

Teorija Zvezdanih Spektara

Lekcija 13: Ne-LTR efekti u Spektralnim Linijama

Ivan Milić (AOB / MATF)

26/12/2023

Podsetnik

- Koeficijenti emisije i apsorpcije u spektralnoj liniji izgledaju ovako:

Populacija gornjeg nivoa

$$j_{\lambda} = n_u A_{ul} \frac{hc}{\lambda 4\pi} \phi_{\lambda}$$

Einstein-ovi koeficijenti

Apsorpcioni profil

$$\chi_{\lambda} = (n_l B_{lu} - n_u B_{ul}) \frac{hc}{\lambda 4\pi} \phi_{\lambda}$$

Danas pričamo o
populacijama donjeg i
(pogotovo) gornjeg nivoa!

Populacija
donjeg nivoa

Zašto “pogotovo gornjeg?”

- Funkcija izvora u liniji:

$$S = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}}$$

- Ako pretpostavimo da stimulisana emisija može biti zanemarena:

$$S \approx \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{n_u}{n_l}$$

- Sada, ako pretpostavimo da je broj atoma u stanju l mnogo veći od broja atoma u stanju u , onda je $n_l \sim n_{\text{tot}}$, pa funkcija izvora zavisi samo od n_u

Podsetnik – koherentno rasejanje

- U Ne-LTR smo pretpostavili da funkcija izvora ima Plankovski deo i deo sa rasejanjem (ove dve formulacije su ekvivalentne, što ćemo pokazati uskoro)

$$S_{\lambda} = \epsilon B_{\lambda} + (1 - \epsilon) J_{\lambda}$$

- Ovde smo definisali epsilon kao **verovatnoću stvarne apsorpcije (termalizacije) fotona**.
- U rasejanju u spektralnim linijama to će biti:

$$\epsilon = \frac{C_{ul}}{A_{ul} + C_{ul}}$$

- Gde C označava sudarnu (foton pretvoren u termalnu energiju) a A (foton nastavlja dalje) radijativnu de-ekscitaciju.

Atom sa dva nivoa

- Iako spektralna linija nastaje između dva diskretna energetska nivoa, u principu atomi imaju **mnogo više** energetskih nivoa.
- Jednostavnosti radi, možemo da pretpostavimo da atom ima **samo ta dva nivoa** te da su jedini dozvoljeni prelazi sa gornjeg na donji i obrnuto.
- Te da imamo sudarne i radijativne prelaze.
- Sledeća pretpostavka je da su populacije nivoa **konstantne u vremenu**.
- Onda ukupan broj de-ekscitacija u našem elementu zapremine, u jedinici vremena mora biti jednak broju ekscitacija:

$$n_u(C_{ul} + R_{ul}) = n_l(C_{lu} + R_{lu})$$

Sudarni prelazi Radijativni prelazi

Čemu je jednak ukupan broj radijativnih ekscitacija?

- Kako da nadjemo ovo? 2-3 minuta samostalan rad + diskusija

Čemu je jednak ukupan broj radijativnih ekscitacija?

- = Ukupan broj apsorpcija
- Ukupan broj apsorpcija je srazmeran ukupnoj apsorbovanoj energiji po jedinici zapremine u jedinici vremena.
- Hajdemo korak po korak, kako biste ovo nazvali:

$$dI_{\lambda}^{\text{abs}} = -\chi_{\lambda}^{\text{abs}} I_{\lambda} dl$$

Ovde mislimo na
ukupan uklonjeni
intenzitet iz
snopa, dakle
apsorpcija +
rasejanje

Ovo "abs" se
odnosi samo na
apsorpciju, bez
stimulisane
emisije

Čemu je jednak ukupan broj radijativnih ekscitacija?

- = Ukupan broj apsorpcija
- Ukupan broj apsorpcija je srazmeran ukupnoj apsorbovanoj energiji po jedinici zapremine u jedinici vremena.
- Hajdemo korak po korak, kako biste ovo nazvali:

$$dI_{\lambda}^{\text{abs}} = -\chi_{\lambda}^{\text{abs}} I_{\lambda} dl$$

- Apсорbovana energija po jedinici zapremine, u jedinici vremena, po jediničnom prostornom uglu. Podelimo sa energijom jednog fotona da predjemo na broj apsorpcija:

$$\frac{dn_{\lambda}^{\text{abs}}}{dt} h\nu = -n_l B_{lu} \frac{h\nu}{4\pi} \phi_{\lambda} I_{\lambda}$$

Čemu je jednak ukupan broj radijativnih ekscitacija?

- = Ukupan broj apsorpcija. Moramo dakle da ovo integralimo po pravcima i talasnim dužinama:

$$\frac{dn_{\lambda}^{\text{abs}}}{dt} h\nu = -n_l B_{lu} \frac{h\nu}{4\pi} \phi_{\lambda} I_{\lambda}$$

$$\frac{dn^{\text{abs}}}{dt} = n_l B_{lu} \frac{1}{4\pi} \oint \int I_{\lambda} \phi_{\lambda} d\lambda d\hat{\Omega} = n_l B_{lu} \bar{J}$$

Broj radijativnih
ekscitacija u
jedinici vremena -
učestanost (eng:
rate) ekscitacije

Integral rasejanja,
srednji intenzitet
integraljen po
apsorpcionom
profilu

Radijativne de-ekscitacije

- Imamo dva procesa: Spontanu i stimulisanu emisiju
- Ako pretpostavimo da su emisioni i apsorpcioni profil isti i primenimo prethodnu logiku (**tabla ako zatreba**) dobijamo:

$$\frac{dn^{\text{em}}}{dt} = n_u A_{ul} + n_u B_{ul} \bar{J}$$

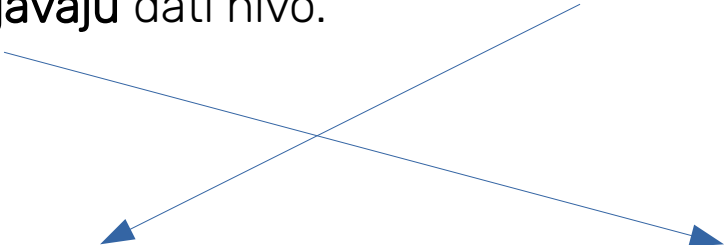
Einstein-ov
koeficijent
spotane emisije je
sam po sebi
učestanost

Integral rasejanja,
srednji intenzitet
integraljen po
apsorpcionom
profilu

- Poslednji korak je da dodamo sudarne procese i da izjednačimo ekscitacije i de-ekscitacije

Statistička ravnoteža

- Populacije gornjeg i donjeg nivoa su konstantne u vremenu – broj ekscitacija jednak broju de-ekscitacija
- Malo generalnije: učestanost procesa koji **naseljavaju** dati nivo je jednak učestanosti procesa koji **raseljavaju** dati nivo.
- Npr. za nivo n_u :


$$n_l(B_{lu}\bar{J} + C_{lu}) = n_u(B_{ul}\bar{J} + A_{ul} + C_{ul})$$

- **Tabla / diskusija:** Pokazati da se za donji nivo dobija ista jednačina.
- Ako su nam date sve veličine sem populacija, kako da ih dobijemo?

Funkcija izvora u atomu sa dva nivoa:

- Generalni izraz za funkciju izvora (uvek važi):

$$S = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}}$$

- A jednačina statističke ravnoteže izgleda ovako:

$$n_l (B_{lu} \bar{J} + C_{lu}) = n_u (B_{ul} \bar{J} + A_{ul} + C_{ul})$$

- **Tabla:** Pokazati da je funkcija izvora u liniji linearna kombinacija Plankove funkcije (B) i integrala rasejanja (\bar{J}).

Funkcija izvora u atomu sa dva nivoa:

$$S = \epsilon B + (1 - \epsilon)\bar{J}$$

- Gde epsilon sada ima malko komplikovaniji oblik:

$$\epsilon = \frac{C_{ul}(1 - e^{-hc/\lambda kT})}{A_{ul} + C_{ul}(1 - e^{-hc/\lambda kT})} \approx \frac{C_{ul}}{A_{ul} + C_{ul}}$$

- *Obratite pažnju da pri izvodjenju ovog izraza moramo da izvedemo relacije izmedju sudarne ekscitacije i de-ekscitacije na osnovu LTR uslova!*

Atom sa dva nivoa u ne-LTR

- Opet imamo spregnuće. Ovaj put spregnute su JPZ i jednačina statističke ravnoteže:

$$\mu \frac{dI_\lambda}{d\tau \phi_\lambda} = I_\lambda - S$$

$$S = \epsilon B + (1 - \epsilon) \frac{1}{2} \int \int I_\lambda \phi_\lambda d\lambda d\mu$$

