

Teorija Zvezdanih Spektara

Lekcija 5: Momenti JPZ i modelovanje Atmosfera

Ivan Milić (AOB / MATF)

08/11/2022

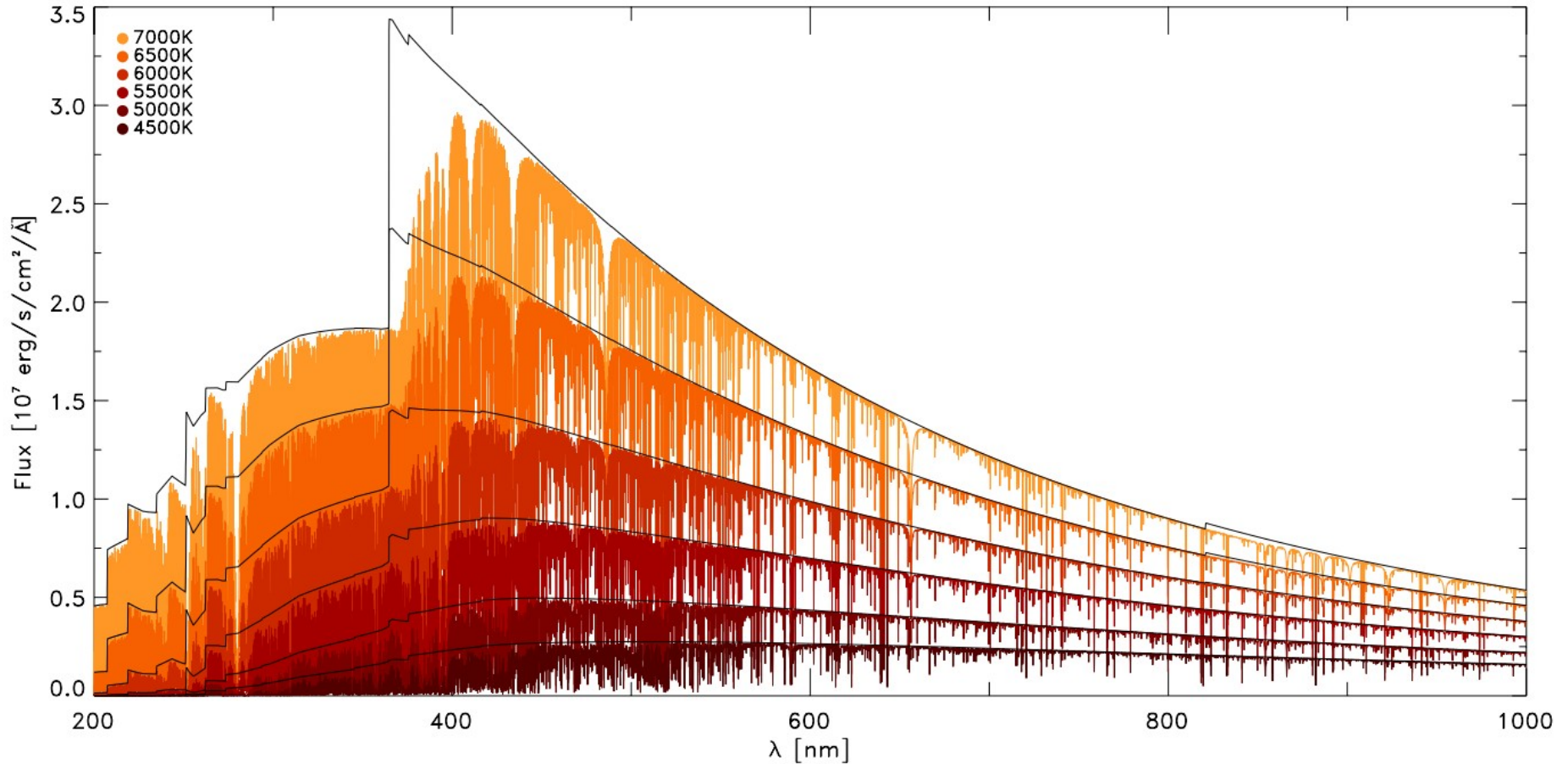
Podsetnik

- Sada znamo da rešimo jednačinu prenosa ako su nam dati skala optičkih dubina i funkcija izvora, u bilo kom pravcu, za bilo koju dubinu u 1D plan-paralelnoj atmosferi.

$$I_{\lambda}^{+}(\tau_{\lambda}, \mu) = \int_{\tau_{\lambda}}^{\infty} S(t) e^{(\tau_{\lambda}-t)/\mu} \frac{dt}{\mu}$$
$$I_{\lambda}^{-}(\tau_{\lambda}, \mu) = \int_0^{\tau_{\lambda}} S(t) e^{-t/\mu} \frac{dt}{\mu}$$

