

Prvi Domaći zadatak

TZS

18. novembar 2025.

U izradi domaćeg zadatka se možete konsultovati medjusobno i sa mnom.
Svaki domaći koji predajete, međutim, mora biti samostalno napisan.

Rok za predaju ovog domaćeg zadatka je petak 31.12.2025. 23:59.

1 Setup i atmosferski model

Cilj ovog zadatka je da sintetizujete profil spektralne linije u lokalnoj termo-dinamičkoj ravnoteži (LTE) iz datog atmosferskog modela (u ovom slučaju poznatog FALC modela iz rada Averett et al. 1993). Izračunaćete populacije atomskih nivoa koristeći Boltzmanovu i Sahinu jednačinu, zatim neprozračnost i funkciju izvora, i konačno rešiti JPZ. U procesu ćete takođe implementirati realističnu neprozračnost u kontinuumu.

Koristite dati jednodimenzionalni atmosferski model dat u fajlu `falc71.dat`. Učitajte ga pomoću `numpy.loadtxt` ili slične funkcije. Model ima više kolona, od kojih nam trebaju:

- 0: Log optičke dubine u kontinumu na 500 nm: $\log \tau_{500}$
- 1: Visina z u cm
- 2: Temperatura $T(z)$ u K
- 3: Pritisak gasa $P_{\text{gas}}(z)$ u dyn/cm^2
- 4: Elektronski pritisak $n_e(z)$ u dyn/cm^2

Obratite pažnju na jedinice!

2 Zadatak

2.1 Korak 1: Jonizacija vodonika

Kao uvod, iskoristite Sahinu jednačinu **samo za vodonik** (kao na času) da izračunate jonizaciono stanje vodonika kao funkciju visine. Iz toga ćete dobiti i elektronsku koncentraciju. Uporedite dobijene rezultate sa vrednostima iz modela (plotujte u log skali!).

Sahina jednačina glasi (uvek proverite ovo):

$$\frac{n_{j+1}n_e}{n_j} = \frac{2Z_{j+1}}{Z_j} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{E_j}{kT} \right). \quad (1)$$

Ovde je Z particiona funkcija. U dubokim slojevima dobićete dobro slaganje sa modelom, ali u višim slojevima naši rezultati pokazuju pad elektrona ispod vrednosti datih u FALC modelu.

Zašto se ovo dešava?

Napomena: još uvek ne objašnjavamo zašto su naši rezultati iznad modela u najvišim slojevima.

2.2 Korak 2: Dodavanje magnezijuma kao dodatnog donora elektrona

Da bismo popravili rezultate u srednjoj atmosferi, uvodimo dodatni element: magnezijum (pomnožićem njegovu zastupljenost sa 2 da obračunamo i doprinos gvožđa, umesto da rešavamo problem za još jedan element).

Ponovite Saha proračun za sistem H i Mg. Ovo sada zahteva rešavanje **nelinearnog sistema jednačina** pomoću, na primer, `scipy.optimize.fsolve`.

Koristite sledeće parametre:

- Energija jonizacije $\text{Mg I} \rightarrow \text{Mg II}$: 7.646 eV
- Energija jonizacije $\text{Mg II} \rightarrow \text{Mg III}$: 15.035 eV
- Zastupljenost Mg: 3.8×10^{-5} **Pomnožiti sa 2 da se uračuna i Fe**
- Particione funkcije: $Z_{\text{Mg I}} = 2$, $Z_{\text{Mg II}} = 1$, $Z_{\text{Mg III}} = 1$

Ponovo izračunajte elektronsku gustinu. Trebalo bi da dobijete znatno bolje slaganje sa modelom. Možete dodatno da varirate zastupljenost Mg ili

particionu funkciju za Mg+ da dobijete još bolje rešenje.

Napomena: Često je dovoljno uzeti samo Mg I–Mg II i zanemariti Mg III.

2.3 Korak 3: Nепрозрачност и интензитет у континууму

Pre sinteze profila linije potrebno je odrediti **nепрозрачност у континууму** и онда решити JPZ за континуум.

