Teorija zvezdanih spektara -10-

1. Rešiti jednačinu prenosa zračenja izvedenu pod pretpostavkama Milne-Edingtonovog modela.

Milne-Edingtonov model, pretpostavlja da se linija i kontinuum formiraju u istim atmosferskim slojevima, pri čemu se linija formira i procesima termalne apsorpcije/emisije i procesima koherentnog i izotropnog rasejanja. Ovaj model pretpostavlja i da je odnos koeficijenta apsorpcije u liniji i koeficijenta apsorpcije u kontinuumu na jednoj frekvenciji konstantan na svim dubinama u atmosferi. Jednačina prenosa zračenja izvedena pod pretpostavkama Milne-Edingtonovog modela glasi:

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - L_\nu B_\nu(T) - (1 - L_\nu) J_\nu,$$

$$\eta_\nu = \frac{\kappa_\nu^{\mathrm{L}}}{\kappa^{\mathrm{c}}}, \qquad L_\nu = \frac{1 + \varepsilon \eta_\nu}{1 + \eta_\nu}, \qquad d\tau = d\tau^{\mathrm{c}} + d\tau_\nu^{\mathrm{L}}.$$

Za rešavanje gornje jednačine možemo koristiti Edingtonov metod, tj. da na jednačinu prenosa zračenja delujemo operatorom $\int_{-1}^{1} \cdots d\mu$, a zatim $\int_{-1}^{1} \cdots \mu d\mu$, tj. tražimo nulti i prvi moment jednačine prenosa zračenja. Specifični intenzitet je $I_\nu = I_\nu(\tau_\nu, \mu)$.

Da bismo rešili razmatranu jednačinu uvodimo sledeće pretpostavke: $\eta_\nu = \mathrm{const}$, $\varepsilon = \mathrm{const}$ i smatramo da je Plankova funkcija linearna funkcija optičke dubune u kontinuumu:

$$B_\nu(\tau) = a_\nu + p_\nu \tau^{\mathrm{c}} = a_\nu + b_\nu \tau_\nu, \qquad b_\nu = \frac{p_\nu}{1 + \eta_\nu}, \qquad \tau_\nu = \tau^{\mathrm{c}}(1 + \eta_\nu).$$

Iz gornjih pretpostavki jasno je da važi i $L_\nu = \mathrm{const}$. Sada za nulti moment jednačine prenosa zračenja dobijamo:

$$\frac{d}{d\tau_\nu} \int_{-1}^{1} I_\nu d\mu = \int_{-1}^{1} I_\nu d\mu - L_\nu B_\nu(T) \int_{-1}^{1} d\mu - (1 - L_\nu) J_\nu(\tau_\nu) \int_{-1}^{1} d\mu$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{1}{4} \frac{dF_\nu}{d\tau_\nu} = L_\nu (J_\nu - B_\nu).$$

Sa druge strane, za prvi moment jednačine prenosa zračenja imamo:

$$\frac{d}{d\tau_\nu} \int_{-1}^{1} I_\nu \mu^2 d\mu = \int_{-1}^{1} I_\nu \mu d\mu$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{1}{4} F_\nu(\tau_\nu).$$

Diferenciranjem prethodne jednačine po τ_ν dobijamo:

$$\frac{d^2 K_\nu}{d\tau_\nu^2} = \frac{1}{4} \frac{dF_\nu}{d\tau_\nu} = L_\nu (J_\nu - B_\nu).$$

Nepoznate su J_ν i K_ν. Sada koristimo I Edingtonovu aproksimaciju $J_\nu = 3K_\nu$ (pretpostavljamo da ova veza važi svuda u atmosferi) i dobijamo:

$$\frac{d^2 J_\nu}{d\tau_\nu^2} = 3L_\nu(J_\nu - B_\nu).$$

Sada koristimo pretpostavku linearnosti Plankove funkcije po optičkim dubunama i dobijamo:

$$\frac{d^2(J_\nu - B_\nu)}{d\tau_\nu^2} = 3L_\nu(J_\nu - B_\nu) = k^2(J_\nu - B_\nu), \qquad k = \sqrt{3L_\nu},$$

pa za rešenje dobijamo:

$$J_\nu - B_\nu = C_1 e^{-k\tau_\nu} + C_2 e^{k\tau_\nu},$$

$$J_\nu(\tau) = C_1 e^{-k\tau_\nu} + C_2 e^{k\tau_\nu} + a_\nu + b_\nu \tau_\nu.$$