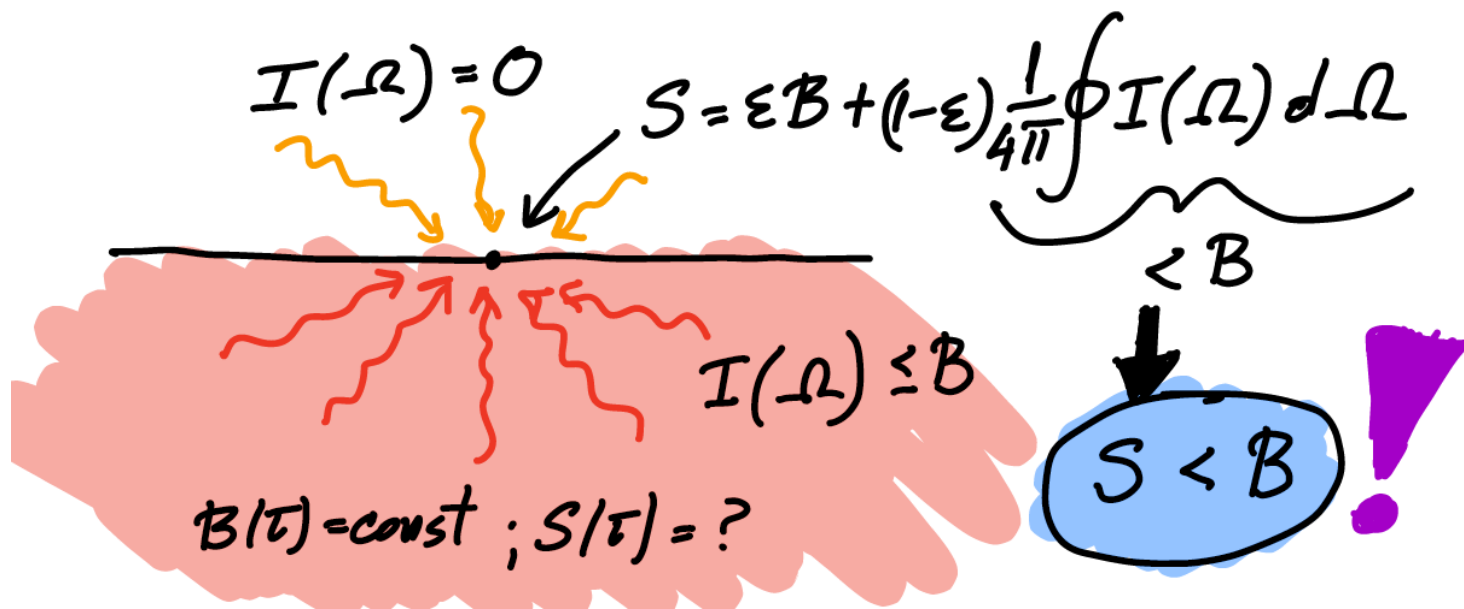
- Opet ih, po potrebi možemo napisati kao jednu integro-diferencijalnu jednačinu.
- Postoji tačno semi-analitičko rešenje, postoje direktna i iterativna numerička rešenja. **Više o tome na vežbama.**

Šta su posledice ne-LTR?

- [illegible]

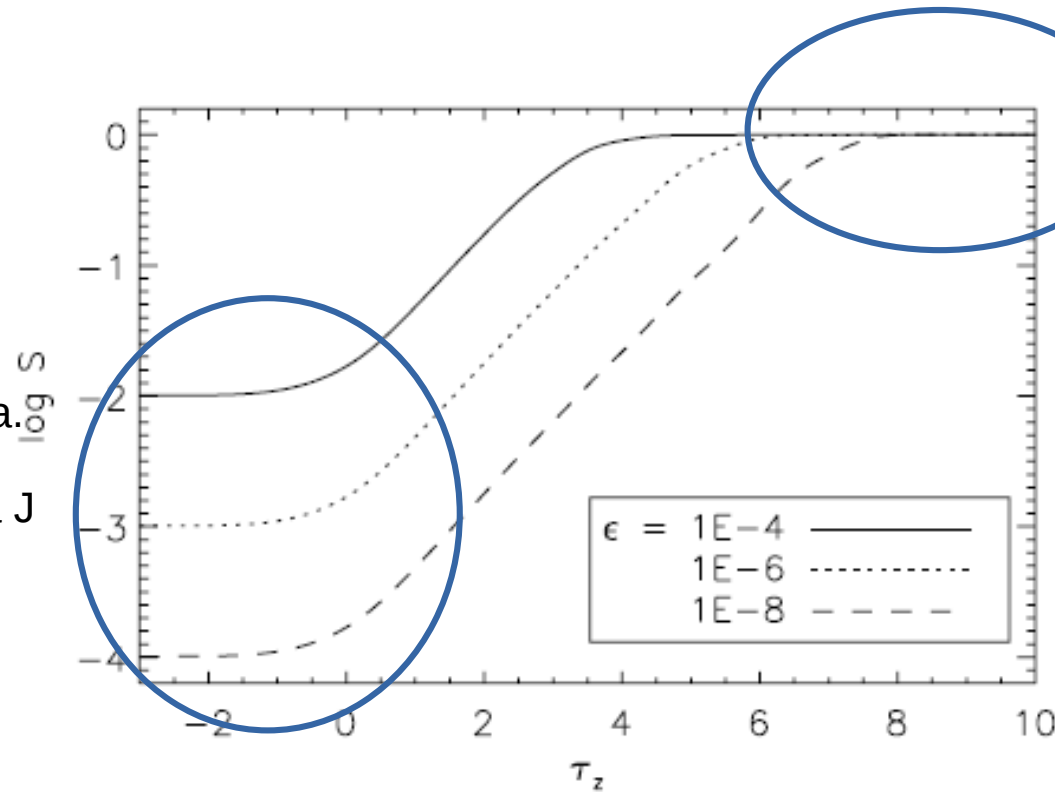
Šta su posledice ne-LTR?

- Hajde da sami odgovorimo na to pitanje.
- Zamislite da imamo, zadatu, izotermalnu atmosferu ($B = \text{const}$).
- Pretpostavite $\epsilon = 0$.
- Ubedite sebe (i mene) da će funkcija izvora pasti ispod B na vrhu atmosfere.



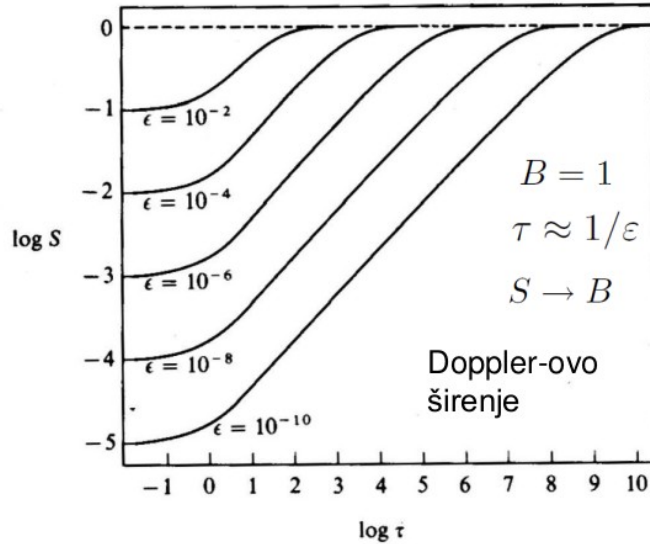
Tačno rešenje – funkcija izvora bitno pada na vrhu atmosfere

Vrh atmosfere – mala vrednost funkcije izvora. Ovo je zato što fotoni “beže” iz atmosfere, pa J pada, a samim tim i S .



Funkcija izvora dostiže Plankovu funkciju duboko u atmosferi. Ovo nema nikakve veze sa gustinom, već sa ukupnom neprozračnošću.

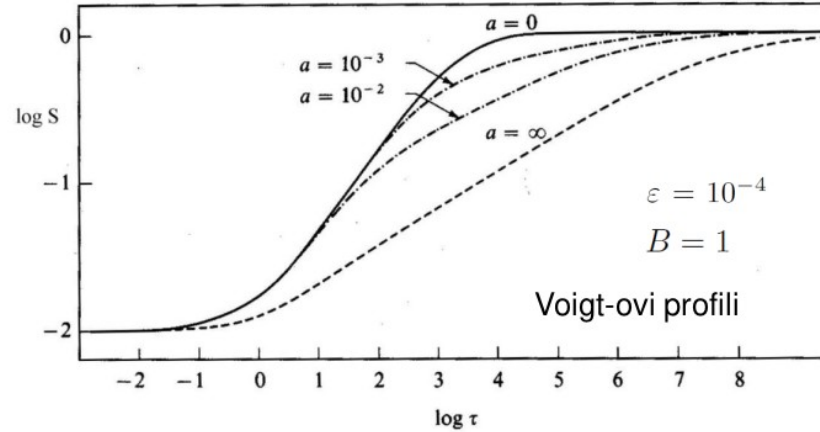
Funkcije izvora za atom sa dva nivoa sa kompletnom redistribucijom u izotermnoj polu-beskonačnoj atmosferi (Avrett and Hummer 1965)



Rešenje na površini:

$$S^L(0) = \sqrt{\epsilon} B$$

ne zavisi od oblika profila



Dubina termalizacije zavisi od profila:

