

Teorija Zvezdanih Spektara

Lekcija 5: Koeficijent apsorpcije

Ivan Milić (AOB / MATF)

31/10/2023

Podsetnik

- Sada znamo da rešimo jednačinu prenosa ako su nam dati skala optičkih dubina i funkcija izvora.
- Formalno rešenje duž pravca:

$$I_{\lambda}^{+} = I_{\lambda}^{0}e^{-\tau_{\lambda}} + \int_0^{\tau_{\lambda}} S(t)e^{-t}dt$$

- Ukoliko želimo intenzitet u zavisnosti od dubine ili pravca, menjamo granice i dodajemo $1/\mu$ gde je potrebno!
- Za funkciju izvora često možemo da pretpostavimo LTR, tj. Plankovu funkciju (**2-3 min šta to beše znači**)
- A kako naći skalnu optičkih dubina? Moramo da znamo neprozračnost! Današnji čas je o tome :)

Ali pre toga pitanje

- Smislite bar jedan primer prenosa zračenja gde funkcija izvora **nije** Plankova funkcija (tj. gde nismo u LTR!) - **3 min.**

Primer ne-LTR funkcije izvora

- U **našem formalizmu** atmosfera Zemlje emituje vidljivu svetlost, kroz procese rasejanja.
- Funkcija izvora na ovim talasnim dužinama je u potpunosti određena rasejanom svetlošću Sunca.
- Zašto je nebo plavo? (Atmosfera Zemlje je optički tanka).

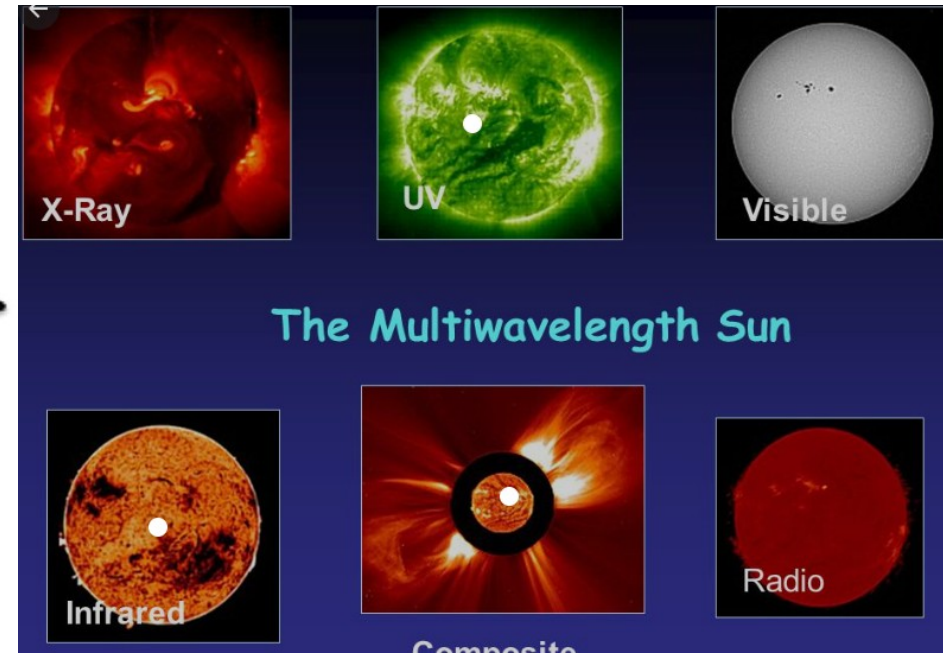
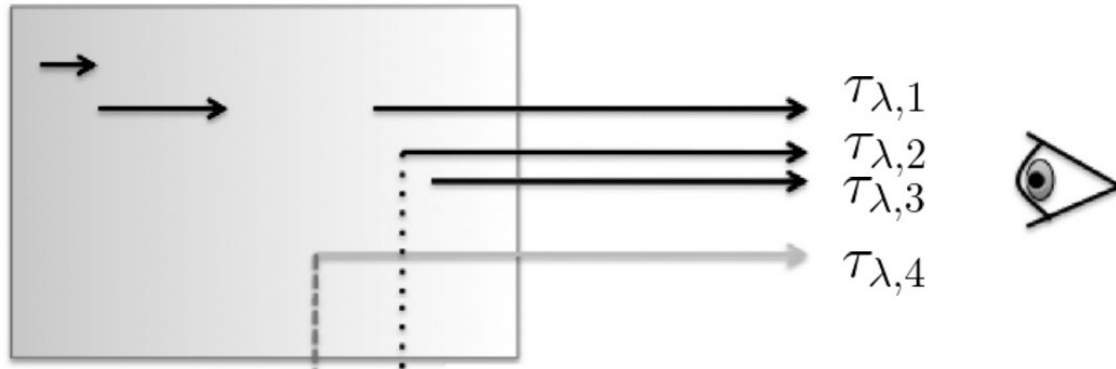


Obratite pažnju

- Rekli smo: **u našem formalizmu!**
- U koeficijent apsorpcije ulaze i prava apsorpcija (termalizacija fotona) i rasejanje. Bitno nam je samo da su fotoni uklonjeni iz zraka
- U koeficijent emisije ulaze i termalna emisija i emisija usled rasejanja. Na taj način vraćamo fotone u zrak!
- U svakodnevnom jeziku (pa čak i astronomskom), ako biste rekli da Zemljina atmosfera zrači na vidljivim talasnim dužinama, došlo bi do nesporazuma :)
- **Za sada**, pretpostavimo da je funkcija izvora jednaka Plankovoj funkciji.
- Ostaje nam da izračunamo koeficijent apsorpcije (tj. neprozračnost)

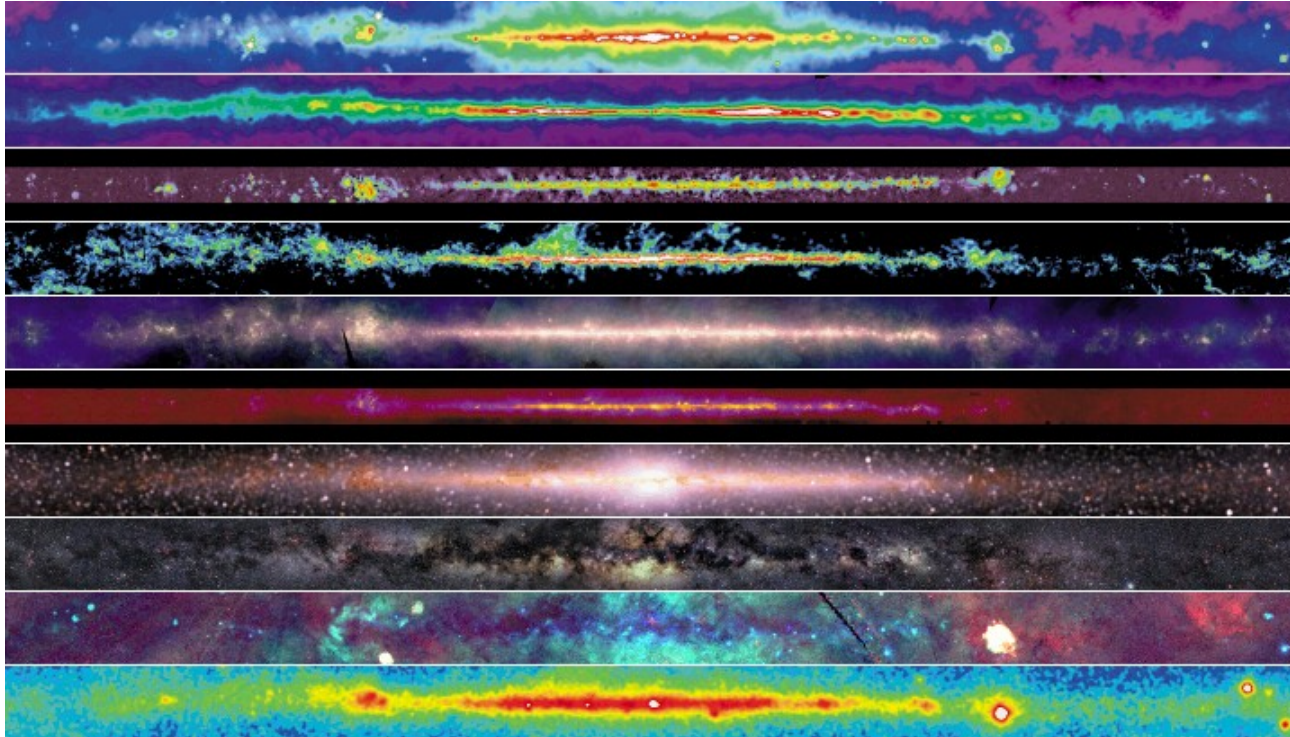
Neprozračnost zavisi od talasne dužine!

