

Teorija Zvezdanih Spektara

Lekcija 3: JPZ u modelima zvezdanih atmosfera

Ivan Milić (AOB / MATF)

25/10/2022

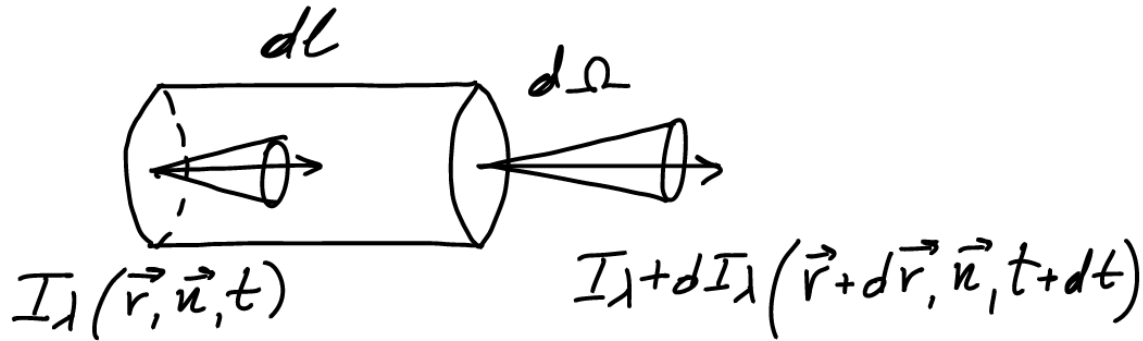
Podsetnik

- Na prošlom času smo pričali o jednačini prenosa zračenja
- Intenzitet generalno **sedmodimenziona veličina** → ako se fokusiramo na jedan zrak (pravac), i ne razmatramo vremensku zavisnost, postaje **dvodimenziona veličina** (udaljenost duž pravca i talasna dužina).
- Formalno rešenje duž pravca:

$$I_{\lambda}^{+} = I_{\lambda}^0 e^{-\tau_{\lambda}} + \int_0^{\tau_{\lambda}} S(t) e^{-t} dt$$

- Danas ćemo analizirati malo generalniji slučaj – **zvezdanu atmosferu**.
- Rešenje JPZ za atmosferu + apsorpcija i emisija u zvezdanoj atmosferi.

Jednačina prenosa zračenja



Jednostavan oblik, duž zraka

$$\frac{dI_\lambda}{dl} = -\chi_\lambda I_\lambda + j_\lambda$$

Generalnije gledano, transport energije kroz ovaj cilindar je opisan promenom intenziteta, kao i izvorima i ponorima zračenja.

U 3D, vremenski zavisnom obliku, izgleda ovako (vektor n označava pravac)

$$\frac{1}{c} \frac{dI_\lambda(\vec{r}, \vec{n}, t)}{dt} + \vec{n} \cdot \nabla I_\lambda(\vec{r}, \vec{n}, t) = -\chi_\lambda(\vec{r}, \vec{n}, t) I_\lambda(\vec{r}, \vec{n}, t) + j_\lambda(\vec{r}, \vec{n}, t)$$