- Znamo i da lepo aproksimiramo funkciju izvora (Plankova f-ja, LTR) i da izračunamo neprozračnost (sistem Sahinih jednačina \rightarrow Boltzmann \rightarrow saberemo sve doprinose (b-f, f-f, itd.).
- Mi smo, u principu, spremni da računamo spektre na osnovu datih modela zvezdanih atmosfera

Dakle sada bi trebalo da možemo da razumemo ovaj plot



Magic et al. (2015)

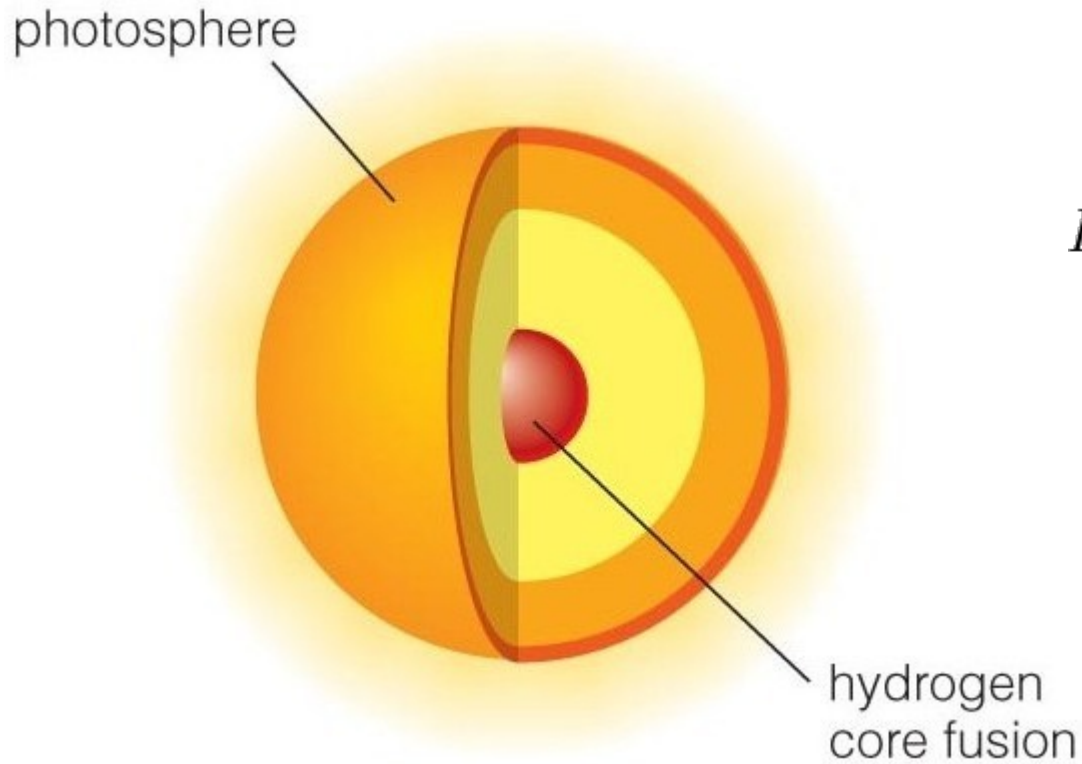
Sledeći korak – dve opcije

- Zračenje interaguje sa materijom i utiče na strukturu zvezdane atmosfere. Uz neke dodatne aproksimacije možemo da nadjemo strukturu atmosfere za date zvezdane parametre
- Zračenje (pre svega u spektralnim linijama) je osetljivo na različite parametre na različitim dubinama u atmosferi. Detaljno modeliranje spektralnih linija će nam omogućiti da zaključimo ove parametre
- Tokom ostatka kursa ćemo se baviti sa oba aspekta!



Prenos energije kroz zvezdu

- Energija zvezdi nastaje u jezgru, van jezgra mora da važi zakon održanja energije!



$$L(r) = \frac{dE^{\text{out}} - dE^{\text{in}}}{dt} = \text{const}$$
$$4r^2\pi F(r) = \text{const}$$

$$F(r) \approx \text{const}$$
$$\int_0^\infty F_\lambda(z) d\lambda = \text{const}$$

Dimenzije atmosfere su mnogo manje od poluprečnika zvezde

Specifični monohromatski fluks (gustina fluksa)

- Količina energije transportovana kroz jediničnu površinu, u jedinici vremena po jedinici talasne dužine. Gledamo **neto** energiju.

$$F_\lambda = \oint I_\lambda \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\mu = \cos \theta$$

$$F_\lambda = 2\pi \int_{-1}^1 I_\lambda(\mu) \mu d\mu$$

- Nekad ćete naći:

$$\mathcal{F}_\lambda = 2\pi \int_{-1}^1 I_\lambda(\mu) \mu d\mu \quad \text{Fluks}$$