- To je blago kontraintuitivno, pošto su primeri za tu neprozračnost u našem svakodnevnom životu jako suptilni (plavo nebo je jedan primer).
- U zvezdanim atmosferama, fotoni različitih talasnih dužina dopiru sa različitih dubina.
- Na različitim talasnim dužinama “vidimo” različite funkcije izvora!



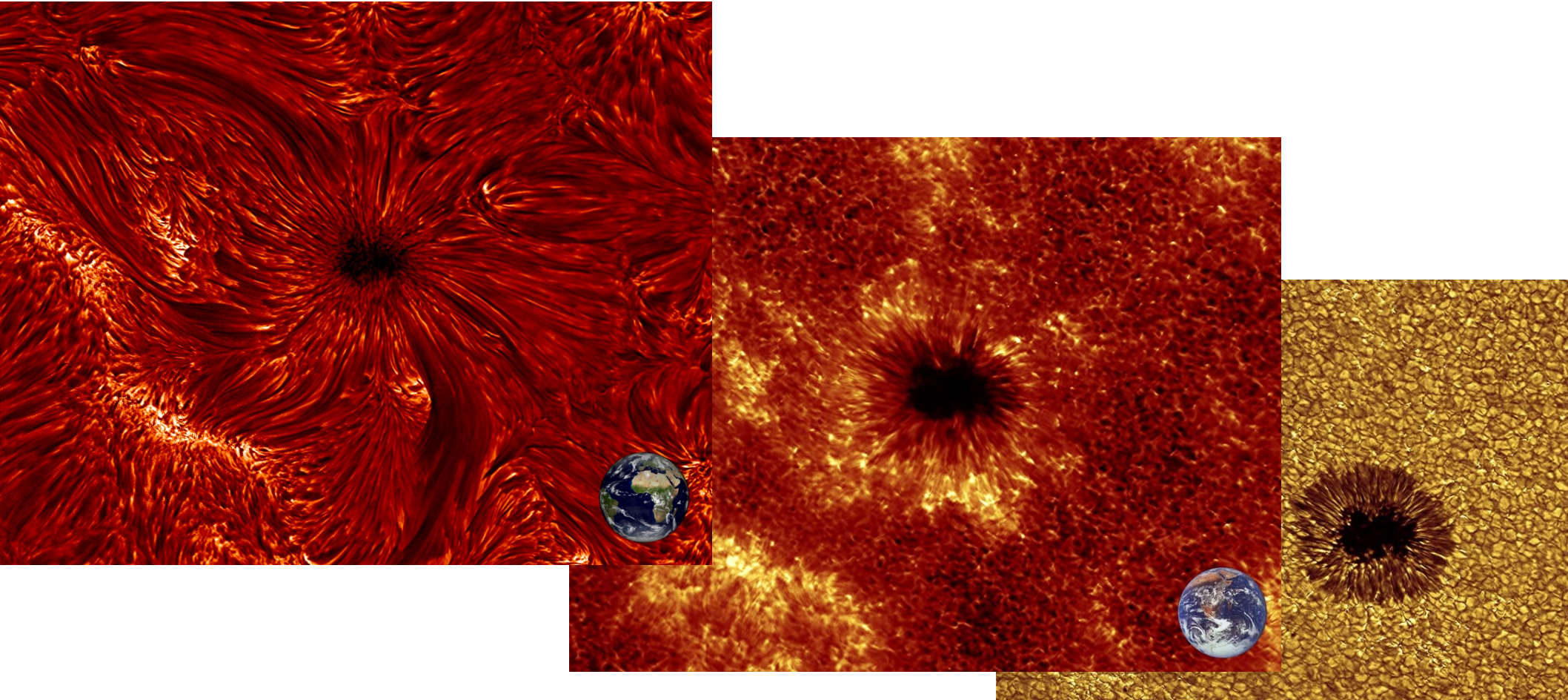
Neprozračnost zavisi od talasne dužine

- Razlog za ovu zavisnost je to što na različitim talasnim dužinama dominiraju različiti procesi (npr. rasejanje je jače na kraćim talasnim dužinama, itd...)
- Posledica je da nebeska tela izgledaju drugačije kada ih gledamo na različitim talasnim dužinama



Suptilniji primer

- Sunce posmatrano na 656.3 nm (H alpha), 396.8 nm (Ca II H) i 405 nm (G band)

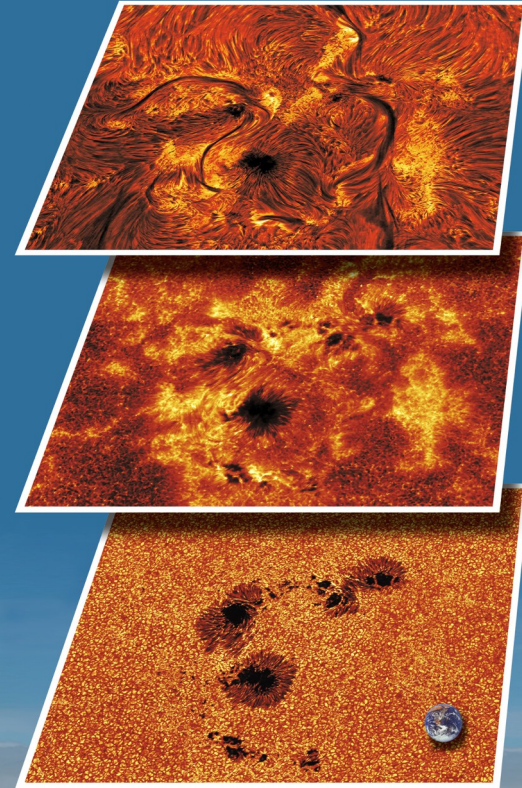


“Visina formiranja”

- Setimo se (vežbe) da:

$$I_{\lambda}^{+} \approx S_{\lambda}(\tau_{\lambda} = 1)$$

- Optička dubina jedan leži na različitim fizičkim visinama za različite talasne dužine
- Te visine odgovaraju različitim temperaturama
- Na ovoj slici, svaki piksel ima drugačiju temperaturnu strukturu, pa na različitim talasnim dužinama vidimo različite “slike”
- Ovakve slike možemo dobiti fokusirajući se čak i na samo jednu liniju!



THE SUN from photosphere to chromosphere

Three images of a solar active region taken on June 8, 2005 with the Dutch Open Telescope on La Palma (Canary Islands). The Earth inset shows the scale. The coloring is artificial.