Za određivanje konstanti koristimo uslove $\tau_\nu \to \infty,\ J_\nu \to B_\nu(T)$ (ima konačnu vrednost u LTR) tako da C_2 mora biti nula. Za površinu ($\tau_\nu = 0,\ I_\nu^-(\tau_\nu = 0, \mu) = 0$) imamo dve mogućnosti. Možemo iskoristiti II Edingtonovu aproksimaciju ili tačno Hopfovo rešenje na površini. Ako iskoristimo II Edingtonovu aproksimaciju $F_\nu(0) = 2J_\nu(0)$ dobijamo:

$$J_\nu(0) = C_1 + a_\nu = \frac{F_\nu(0)}{2}.$$

Iz:

$$\frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{1}{4}F_\nu, \qquad \frac{dJ_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{3}{4}F_\nu,$$

za $\tau_\nu = 0$ dobijamo:

$$F_\nu(0) = \frac{4}{3}\left(\frac{dJ_\nu}{d\tau_\nu}\right)_{\tau_\nu=0} = \frac{4}{3}(-kC_1 + b_\nu),$$

$$C_1 + a_\nu = \frac{F_\nu(0)}{2} = \frac{2}{3}(-kC_1 + b_\nu) \quad \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{2b_\nu - 3a_\nu}{3 + 2\sqrt{3L_\nu}}$$

$$\Rightarrow$$

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{2b_\nu - 3a_\nu}{3 + 2\sqrt{3L_\nu}}\ e^{-\sqrt{3L_\nu}\tau_\nu} + a_\nu + b_\nu\tau_\nu,$$

$$S_\nu(\tau_\nu) = B_\nu + (1 - L_\nu)\ \frac{2b_\nu - 3a_\nu}{3 + 2\sqrt{3L_\nu}}\ e^{-\sqrt{3L_\nu}\tau_\nu}.$$

Na sličan način, ukoliko iskoristimo tačno Hopfovo rešenje na površini $F_\nu(0) = \frac{4}{\sqrt{3}}J_\nu(0)$ dobijamo sledeće rešenje:

$$S_\nu(\tau_\nu) = B_\nu(T) + (1 - L_\nu)\ \frac{b_\nu - \sqrt{3}a_\nu}{\sqrt{3} + \sqrt{3L_\nu}}\ e^{-\sqrt{3L_\nu}\tau_\nu}.$$

Za $\tau_\nu \to \infty$ - dubina termalizacije: $\tau_\nu^{\mathrm{term}} \gtrsim \frac{1}{\sqrt{L_\nu}}$ važi $S_\nu \to B_\nu$. Najveće odstupanje je na $\tau_\nu = 0$. Ako se ne formira linija, imamo samo kontinuum, tada je $\eta_\nu = 0$ pa tako i $L_\nu = 1$

pa je $\tau_\nu^{\rm term} = 1$. Za vrlo jaku liniju $\eta_\nu \to \infty$ imamo $L_\nu = \varepsilon$ pa je $\tau_\nu^{\rm term} = 1/\sqrt{\varepsilon}$. Generalno, dubina termalizacije je veća od $1/\sqrt{p}$, gde je p verovatnoća da foton bude termalizovan. U tipičnim atmosferskim uslovima je $\varepsilon << 1$ pa do termalizacije dolazi na velikim optičkim dubinama za jake linije.

2. Odrediti remanentni fluks pri Milne-Edingtonovom modelu.

Izlazni fluks zračenja je dat kao (koristimo kao granični uslov tačno Hopfovo rešenje na površini):

$$F_\nu(0) = \frac{4}{\sqrt{3}} J_\nu(0) = \frac{4}{\sqrt{3}} \left(a_\nu + \frac{b_\nu - \sqrt{3} a_\nu}{\sqrt{3} + \sqrt{3 L_\nu}} \right) = \frac{4}{3} \, \frac{b_\nu + a_\nu \sqrt{3 L_\nu}}{1 + \sqrt{L_\nu}}.$$

Remanentni fluks je definisan kao:

$$r_\nu = \frac{F_\nu(0)}{F_{\rm c}(0)}.$$

$F_{\rm c}(0)$ možemo odrediti posmatrajući slučaj kada nema linija $\eta_\nu = 0$ ($\kappa_\nu^{\rm L} = 0$) odnosno $L_\nu = 1$ pa je i $b_\nu = p_\nu$:

$$F_{\rm c}(0) = \frac{4}{3} \, \frac{p_\nu + a_\nu \sqrt{3}}{2}.$$

Konačno dobijamo:

$$r_\nu = \frac{b_\nu + a_\nu \sqrt{3 L_\nu}}{1 + \sqrt{L_\nu}} \, \frac{2}{p_\nu + \sqrt{3} a_\nu}.$$

Sada možemo razmotriti neke specijalne slučajeve:

(a) Ako imamo čisto rasejanje u liniji ($\varepsilon = 0$):

$$r_\nu = \frac{\frac{p_\nu}{1+\eta_\nu} + a_\nu \sqrt{\frac{3}{1+\eta_\nu}}}{1 + \sqrt{\frac{1}{1+\eta_\nu}}} \, \frac{2}{p_\nu + \sqrt{3} a_\nu}, \qquad L_\nu = \frac{1}{1+\eta_\nu}.$$

Za slučaj jake linije (jezgro linije) $\eta_\nu \to \infty$ dobijamo da $r_\nu = 0$. Zaključujemo da je jezgro linije formirane čistim koherentnim i izotropnim rasejanjem potpuno tamno.