Jednačina prenosa zračenja u 1D atmosferama

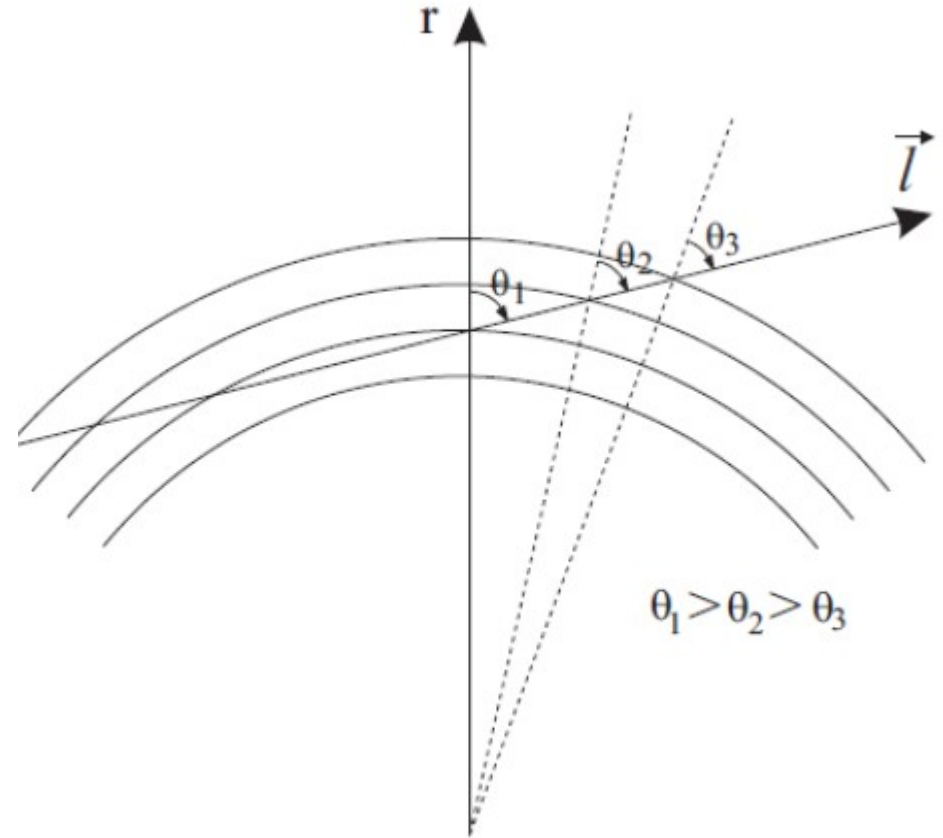
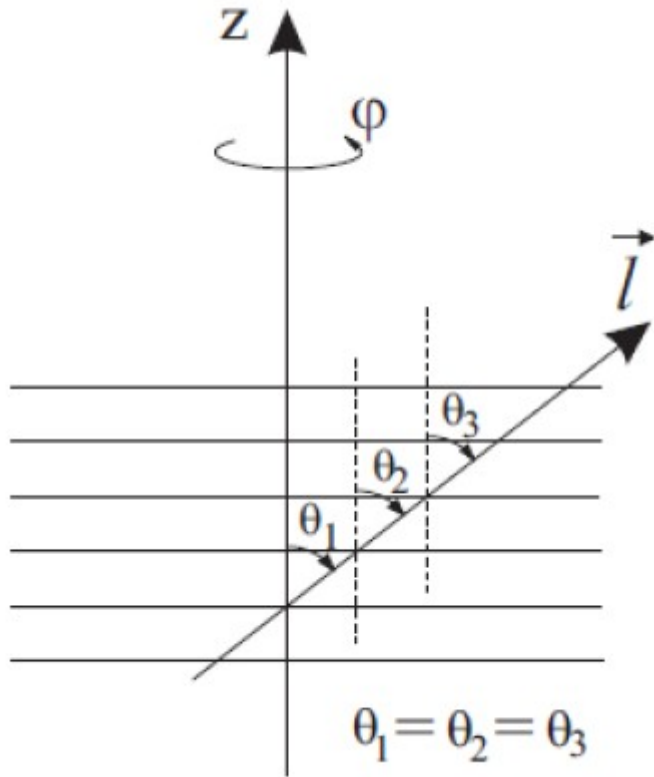
$$\frac{1}{c} \frac{dI_\lambda(\vec{r}, \vec{n}, t)}{dt} + \vec{n} \cdot \nabla I_\lambda(\vec{r}, \vec{n}, t) = -\chi_\lambda(\vec{r}, \vec{n}, t) I_\lambda(\vec{r}, \vec{n}, t) + j_\lambda(\vec{r}, \vec{n}, t)$$

Iako postoje situacije u kojima rešavamo ovu jednačinu (numerički), u ovom kursu ćemo koristiti dosta pojednostavljenja:

- Stacionarnost: svetlost prelazi put kroz atmosferu mnogo brže nego što atmosfera stigne da se promeni (**diskusija 2-3 minuta**).
- 1D aproksimacija – Pretpostavlja da fizički parametri ne zavise od x i y .
- Sada na tablu da vidimo šta ovo implicira!