The bottom image (G band, 430.5 nm) shows the solar photosphere where the sunshine escapes. The active region contains large, cool, highly magnetic sunspots. It is surrounded everywhere by small convection cells (granulation). Tiny bright dots between the granules mark small-scale but intense magnetism. The areas with enhanced magnetism are much brighter in the middle image (Ca II H, 396.8 nm) which samples the overlying low chromosphere, 500 km higher up. The top image (H α , 656.3 nm) shows the upper chromosphere, about 2000 km above the photosphere. In this bright magnetism dominates all motions of the solar gas so that the long, slender fibrils and dark filaments outline the intricate arrangement of solar magnetism. The convective motions at the bottom impose disruptive changes on this arrangement, frequently leading to explosive outbursts of which some hit the Earth's environment.

<http://dot.astro.uu.nl>

Malo formalnije

- Uvedimo neku “referentnu” skalu optičke dubine, definisanu na nekoj dogovorenoj talasnoj dužini:

$$\tau(z) = \int_{z_{\max}}^z -\chi_0(z) dz$$

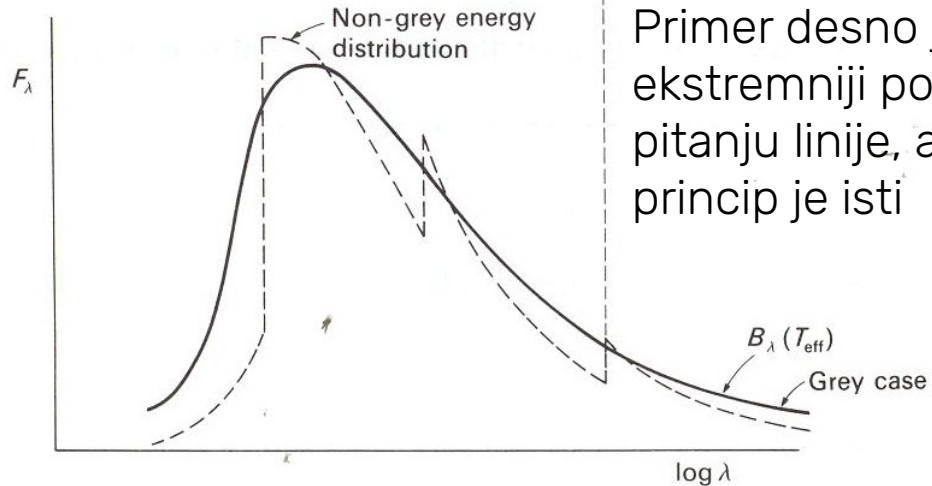
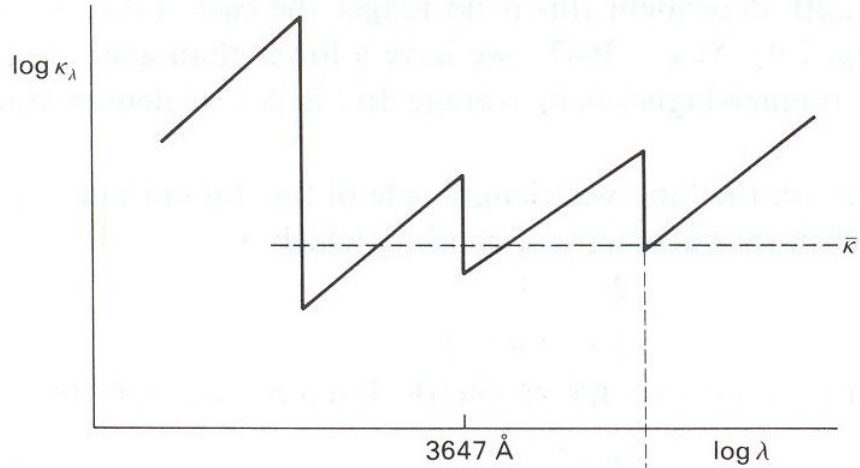
- Uvedimo odnos izmedju neprozračnosti na nekoj talasnoj dužini i referentne neprozračnosti:

$$r_\lambda = \frac{\chi_\lambda}{\chi_0}$$

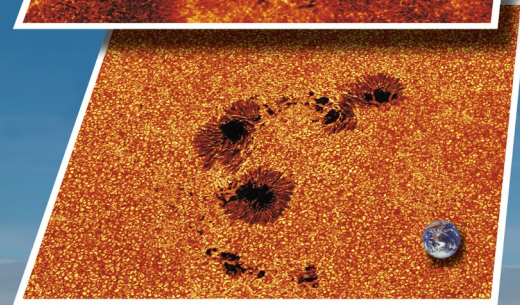
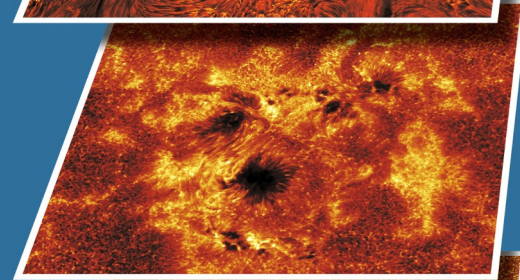
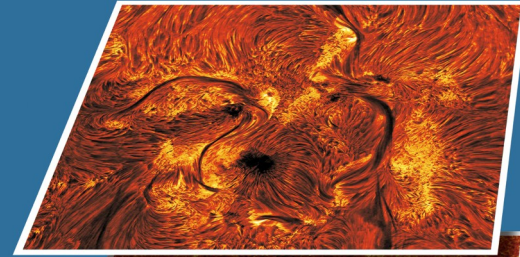
- Ukoliko pretpostavimo da je funkcija izvora linearna na skali referentne optičke dubine dobijamo:

$$\begin{aligned} S &= a + b\tau \\ I_\lambda^+ &= a + \frac{b}{r_\lambda} \end{aligned}$$

Uticaj zavisnosti koeficijenta apsorpcije od talasne dužine na izgled spektra



Primer desno je malo ekstremniji pošto su u pitanju linije, ali princip je isti



THE SUN from photosphere to chromosphere

Three images of a solar active region taken on June 8, 2005 with the Dutch Open Telescope on La Palma (Canary Islands). The Earth inset shows the scale. The coloring is artificial. The bottom image (G band, 430.5 nm) shows the solar photosphere where the sunshine escapes. The active region contains large, cool, highly magnetic sunspots. It is surrounded everywhere by small convection cells (granulation). Tiny bright dots between the granules mark small-scale but intense magnetism. The areas with enhanced magnetism are much brighter in the middle image (Ca II H, 396.8 nm) which samples the overlying low chromosphere, 500 km higher up. The top image (H α , 656.3 nm) shows the upper chromosphere, about 2000 km above the photosphere. In this bright magnetism dominates all motions of the solar gas so that the long, slender fibrils and dark filaments outline the intricate arrangement of solar magnetism. The convective motions at the bottom impose disruptive changes on this arrangement, frequently leading to explosive outbursts of which some hit the Earth's environment.

<http://dot.astro.uu.nl>

Šta sve doprinosi apsorpciji na nekoj talasnoj dužini

- Zapišite sve procese kojih se setite koji dovode do apsorpcije (prava apsorpcija i rasejanje)
- 3 min

Šta sve doprinosi apsorpciji na nekoj talasnoj dužini

- Zapišite sve procese kojih se setite koji dovode do apsorpcije (prava apsorpcija i rasejanje)
- Apсорpcija u spektralnim linijama (vezano-vezani prelazi, **b-b**).
- Fotojonizacija (vezano – slobodni prelazi, **b-f**).
- 3-body procesi (slobodno – slobodni prelazi, **f-f**)
- Disocijacija molekula
- Rasejanje na slobodnim elektronima
- Rasejanje na atomima i molekulima (Rejljevo rasejanje)
- Rasejanje na česticama prašine
- **Ovo su samo najčešći / najvažniji procesi u vidljivom / UV / IR delu spektra!**

Slobodno-vezani prelazi u atomu vodonika

H je dominantan apsorber u kontinuumu kod zvezda klase B, A i F.