(Doppler)

$$\Lambda_T \approx \frac{C}{\epsilon}$$

(Lorentz)

$$\Lambda_T \approx \frac{8}{9\epsilon^2}$$

(Voigt)

$$\Lambda_T \approx \frac{8a}{9\epsilon^2}$$

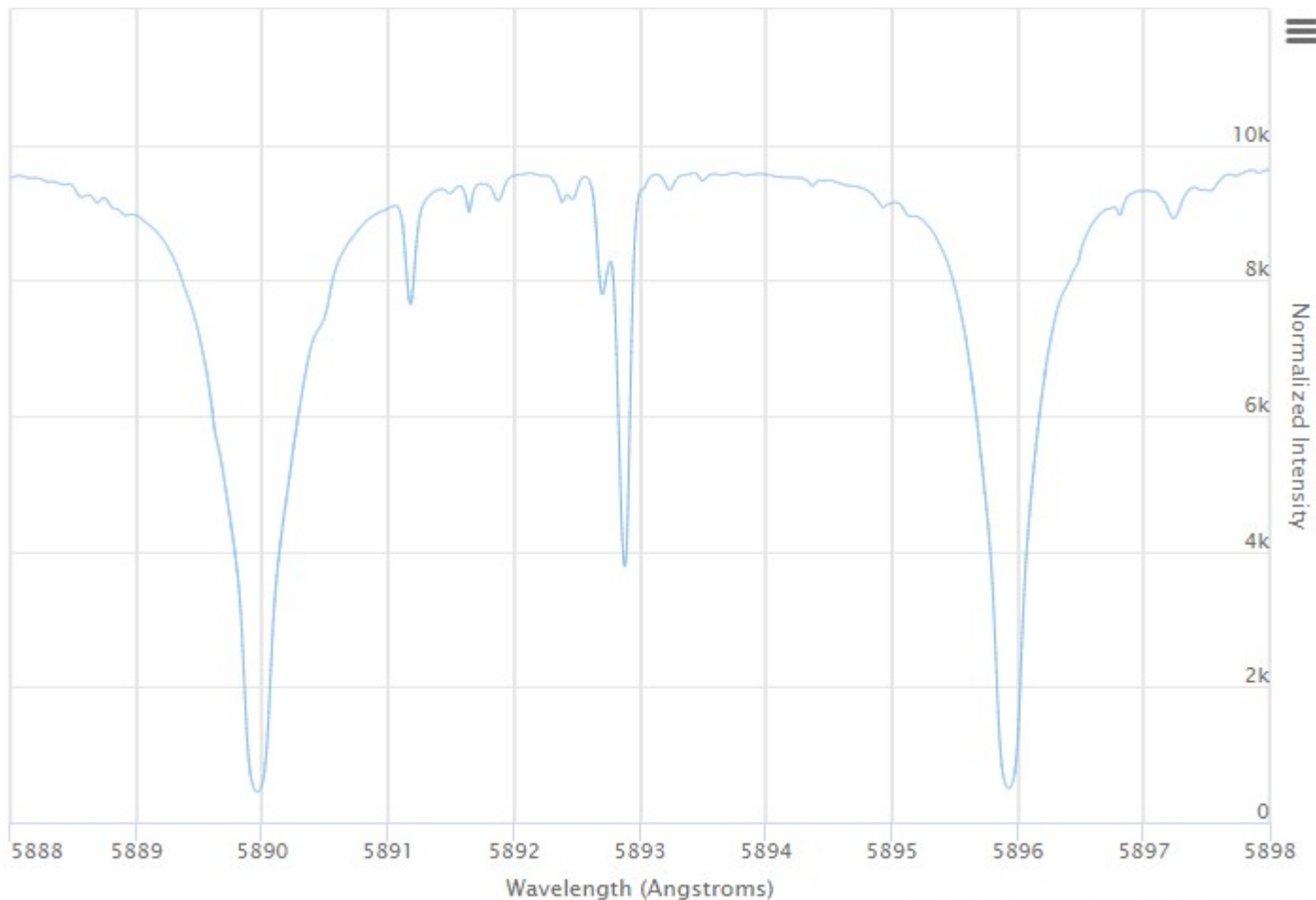
Gubitak fotona kroz površinu teži da smanji funkciju izvora;

Nekoherentno rasejanje povećava dubinu do koje se oseća gubitak fotona.

Za koherentno rasejanje dubina termalizacije je najmanja:

$$\Lambda_T \approx \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$$

Ovo prouzrokuje jako duboko spektralne linije! (Ovo su D linije Natrijuma)



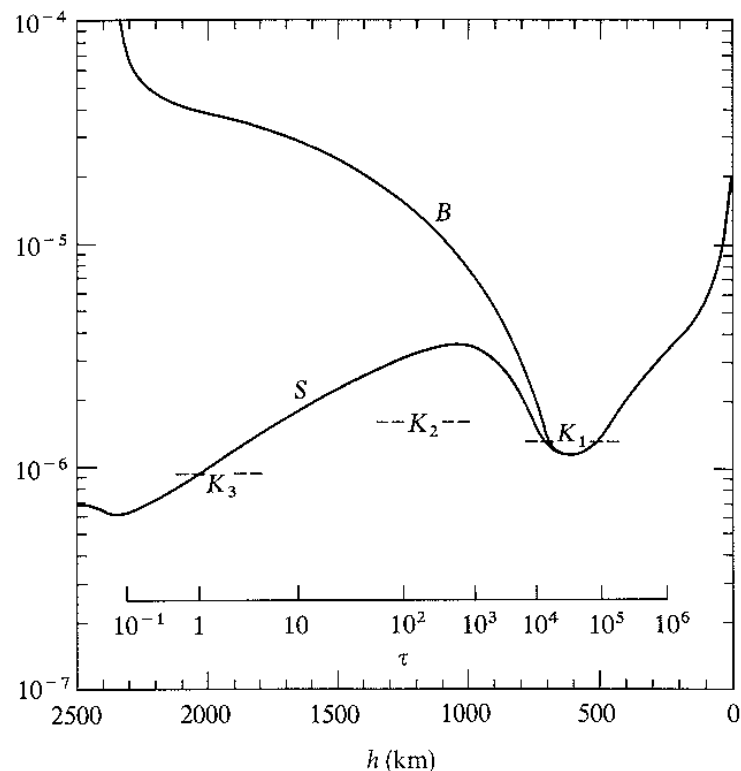
Šokantno-frapantan zaključak

- U prisustvu ne-LTR efekata čak i u izotermalnoj atmosferi dobijamo apsorpcionu liniju!
- U realističnoj atmosferi (npr Sunčevoj), ovo dovodi da u jakim, ne-LTR spektralnim linijama, funkcija izvora ima sledeći trend:

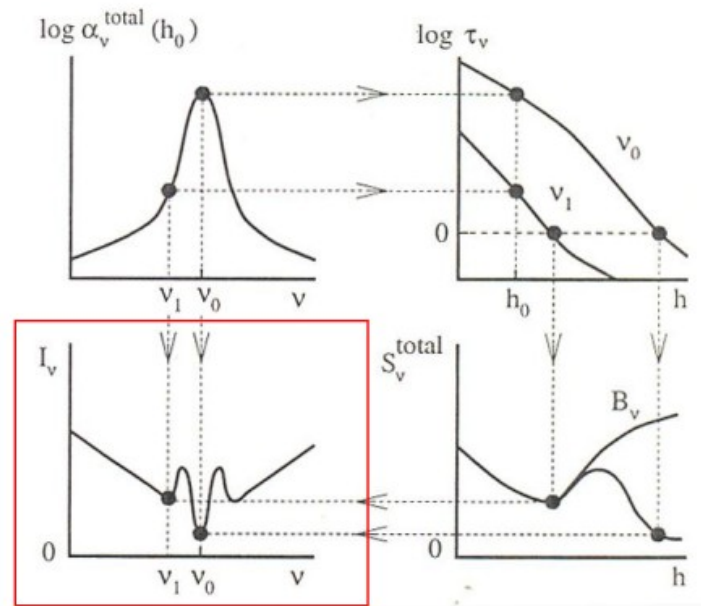
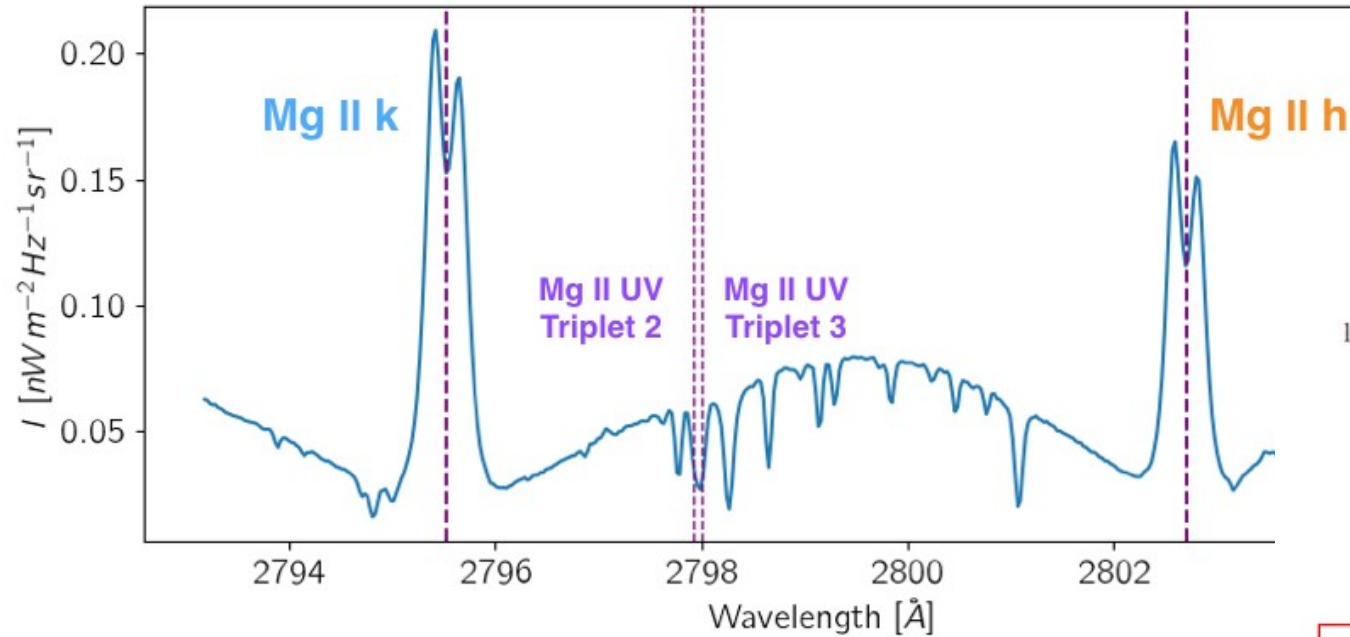
Opada – fotosferski pad temperature