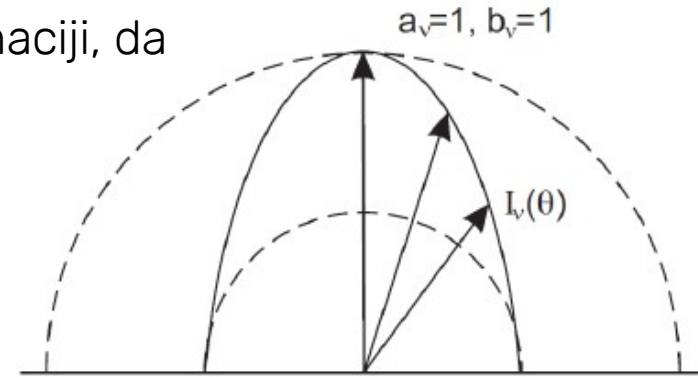
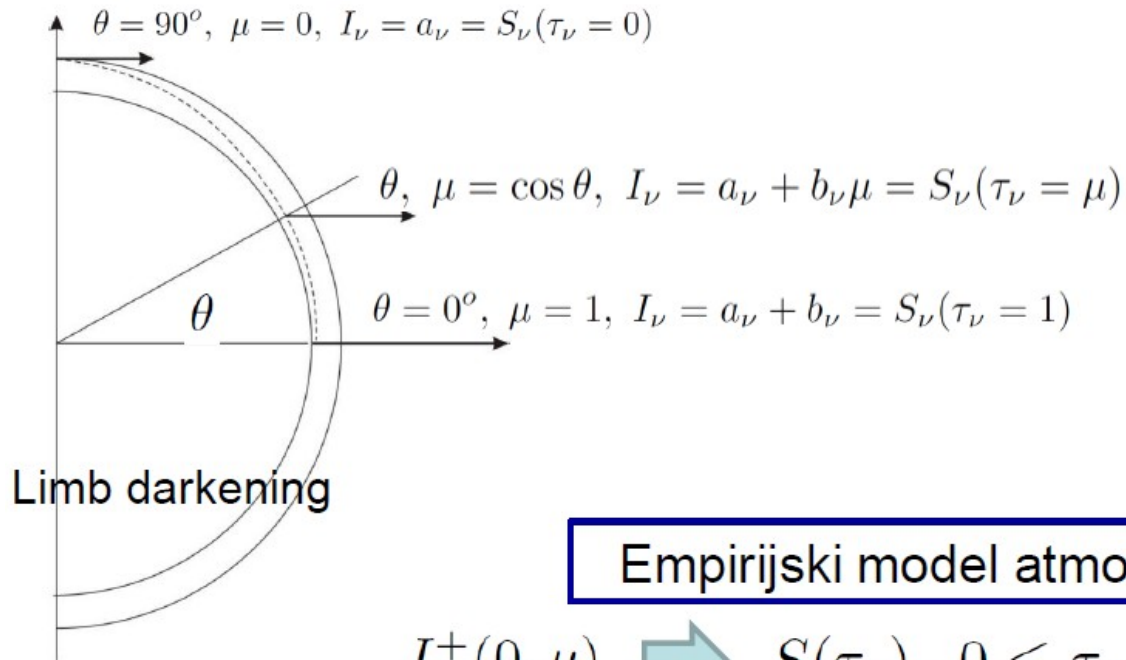
$$F_\lambda = 2 \int_{-1}^1 I_\lambda(\mu) \mu d\mu \quad \text{Astrofizički fluks}$$

$$\Phi_\lambda = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\lambda(\mu) \mu d\mu \quad \text{Eddingtonov fluks}$$

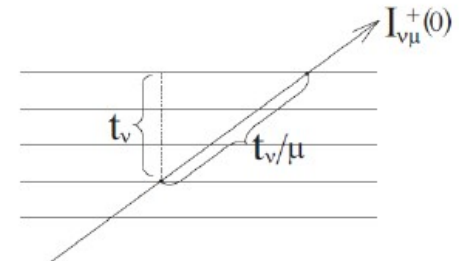
Nazad na Milne-Eddingtonovu aproksimaciju

- Rešili smo JPZ u ME (Milne-Barbier-Unsold-ovoj) aproksimaciji, da dobijemo tzv. Eddington Barbier relaciju