Ukupna energija elektrona na orbiti n:

$$E_n = -\frac{Ze^2}{2r_n} < 0$$

$$mv_n r_n = n \frac{h}{2\pi}$$

$$\frac{mv_n^2}{r_n} = \frac{Ze^2}{r_n^2}$$

$$E_n = -\frac{C}{n^2}$$

$$E_1 = -13.6 \text{ eV}$$

$$E_\infty = 0.$$

$$\chi_n = E_n - E_1 = C\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) > 0$$

$$\chi_n = \chi_\infty \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\chi_1 = 0$$

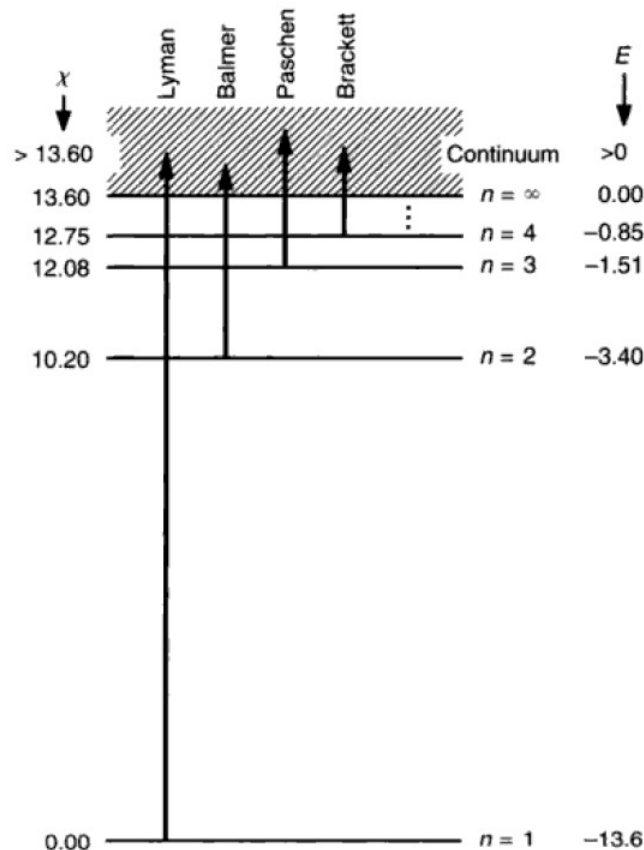
$$\chi_\infty = C = -E_1 = 13.6 \text{ eV}$$

Granice serija

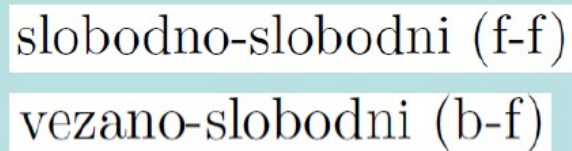
Seriya	n	$\lambda_g [\text{nm}]$
Lyman	1	91.2
Balmer	2	364.6
Paschen	3	820.4
Brackett	4	1459.0
Pfund	5	2279.0

$$h\nu_g = \chi_\infty - \chi_n = \chi_\infty - \chi_\infty \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \chi_\infty \frac{1}{n^2}$$

$$\nu_g = \frac{\chi_\infty}{h} \frac{1}{n^2}$$



$$h\nu = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2$$



$$h\nu = (\chi_{\infty} - \chi_n) + \frac{1}{2}mv^2$$

kontinuum

vezano-vezani (b-b)

linije

$$\frac{hc}{\lambda_{ik}} = E_0 \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{k^2} \right)$$

Zavisnost koeficijenta apsorpcije kod b-f prelaza od talasne dužine

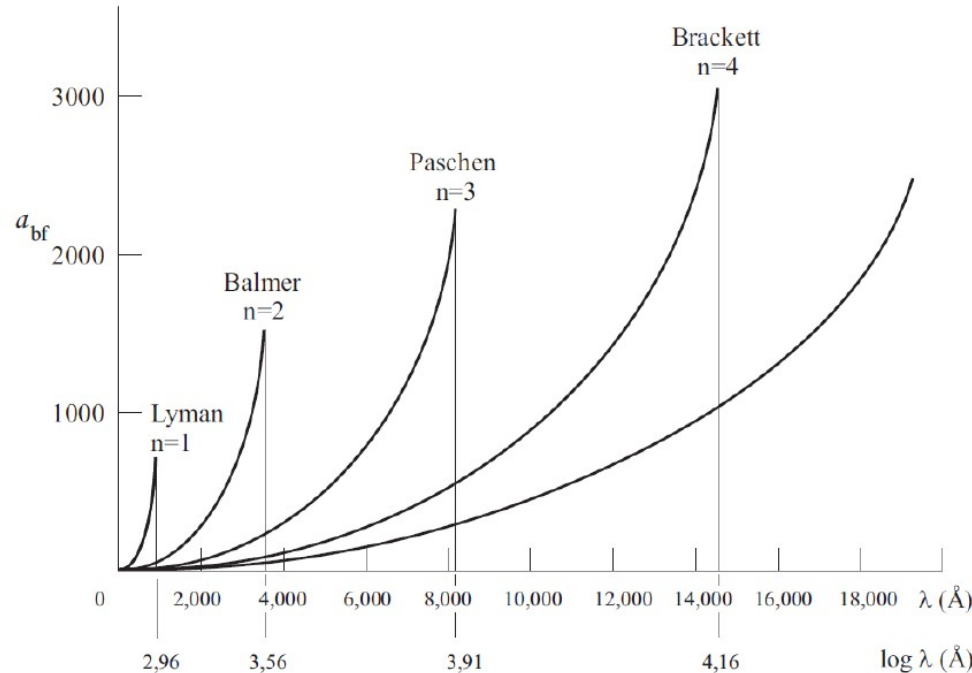
$$k_{\nu}^{b-f} = C g_{bf} \frac{1}{\nu^3 n^5}, (\nu \geq \nu_g)$$

Kramers (1923) modifikovao Gaunt (1930)

$$k_{\nu_g}^{b-f} \propto n$$

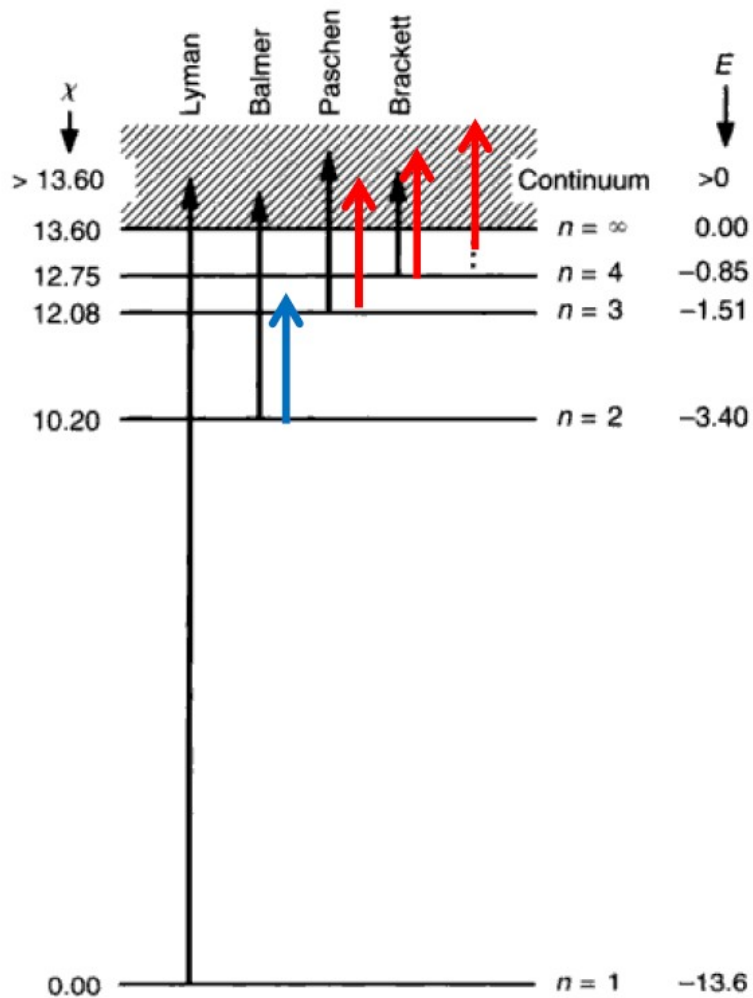
$$k_{\nu}^{b-f} \cdot n_n = C \frac{g_{bf}}{\nu^3 n^5} \frac{n_1}{g_1} g_n e^{-\chi_n/kT}$$