Raste – hromosferski rast temperature

Opada – neLTR efekti u visokoj hromosferi



Sada konačno razumemo h & k linije Mg II



Neki zaključci:

- Rasejanje tj. Ne-LTR dovodi do spregnuća jednačine statističke ravnoteže i jednačine prenosa zračenja
- Da bismo znali intenzitet na jednoj talasnoj dužini i jednom pravcu – moramo da znamo intenzitet na svim talasnim dužinama u svim pravcima
- Rešenje je ne-trivijalno, u generalnom slučaju mora biti numeričko
- Do sada smo gledali slučaj atoma sa dva nivoa – **linearan problem**
- U generalnom slučaju imamo atome sa više nivoa (eng: multilevel atom case).
- Najvažniji rad u ovoj oblasti je verovatno *Rybicki & Hummer (1991): An accelerated lambda iteration method for multilevel radiative transfer*

Jednačina statističke ravnoteže za atom sa više nivoa

- Populacija svakog od nivoa je konstantna u vremenu.

$$n_i \sum_j (A_{ij} + B_{ij} \bar{J}_{ij} + C_{ij}) = \sum_j n_j (A_{ji} + B_{ji} \bar{J}_{ji} + C_{ji})$$

- Ako napišemo ovo za svaki nivo, jedna jednačina će biti višak (neodredjen sistem).
- Umesto toga, sistem zatvaramo sa:

$$\sum_i n_i = n_{\text{total}}$$

- Gde je n_{total} ukupna koncentracija čestica datog elementa (**diskusija**).

Kako ovo rešiti?

- Ne-LTR u atomima sa više nivoa nije analitički rešiv problem
- Ako bismo raspisali sve zavisnosti dobili bismo ogroman **nonlinearan** sistem
- Zato se rešava iterativno:

Pretpostavimo početne vrednosti populacija (npr LTE)

Izračunamo intenzitete (a_{ps} , $e_m \rightarrow J_{PZ}$)

Izračunamo J

Statistička ravnoteža, dobijamo nove vrednosti populacija

Ponavljamo do konvergencije

Jednačina statističke ravnoteže za atom sa više nivoa

- Populacija svakog od nivoa je konstantna u vremenu.

$$n_i \sum_j (A_{ij} + B_{ij} \bar{J}_{ij} + C_{ij}) = \sum_j n_j (A_{ji} + B_{ji} \bar{J}_{ji} + C_{ji})$$

- Ako napišemo ovo za svaki nivo, jedna jednačina će biti višak (neodredjen sistem).
- Umesto toga, sistem zatvaramo sa:

$$\sum_i n_i = n_{\text{total}}$$

- Gde je n_{total} ukupna koncentracija čestica datog elementa (**diskusija**).

Atom sa dva nivoa u ne-LTR

- Opet imamo spregnuće. Ovaj put spregnute su JPZ i jednačina statističke ravnoteže:

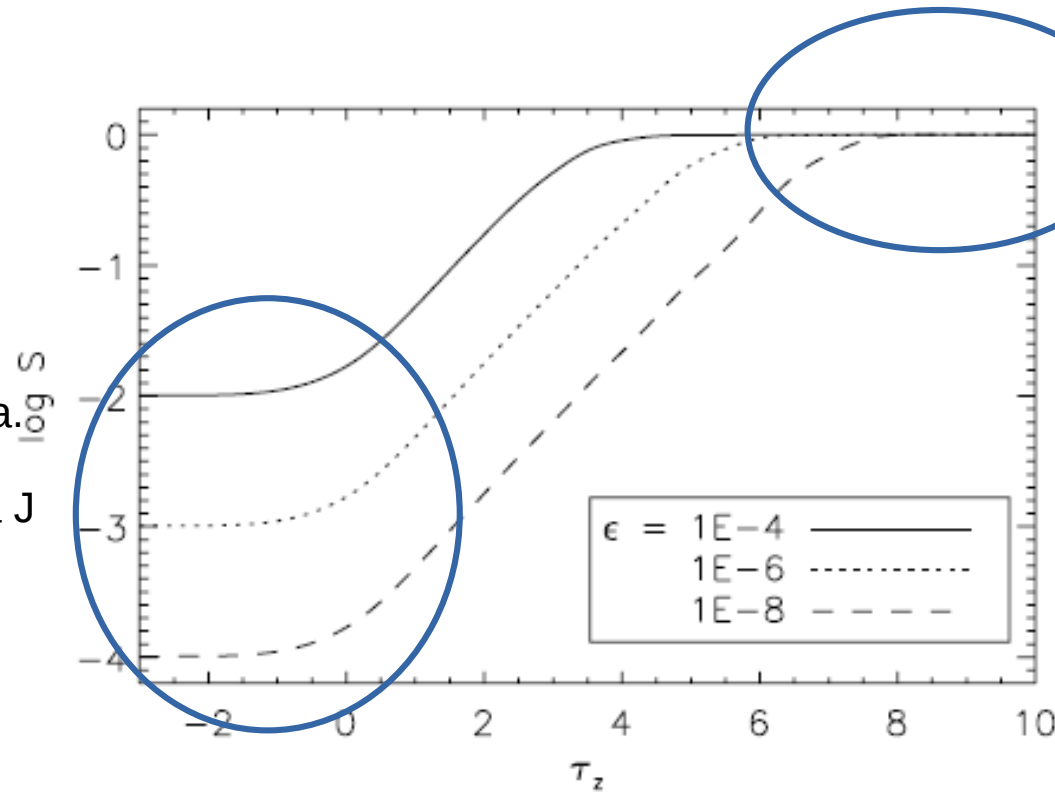
$$\mu \frac{dI_\lambda}{d\tau \phi_\lambda} = I_\lambda - S$$

$$S = \epsilon B + (1 - \epsilon) \frac{1}{2} \int \int I_\lambda \phi_\lambda d\lambda d\mu$$

- Opet ih, po potrebi možemo napisati kao jednu integro-diferencijalnu jednačinu.
- Postoji tačno semi-analitičko rešenje, postoje direktna i iterativna numerička rešenja. **Više o tome na vežbama.**

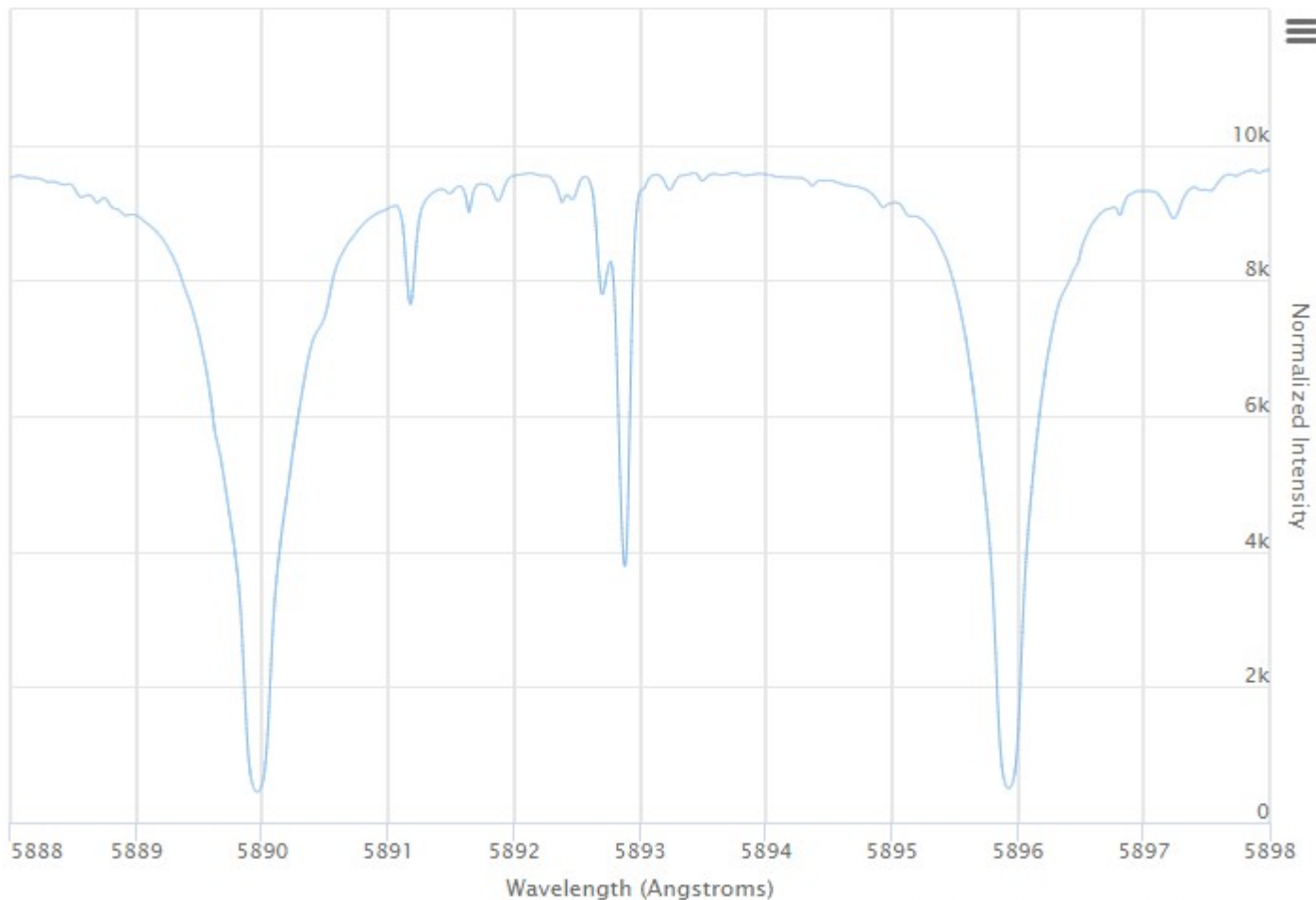
Tačno rešenje – funkcija izvora bitno pada na vrhu atmosfere