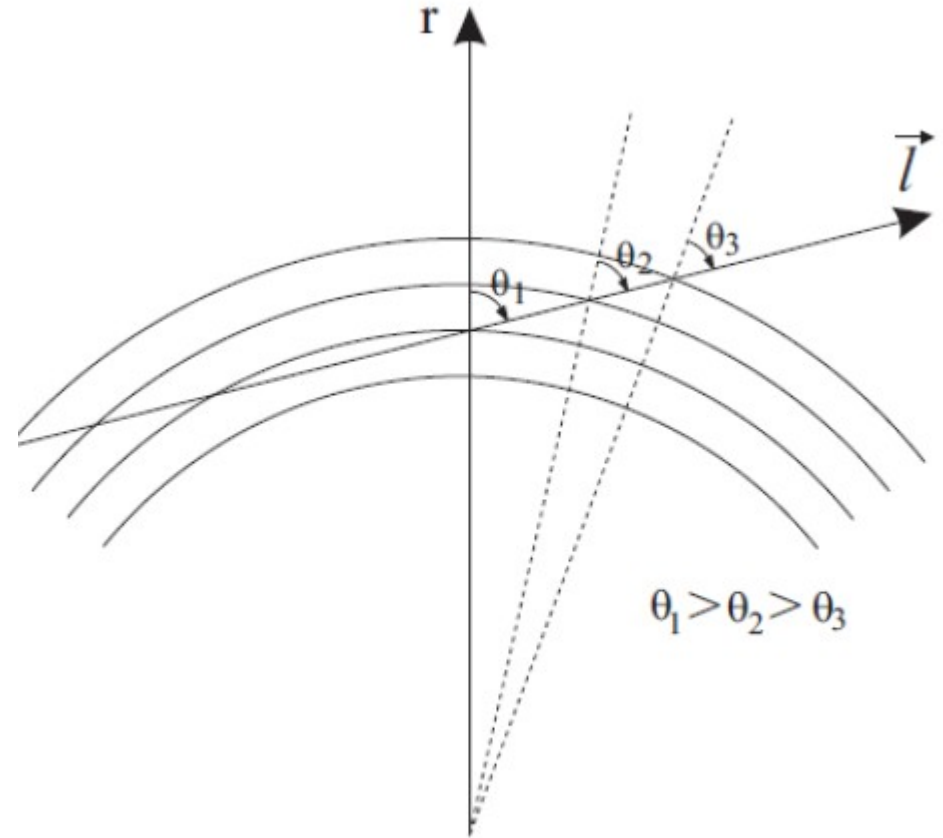
Jednačina prenosa u 1D atmosferi

- 1D plan-paralena vs 1D sferna geometrija



Pitanje

- Za koje vrednosti polarnog ugla sferičnost Sunčeve atmosfere postaje bitna?