(b) Ako imamo čistu (termalnu) apsorpciju ($\varepsilon = 1$, $L_\nu = 1$) dobijamo:

$$r_\nu = \frac{\frac{p_\nu}{1+\eta_\nu} + a_\nu \sqrt{3}}{p_\nu + a_\nu \sqrt{3}}.$$

U slučaju jake linije (jezgro linije) $\eta_\nu \to \infty$ dobijamo:

$$r_\nu = \frac{1}{1 + \frac{p_\nu}{a_\nu \sqrt{3}}} \neq 0.$$

Spektralne linije mogu biti: rezonantne linije - polaze sa osnovnog stanja; subordinatne linije - odgovaraju prelazima između ekscitovanih stanja. Rezonantne linije su u principu jače i formiraju se pretežno rasejanjem dok se subordinatne linije formiraju pretežno pravom apsorpcijom (pretežno u uslovima LTR).

Linije formirane čistim rasejanjem ili čistom apsorpcijom ne samo da se razlikuju po r_ν, već i po ponašanju centar-limb. Ako iskoristimo rešenje jednačine prenosa (u opštem obliku - C_1 se razlikuje u zavisnosti da li je korišćeno tačno Hopfovo ili aproksimativno Edingtonovo rešenje):

$$S_\nu(\tau_\nu) = L_\nu B_\nu + (1 - L_\nu) J_\nu = B_\nu(T) + (1 - L_\nu) C_1 e^{-\sqrt{3L_\nu}\tau_\nu}, \qquad B_\nu(T) = a_\nu + b_\nu \tau_\nu,$$

imamo:

$$I(0,\mu) = \int_0^\infty S_\nu(t_\nu) e^{-t_\nu/\mu} \frac{dt_\nu}{\mu} = a_\nu + b_\nu \mu + (1 - L_\nu) C_1 \frac{1}{1 + \mu\sqrt{3L_\nu}}$$

$$\Rightarrow$$

$$I(0,\mu) = a_\nu + b_\nu \mu + \frac{1 - L_\nu}{1 + \mu\sqrt{3L_\nu}} \, \frac{b_\nu - a_\nu\sqrt{3}}{\sqrt{3}(1 + \sqrt{L_\nu})}.$$

Za kontinuum imamo ($\eta_\nu = 0,\ L_\nu = 1$)

$$I_\mathrm{c}(0,\mu) = a_\nu + p_\nu \mu, \qquad L_\nu = 1, \qquad b_\nu = p_\nu.$$

Posmatrajmo sada dva slučaja:

(a) $\varepsilon = 0,\ L_\nu = \frac{1}{1+\eta_\nu}$

Za jaku liniju (jezgro linije) imamo $\eta_\nu \to \infty$ pa je $I_\nu(0,\mu) = 0,\ \forall \mu$. Izlazni intenzitet zračenja jezgru linije je nula za svaki pravac.

(b) $\varepsilon = 1,\ L_\nu = 1$

$$I_\nu(0,\mu) = a_\nu + \frac{p_\nu}{1 + \eta_\nu}\, \mu$$

Za $\mu \to 0$ imamo da $I_\nu(0,\mu) \to I_\mathrm{c}(0,\mu)$ - linija na rubu nestaje (utapa se u kontinuum) odnosno od centra ka rubu linija slabi!

3. Milne-Edingtonov model pretpostavlja da je kontinuum čisto termalni $j^{\mathrm{c}} = \kappa^{\mathrm{c}} B_\nu(T)$ odnosno $\kappa^{\mathrm{c}} = \kappa^{\mathrm{term}}$. Razmotriti slučaj kada se uzme u obzir i rasejanje u kontinuumu (npr. Tomsonovo rasejanje može dati doprinos u kontinuumu).