Vrh atmosfere – mala vrednost funkcije izvora. Ovo je zato što fotoni “beže” iz atmosfere, pa J pada, a samim tim i S .



Funkcija izvora dostiže Plankovu funkciju duboko u atmosferi. Ovo nema nikakve veze sa gustinom, već sa ukupnom neprozračnošću.

Ovo prouzrokuje jako duboke spektralne linije! (Ovo su D linije Natrijuma)



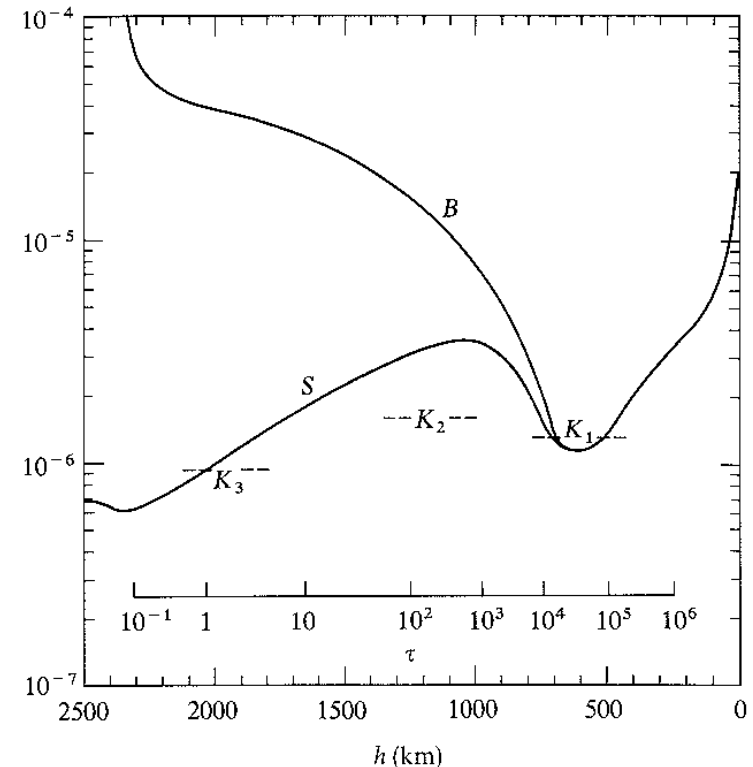
Tipično, funkcija izvora pada **ispod** Plankove funkcije

- U prisustvu ne-LTR efekata čak i u izotermalnoj atmosferi dobijamo apsorpcionu liniju!
- U realističnoj atmosferi (npr Sunčevoj), ovo dovodi da u jakim, ne-LTR spektralnim linijama, funkcija izvora ima sledeći trend:

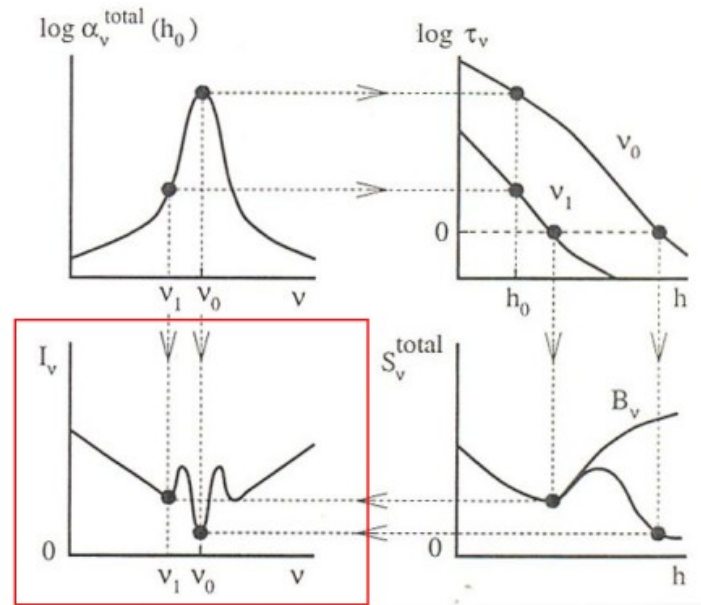
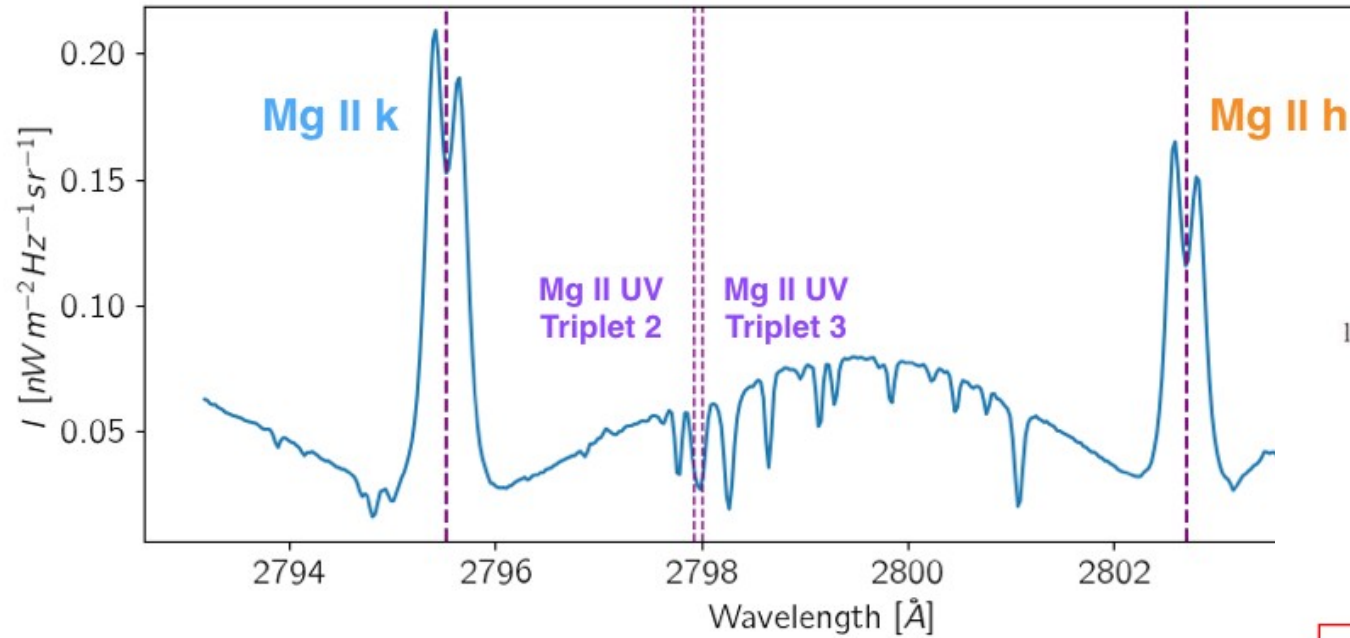
Opada – fotosferski pad temperature

Raste – hromosferski rast temperature

Opada – neLTR efekti u visokoj hromosferi



Sada konačno razumemo h & k linije Mg II



Kako generalno rešavamo Ne-LTR problem

- Ne-LTR u atomima sa više nivoa nije analitički rešiv problem
- Ako bismo raspisali sve zavisnosti dobili bismo ogroman **nelinearan** sistem
- Zato se rešava iterativno:

Pretpostavimo početne vrednosti populacija (npr LTE) – **na svim dubinama**

Izračunamo intenzitete (a_{ps} , e_m , **na svim dubinama** → JPZ)

Izračunamo J , **na svim dubinama**

Statistička ravnoteža, dobijamo nove vrednosti populacija – **na svim dubinama**

Ponavljamo do konvergencije

Uprošćena rešenja jednačine statističke ravnoteže

- Uglavnom za atom sa dva nivoa
- Ako možemo da zanemarimo neke radijativne ili sudarne procese, jednačina statističke ravnoteže biva dosta uprošćena
- Ključno je, uglavnom, identifikovati proces odgovoran za **populaciju gornjeg nivoa**
- Zavisno od linije, to može biti:

Rekombinacija iz jonizovanog stanja

Radijativna eksitacija (rasejanje)

Sudarna eksitacija

- Ove simplifikacije se najčešće koriste uz pretpostavku da je linija optički tanka! (Korone zvezda, HII regioni, planetarne magline, ostaci supernove...)