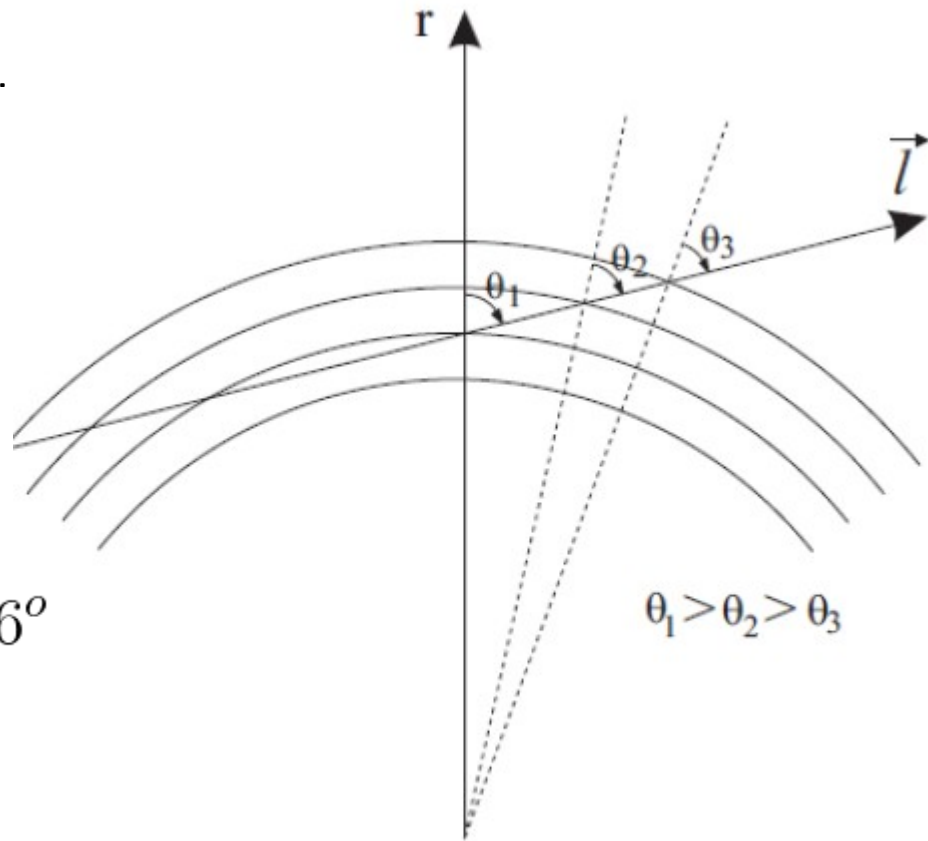
Pitanje

- Za koje vrednosti polarnog ugla sferičnost Sunčeve atmosfere postaje bitna?

Debljina atmosfere Sunca je oko ~ 5000 km.

Poluprečnik Sunca je $700\,000$ km.

$$\theta_{crit} = \cos^{-1}(5000/700000) = 89.6^\circ$$



Jednačina prenosa zračenja u 1D atmosferama

- Nakon ove diskusije dobijamo:

$$\cos \theta \frac{dI_\lambda(z, \theta)}{dz} = -\chi_\lambda(z)I_\lambda(z, \theta) + j_\lambda(z)$$

- Odnosno, uvodeći optičku dubinu i funkciju izvora i čuveno "mi":

$$\mu \frac{dI_\lambda(\tau_\lambda, \theta)}{d\tau_\lambda} = I_\lambda(\tau_\lambda, \theta) - S_\lambda(\tau_\lambda)$$

- U ovoj formulaciji talasne dužine su dekoplovane, možemo da rešimo jednačinu prenosa odvojeno za svaku talasnu dužinu koja nas zanima.
- Npr. aproksimacija **sive atmosfere** razmatra samo jednu talasnu dužinu, tj. neki srednji koeficijent apsorpcije za sve talasne dužine.

Računanje izlaznog spektra

- Data nam je raspodela T , p , hemijski sastav sa visinom.
- Biramo talasnu dužinu
- U svakoj tački atmosfere računamo koeficijente apsorpcije i emisije
- Računamo skalu optičke dubine i funkciju izvora
- Integralimo:

$$I_{\lambda}^{+} = \int_0^{\infty} S_{\lambda}(\tau_{\lambda}) e^{-\tau_{\lambda}} d\tau_{\lambda}$$

- Ponavljamo za ostale talasne dužine → To je naš spektar!

Pitanje #1

Šta ako nam treba intenzitet u nekoj drugoj tački, a ne na površini atmosfere?

I ovo ćemo rešiti **na tabli**.

Formalno rešenje jednačine prenosa:

Za ulazno i izlazno zračenje formalno rešenje ima sledeći oblik:

$$I_{\lambda}^{+}(\tau_{\lambda}) = \int_{\tau_{\lambda}}^{\infty} S_{\lambda}(t) e^{-(t-\tau_{\lambda})} dt$$
$$I_{\lambda}^{-}(\tau_{\lambda}) = \int_0^{\tau_{\lambda}} S_{\lambda}(t) e^{-(\tau_{\lambda}-t)} dt$$

U principu, atmosfera ne mora da bude polubeskonačna. Šta onda?

Ulazno zračenje ne mora da bude nula. Šta onda?

Formalno rešenje jednačine prenosa:

Za ulazno i izlazno zračenje formalno rešenje ima sledeći oblik:

$$I_{\lambda}^{+}(\tau_{\lambda}) = \int_{\tau_{\lambda}}^{\infty} S_{\lambda}(t) e^{-(t-\tau_{\lambda})} dt$$
$$I_{\lambda}^{-}(\tau_{\lambda}) = \int_0^{\tau_{\lambda}} S_{\lambda}(t) e^{-(\tau_{\lambda}-t)} dt$$

Ovo je nekad poznato i kao **integralni oblik** jednačine prenosa. U praksi, kada JPZ rešavamo numerički, za neke zadate (tabelarne) vrednosti funkcije izvora, naši numerički metodi se zasnivaju na ovome.

