

Teorija Zvezdanih Spektara

Lekcija 6: Siva Atmosfera u Ravnoteži Zračenja

Ivan Milić (AOB / MATF)

08/11/2022

Pitanje za zagrevanje

- Naći zavisnost intenziteta od optičke dubine i pravca za sivu, Milne-Eddington atmosferu (Funkcija izvora je linearna funkcija optičke dubine).
- Tabla! (Ostaje za domaći).

Podsetnik

- Upoznali smo se sa pojmom **sive atmosfere**. Sve je opisano jednom talasnom dužinom!
- **Modelovanje**: Nalazimo prihvatljive strukture zvezdane atmosfere za dati fluks.
- **Prihvatljive**: (akka “samokonzistentne”): Ispunjavaju neki set pretpostavki.
- Za nas su to (za sada): **Ravnoteža zračenja + Jednačina Prenosa Zračenja**
- (2-3 min diskusija o konceptualnim razlikama izmedju ove dve pretpostavke)
- U sivoj atmosferi ravnoteža zračenja ima jako jednostavan oblik: $S = J$
- Ukoliko na to dodamo LTR (treća pretpostavka):

$$S = B = J$$

Prenos zračenja u unutrašnjosti zvezde

$$\mu \frac{1}{-\chi} \frac{dI}{dh} = I - S; \quad 2\pi \int_1^{-1} \mu d\mu \quad \text{JPZ}$$

K integral

$$-4\pi \frac{1}{\chi} \frac{dK}{dh} = \mathcal{F}; \quad p_{\text{zr}} = \frac{4\pi K}{c}$$

Prvi moment
JPZ

$$-\frac{c}{\chi} \frac{dp_{\text{zr}}}{dh} = \mathcal{F}$$

$$K \approx \frac{J}{3} = \frac{B}{3} = \frac{1}{3} \sigma T^4$$

Izotropija + LTR

$$\mathcal{F} = -\frac{16}{3} \frac{\sigma}{\chi} T^3 \frac{dT}{dh}$$

Čemu je sve srazmeran fluks? Da li ima smisla? (3 min diskusija)

Šta je “K-integral”?

$$K = \int K_\lambda d\lambda = \frac{1}{4\pi} \int \oint I_\lambda \cos^2 \theta d\Omega d\lambda$$

- Drugi moment intenziteta:
ili, za sivu, 1D atmosferu:

$$K = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mu) \mu^2 d\mu$$

- Koji je fizički smisao K integrala?
- K integral je proporcionalan **pritisku zračenja**:

$$p = \frac{4\pi}{c} K$$

- Takodje, za izotropno zračenje $J = 3K$ (pokazati oboje → tabla)
- Ovo će nam trebati kasnije. Sada idemo nazad na Milneov problem.

Momenti intenziteta (momenti polja zračenja)

- Ovo je pod pretpostavkom sive, 1D plan paralelne atmosfere. U generalnom slučaju, sve vrednosti zavise od talasne dužine i integracija se vrši po oba ugla

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mu) d\mu \\ H &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mu) \mu d\mu \\ K &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mu) \mu^2 d\mu \end{aligned}$$

- Ukoliko je intenzitet izotropan, lako se dobija da:
$$\begin{aligned} J &= I = 3K \\ H &= 0 \end{aligned}$$

Milneov problem

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S = I - J$$

- Intenzitet zavisi od samog sebe!
- Ovo je primer **spregnutosti (kuplovanja)** u prenosu zračenja. Videćemo još ovakvih situacija kada budemo razmatrali takozvanu ne-LTR.
- Ovo je primer tzv. Integro-diferencijalne jednačine:

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S = I - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mu) d\mu$$

- I zavisi od $J(S)$ a J zavisi od I, ovo je spregnutost.
- **Pitanje:** Da li izotermna atmosfera može da bude u ravnoteži zračenja?

Milneov problem

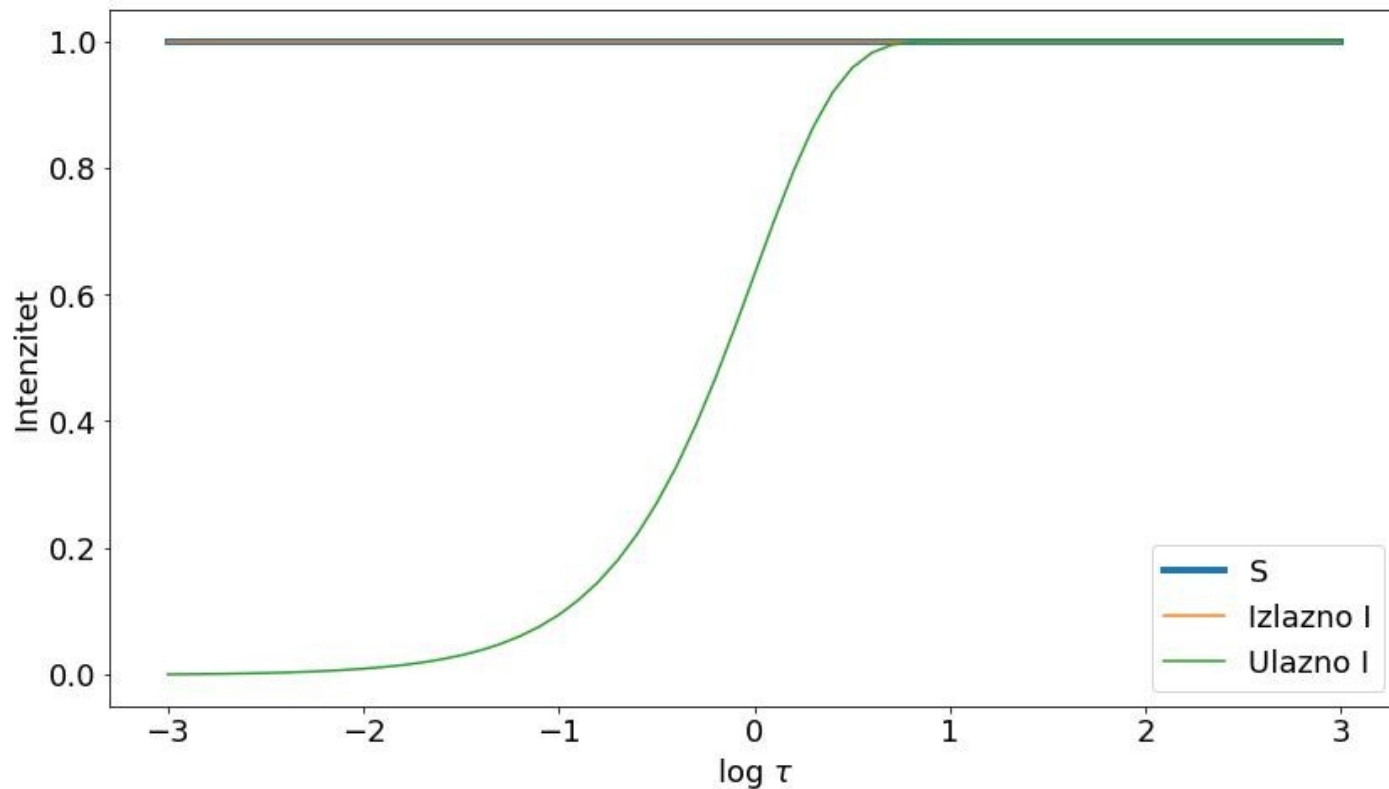
$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S = I - J$$