Sudarno ekscitovane linije

- Najčešće su u pitanju **zabranjene linije**. To su linije koje ruše neko selekciono pravilo, pa im je Einstein-ov koeficijent za spontanu emisiju jako mali.
- Za atom sa dva nivoa, to izgleda ovako:

Obratite pažnju, učestanosti izgledaju kao izrazi za apsorpciju emisiju!

$$n_u A_{ul} = n_l C_{lu}$$
$$j_\lambda = n_u A_{ul} \frac{hc}{4\pi\lambda} \phi_\lambda = n_l C_{lu} \frac{hc}{4\pi\lambda} \phi_\lambda$$

Važi za jako jonizovanu sredinu, zašto?

$$C_{lu} = n_e \Omega_{lu}$$

Ovo je neki efikasni presek za sudare

$$n_e \propto n_l$$
$$j_\lambda \propto n_e^2$$

Ovo, integraljeno po dubini (pravcu vizure) se često zove **mera emisije**, zašto?

Sudarno ekscitovane linije

Malo razloženiji izraz za populaciju donjeg nivoa:

$$C_{ij} = n_e \Omega_{ij}(T)$$

$$n_l = n_e \frac{n_l}{n_{\text{ion}}} \frac{n_{\text{ion}}}{n_{\text{species}}} \frac{n_{\text{species}}}{n_H} \frac{n_H}{n_e}$$

- Striktnije gledano, efikasni presek za sudare zavisi od temperature.
- Kada ovo sve spojimo, i integralimo po visini (rešimo JPZ).

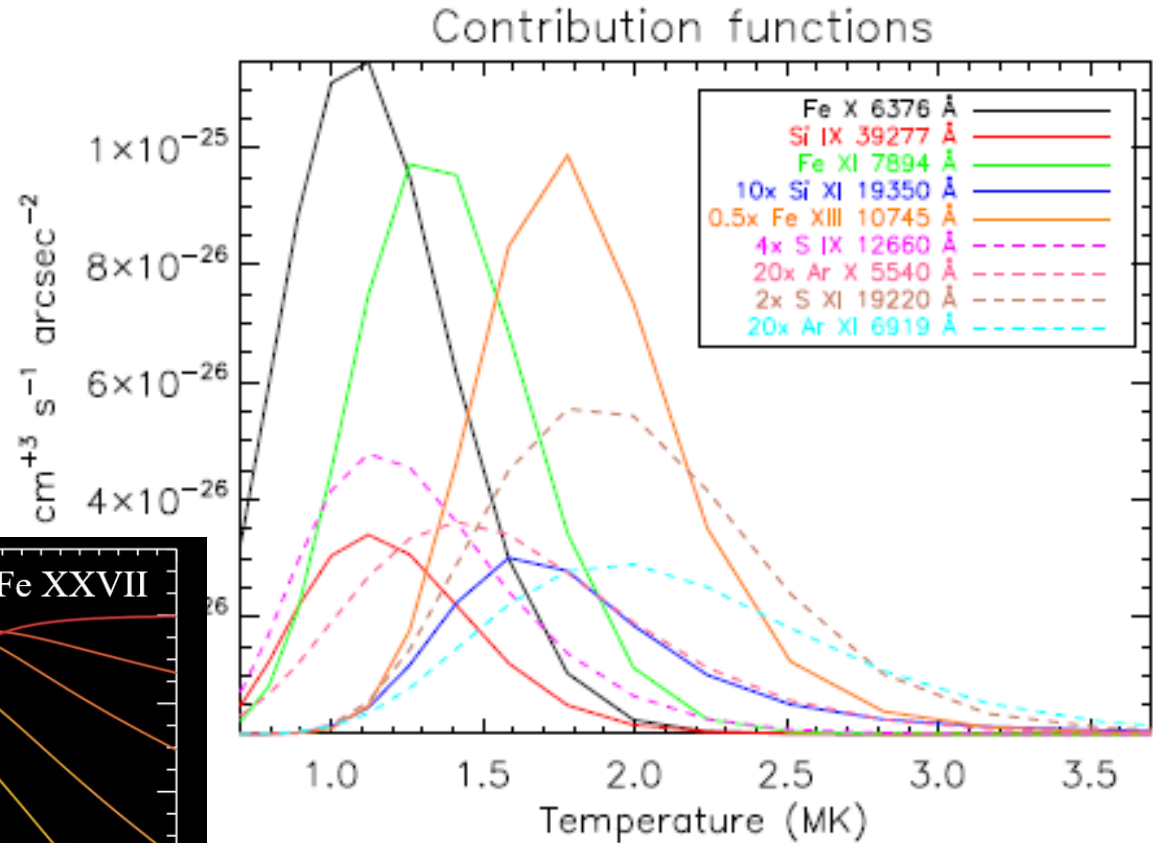
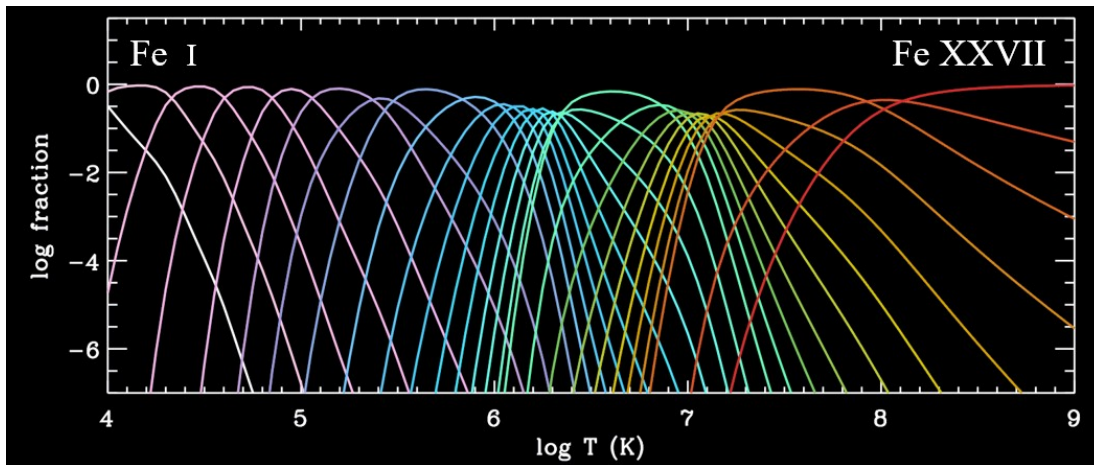
$$j_\lambda = n_e^2 G(T) \phi_\lambda$$

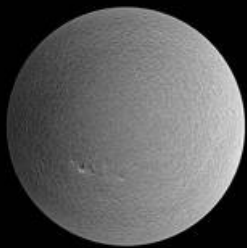
$G(T)$ je opet neka funkcija doprinosa, ali ovaj put u odnosu na temperaturu a ne na visinu.

$$I_\lambda = \int_0^s n_e^2(h) G(T(h)) \phi_\lambda dh$$

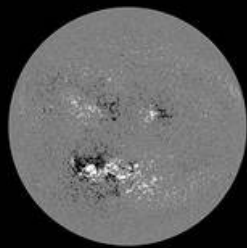
Evo nekih funkcija doprinosa za linije koje su važne u koroni Sunca

- Najvažnija zavisnost funkcije doprinosa od temperature dolazi od osetljivosti na jonizaciju





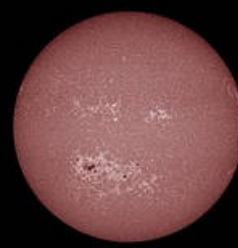
HMI Dopplergram
Surface movement
Photosphere



HMI Magnetogram
Magnetic field polarity
Photosphere



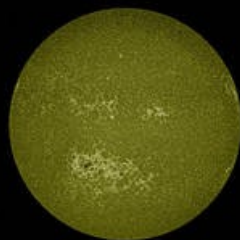
HMI Continuum
Matches visible light
Photosphere



AIA 1700 Å
4500 Kelvin
Photosphere



AIA 4500 Å
6000 Kelvin
Photosphere



AIA 1600 Å
10,000 Kelvin
Upper photosphere/
Transition region



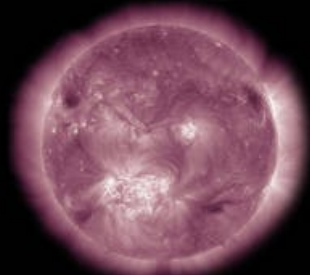
AIA 304 Å
50,000 Kelvin
Transition region/
Chromosphere