$$I^+(\mu) = a + b\mu$$



$$I_\nu(0, \mu) = S_\nu(\tau_\nu = \mu)$$



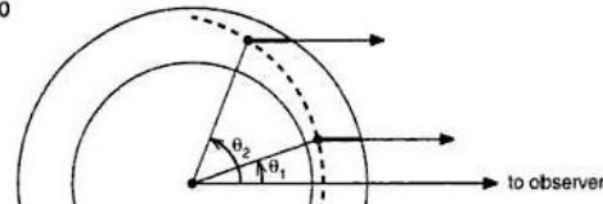
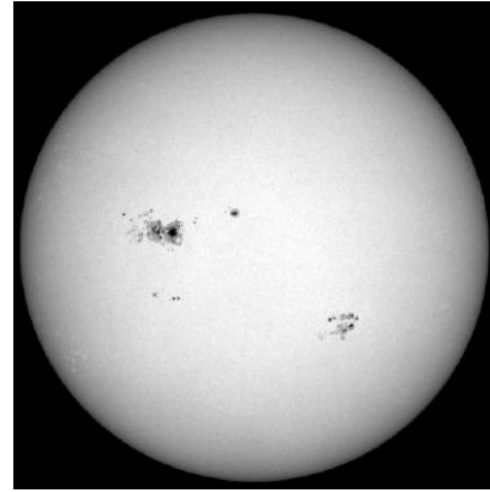
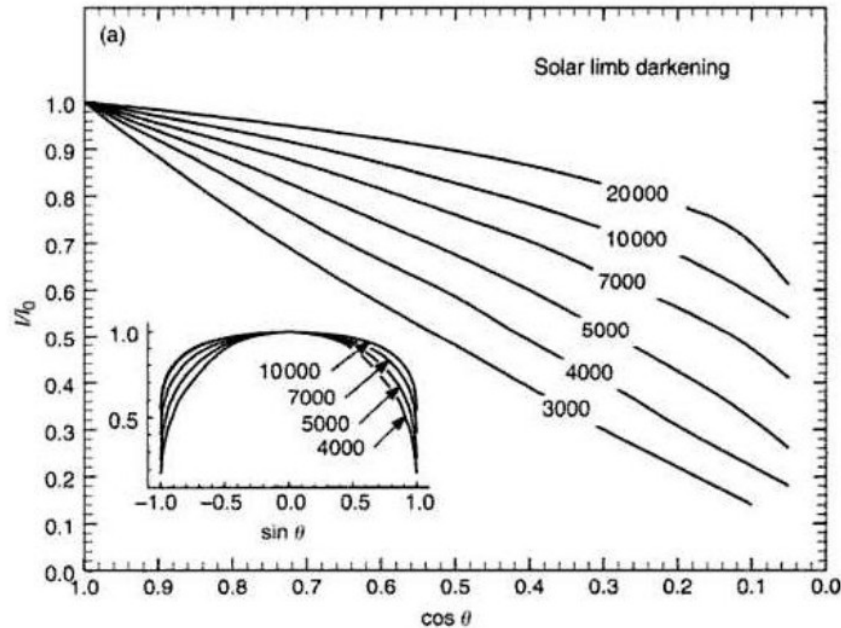
Empirijski model atmosfere

$$I_\nu^+(0, \mu) \Rightarrow S(\tau_\nu), \quad 0 \leq \tau_\nu \leq 1 \xRightarrow{\text{LTR}} T(\tau_\nu)$$

Mapiranje atmosfere po dubini

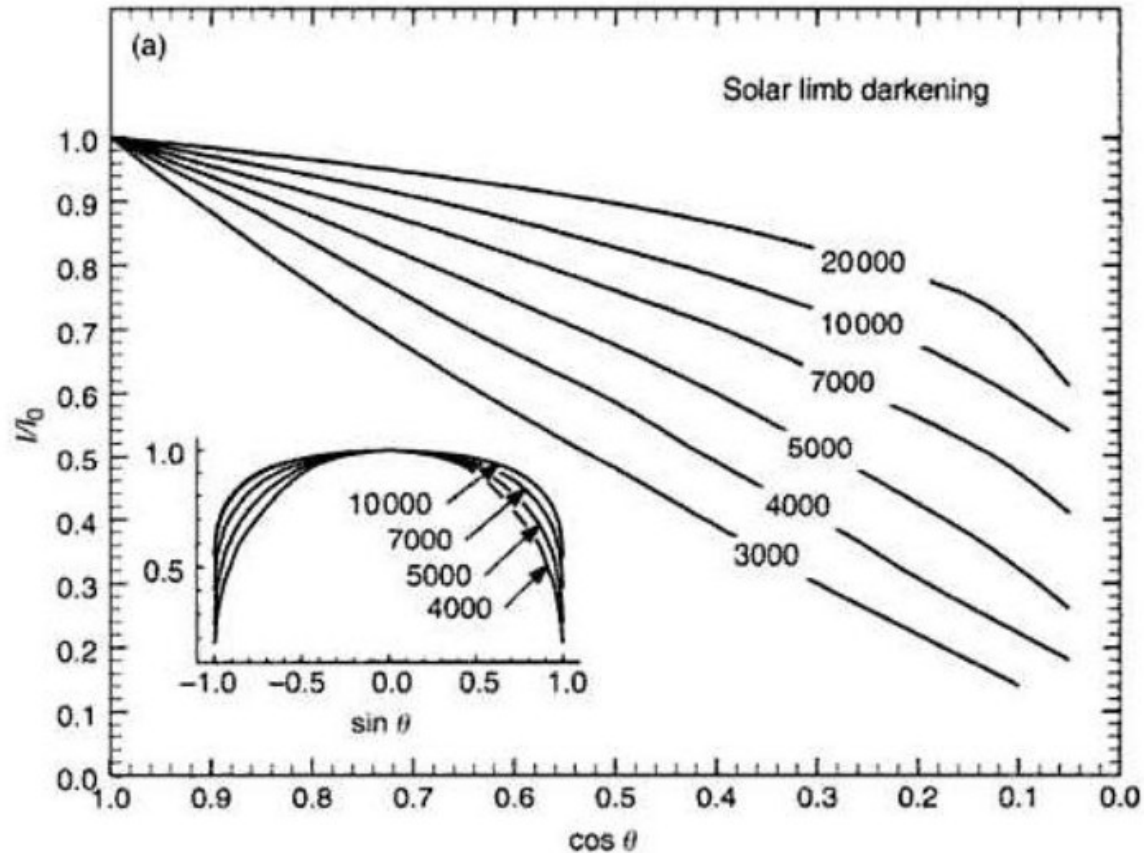
- Ideja je da posmatranjem limb darkeninga zaključimo raspodelu temperature po dubini
- U prvom koraku pretpostavljamo ME aproksimaciju, u drugom LTR