- **Pitanje:** Da li izotermna atmosfera u LTR može da bude u ravnoteži zračenja?
- Izračunajmo J pod pretpostavkom izotermne atmosfere i uporedimo sa S . Ako nisu jednaki, ne može!
- $B = \text{const}$, npr $B = 1$. Izračunajmo I u svakom pravcu svuda u atmosferi.
- (Tabla)

Milneov problem

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S = I - J$$

- **Pitanje:** Da li izotermna atmosfera u LTR može da bude u ravnoteži zračenja?
- Izračunajmo J pod pretpostavkom izotermne atmosfere i uporedimo sa S (tj B).
Numeričko rešenje.

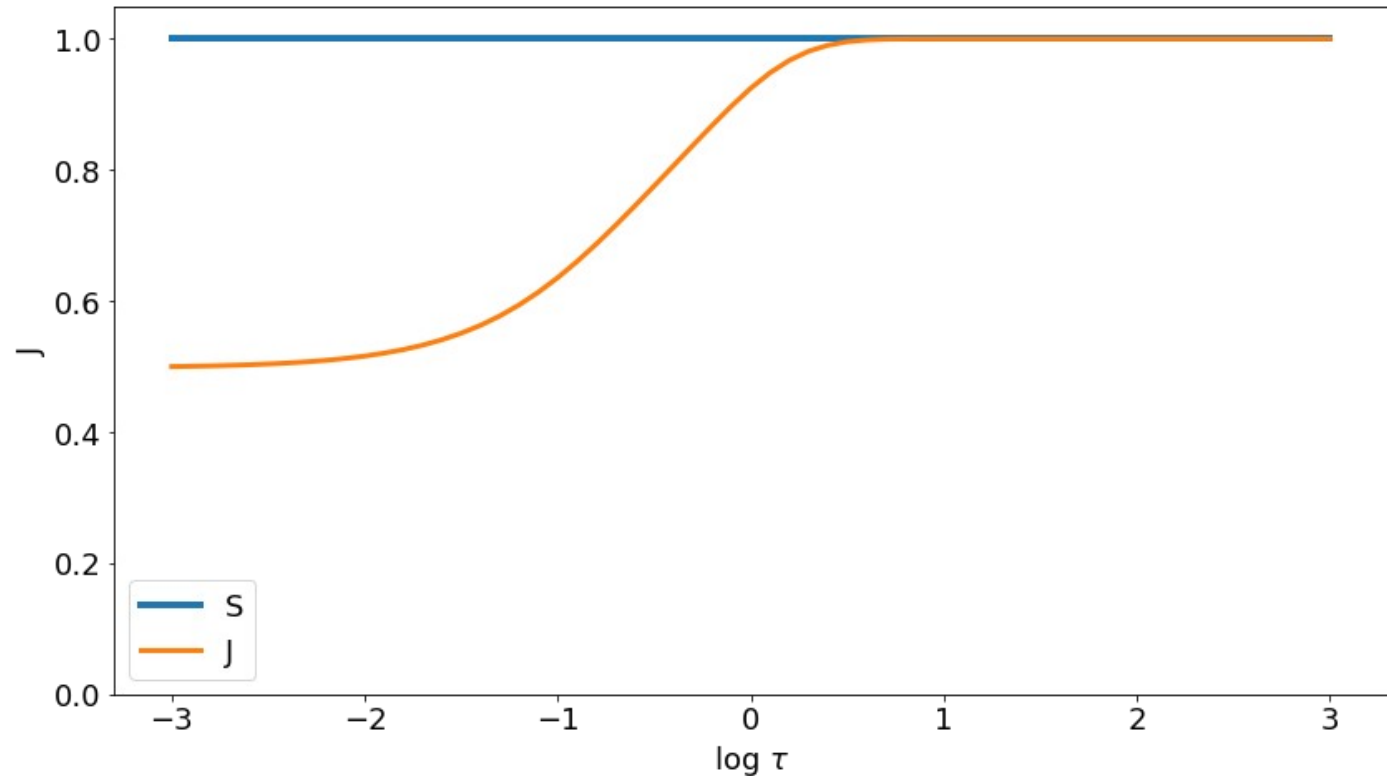


Milneov problem

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S = I - J$$

- **Pitanje:** Da li izotermna atmosfera u LTR može da bude u ravnoteži zračenja?
- Izračunajmo J pod pretpostavkom izotermne atmosfere i uporedimo sa S (tj B).

Numeričko rešenje:



Milneov problem

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S = I - J$$

- Intenzitet zavisi od samog sebe!
- Ovo je primer **spregnutosti (kuplovanja)** u prenosu zračenja. Videćemo još ovakvih situacija kada budemo razmatrali takozvanu ne-LTR.
- Ovo je primer tzv. Integro-diferencijalne jednačine:

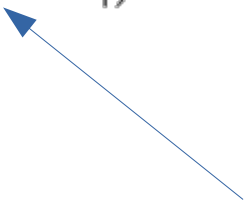
$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S = I - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mu) d\mu$$

- I zavisi od J(S) a J zavisi od I, ovo je spregnutost.
- Zar ne bi bilo lepo da možemo da napišemo ovo tako da imamo jednu nepoznatu **funkciju**?

Lambda operator

- Proces integracije JPZ i integracije po uglovima možemo da zovemo **operatorom**. Zato što od jedne funkcije (S) pravimo drugu funkciju (J).

