

# TZS Vežbe: Čas 2, 21/10/2022

Ivan Milić

October 20, 2022

## 1 Zadatak 1

Zemljina atmosfera apsorbira oko 25% zračenja izvora koji je u zenitu.

- Koja je ukupna optička dubina (debljina) Zemljine atmosfere?
- Pod pretpostavkom da je temperatura atmosfere konstantna, i da iznosi oko 300 K, odredite skalu visine za zemljinu atmosferu.
- Procenite koncentraciju čestica vazduha na površini.
- Iz rezultata prethodnih delova, izvedite prosečan efikasni presek za apsorpciju na česticama vazduha. (Iako je vazduh mešavina gasova, pretpostavićemo da se svi ponašaju isto.)
- Kako se menja optička dubina koju “vidi” svetlost, ako izvor nije u zenitu? Dati opisan odgovor.

## 2 Zadatak 2

Na prošlom času smo izveli da je tzv. formalno rešenje jednačine prenosa:

$$I_{\lambda}^{+} = I_{\lambda}^0 e^{-\tau_{\lambda}} + \int_0^{\tau_{\lambda}} S(t) e^{-t} dt \quad (1)$$

- Za fiksnu talasnu dužinu i konstantnu funkciju izvora, rešite jednačinu prenosa i uporedi ulazni i izlazi intenzitet.

- Kako bi izgledalo formalno rešenje za polubeskonačnu zvezdanu atmosferu? (Donja granica ima efektivno beskonačnu optičku dubinu)?
- Milne-Eddingtonova aproksimacija pretpostavlja da funkcija izvora u polubeskonačnoj atmosferi raste sa optičkom dubinom. Nadjite izlazni intenzitet za takvu atmosferu. Prodiskutujte rešenje.

### 3 Zadatak 3

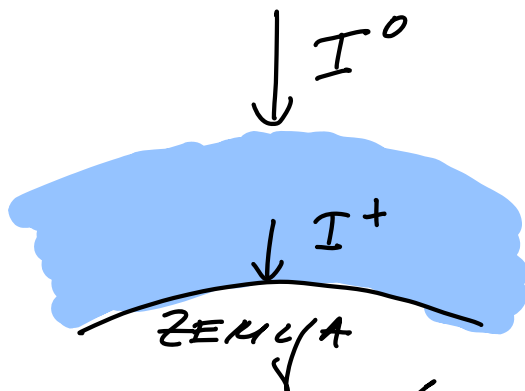
Neprozračnost, pa samim tim i optička dubina, zavise od talasne dužine. Pretpostavite neku zavisnost  $\tau_\lambda$  i analizirajte  $I_\lambda$  za primere iz zadatka 2.

### 4 Zadatak 4

Jednostavan model formiranja spektralnih linija pretpostavlja sloj gasa fiksne temperature kroz koji prolazi zračenje koje je emitovala zvezda ispod, za koju pretpostavljamo da zrači kao crno telo. Ako uzmemo da, u spektralnoj liniji, optička dubina zavisi od talasne dužine kao neka Gausovska funkcija, isplotujte (koristeći npr python) izlazni spektar zračenja za različite odnose temperatura zvezde i atmosfere, kao i za različite optičke dubine u centru linije (detaljno ćemo ove teme pokriti za nekoliko nedelja, ali dobro je da već razmišljamo o linijama!)

## ZADATAK #1:

a)  $\frac{I^+}{I^0} = 0.75$   
 $\tau = ?$



ZEMLJINA ATMOSFERA NE EMITUJE (NE NA VIDLJIVOM DELU)

$$I^+ = I_0 \cdot e^{-\tau} = I_0 \cdot 0.75 \Rightarrow \tau \approx 0.25 \quad (e^{-x} \approx 1-x \text{ za } x \ll 1)$$

b)  $T = 300 \text{ K}$ , SKALA VISINE?  $\phi(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{H}}$   
P.P. DA JE ATMOSFERA U HIDROSTATIČKOJ RAVNOTEŽI:  $(g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$

↑  
SKALA VISINE

$$\frac{dp}{dh} = -\rho g$$

IDEALAN GAS PA:  $p = n \cdot k \cdot T = \frac{\rho}{\bar{\mu}} \cdot k \cdot T \Rightarrow$   
 $p = \frac{\bar{\mu} \rho}{kT}$