$$\chi_{\nu}^{b-f} = \sum_{n=n_g}^{\infty} k_{\nu}^{b-f} n_n = C' \frac{n_1}{g_1} \frac{1}{\nu^3} \sum_{n=n_g}^{\infty} \frac{g_n}{n^5} g_{bf} e^{-\frac{\chi_n}{kT}}$$

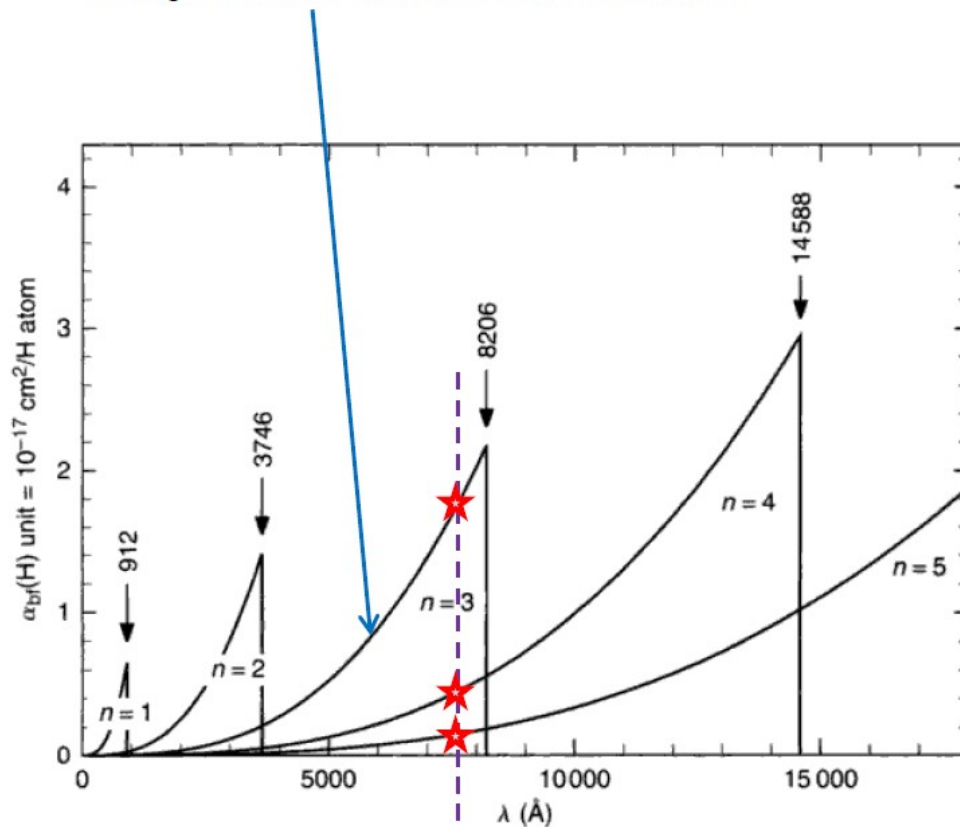


$$\chi_{\nu}^{b-f} = f(n_e, n^+, T, \nu)$$

Na jednoj talasnoj dužini imamo doprinos, u principu, više od jednog b-f prelaza!



U vidljivom delu spektra posmatramo Pašenov kontinuum, jer najveći doprinos daju prelazi sa trećeg nivoa atoma vodonika u kontinuum



$$\chi_{\nu}^{b-f} = \sum_{n=n_g}^{\infty} k_{\nu}^{b-f} n_n$$

Slobodno – slobodni prelazi

Zakočno zračenje bi bila emisija fotona pri prolasku elektrona pored pozitivnog jona. Postoji i obrnuti proces! (Inverzni bremsstrahlung!)

Apsorpcija fotona ide na povećanje kinetičke energije elektrona

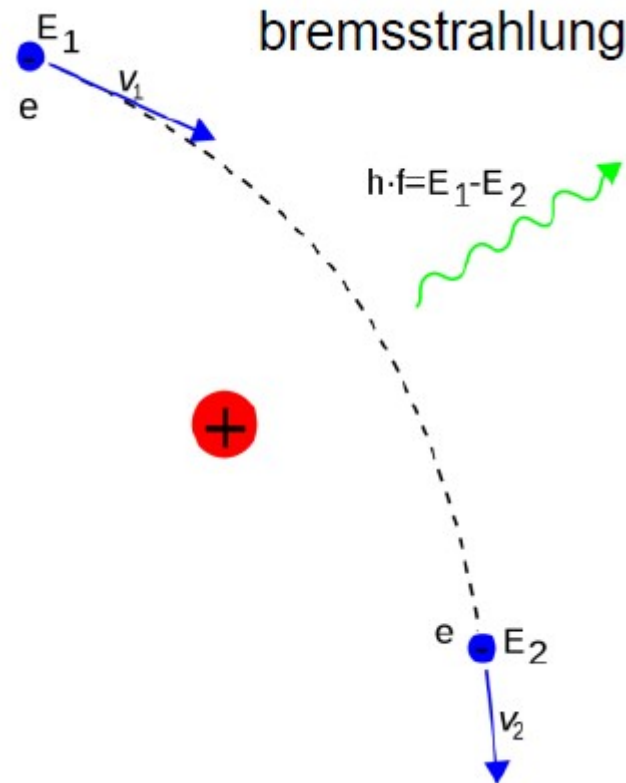
$$h\nu = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2$$

Kramers:

$$dk_{\nu}^{f-f} = C'' Z_{ef}^2 g_{ff} \frac{1}{v} \frac{1}{\nu^3} dv \quad (v, v + dv)$$

$$k_{\nu}^{f-f} = C'' g_{ff} \frac{Z'^2}{\nu^3} \int \frac{1}{v} f(v) dv = C^* \frac{1}{\nu^3} \frac{1}{\sqrt{T}} g_{ff}$$

$$\chi_{\nu}^{f-f} = C^* \frac{n_e n^+}{\sqrt{T}} g_{ff} \frac{1}{\nu^3} = f(n_e, n^+, T, \nu)$$



Negativan jon vodonika

- Neprozračnost hladnijih zvezda ne može da se opiše procesima o kojima smo do sada pričali (**zašto? 2-3 min**)
- Wildt (1939) je pokazao da je **H⁻** najznačajniji izvor neprozračnosti u Sunčevoj atmosferi
- Energija veze je svega 0.75eV, sve preko toga “jonizuje” ovaj jon nazad u H + elektron
vezano-slobodni prelazi