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mu) d\mu = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} S(t) e^{(\tau-t)/\mu} dt / \mu + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} S(t) e^{(t-\tau)/|\mu|} dt / |\mu| = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} S(t) E_1(|t - \tau|) dt \\ J(\tau) &= \Lambda_{\tau}[S(t)] \end{aligned}$$



“Kernel”, u ovom slučaju tzv. prvi eksponencijalni integral

Švarcšild-Milne jednačine. Momenti intenziteta

$$\int_{-1}^1 I_{\nu}(\tau_{\nu}, \mu) \mu^n d\mu =$$

$$\int_0^1 \mu^n d\mu \int_{\tau_{\nu}}^{\infty} S_{\nu}(t_{\nu}) e^{-(t_{\nu}-\tau_{\nu})/\mu} \frac{dt_{\nu}}{\mu} + \int_{-1}^0 \mu^n d\mu \int_0^{\tau_{\nu}} S_{\nu}(t_{\nu}) e^{-(t_{\nu}-\tau_{\nu})/\mu} \frac{dt_{\nu}}{-\mu}$$

$$\int_{\tau_{\nu}}^{\infty} S_{\nu}(t_{\nu}) dt_{\nu} \int_1^{\infty} e^{-(t_{\nu}-\tau_{\nu})y} \frac{dy}{y^{n+1}} + (-1)^n \int_0^{\tau_{\nu}} S_{\nu}(t_{\nu}) dt_{\nu} \int_1^{\infty} e^{-(\tau_{\nu}-t_{\nu})y} \frac{dy}{y^{n+1}} =$$

$$\int_{\tau_{\nu}}^{\infty} S_{\nu}(t_{\nu}) E_{n+1}(t_{\nu} - \tau_{\nu}) dt_{\nu} + (-1)^n \int_0^{\tau_{\nu}} S_{\nu}(t_{\nu}) E_{n+1}(\tau_{\nu} - t_{\nu}) dt_{\nu}$$

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xy}}{y^n} dy$$

Šta su ove funkcije E_n ?

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xy}}{y^n} dy$$

- Eksponencijalni integrali!
- “Kerneli” prenosa zračenja koji nam omogućavaju da dobijemo različite momente intenziteta “direktno” iz funkcije izvora.
- Na osnovu njih možemo da definišemo operatore, slične **Lambda** operatoru

- Milneova jednačina za fluks & K-integral
- Do na konstante, koje možemo da odredimo dimenzionom analizom, važi da je:

$$\mathcal{F}_\tau = \Phi_\tau[S(t)]$$
$$K_\tau = \frac{1}{4} X_\tau[S(t)]$$

- n-ti moment intenziteta zračenja na nekoj optičkoj dubini jednak integralu Funkcije izvora puta eksponencijalni integral n+1-og reda, po optičkoj dubini.

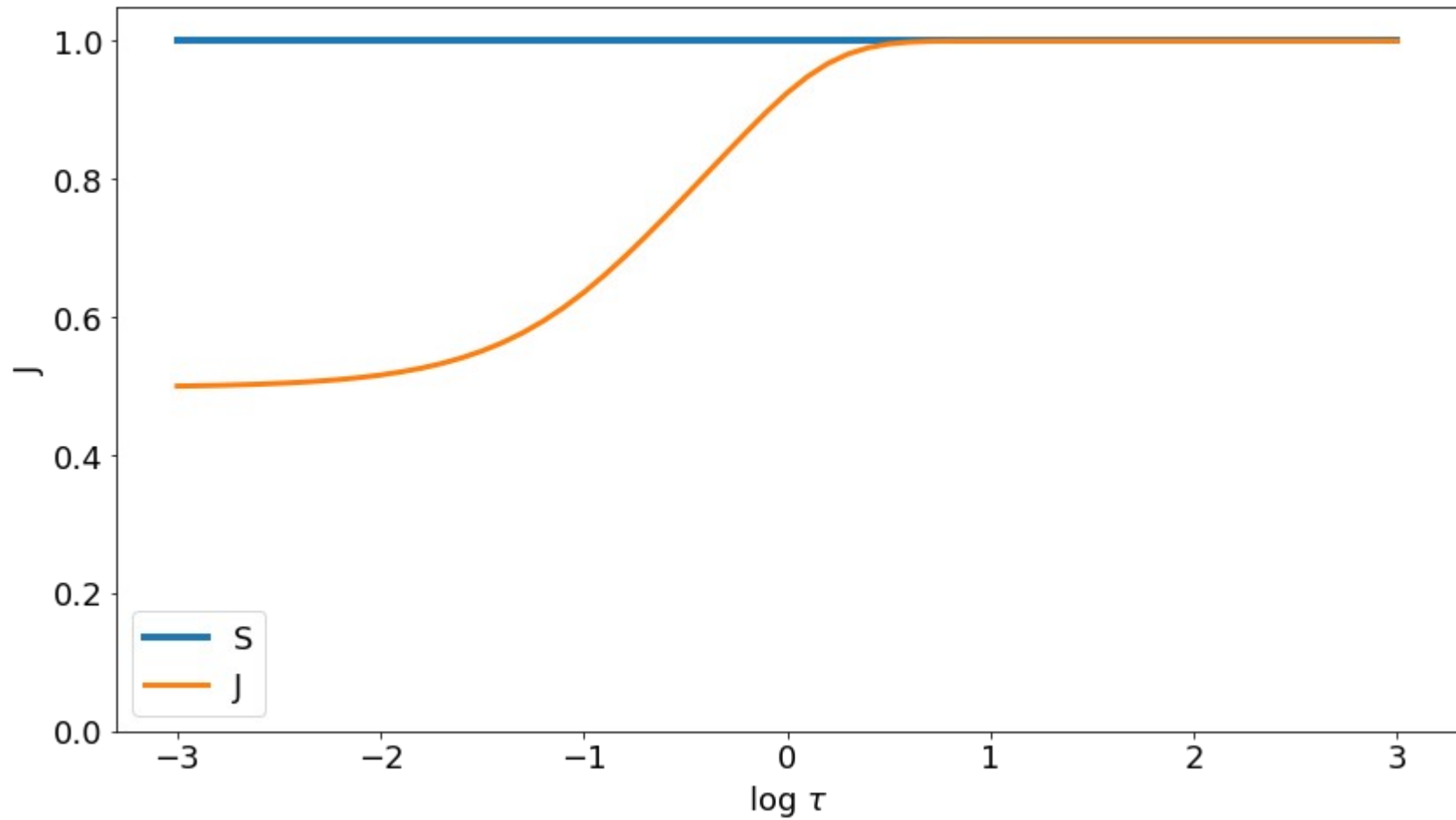
Srednji intenzitet kroz Lambda operator

Razložimo detaljno šta je srednji intenzitet preko formalnog rešenja:

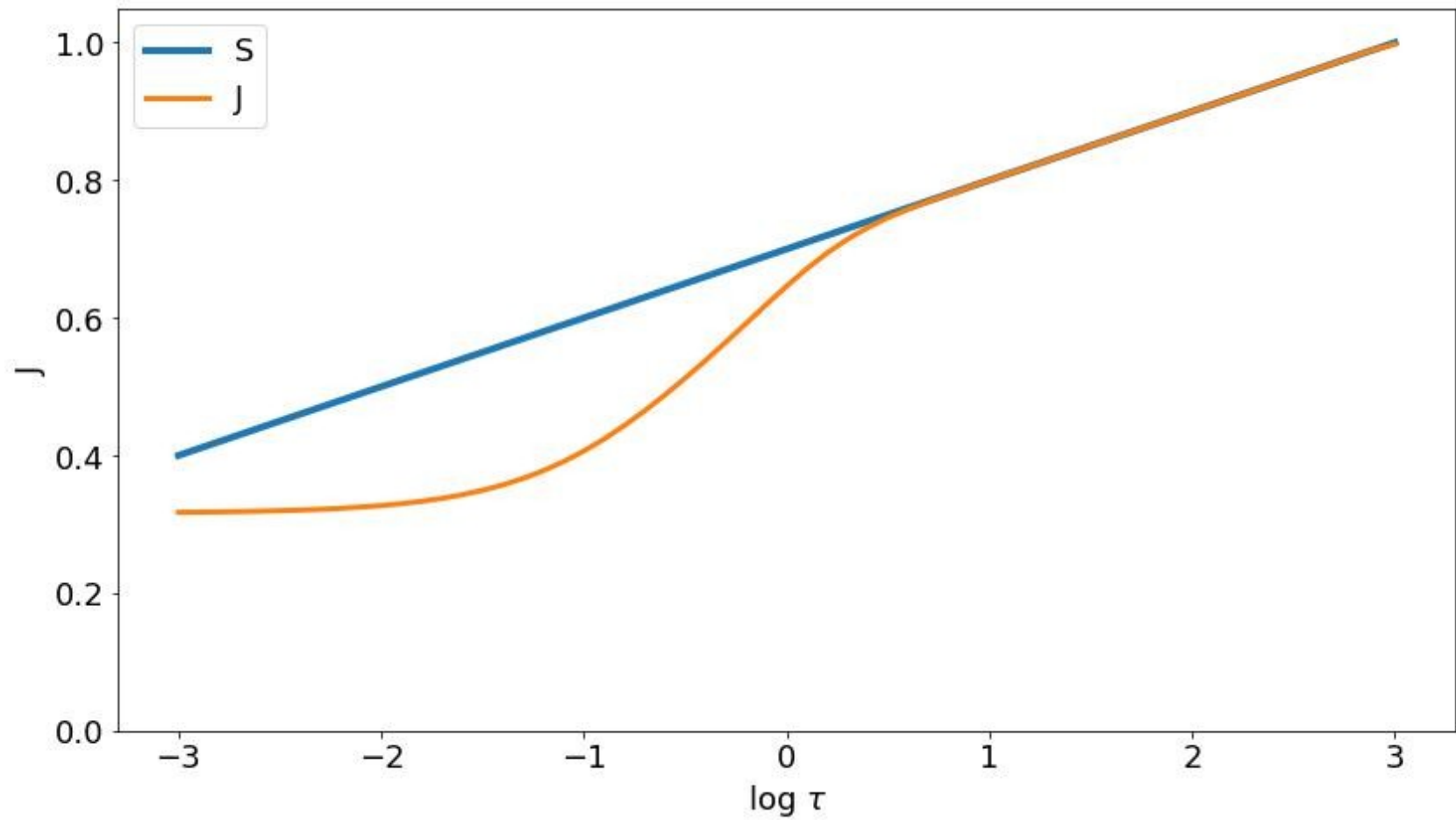
$$\begin{aligned} J(\tau) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mu) d\mu \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau}^{\infty} S(t) e^{(\tau-t)/\mu} \frac{dt}{|\mu|} d\mu + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \int_0^{\tau} S(t) e^{(\tau-t)/\mu} \frac{dt}{|\mu|} d\mu \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} S(t) E_1(|t - \tau|) dt \end{aligned}$$

- Hajde da vidimo kako izgleda raspodela od \mathcal{J} sa dubinom za neke date $S(t)$, tj. kako izgleda transformacija S u \mathcal{J} .

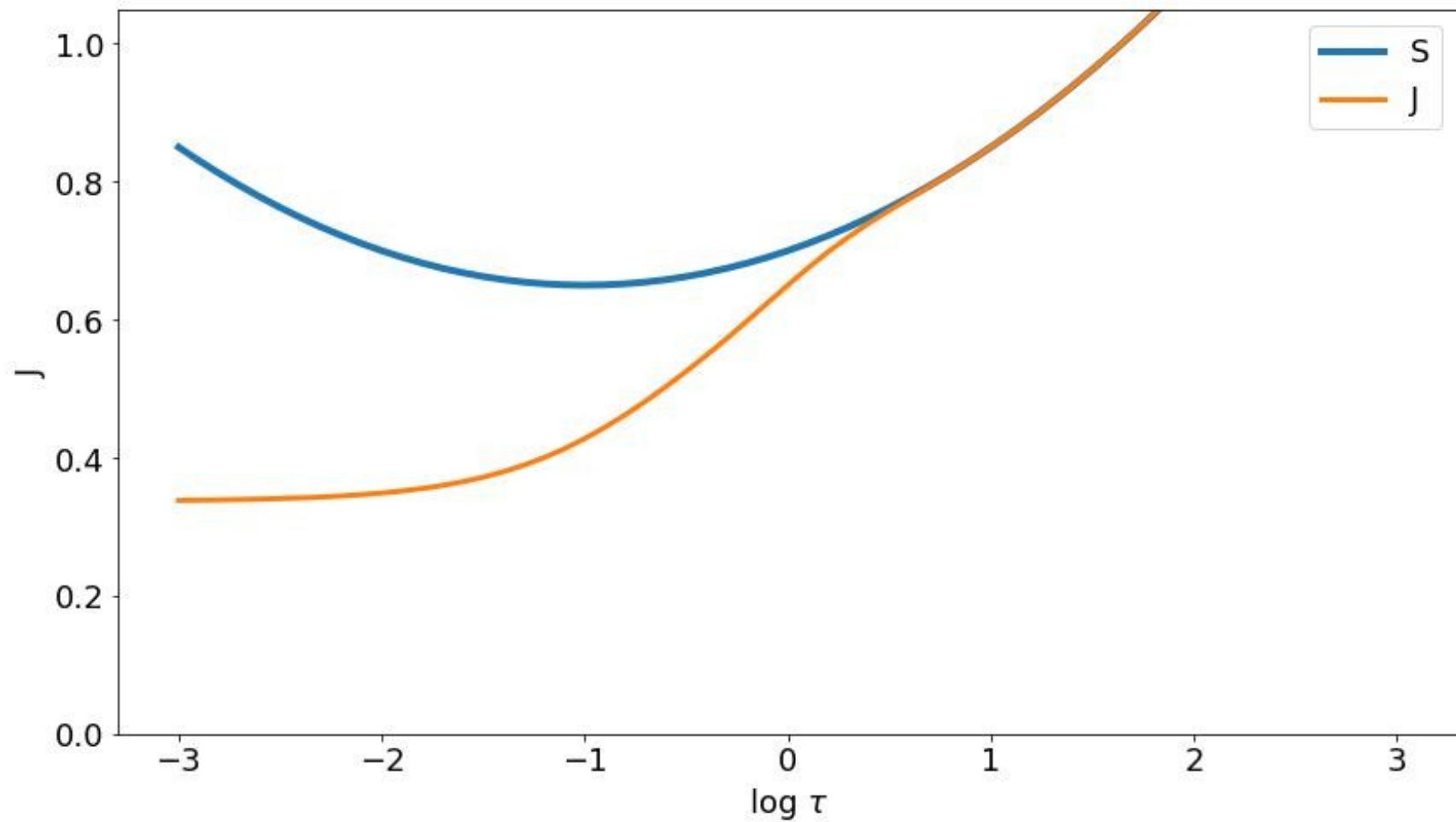
Konstantno S



S linearno opada sa log tau



S je kvadratna funkcija od $\log \tau$



Milneov problem zapisan preko lambda operatora

Setimo se da je:

$$\begin{aligned} J(\tau) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mu) d\mu = \Lambda[S] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\tau}^{\infty} S(t) e^{(\tau-t)/\mu} \frac{dt}{|\mu|} d\mu + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \int_0^{\tau} S(t) e^{(\tau-t)/\mu} \frac{dt}{|\mu|} d\mu \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} S(t) E_1(|t - \tau|) dt \end{aligned}$$

Naš problem možemo sada zapisati kao:

$$J(\tau) = \Lambda[J] = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} J(t) E_1(|t - \tau|) dt$$

Ovo je primer jedne **integralne jednačine**. Mi možemo relativno lako da je rešimo numerički.

Kako su ovaj problem rešili pre 100 godina?

- “Egzaktno” rešenje nije bilo moguće, zato što nije moguće analitički “invertovati” ovaj integral.
- Oba rešenja koja ćemo izvesti (i uporediti sa posmatranjima) se oslanjaju na neke aproksimacije
- Poredjenje sa posmatranjima će nam u stvari reći **koja od tih aproksimacija je bliža realnosti**

Momenti JPZ

Pomnožimo sa μ^n , integralimo u podelimo sa 2 (tj. Usrednjimo po uglovima).

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S$$

$$\frac{dH}{d\tau} = J - S = 0 \rightarrow H = \frac{F}{4} = \text{const}$$

$$\frac{dK}{d\tau} = \frac{F}{4}$$

Četiri promenljive (I, J, F, K) i tri jednačine. Ne možemo da “zatvorimo” sistem. Trebaju nam neke dodatne pretpostavke.

Švarcšild-Šusterovo rešenje

Izlazni intenzitet i ulazni intenzitet su izotropni unutar odgovarajućih intervala →
Eliminišemo intenzitet.

$$J^+ = \int_0^1 I(\mu) d\mu; \quad J^- = \int_{-1}^0 I(\mu) d\mu$$
$$\int_0^1 I(\mu) \mu d\mu \approx \frac{1}{2} J^+$$
$$\int_{-1}^0 I(\mu) \mu d\mu \approx \frac{-1}{2} J^-$$



$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - J; \quad \int_0^1 \mu d\mu; \quad \int_{-1}^0 \mu d\mu$$
$$\frac{1}{2} \frac{dJ^+}{d\tau} = J^+ - J$$
$$\frac{-1}{2} \frac{dJ^-}{d\tau} = J^- - J$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (J^+ + J^-) = J^+ - J^- = F$$

Kako naći konstantu C? Diskusija
nekoliko minuta.

$$\frac{dJ}{d\tau} = F = \text{const} \rightarrow J = F\tau + C$$

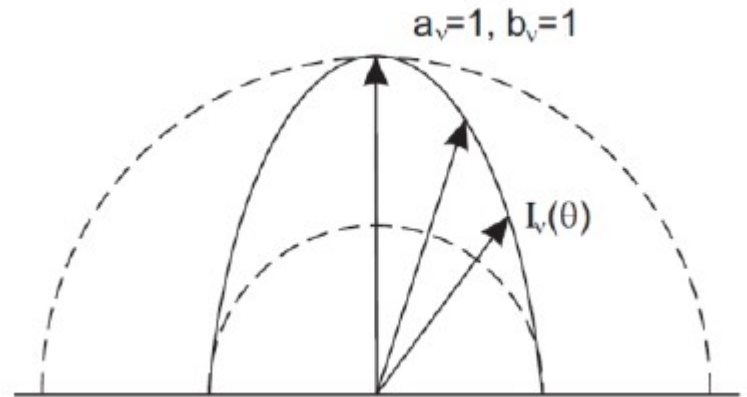
Švarcšild-Šusterovo rešenje

Izlazni intenzitet i ulazni intenzitet su izotropni unutar odgovarajućih intervala →
Eliminišemo intenzitet.

$$\frac{dJ}{d\tau} = F = \text{const} \rightarrow J = F\tau + C$$

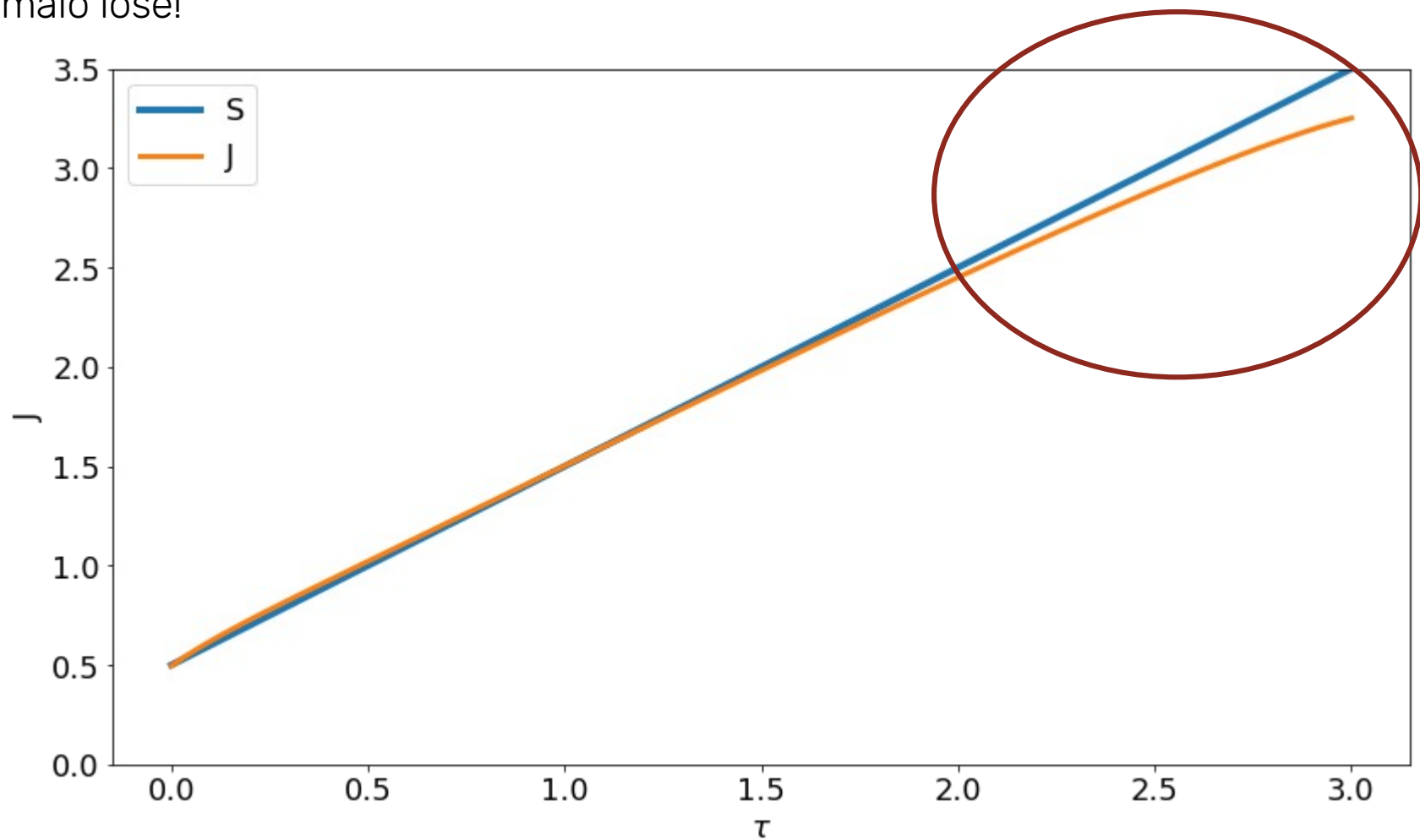
$$C = J(0) = \frac{1}{2}J^+(0) = \frac{1}{2}F(0) = \frac{F}{2}$$
$$J(\tau) = S(\tau) = F\left(\tau + \frac{1}{2}\right)$$