$$I_{\lambda}^{+}(\mu) \rightarrow S_{\lambda}(\tau_{\lambda}) \rightarrow T(\tau_{\lambda})$$



Limb darkening (potamnjeneje ka rubu)

- Limb darkening zavisi od talasne dužine, zašto? (tabla, podsetnik na model Sunčeve atmosfere)



Limb darkening (potamnjenje ka rubu)

- Limb darkening zavisi od talasne dužine, zašto?
- Koeficijent apsorpcije zavisi od talasne dužine
- Funkcija izvora (Plankova funkcija) zavisi od talasne dužine: Setite se da je na većim talasnim dužinama funkcija izvora bila manje “strma” (vežbe od prošlog petka)
- Gledanje istog objekta pod različitim uglovima i na različitim talasnim dužinama nam daje uvid u raspodelu temperature po dubini.
- Ovo je tema koja će se provlačiti kroz ostatak kursa.

Milne-Eddingtonova aproksimacija za Fluks

- Pod pretpostavkom linearne funkcije izvora, izračunajte izlazni fluks
- Samostalan rad 5-6 min.

Milne-Eddingtonova aproksimacija za Fluks

- Pod pretpostavkom linearne funkcije izvora, izračunajte izlazni fluks

$$S_{\lambda} = a_{\lambda} + b_{\lambda}\tau_{\lambda}$$

$$\mathcal{F}_{\lambda} = 2\pi \int_{-1}^1 I_{\lambda}^{+} \mu d\mu = 2\pi \int_0^1 (a_{\lambda} + b_{\lambda}\mu) \mu d\mu$$

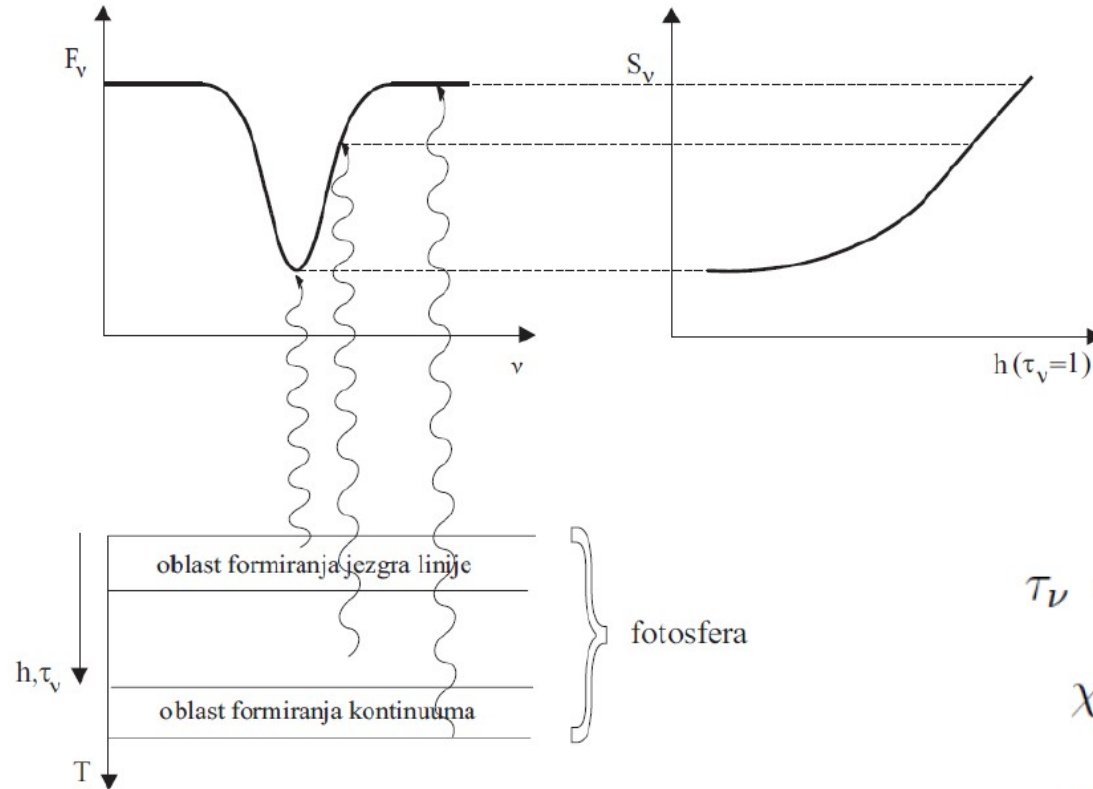
$$\mathcal{F}_{\lambda} = \pi(a_{\lambda} + \frac{2}{3}b_{\lambda}) = \pi S(\tau_{\lambda} = 2/3)$$