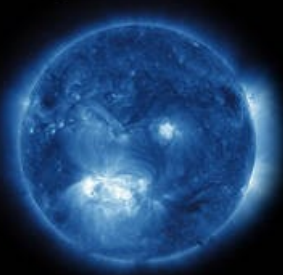
AIA 171 Å
600,000 Kelvin
Upper transition
Region/quiet corona



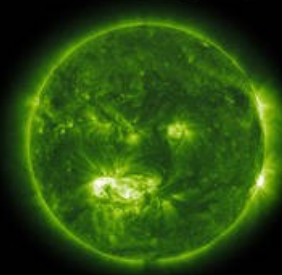
AIA 193 Å
1 million Kelvin
Corona/flare plasma



AIA 211 Å
2 million Kelvin
Active regions



AIA 335 Å
2.5 million Kelvin
Active regions



AIA 094 Å
6 million Kelvin
Flaring regions



AIA 131 Å
10 million Kelvin
Flaring regions

Radijativno ekscitovane linije

- Ovo bi bio slučaj **čistog rasejanja**. Slično primeru za protuberance od prošlog časa.
- Za atom sa dva nivoa, to izgleda ovako:

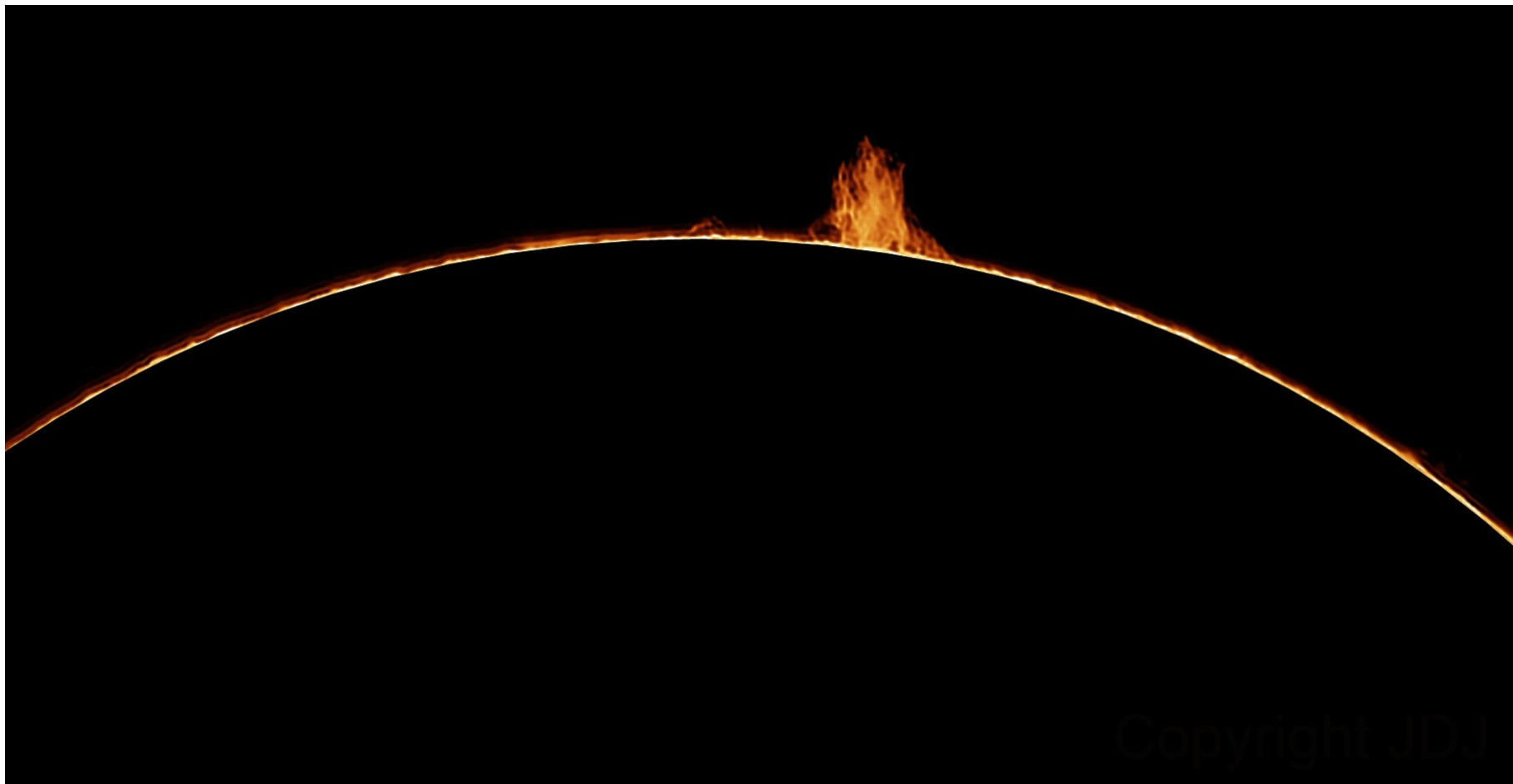
Obratite pažnju, učestanosti izgledaju kao izrazi za apsorpciju emisiju!

$$n_u A_{ul} = n_l B_{lu} \bar{J}$$
$$j_\lambda = n_u A_{ul} \frac{hc}{4\pi\lambda} \phi_\lambda = n_l B_{lu} \bar{J} \frac{hc}{4\pi\lambda} \phi_\lambda$$
$$\bar{J} \approx \Omega^{inc} I^{inc}$$
$$n_l \propto n_t$$
$$j_\lambda \propto n_t \Omega^{inc} I^{inc}$$

Ovo su ulazni, rasejani intenzitet i ugao unutar kog je objekat obasjan

Pogledajte opet sliku protuberanci i vidite da li ovo ima smiala

Hromosfera i protuberance



Copyright JDJ

Procenite gustinu K korone

- Intenzitet korone je $\sim 10^{-6}$ intenziteta diska
- Efikasni presek za Tomsonovo rasejanje je $3.3 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$
- Procenite, na osnovu ovoga gustinu K korone



Rešenje

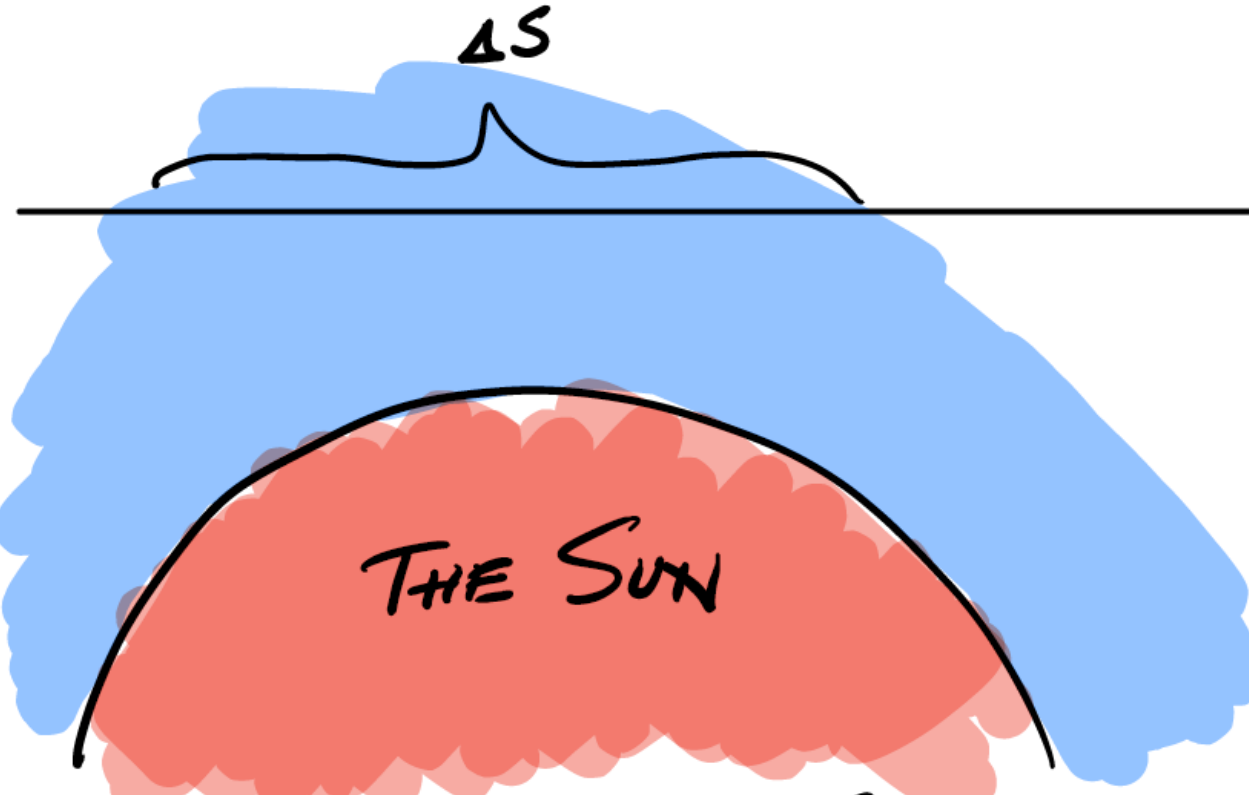


Diagram illustrating the solar wind and its effect on a detector at distance R_0 . The Sun is shown as a red semi-circle. A blue cloud-like shape represents the solar wind. A horizontal line with an arrow points from the Sun to the detector. A bracket above the line is labeled ΔS .