$\bar{\mu}$  SREDNJA MASA ČESTICE:

$$\bar{\mu} = 0.78 \text{ u}(\text{N}_2) + 0.22 \text{ u}(\text{O}_2) =$$

NjHOVE MASE SU, PAK, JAKO SLIČNE PA MOŽEMO  
VREĆI: ATOMSKA JEDINICA MASE

$$\bar{\mu} \approx 30 \cdot m_0$$

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{\bar{\mu} \rho}{kT} \cdot g \quad \frac{dp}{p} = -\frac{\bar{\mu} g}{kT} \cdot dh$$

$$\ln \left| \frac{p}{p_0} \right| = - \frac{\bar{\mu} g}{kT} h \quad p = p_0 \cdot e^{-\frac{\bar{\mu} g}{kT} h}$$

$$H = \frac{kT}{\bar{\mu} g} = \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 300 \text{ K}}{30 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 8500 \text{ m}$$

c) Znamo da je  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$

$$p_0 \text{ je } n_0 = \frac{p}{kT} = \frac{10^5 \text{ Pa}}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \text{ K}} \approx 2.4 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

d)  $\zeta = ?$  Otkle ovo da nađemo?

$$p_A, \chi = n \cdot \zeta, \text{ i } \tau = \int_0^\infty -\chi dh = \int_0^\infty \chi dh$$

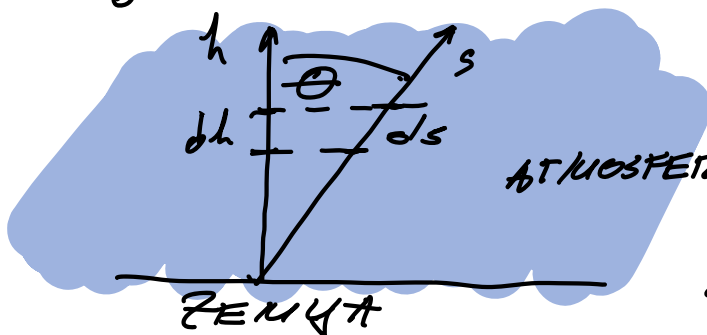
Kako je  $p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{H}}$  onda je

$$n(h) = n_0 \cdot e^{-\frac{h}{H}}, \text{ pa:}$$

$$\tau = \int_0^\infty \zeta \cdot n_0 \cdot e^{-\frac{h}{H}} dh = \zeta \cdot n_0 \cdot H \cdot \int_0^\infty e^{-x} dx = 0.25 \quad \text{Prvi dio}$$

$$\zeta = \frac{\tau}{n_0 \cdot H} = \frac{0.25}{2.4 \cdot 10^{25} \cdot 8 \cdot 10^3} \approx 10^{-30} \text{ m}^2 \text{ / na smisla}$$

e)



$$ds = \frac{dh}{\cos \theta} = \frac{dh}{\mu}$$

Ovo važi za  $\theta$  koje nije jako blizu  $\pi$ .  
Za  $\theta \rightarrow \pi$  primjećujemo sferičnost Zemlje

## ZADATAK #2:

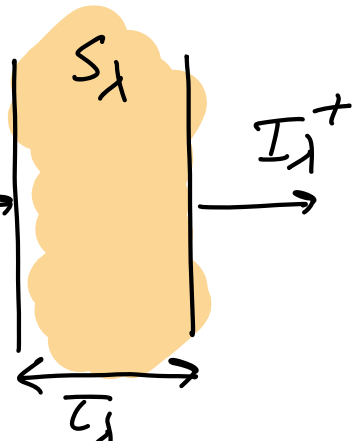
$$a) I_{\lambda}^+ = I_{\lambda}^0 \cdot e^{-\tau_{\lambda}} + \int_0^{\tau_{\lambda}} S_{\lambda}(t) e^{-t} dt$$


Diagram description: A vertical rectangular medium of thickness  $\tau_{\lambda}$  is shown. An incident intensity  $I_{\lambda}^0$  enters from the left. Inside the medium, there is a source  $S_{\lambda}$  represented by a yellow cloud. The transmitted intensity  $I_{\lambda}^+$  exits to the right.

Za  $S_{\lambda} = \text{const}$  sa  $t$ :

$$I_{\lambda}^+ = I_{\lambda}^0 \cdot e^{-\tau_{\lambda}} + S_{\lambda}(1 - e^{-\tau_{\lambda}})$$

1° Ako je  $I_{\lambda}^0 = 0 \Rightarrow I_{\lambda}^+ = S_{\lambda}(1 - e^{-\tau_{\lambda}})$