“Siva Atmosfera”

- Sve do sada izvedeno zavisi od talasne dužine (frekvencije). Možemo li nekako ustanovimo neku generalniju skalu dubina
- Aproksimacija sive atmosfere pretpostavlja da radimo samo sa jednom talasnom dužinom koja (nadamo se dobro) opisuje atmosferu
- Ovime opisujemo **celokupan** transport zračenja kroz zvezdanu atmosferu jednom talasnom dužinom
- Ova aproksimacija je očigledno netačna, ali može da nam pruži uvid u to kakve strukture atmosfere imaju smisla
- M-E relacija za fluks postaje:

$$\mathcal{F} = \pi S(\tau = 2/3)$$
$$T_{\text{eff}} = T(\tau = 2/3)$$
- Da li ova efikasna temperatura ima smisla? Pogledajte FALC model i ocenite!

Milne-Eddington relacija za linije - opisno



$$\tau_\nu = \chi_\nu \cdot h \approx 2/3$$

$$\chi_\nu^L \gg \chi_\nu^c$$

$$h^L \ll h^c$$

$$T(h^L) < T(h^c)$$

Fotoni iz jezgra linije (za koje je velika neprozračnost) potiču iz viših slojeva, dok fotoni u krilima linije (gde je neprozračnost manja) stižu iz dubljih slojeva atmosfere.

Modeliranje zvezdanih atmosfera

- Videli smo da možemo da, na osnovu posmatranja limb darkeninga, probamo da zaključimo distribuciju temperature u Sunčevoj atmosferi.
- Sledeće pitanje je: **Šta diktira tu raspodelu? Koji modeli imaju smisla? Koja fizika je važna?**
- Pretpostavimo relevantnu fiziku.
- Rešimo jednačine.
- Uporedimo sa posmatranjima / merenjima.
- Zaključimo šta iz našeg modela radi a šta ne radi (ili suočimo modele).
- Videćete da se jako slična priča priča na Fizičkim Principima Strukture Zvezda
- "Kakve zvezde smeju da postoje?"

Ravnoteža zračenja

- Drugi način da napišemo da je fluks konstantan sa dubinom:

$$E^{\text{abs}} = E^{\text{em}}$$
$$dAdtdl \oint \int I_{\lambda} \chi_{\lambda} d\lambda d\Omega = dAdtdl \oint \int j_{\lambda} d\lambda d\Omega$$
$$\int J_{\lambda} d\lambda = \int S_{\lambda} d\lambda$$

- Šta smo ovde sve pretpostavili? (2-3 min diskusija)

Ravnoteža zračenja

- Drugi način da napišemo da je fluks konstantan sa dubinom:

$$E^{\text{abs}} = E^{\text{em}}$$
$$dAdtdl \oint \int I_{\lambda} \chi_{\lambda} d\lambda d\Omega = dAdtdl \oint \int j_{\lambda} d\lambda d\Omega$$
$$\int J_{\lambda} d\lambda = \int S_{\lambda} d\lambda$$

- Šta smo ovde sve pretpostavili? **Da energija biva očuvana** (razumno, nema nuklearnih reakcija van jezgra). Da su koeficijent apsorpcije i funkcija izvora izotropni (razumno).
- Pažnja! Ravnoteža zračenja važi iako temperatura opada sa visinom!

A šta je ovo “J”? Srednji intenzitet

- Srednji intenzitet je bukvalno intenzitet usrednjen po pravcu. Dakle, kao da računamo koliko fotona stigne u neku tačku, bez obzira na pravac iz kog dolaze.