Equations derived from the diagram:

$$I_1 = I_0 \cdot 10^{-6}$$
$$I_1 = \int j_1 ds \approx j_1 \cdot (\Delta S)$$
$$j_1 = n_e \cdot v_{TH} \cdot I \approx n_e \cdot v_{TH} \cdot I_0$$
$$n_e = \frac{I_0 \cdot 10^{-6}}{v_{TH} \cdot I_0 \cdot R_0} \approx 10^7 - 10^8 \text{ cm}^{-3}$$

Rekombinacione linije

- Linije koje nastaju ili direktno rekombinacijom, ili kaskadnom de-ekscitacijom nakon rekombinacije na neki viši nivo
- Hajde da zajedno dešifrujemo ovu jednačinu statističke ravnoteže

$$n_{ion}n_e\alpha_{rec} + \sum_{j>i} n_j A_{ji} = n_i \sum_{j<i} A_{ij}$$

Rekombinacione linije

- Linije koje nastaju ili direktno rekombinacijom, ili kaskadnom de-ekscitacijom nakon rekombinacije na neki viši nivo
- Hajde da zajedno dešifrujemo ovu jednačinu statističke ravnoteže

Emisija sa nivoa i na niže nivoe

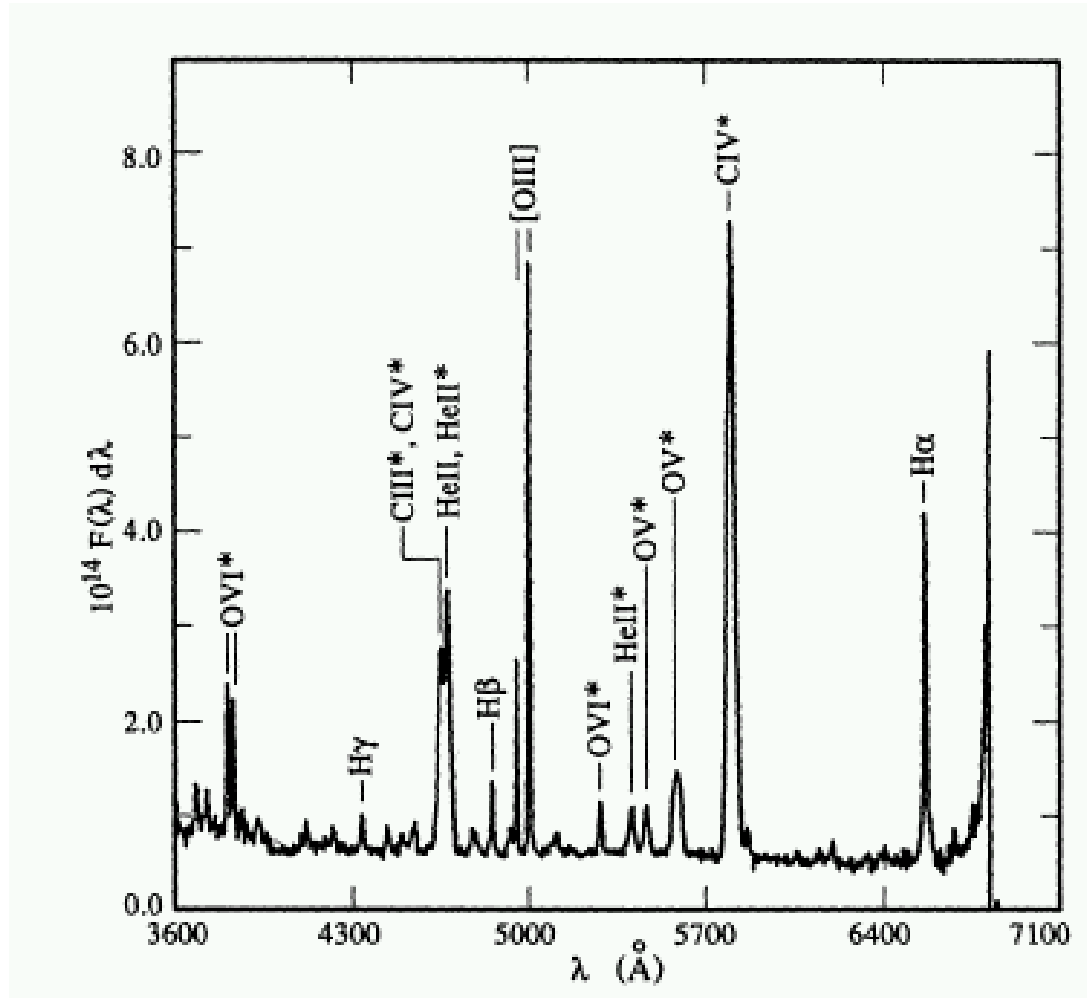
$$n_{ion}n_e\alpha_{rec} + \sum_{j>i} n_j A_{ji} = n_i \sum_{j<i} A_{ij}$$

Rekombinacija na nivo i

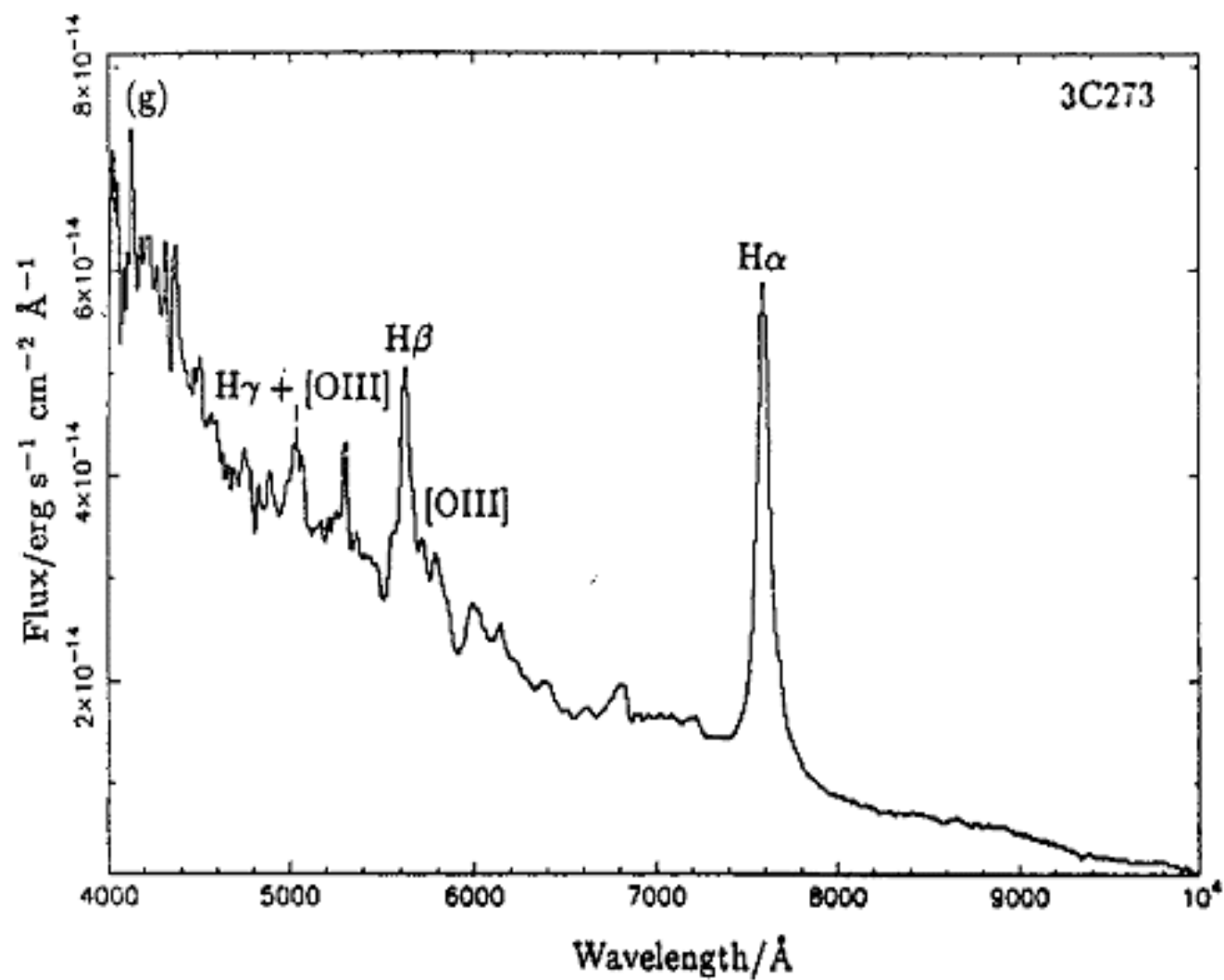
Kaskadna de-ekscitacija na nivo i

- Obratite pažnju, koncentracija jona će (uglavnom) zavisiti od nekog jonizujućeg polja zračenja! (**Tabla**)

Neki primeri ne-zvezdanih spektrara – planetarna maglina



Kvazar



Lajman-alfa šuma