Još malo o optičkoj dubini:

- Optička dubine neke tačke (na nekoj talasnoj dužini) izražava verovatnoću (direktnog!) bekstva fotona te talasne dužine iz te tačke:

$$I_{\lambda} = I_{\lambda}^0 e^{-\tau_{\lambda}}$$

- Ako zamislimo homogenu sredinu, i setimo se definicije srednjeg slobodnog puta:

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\chi_{\lambda}}$$

$$\tau_{\lambda} = l \chi_{\lambda} = \frac{l}{\langle l \rangle}$$

- Broj srednjih slobodnih puteva na datoj talasnoj dužini!

Pitanje:

- Koliki je očekivani optički put koju će preći jedan foton kroz optički gustu sredinu?

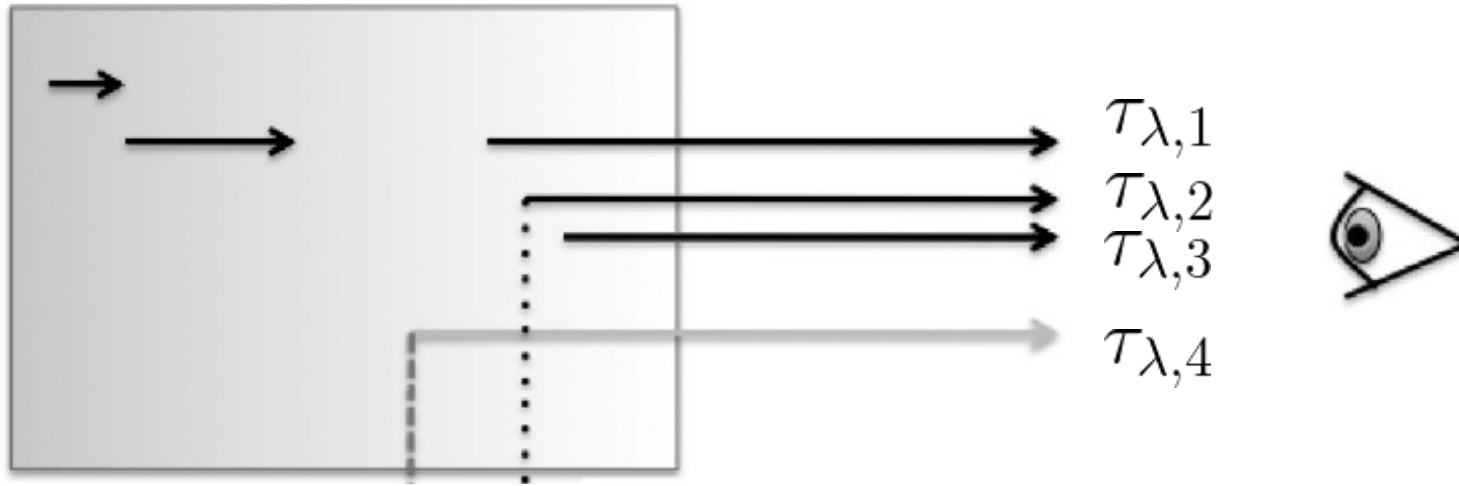
Pitanje:

- Koliki je očekivani optički put koju će preći jedan foton kroz optički gustu sredinu?

$$\overline{\tau_\lambda} = \frac{\int_0^\infty e^{-\tau_\lambda} \tau_\lambda d\tau_\lambda}{\int_0^\infty e^{-\tau_\lambda} d\tau_\lambda} = 1$$

- Famosna “optička dubina jednako jedan”.
- Nekad poznata kao i “**Eddingtonova aproksimacija**”. (Uradite zadatak 2 sa Vežbi #2, ako već niste!)
- Ne zaboravite: **optička dubina na različitim talasnim dužinama odgovara različitim geometrijskim putevima!**