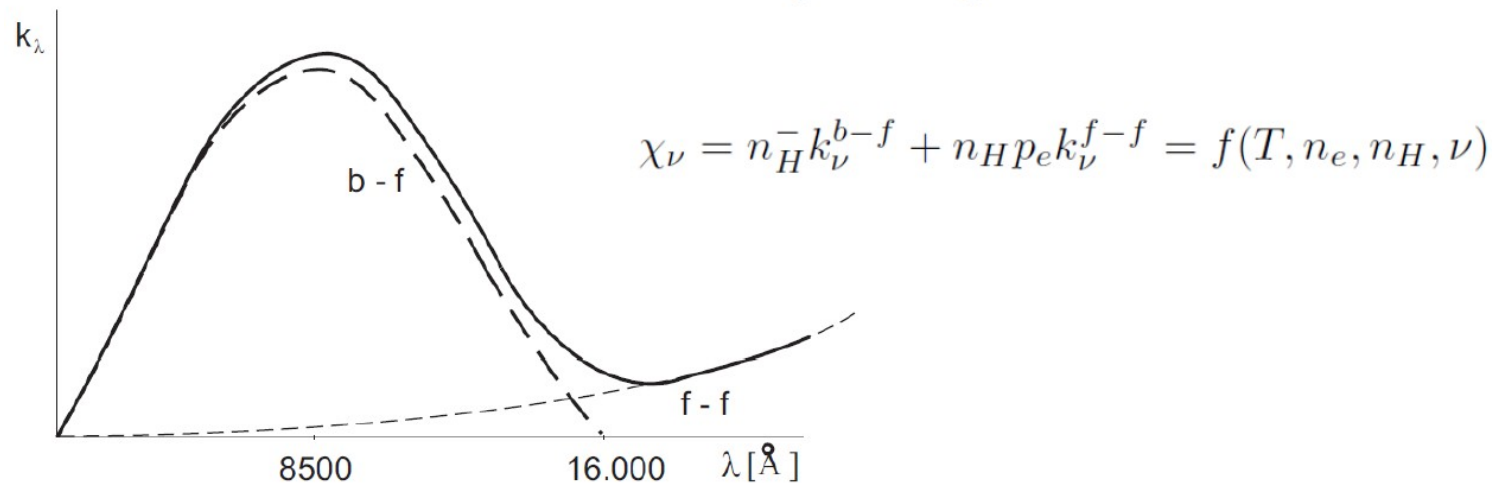
$$H^- + h\nu = H + e(v)$$

$$h\nu = 0.75\text{eV} + \frac{1}{2}mv^2$$

slobodno - slobodni prelazi

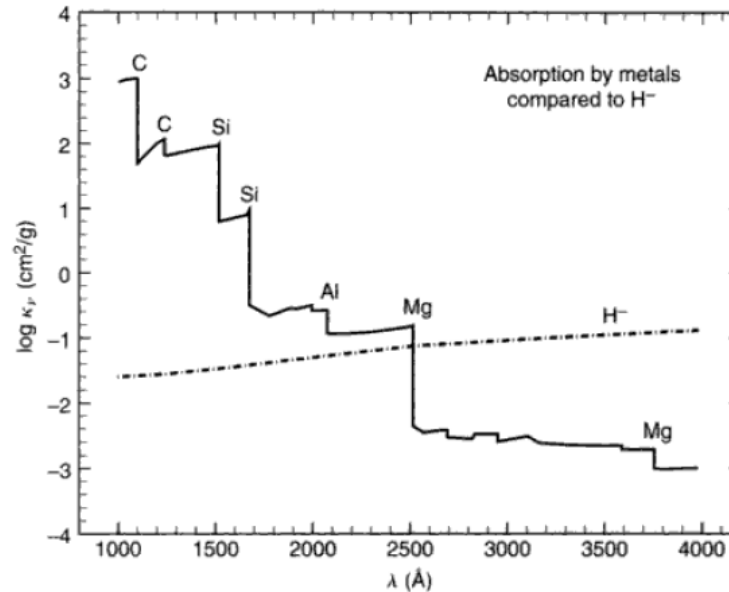
$$H + e(v) + h\nu = H + e(v')$$

$$h\nu = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2$$



Ostali apsorberi

- H_2^+ jon (kod vrlo hladnih M zvezda)
- He (zbog velike energije jonizacije samo kod O i ranih B zvezda)
- Rasejanje na slobodnim elektronima (kod O i ranih B zvezda)
- Rejljevo rasejanje na molekulima (kod hladnih zvezda)
- C, Si, Al, Mg, Fe značajni apsorberi (b-f) u UV za $\lambda < 250$ nm
- Molekuli CN^- , C_2^- , H_2O^- , TiO, CrH, FeH, MgH (kod hladnih zvezda)



$$\kappa_{\text{total}} = \{[\kappa(H_{\text{bf}}) + \kappa(H_{\text{ff}}) + \kappa(H_{\text{bf}}^-) + \kappa(H_2^+)](1 - 10^{-\chi_\lambda \theta}) + \kappa(H_{\text{ff}}^-) + \dots\} \\ \times \frac{1}{1 + \Phi(H)/P_e} + \kappa(\text{metals}) + \kappa(\text{He}_{\text{ff}}^-) + \kappa(e) + \dots \quad (8.18)$$

Kako bismo onda izračunali koeficijent apsorpcije?

- Ograničimo se na nekoliko osnovnih doprinosa, za zvezde slične Suncu:
- Vezano-slobodni prelazi neutralnog vodonika (jonizacija neutralnog vodonika u različitim stanjima ekscitacije).

$$\chi_{\lambda}^{bf}(H\ I) = \sum_i n_i \sigma_{\lambda}^{bf}$$

- Vezano-slobodni i slobodno-slobodni prelazi negativnog jona vodonika

$$\chi_{\lambda}(H-) = n(H-)\sigma_{\lambda}^{bf} + n(H-)\sigma_{\lambda}^{ff} = n(H-)\sigma_{\lambda}(H-)$$

- Tomsonovo rasejanje na elektronima.

$$\chi_{\lambda}^{e-} = n_e \sigma^{e-}$$

Ukupna neprozračnost

- Zapamtite: Ne smemo sabirati intenzitete, niti funkcije izvora. Možemo samo da sabiramo neprozračnosti i koeficijente emisije.
- Dakle, da izračunamo ukupnu neprozračnost naše atmosfere, moramo da saberemo:

$$\chi_{\lambda}^{bf}(H I) = \sum_i n_i \sigma_{\lambda}^{bf}$$

$$\chi_{\lambda}(H-) = n(H-) \sigma_{\lambda}^{bf} + n(H-) \sigma_{\lambda}^{ff} = n(H-) \sigma_{\lambda}(H-)$$

$$\chi_{\lambda}^{e-} = n_e \sigma^{e-}$$

- Moramo da znamo sve koncentracije: koliko čestica ima u kom stanju jonizacije i ekscitacije. I to na svakoj dubini u modelu atmosfere. (5 min diskusija min)

Lokalna termodinamička ravnoteža - čestice

- **Maxwell** – ova raspodela po brzinama

$$f(v)dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} 4\pi v^2 dv$$

- **Boltzmann** jednačina (stanja ekscitacije)

$$\frac{n_j}{n_k} = \frac{g_j}{g_k} e^{-(E_j - E_k)/kT}$$

- **Saha** jednačina (stanja jonizacije)

$$\frac{n_{i+1}}{n_i} = \frac{1}{n_e} \Phi(T) = \frac{1}{n_e} \left(\frac{2\pi m kT}{h^2}\right)^{3/2} \frac{2U_{i+1}}{U_i} e^{-\chi_i/kT}$$

Ravnotežne
raspodele čestica
na lokalnoj
temperaturi

Ali, fotoni nemaju
ravnotežnu raspodelu !

$$I_\nu(\vec{r}) \neq B_\nu(T(\vec{r})) \quad !$$

Jednačina stanja

- Šta je jednačina stanja idealnog gasa?