$\tau_{\lambda} \ll 1$

$$I_{\lambda}^+ = \tau_{\lambda} S_{\lambda}$$

$\tau_{\lambda} \approx \kappa_{\lambda} \cdot h$   
 $S_{\lambda} = \frac{j \cdot h}{\kappa_{\lambda}} \Rightarrow \boxed{I_{\lambda}^+ = j \cdot h}$

ima smisla jer je  $j = \frac{dI_{\lambda}}{ds}$

$\tau_{\lambda} \gg 1$

$I_{\lambda} = S_{\lambda}$

Bez obzira koliko ima materijala,

$I_{\lambda}$  ne može biti veće od  $S_{\lambda}$

2° Ako je  $I_{\lambda}^0 > S_{\lambda}$ , onda je  $I_{\lambda}^+ < I_{\lambda}^0$

apsorpcija

3°  $I_{\lambda}^0 < S_{\lambda} \Rightarrow I_{\lambda}^+ > I_{\lambda}^0$

emisija

b)  $Z_A \tau_\lambda = \infty$

$I_\lambda^+ = \int_0^\infty S_\lambda \cdot e^{-t} dt$  } LAPLASOVA TRANSFORMACIJA. ▼

c)  $S_\lambda = a + b\tau_\lambda \leftarrow$  ME APROKSIMACIJA

$I_\lambda^+ = \int_0^\infty (a + b\tau) \cdot e^{-t} dt = a + b = \underbrace{S(\tau_\lambda = 1)}$

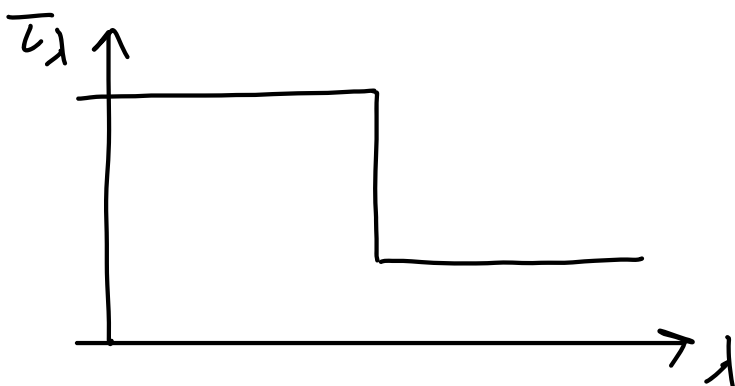
EDINGTONOVA APPROX.  
(JEDNA OD MNOGIH)

KADA GLEDAMO OPTIČKI GUSTU SREDINU MI  
VIDIMO  $S$  NA OPTIČKOJ DUBINI  $(\tau)$ , U TOM PRAVCU,  
NA TOJ  $\lambda$  ! ▼

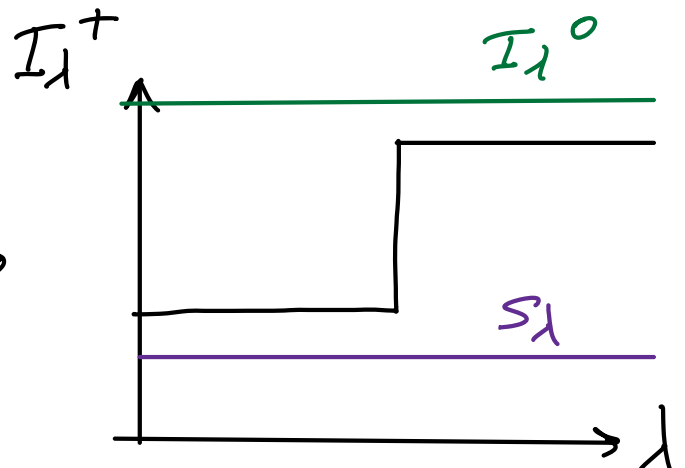
③ UKOLIKO JE, NPR.  $I_\lambda^0 > S_\lambda$  :

$I_\lambda^+ = I_\lambda^0 \cdot e^{-\tau_\lambda} + S_\lambda (1 - e^{-\tau_\lambda})$

NPR:



$\Rightarrow$



Za ME aproksimaciju:

$$S = a + b\bar{L} \leftarrow \text{NEKO, REFERENTNO}$$

$$\bar{L}_1 = r_1 \cdot \bar{L}$$

$$\bar{L} = \frac{\bar{L}_1}{r_1}$$

$$I_1^+ = \int_0^{\infty} S(\bar{L}_1) \cdot e^{-\bar{L}_1} d\bar{L}_1 = \int_0^{\infty} a + \frac{b \cdot \bar{L}_1}{r_1} \cdot e^{-\bar{L}_1} d\bar{L}_1$$

$$= a + \frac{b}{r_1} \quad (\text{Slično kao gore: } r_1 \uparrow \Rightarrow I_1^+ \downarrow)$$

Više primera u Jupyter Notebook #2! ▼