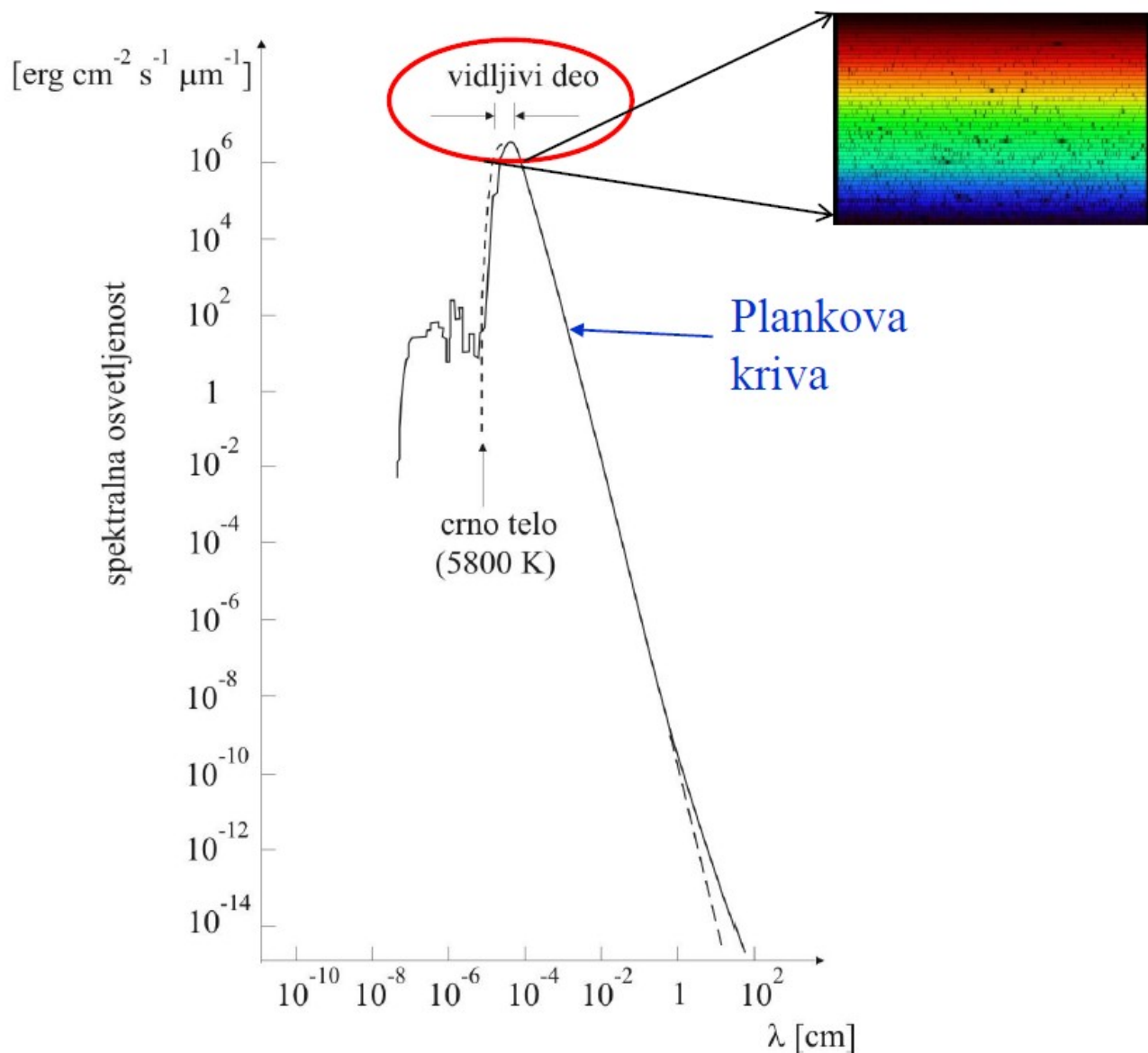
“Dubina formiranja”



- Fotoni različitih talasnih dužina dolaze iz različitih dubina atmosfere.
- Na različitim dubinama atmosfere vladaju različiti uslovi → Različite funkcije izvora.
- Tako na različitim talasnim dužinama vidimo različite intenzitete (različita apsolutno crna tela!).

Setimo se

- Neprozračnost je različita na različitim talasnim dužinama
- "Vidimo" različite temperature
- Dobijamo spektar koji je sačinjen (u prvoj aproksimaciji) od spektara crnih tela različite temperature na različitim talasnim dužinama.