Srednji intenzitet

$$J_{\lambda} = \frac{1}{4\pi} \oint I_{\lambda}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$$

$$J_{\lambda} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_{\lambda}(\mu) d\mu$$

Eddingtonov fluks,
definisani da izgleda
kao srednji

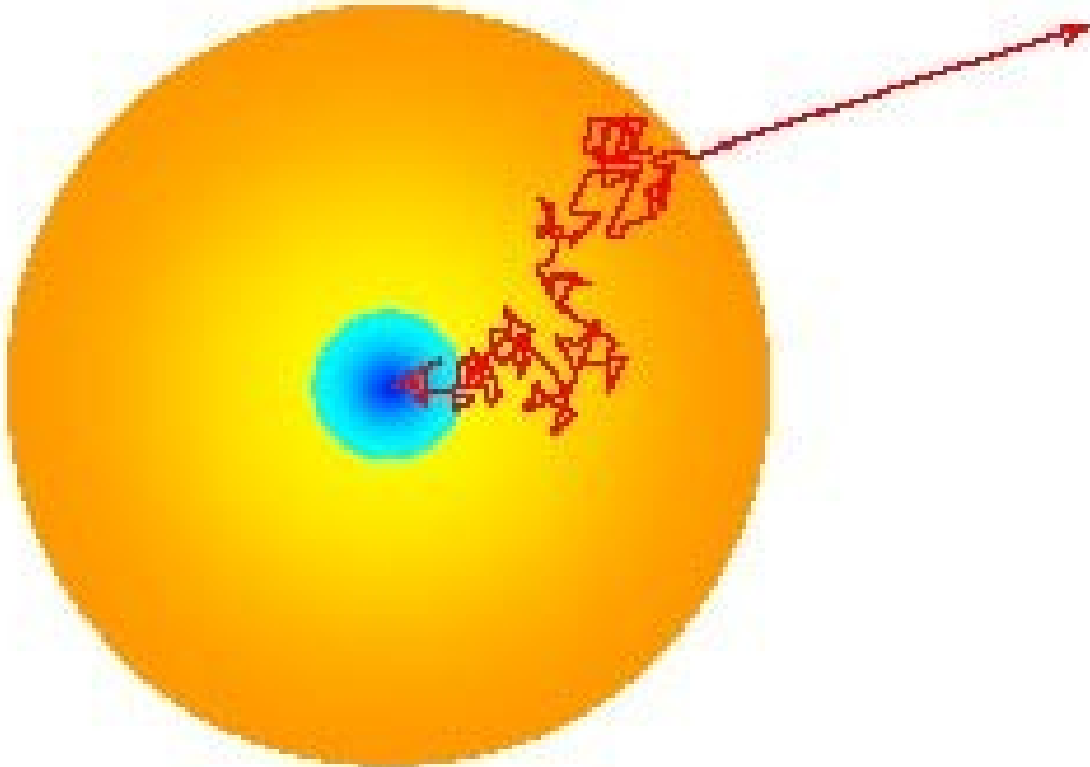
$$H_{\lambda} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_{\lambda}(\mu) \mu d\mu$$

intenzitet (naravno,
obratite pažnju na
dodatno **mi**)

Sećate li se ovog primera? Fotonu treba x godina da napusti Sunce

- Izgleda da nisam jedini kog taj primer nervira:

<https://www.askamathematician.com/2013/08/q-why-does-it-take-thousands-of-years-for-light-to-escape-the-sun/>



Besmisleno je da pričamo o "fotonu", svetlost konstantno menja svoju spektralnu raspodelu, time što se energija zračenja pretvara u toplotnu i obrnuto, te je mnogo bolje reći da se prosto toplota prenosi do površine a fotoni koje vidimo nastaju da površini!
(Ili na $\tau = 1$;))

Ravnoteža zračenja u unutrašnjosti zvezde

Uslov R.Z.

$$\mu \frac{dI_\nu(h, \mu)}{dh} = \chi_\nu(h) I_\nu(h, \mu) - \eta_\nu(h)$$

$$\frac{d}{dh} \int_0^\infty d\nu \int I_\nu(h, \mu) \mu d\omega = \frac{d}{dh} \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu(h) d\nu = 0$$

$$\mathcal{F}(h) = \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu(h) d\nu = \pi F(h) = \text{const}$$

$$\mathcal{F}_* = \pi F = \sigma T_{ef}^4$$

$$\mu \frac{1}{\chi_\nu(h)} \frac{dI_\nu(h, \mu)}{dh} = I_\nu(h, \mu) - S_\nu(h)$$

$$\int d\nu \int \mu d\omega$$

$$\mathcal{F} = 4\pi \int \frac{1}{\chi_\nu} \frac{dK_\nu}{dh} d\nu = c \int \frac{1}{\chi_\nu} \frac{dp_\nu}{dh} d\nu = \text{const}$$

$$\mathcal{F} = c \frac{1}{\chi} \frac{dp^{zr}}{dh} \quad p^{zr} = \frac{4\pi}{c} K \quad K \approx \frac{1}{3} J \approx \frac{1}{3} B = \frac{1}{3} \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

$$\mathcal{F} = \frac{c}{\chi} \frac{4\pi}{c} \frac{4}{3\pi} \sigma T^3 \frac{dT}{dh} = \frac{16}{3} \frac{\sigma}{\chi} T^3 \frac{dT}{dh}$$

Temperaturski gradijent je određen ukupnim energetskeim fluksom. To omogućava da se $T(h)$ u atmosferi dobije iz uslova ravnoteže zračenja.