$$p = nkT$$

- Pritisak gasa zavisi od ukupne koncentracije čestica i od temperature.
- U astrofizici, pod jednačinom stanja često podrazumevamo vezu između **pritiska, temperature i gustine gasa (plazme)**.
- Ako vam kažem da imam 10^{23} čestica po m^3 , na temperaturi 7000 K, kolika je gustina tog gasa?
- 5-7 minuta za diskusiju

Jednačina stanja

- Šta je jednačina stanja idealnog gasa?

$$p = nkT$$

- Pritisak gasa zavisi od ukupne koncentracije čestica i od temperature.
- U astrofizici, pod jednačinom stanja često podrazumevamo vezu između **pritiska, temperature i gustine gasa (plazme)**.
- Ako vam kažem da imam 10^{23} čestica po m^3 , na temperaturi 7000 K, kolika je gustina tog gasa?
- Da olakšamo, u pitanju je čist vodonik, ali **ne znamo u kom stanju jonizacije!**

Jednačina stanja

- Šta je jednačina stanja idealnog gasa?

$$p = nkT$$

- Pritisak gasa zavisi od ukupne koncentracije čestica i od temperature.
- U astrofizici, pod jednačinom stanja često podrazumevamo vezu između **pritiska, temperature i gustine gasa (plazme)**.
- Ako vam kažem da imam 10^{23} čestica po m^3 , na temperaturi 7000 K, kolika je gustina tog gasa?
- Da olakšamo, u pitanju je čist vodonik, ali **ne znamo u kom stanju jonizacije!**
- Ako imam 10^{23} neutralnih vodonika, masa po čestici je veća nego ako imam 5×10^{22} protona i 5×10^{22} elektrona, **ali pritisak je isti.**

Jednačina stanja za čist vodonik

- Pretpostavimo da imamo gas koji se sastoji samo od vodonika (ok prva pretpostavka za astrofizičku plazmu, koja je 90% vodonik).
- Kako da dobijemo gustinu za dati pritisak i temperaturu?

Jednačina stanja za čist vodonik

- Pretpostavimo da imamo gas koji se sastoji samo od vodonika (ok prva pretpostavka za astrofizičku plazmu, koja je 90% vodonik).
- Kako da dobijemo gustinu za dati pritisak i temperaturu?
- Moramo da nadjemo stepen jonizacije vodonika. Da li neko ima ideju kako?

Jednačina stanja za čist vodonik

- Pretpostavimo da imamo gas koji se sastoji samo od vodonika (ok prva pretpostavka za astrofizičku plazmu, koja je 90% vodonik).
- Kako da dobijemo gustinu za dati pritisak i temperaturu?
- Moramo da nadujemo stepen jonizacije vodonika. Rešavamo sledeće tri jednačine:

$$p = (n_e + n_p + n_{H0})kT$$

$$n_e = n_p$$

$$\frac{n_p n_e}{n_{H0}} = \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \frac{2g_p}{g_{H0}} e^{-E_i/kT}$$

- Na vežbama ćemo videti da kada ovo rešimo dobijamo kvadratnu jednačinu.
- Takođe ćemo dobiti da stepen jonizacije zavisi I **od pritiska**.

Kako bismo u ovo sada dodali negativan jon vodonika?

- Rešavamo sledeće četiri jednačine:

$$p = (n_e + n_p + n_{H0} + n_{H-})kT$$

$$n_e + n_{H-} = n_p$$

$$\frac{n_p n_e}{n_{H0}} = f_1(T)$$

$$\frac{n_{H0} n_e}{n_{H-}} = f_2(T)$$

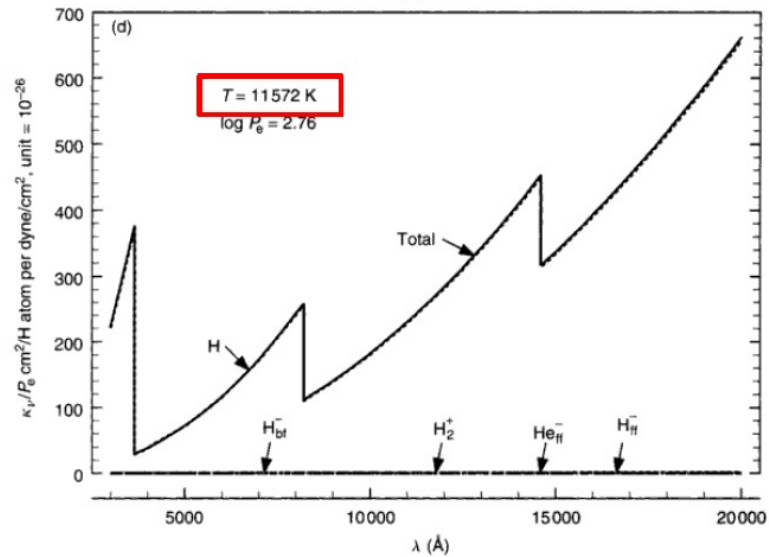
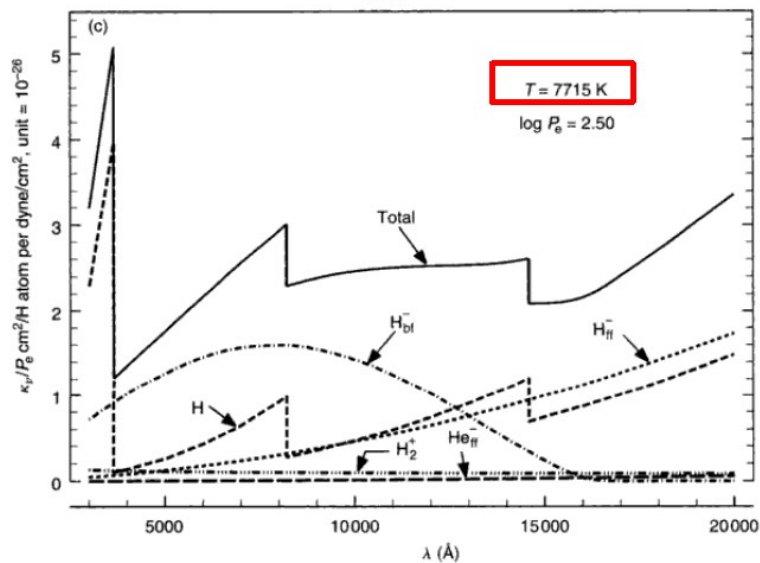
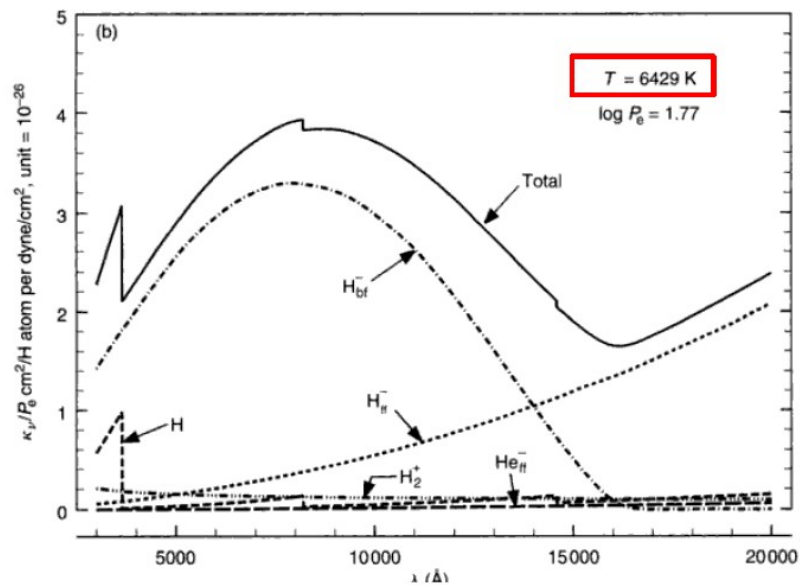
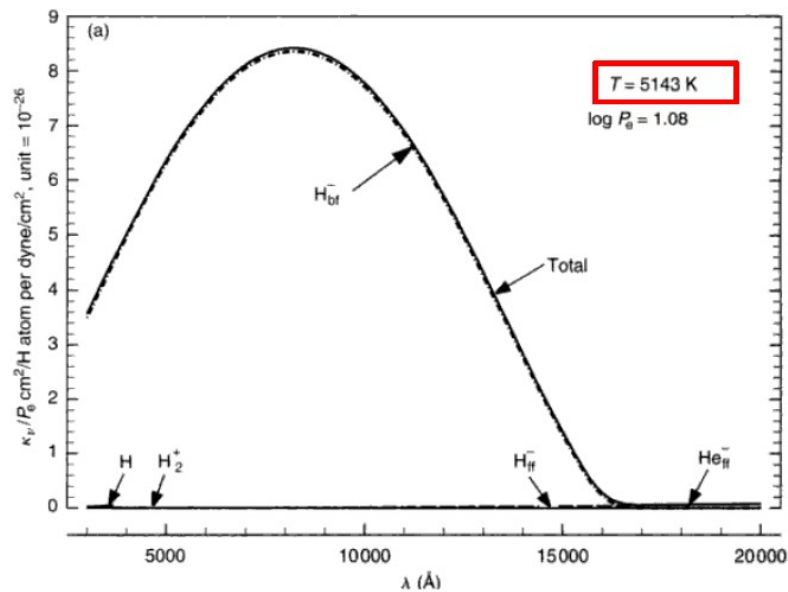
- Ovo je sada malo teže rešiti analitički. Zamislite šta se onda dešava kada imamo još mnogo elemenata u odgovarajućim stanjima jonizacije?
- Moramo da rešimo (numerički) nelinearan sistem jednačina