Setimo se

- Na vežbama smo ove skokove razumeli preko:

Izlazni intenzitet (spektar)

Funkcija izvora u atmosferi

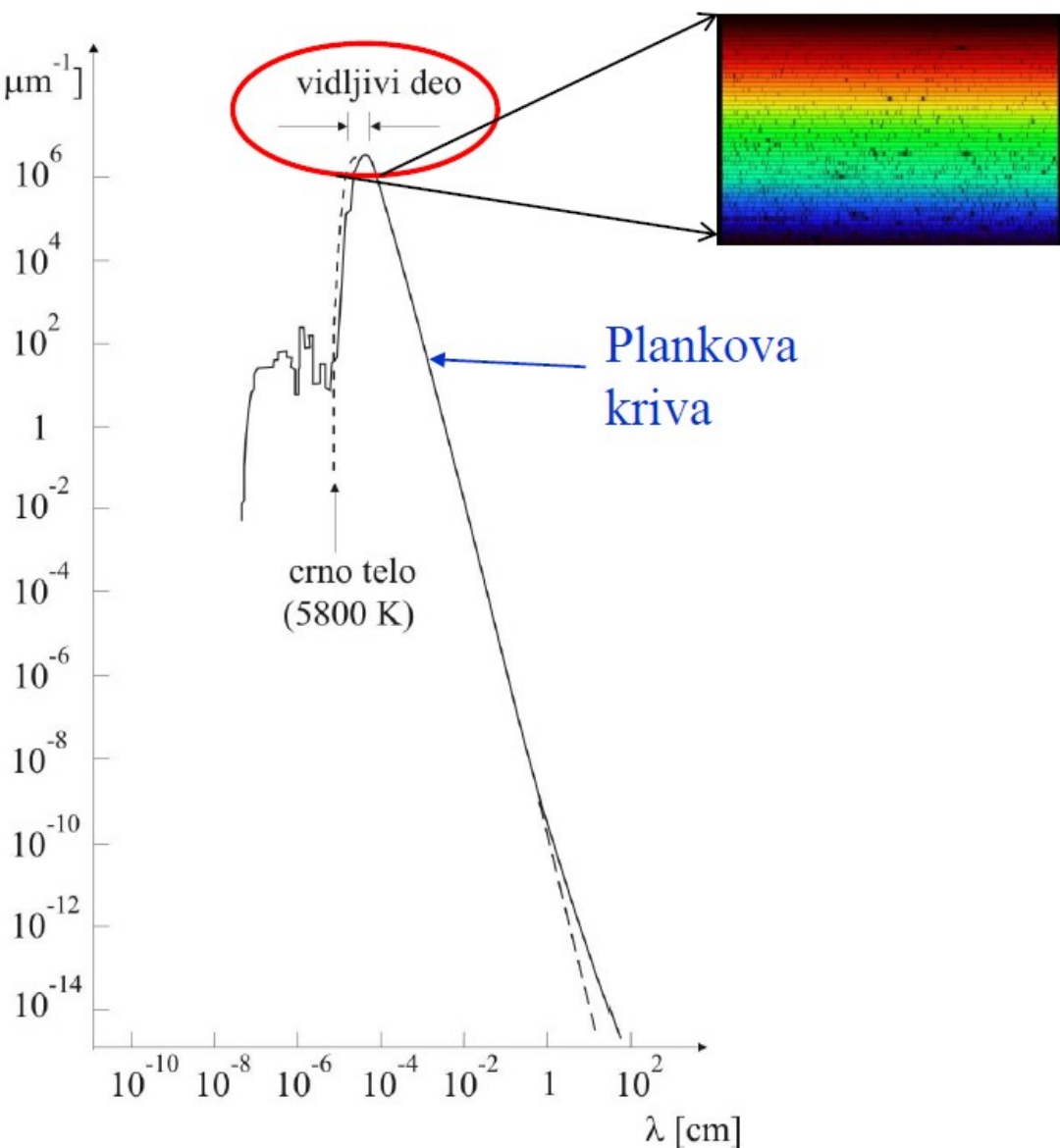
$$I_{\lambda} = I_{\lambda}^0 e^{-\tau_{\lambda}} + S(1 - e^{-\tau_{\lambda}})$$

Intenzitet na donjoj granici

Ukupna optička debljina atmosfere

spektralna osvetljenost

[erg cm⁻² s⁻¹ μm⁻¹]