Ravnoteža zračenja u sivoj atmosferi

- Ako pretpostavimo sivu atmosferu, ne moramo da brinemo o “preraspodeli” po talasnim dužinama, funkcija izvora mora da bude jednaka srednjem intenzitetu.

$$S = J$$

- Sa druge strane, sve vreme radimo pod pretpostavkom LTR, pa:

$$S = B = J$$

- Srednji intenzitet zračenja je **direktno kuplovan** sa temperaturom. Dakle struktura naše atmosfere je određena uslovom ravnoteže zračenja.
- Kako naći model atmosfere koji, **za dati fluks (zašto baš za dati fluks?)**, ispunjava jednačinu prenosa i ravnotežu zračenja?

Milneov problem

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S = I - J$$

- Intenzitet zavisi od samog sebe!
- Ovo je primer **kuplovanja** u prenosu zračenja. Videćemo još ovakvih situacija kada budemo razmatrali takozvanu ne-LTR.
- Ovo je primer tzv. Integro-diferencijalne jednačine:

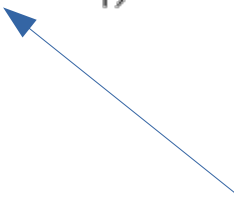
$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S = I - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mu) d\mu$$

- I zavisi od J a J zavisi od I , ovo je primer **kuplovanja**!
- Zar ne bi bilo lepo da možemo da napišemo ovo tako da imamo jednu nepoznatu **funkciju**?

Lambda operator

- Proces integracije JPZ i integracije po uglovima možemo da zovemo **operatorom**. Zato što od jedne funkcije (S) pravimo drugu funkciju (J).

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mu) d\mu = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} S(t) e^{(\tau-t)/\mu} dt / \mu + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} S(t) e^{(t-\tau)/|\mu|} dt / |\mu| = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} S(t) E_1(|t - \tau|) dt \\ J(\tau) &= \Lambda_{\tau}[S(t)] \end{aligned}$$



“Kernel”, u ovom slučaju tzv. prvi eksponencijalni integral

Švarcšild-Milne jednačine. Momenti intenziteta

$$\int_{-1}^1 I_\nu(\tau_\nu, \mu) \mu^n d\mu =$$

$$\int_0^1 \mu^n d\mu \int_{\tau_\nu}^\infty S_\nu(t_\nu) e^{-(t_\nu - \tau_\nu)/\mu} \frac{dt_\nu}{\mu} + \int_{-1}^0 \mu^n d\mu \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) e^{-(t_\nu - \tau_\nu)/\mu} \frac{dt_\nu}{-\mu}$$

$$\int_{\tau_\nu}^\infty S_\nu(t_\nu) dt_\nu \int_1^\infty e^{-(t_\nu - \tau_\nu)y} \frac{dy}{y^{n+1}} + (-1)^n \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) dt_\nu \int_1^\infty e^{-(\tau_\nu - t_\nu)y} \frac{dy}{y^{n+1}} =$$

$$\int_{\tau_\nu}^\infty S_\nu(t_\nu) E_{n+1}(t_\nu - \tau_\nu) dt_\nu + (-1)^n \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) E_{n+1}(\tau_\nu - t_\nu) dt_\nu$$

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xy}}{y^n} dy$$

Šta su ove funkcije E_n ?

- Eksponencijalni integrali!
- “Kerneli” prenosa zračenja koji nam omogućavaju da dobijemo različite momente intenziteta “direktno” iz funkcije izvora.
- Na osnovu njih možemo da definišemo operatore, slične **Lambda** operatoru
- Milneova jednačina za fluks:

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xy}}{y^n} dy$$

- K-integral

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\tau &= \Phi_\tau[S(t)] \\ K_\tau &= \frac{1}{4}X_\tau[S(t)]\end{aligned}$$

Šta je ovaj “K integral”?

- Drugi moment intenziteta:

$$K = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mu) \mu^2 d\mu$$

- Koji je fizički smisao K integrala?

Šta je ovaj “K integral”?

- Drugi moment intenziteta:

$$K = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mu) \mu^2 d\mu$$

- Koji je fizički smisao K integrala?
- K integral je proporcionalan **pritisku zračenja**:

$$p = \frac{4\pi}{c} K$$

- Takodje, za izotropno zračenje $\mathcal{J} = 3K$ (pokaži)
- **Sledeći čas:** Kako se ovo sve uklapa zajedno!