Kada se uzme u obzir i rasejanje u kontinuumu imamo: $\kappa^{\mathrm{c}} = \kappa^{\mathrm{term}} + \kappa^{\mathrm{ras}}$. Pretpostavimo da se od ukupne apsorbovane energije u kontinuumu deo ρ raseje[1]. Imamo:

$$\kappa^{\mathrm{ras}} = \rho \kappa^{\mathrm{c}} \;\Rightarrow\; j^{\mathrm{ras}} = \rho \kappa^{\mathrm{c}} J_\nu,$$

$$\kappa^{\mathrm{term}} = (1-\rho)\kappa^{\mathrm{c}} \;\Rightarrow\; j^{\mathrm{term}} = (1-\rho)\kappa^{\mathrm{c}} B_\nu(T).$$

Na sličan način kao i pri izvođenju jednačine prenosa zračenja za slučaj Milne-Edingtonovog modela može se izvesti i jednačina prenosa u ovom slučaju:

$$\mu \frac{dI_{\nu\mu}}{\rho^V dz} = -\kappa_\nu^{\mathrm{ukupno}} I_{\nu\mu} + j_\nu^{\mathrm{ukupno}} = -(\kappa^{\mathrm{term}} + \kappa^{\mathrm{ras}} + \kappa_\nu^{\mathrm{term}} + \kappa_\nu^{\mathrm{ras}}) I_{\nu\mu} + j^{\mathrm{term}} + j^{\mathrm{ras}} + j_\nu^{\mathrm{term}} + j_\nu^{\mathrm{ras}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\mu \frac{dI_{\nu\mu}}{d\tau_\nu} = I_{\nu\mu} - L_\nu B_\nu(T) - (1 - L_\nu) J_\nu,$$

$$\eta_\nu = \frac{\kappa_\nu^L}{\kappa^c}, \qquad L_\nu = \frac{1 - \rho + \varepsilon \eta_\nu}{1 + \eta_\nu}.$$

Ovu jednačinu smo sveli na *standardni* oblik uvodeći novu skalu optičke dubine i možemo je rešiti Edingtonovom metodom uz pretpostavke kao i ranije ($\eta_\nu, \varepsilon = \mathrm{const}$ i $B_\nu(\tau^{\mathrm{c}}) = a_\nu + p_\nu \tau^{\mathrm{c}}$) sa tim što još dodajemo i pretpostavku da je $\rho = \mathrm{const}$. Ako iskoristimo tačno Hopfovo rešenje (kao i ranije) dobijamo isti oblik rešenje kao i u prethodnom slučaju samo sa različitim vrednostima konstanti:

$$J_\nu = B_\nu(\tau) + \frac{b_\nu - \sqrt{3} a_\nu}{\sqrt{3} + \sqrt{3L_\nu}}\; e^{-\sqrt{3L_\nu}\tau_\nu}.$$

Izlazni fluks zračenja na frekvenciji u liniji je:

$$F_\nu(0) = \frac{4}{3}\; \frac{b_\nu + a_\nu \sqrt{3L_\nu}}{1 + \sqrt{L_\nu}}.$$

U kontinuumu je $\eta_\nu = 0$, $L_\nu = 1 - \rho$:

$$F_{\mathrm{c}}(0) = \frac{4}{3}\; \frac{p_\nu + a_\nu \sqrt{3(1-\rho)}}{1 + \sqrt{1-\rho}}.$$

Remanentni fluks možemo odrediti kao i ranije:

$$r_\nu = \frac{F_\nu(0)}{F_{\mathrm{c}}(0)} = \frac{b_\nu + a_\nu \sqrt{3L_\nu}}{1 + \sqrt{L_\nu}}\; \frac{1 + \sqrt{1-\rho}}{p_\nu + a_\nu \sqrt{3(1-\rho)}}.$$

[1] Biti oprezan kako sa ρ takođe obeležavamo i gustinu. Iz tog razloga ćemo nadalje gustinu obeležavati sa ρ^V.

Ukoliko bismo u kontinuumu imali samo rasejanje $\rho = 1$ dobijamo:

$$L_\nu = \frac{\varepsilon \eta_\nu}{1+\eta_\nu}, \qquad r_\nu = \frac{\frac{p_\nu}{1+\eta_\nu} + a_\nu \sqrt{\frac{3\varepsilon\eta_\nu}{1+\eta_\nu}}}{p_\nu \left(1 + \sqrt{\frac{\varepsilon\eta_\nu}{1+\eta_\nu}}\right)}.$$

Sada ćemo razmotriti specijalne slučajeve:

(a) $\varepsilon = 0$

$$r_\nu = \frac{1}{1+\eta_\nu} < 1, \qquad \eta_\nu > 1, \qquad \text{apsorpcija.}$$

(b) $\varepsilon = 1$

$$r_\nu = \frac{\frac{1}{1+\eta_\nu} + \frac{a_\nu}{p_\nu}\sqrt{\frac{3}{1+1/\eta_\nu}}}{1 + \sqrt{\frac{1}{1+1/\eta_\nu}}}.$$

Za jaku liniju (odnosno njeno jezgro) $\eta_\nu \to \infty$ pa dobijamo:

$$r_\nu \to \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{a_\nu}{p_\nu},$$

odnosno r_ν teži konačnoj vrednosti, a ona zavisi od koeficijenata u izrazu za Plankov zakon - zavisi od gradijenta Plankove funkcije. U tom smislu može da se pojavi i apsorpcija i emisija. Ovaj mehanizam se naziva Šusterov.