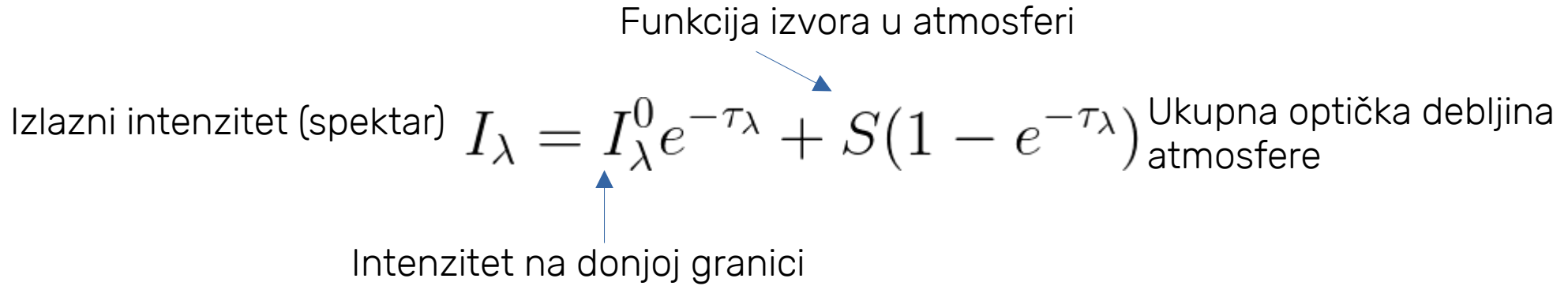


“Intuitivno” formalno rešenje

Izlazni intenzitet (spektar) $I_\lambda = I_\lambda^0 e^{-\tau_\lambda} + S(1 - e^{-\tau_\lambda})$ Ukupna optička debljina atmosfere

Funkcija izvora u atmosferi

Intenzitet na donjoj granici



- Ukoliko je “temperatura” ulaznog zračenja veća od temperature atmosfere, izlazni intenzitet je manji, i obrnuto.
- Ovo je ekstremno jednostavan model, ali nam pomaže da razumemo šta se dešava!
- Kako da povežemo temperaturu sa ovom pričom?

Za funkciju izvora – setimo se Kirchhoff-a

$$\frac{dI_\lambda}{dl} = -\chi_\lambda I_\lambda + j_\lambda = 0$$
$$\frac{j_\lambda}{\chi_\lambda} = S_\lambda = I_\lambda = B_\lambda$$

- Ovo bi bila (**globalna**) termodinamička ravnoteža (**termalna ravnoteža**). Nulta aproksimacija za izlazni spektar.
- Medjutim, možemo da pretpostavimo da se koeficijenti apsorpcije i emisije **lokalno** ponašaju kao da su u ravnoteži (jer su čestice u ravnoteži), pa važi tzv. **Lokalna termodinamička ravnoteža!** Intenzitet je ipak rezultat jednačine prenosa.

$$\frac{j_\lambda}{\chi_\lambda} = S_\lambda = B_\lambda \neq I_\lambda$$
$$\frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} = I_\lambda - S_\lambda$$

Lokalna termodinamička ravnoteža - čestice

- **Maxwell** – ova raspodela po brzinama

$$f(v)dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv$$

- **Boltzmann** jednačina (stanja ekscitacije)

$$\frac{n_j}{n_k} = \frac{g_j}{g_k} e^{-(E_j - E_k)/kT}$$

- **Saha** jednačina (stanja jonizacije)

$$\frac{n_{i+1}}{n_i} = \frac{1}{n_e} \Phi(T) = \frac{1}{n_e} \left(\frac{2\pi m kT}{h^2}\right)^{3/2} \frac{2U_{i+1}}{U_i} e^{-\chi_i/kT}$$

Ravnotežne
raspodele čestica
na lokalnoj
temperaturi

Ali, fotoni nemaju
ravnotežnu raspodelu !

$$I_\nu(\vec{r}) \neq B_\nu(T(\vec{r})) \quad !$$

I za kraj

- Ako imamo vremena, rešimo do kraja drugi zadatak sa prethodnih vežbi i povežimo to sa temperaturom:
- *Milne-Eddingtonova aproksimacija pretpostavlja da funkcija izvora u polubeskonačnoj atmosferi raste sa optičkom dubinom. Nadjite izlazni intenzitet za takvu atmosferu. Prodiskutujte rešenje.*