I bez nameštanja smo dobili da funkcija izvora linearno zavisi od optičke dubine. Milne- Eddingtonova aproksimacija ima smisla! (Ali nije konzistentna sa pretpostavkom sa početka!)



Proverimo numerički

- Nimalo loše!



Eddingtonovo rešenje

Pretpostavimo da je $K = J/3$ i na površini! Eliminišemo K !

$$\frac{dK}{d\tau} = \frac{F}{4} \rightarrow K = \frac{F}{4}\tau + C$$

$$K(\tau) \approx \frac{J(\tau)}{3} = \frac{S(\tau)}{3}$$

Eddingtonova aproksimacija

$$S(\tau) = \frac{3}{4}F\tau + C$$

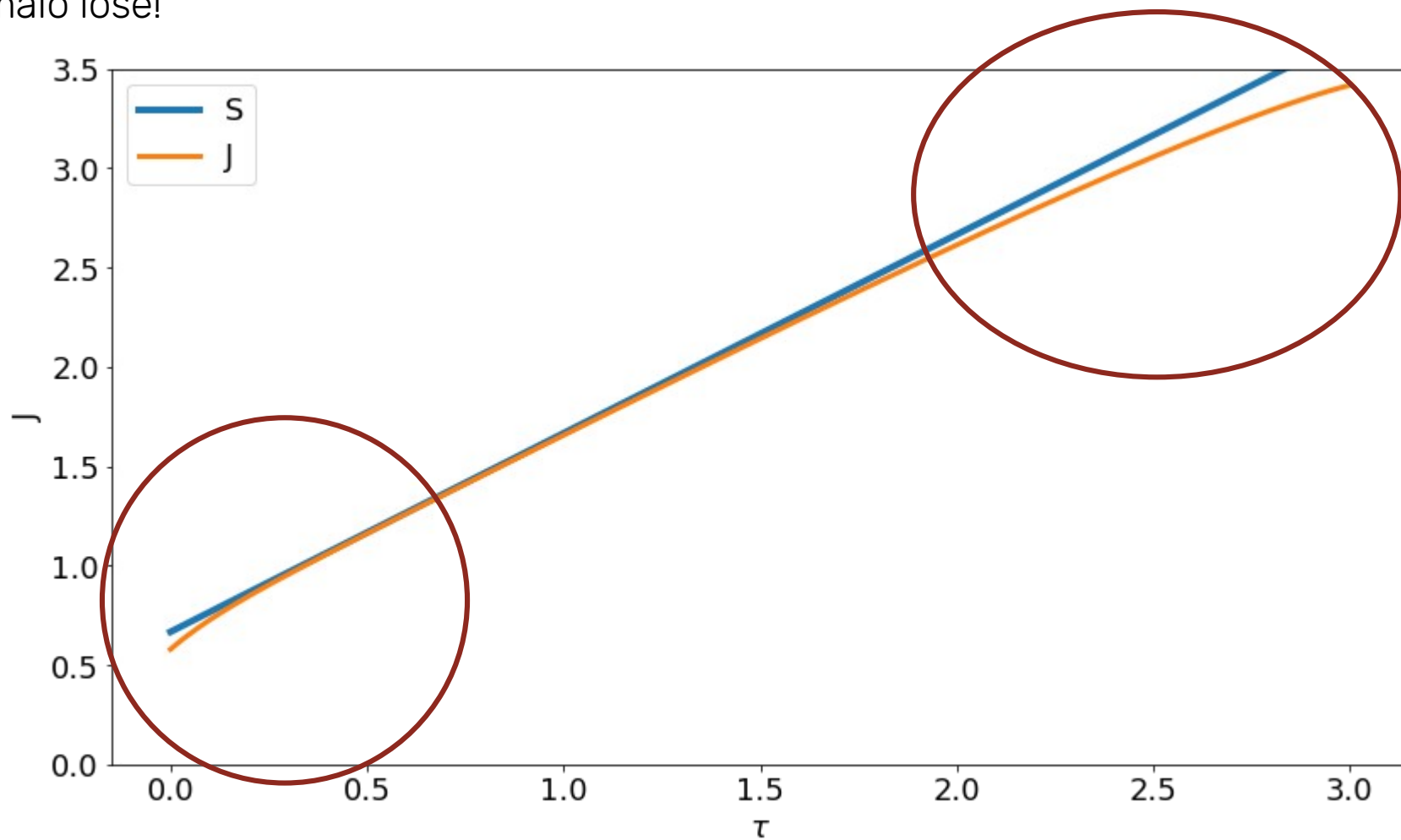
$$C = \frac{F}{2}$$

II Eddingtonova aproksimacija

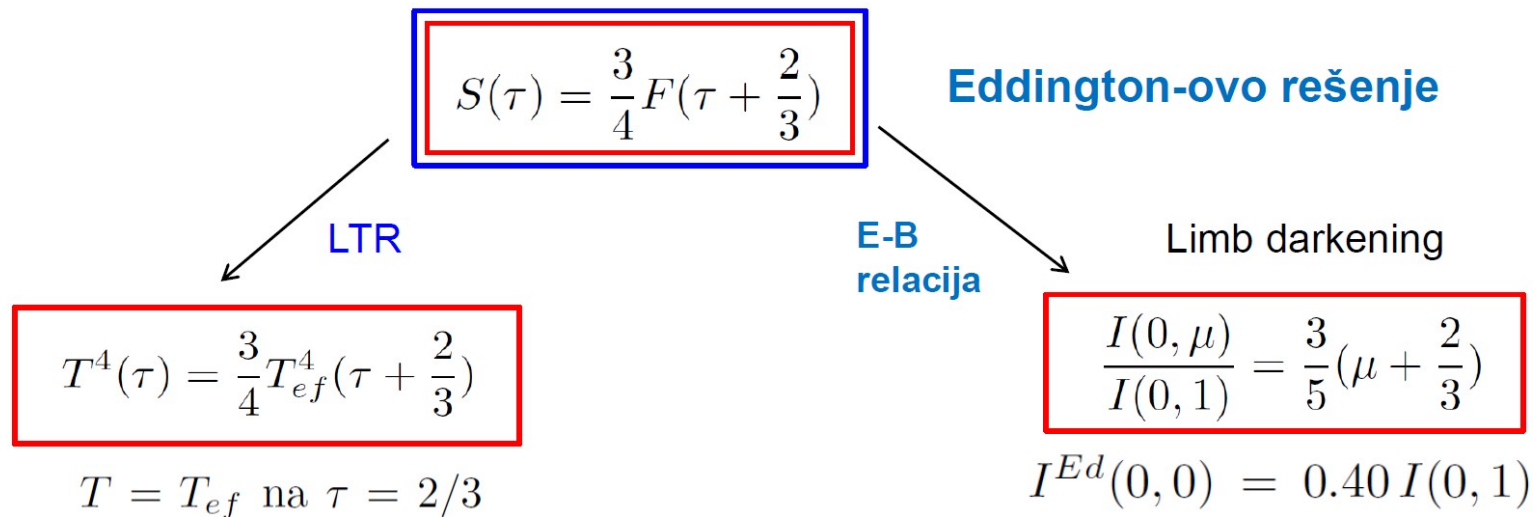
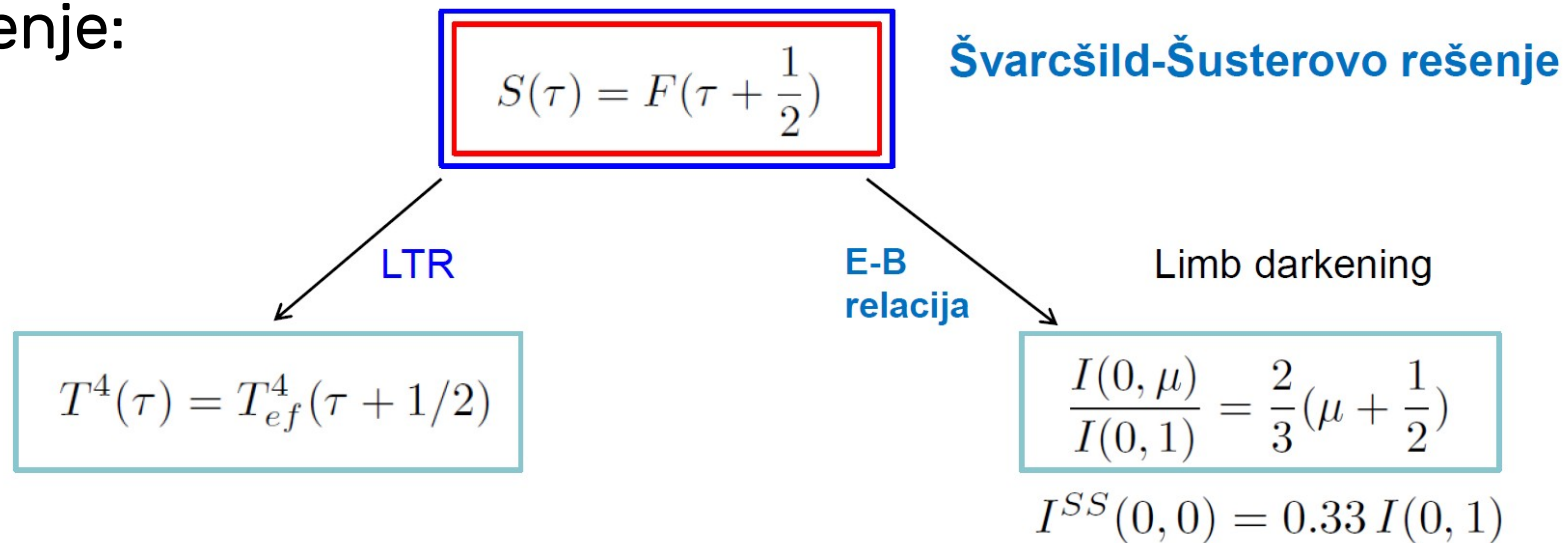
$$S(\tau) = \frac{3}{4}F\left(\tau + \frac{2}{3}\right)$$

Proverimo numerički

- Nimalo loše!



Poredjenje:



