitih radijusa. Druga posledica razlika u radijusu je razlika u atmosferskom pritisku. Gasni pritisak ima merljivi efekat na spektar.

Kao i temperatura, i atmosferski pritisak se može proceniti ili meriti. I ovde se zahtevaju karakteristike u spektru osetljive na pritisak. Indikator za zvezde toplije od oko 9000 K je jačina vodonikovih apsorpcionih linija. Gustina naelektrisanih čestica koje okružuju atom vodonika ima snažan uticaj na širinu i jačinu apsorpcionih linija (linearni Štarkov efekat); veća koncentracija naelektrisanja (elektrona i protona) dovodi do većeg širenja vodonikovih linija.

Zvezde hladnije od 9000 K zahtevaju druge indikatore jer ima malo naelektrisanih čestica da bi imale jak uticaj na vodonikove linije. Jedan indikator je poredjenje apsorpcionih linija neutralnih atoma i jona istog elementa. Kada se neutralni atom jonizuje on poseduje višak pozitivnog naelektrisanja koje je u stanju da privuče slobodan elektron u blizini; vreme života jona je kratko. Vreme života jona, međutim, zavisi od gustine slobodnih elektrona. U okruženju sa malo slobodnih elektrona jon bi morao da čeka dugo da se rekombinuje i ponovo postane neutralan. Dok čeka na rekombinaciju jon je u stanju da apsorbuje svetlost na svojim karakterističnim talasnim dužinama. S druge strane, kada ima puno slobodnih elektrona jon se može odmah rekombinovati sa malom mogućnošću da apsorbuje svetlost. Pošto koncentracija slobodnih elektrona zavisi od pritiska u zvezdanoj atmosferi, odnos jačina linija jona i neutrala istog elementa biće indikator pritiska, dimenzija i luminoznosti. Naravno, odnos jačine linija jona i neutrala istog elementa takodje zavisi od temperature. Temperatura i pritisak se mogu naći odvojeno, ili korišćenjem nekoliko elemenata koji se razlikuju po osetljivosti

na ova dva parametra, ili npr. prvo koristeći boju da se odredi temperatura.

Tačnije određivanje pritiska opet obuhvata merenje indikatora osetljivih na pritisak i korišćenje modela za dobijanje vrednosti ovih indikatora pri poznatim uslovima. Ovde je znanje dobijeno u laboratoriji od ogromne važnosti. Npr. ponašanje vodonikovih linija koje se koriste kao indikatori kod vrelih zvezda je dobro proučeno pri različitim uslovima u laboratoriji. Sa tim znanjem moguće je računati pojavu linija vodonika u modelu zvezdane atmosfere date efektivne temperature i promene pritiska sa dubinom. Ove računate linije se onda porede sa posmatranim. Ako se ne slažu, model atmosfere se menja do slaganja. Rezultujući model onda predstavlja strukturu površinskih slojeva zvezde. Kao i temperatura, i pritisak raste sa dubinom u atmosferi. Da bismo na pogodan način označavali ovaj opseg pritisa uobičajeno se koristi gravitaciono ubrzanje na površini zvezde:

$$g = GM/R^2 \quad .$$

Ova veličina je povezana sa pritiskom preko zahteva da gasni pritisak mora uravnotežavati silu gravitacije. Pošto je atmosfera zvezde jako tanka u poredjenju sa zvezdanim radijusom, g je konstantno.

Površinska gravitacija i gasni pritisak imaju veliki raspon vrednosti. Za Sunce $g = 2.754 \times 10^4 \text{ cm/s}^2$. Gustina na odgovarajućem mestu u atmosferi Sunca je 10^{17} čestica / cm^3 . Radi poredjenja, Zemljina atmosfera sadrži 2×10^{19} molekula/ cm^3 na nivou mora. Što se tiče zvezda ima onih čije je $g = 1$. Ove ekstremno sjajne zvezde imaju radijuse 1000 puta veće od Sunčevog. S druge strane, kompaktni beli patuljci ne veći od Zemlje imaju $g = 10^8$.