Ali da dobijemo b-f apsorpciju vodonika trebaju nam...

- Populacije (naseljenosti) nivoa vodonika.
- Njih dobijamo iz Bolcmanove raspodele. Kada dobijemo stanje eksitacije, ovo je relativno jednostavno, za i-ti nivo neutralnog vodonika dobijamo:

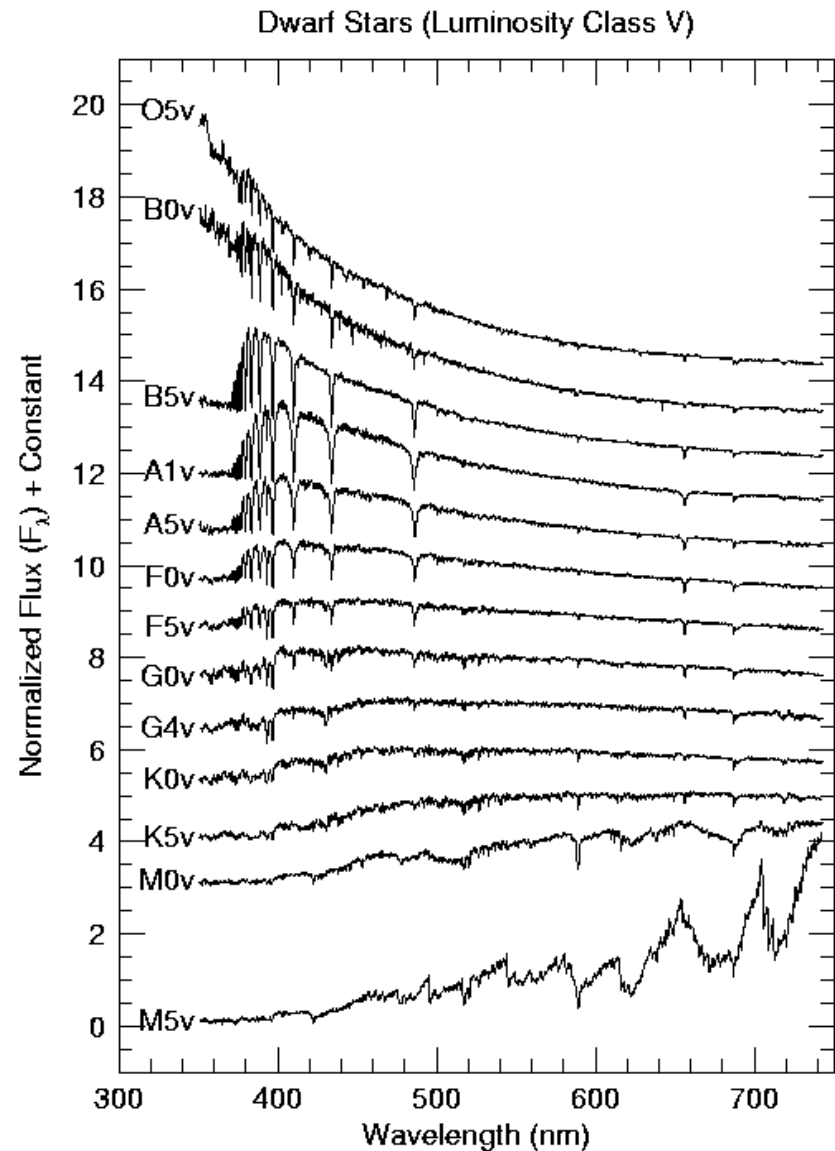
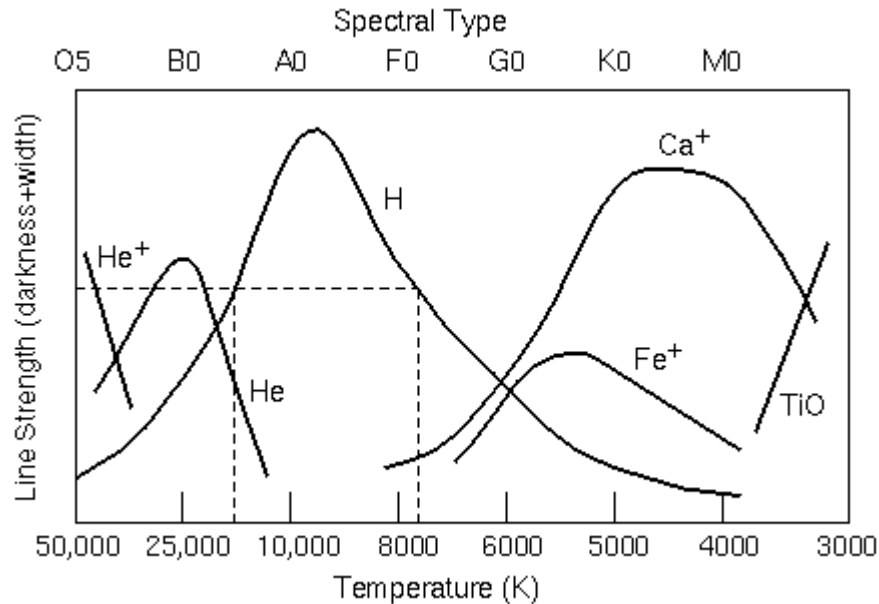
$$n_i = n_{H0} \frac{g_i e^{-E_i/kT}}{U(H_0)}$$

- Particiona funkcija, U, za neutralan vodonik je jednaka 2, a za ostale elemente se opet može naći iz odgovarajućih tablica i aproksimativnih izraza.
- Za vodonik, populacija prvog nivoa je mnogo veća u odnosu na populacije ostalih nivoa . (Videćemo na vežbama sledeće nedelje).



Sve ovo zajedno nam daje mogućnost da opišemo...

- Spektar zvezda različitih spektralnih klasa!
- Ne zaboravite da je osnova svega u Sahinoj (i Boltzmannovoj) raspodeli!



Ako je ostalo vremena, idemo nazad u notebook! :)