Posmatrački test

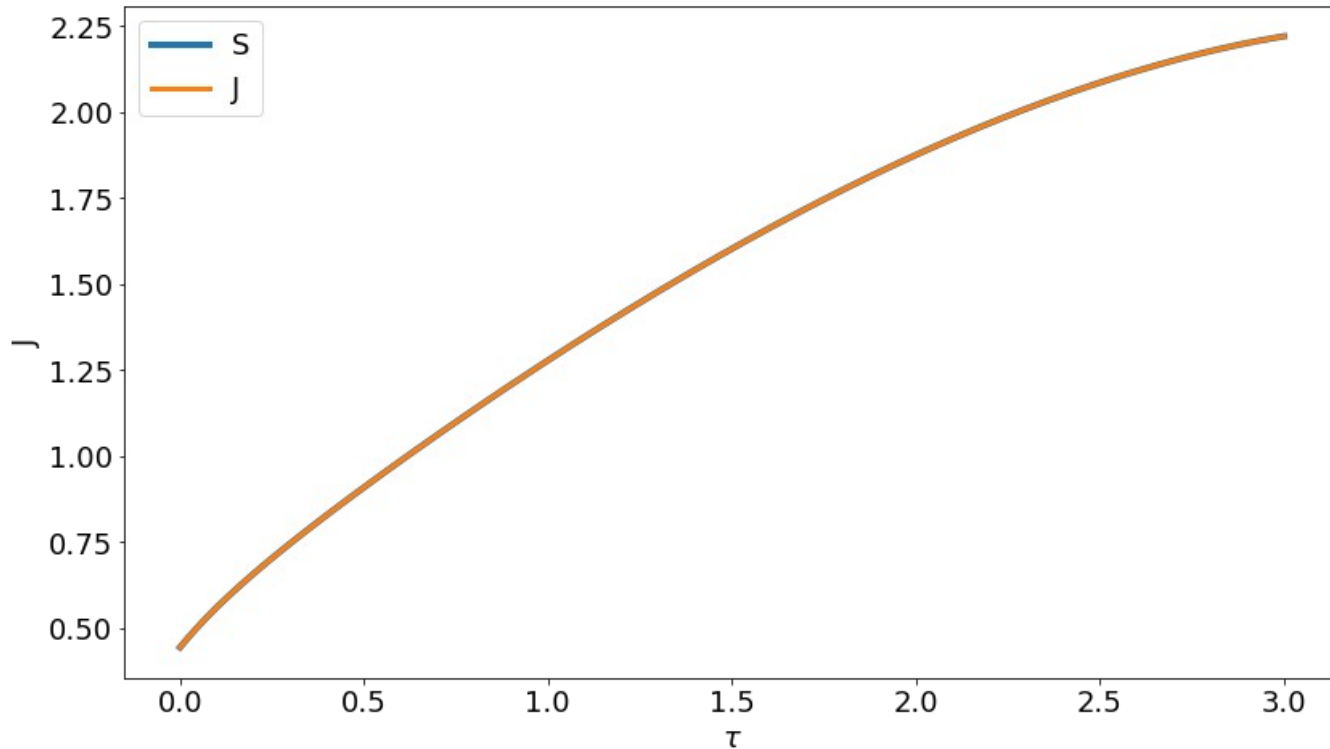
- Gledamo kako rešenja reprodukuju potamnjenje ka rubu Sunčevog diska

μ	posmatranje	R.Z. (Š–Š)	R.Z. (Ed)
1	1	1	1
0.8	0.92	0.87	0.88
0.6	0.81	0.73	0.76
0.44	0.70	0.63	0.66
0.2	0.49	0.47	0.52
0	0.40	0.33	0.40

Tačno rešenje: tzv Hopfovo rešenje

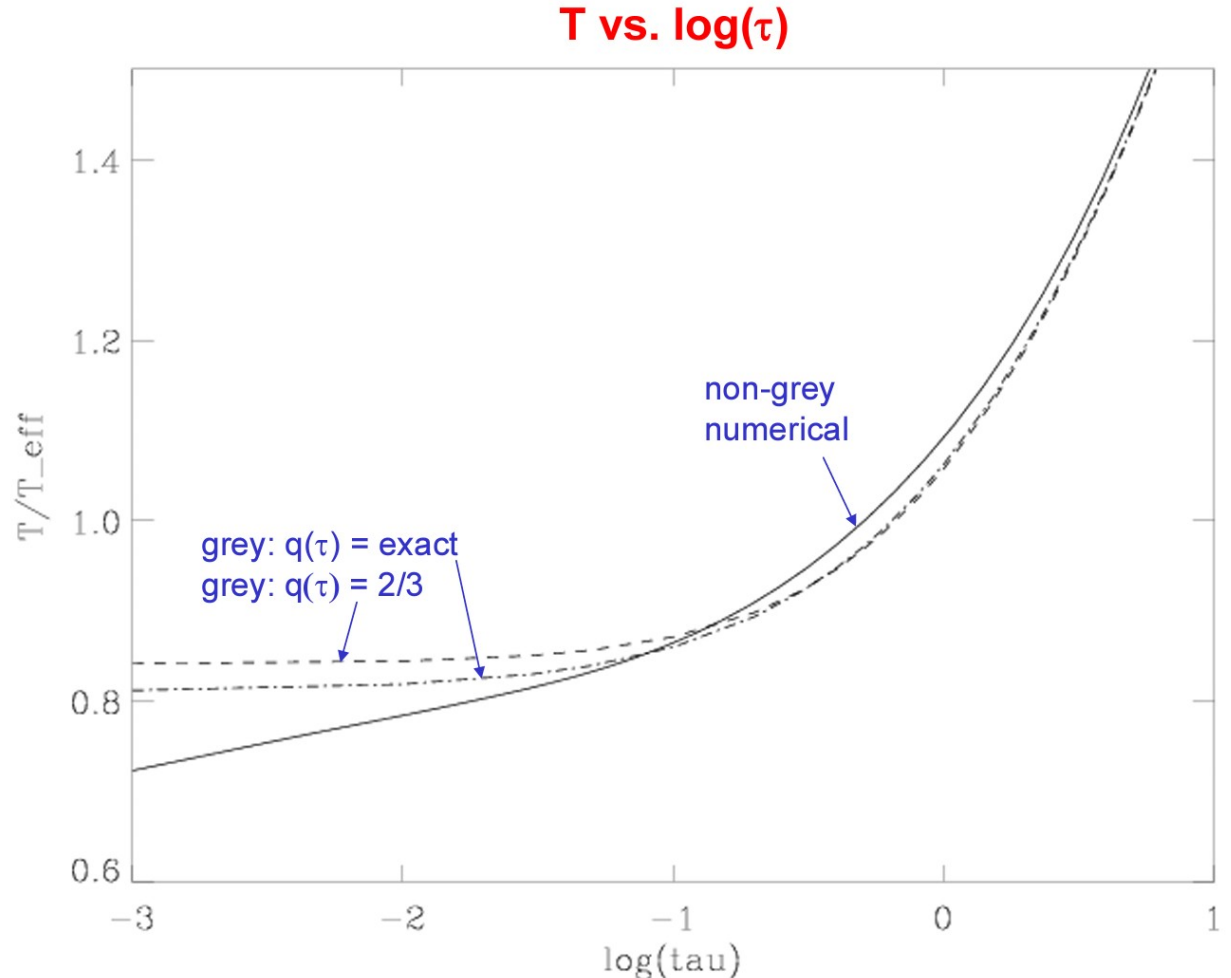
$$B = \sigma T^4 = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 (\tau + q(\tau)) \quad \text{Hopfova funkcija}$$

$$q(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} < q(\tau) < q(\infty) = 0.71$$



Medjutim, najveći problem je pretpostavka sive atmosfere:

- Optička dubina drastično zavisi od talasne dužine.
- Možemo da odaberemo srednju neprozračnost za jedan momenat zračenja, ali ona neće biti odgovarajuća i za ostale.
- To je najveći izvor greške i u praksi razmatramo ne-Sive atmosfere
- Takodje, želimo da dobijemo zavisnost od visine, a ne od optičke dubine



Ako ostane vremena

- Vežba – ilustracija, iterativno rešavanje Milneovog problema