Dominantni izvori непрозрачности у видљивом домену су негативни јон водоника H⁻ и нутрални водоник. Непрозрачност у континууму дефинишејмо дефинишејмо као:

$$\chi_{\lambda}^{\text{cont}} = \chi_{\lambda}^{\text{H}^-} + \chi_{\lambda}^{\text{H}}. \quad (2)$$

Да бисте обрачунали ова два доприноса, потребно је да искористите једначина које се појављују у књизи Gray-а и описују непрозрачност негативног јона водоника и нутралног водоника. Ако немате приступ књизи, јавите се мене.

Оптичка дубина у континууму

Као и увек:

$$\tau_{\lambda}^{\text{cont}}(z) = \int_z^{\infty} \chi_{\lambda}^{\text{cont}}(z') dz'. \quad (3)$$

У дискретној форми:

$$\tau_{\lambda,i}^{\text{cont}} = \tau_{\lambda,i+1}^{\text{cont}} + \chi_{\lambda,i}^{\text{cont}}(z_{i+1} - z_i). \quad (4)$$

Као и за линије предпоставићемо LTR за функцију извора, па нам не треба експлицитно кофцијент емисије.

$$S_{\lambda}^{\text{cont}} = B_{\lambda}(T). \quad (5)$$

Решавање JPZ

Као и за линију, користимо формално решење:

$$I_{\lambda,i} = I_{\lambda,i+1} e^{-(\tau_{i+1}-\tau_i)} + S_{\lambda,i} (1 - e^{-(\tau_{i+1}-\tau_i)}). \quad (6)$$

Na dnu atmosfere:

$$I_\lambda(\tau_{\max}) = B_\lambda(T(\tau_{\max})). \quad (7)$$

Na kraju prikažite kontinualni intenzitet i proverite da li ima fizički smisao.

2.4 Korak 3: Populacije nivoa

Izaberite spektralnu liniju koju ćete sintetisati. Ne mora biti linija vodonika ili magnezijuma, mada je lakše uzeti neku od njih. Na primer, Mg I b2 linija na 517.2 nm.

Potrebni podaci (energije nivoa, statističke težine $g = 2J + 1$) mogu se preuzeti sa:

https://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/lines_form.html

Bolcmanova formula za populacije nivoa glasi:

$$n_{j,i} = n_j g_i \frac{\exp(-E_i/kT)}{Z_j(T)}. \quad (8)$$

Prikažite promenu nivoa populacija sa visinom.

2.5 Korak 4: Opacitet linije i izvorni funkcional

U LTE važi $S_\nu = B_\nu(T)$. Fokusiramo se na opacitet:

$$\chi_\nu = (n_l B_{lu} - n_u B_{ul}) \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu). \quad (9)$$

Sa NIST baze preuzmite A_{ul} i iz njega izvedite B_{ul} i B_{lu} uz relacije sa časa.

2.6 Korak 6: Profil linije

Sada određujemo zavisnost od frekvencije/talasne dužine. Izaberite opseg talasnih dužina i za svaku dubinu računajte:

- Doplerovu širinu iz mase i temperature
- Damping frekvenciju (možete uzeti $\Gamma = A_{ul}$)
- Bezdimenzionalni pomak $u = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu_D$
- Damping parametar $a = \Gamma/(4\pi\Delta\nu_D)$
- Voigtov profil $\phi(\nu)$

Zatim izračunajte opacitet linije:

$$\chi_\nu = (n_l B_{lu} - n_u B_{ul}) \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu). \quad (10)$$

2.7 Korak 7: Optička dubina linije i izvorni funkcional

Integracijom opaciteta dobijamo optičku dubinu linije. Izvorni funkcional u LTE je $B_\nu(T)$.

Ukupna optička dubina je zbir kontinualne i linijske optičke dubine.

Prikažite $S_\lambda(\tau_\lambda)$ za više talasnih dužina radi provere.

2.8 Korak 8: Formalno rešenje jednačine prenosa

Radiativni prenos glasi:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu. \quad (11)$$

Koristimo formalno rešenje:

$$I(\tau_i) = I(\tau_{i+1})e^{-(\tau_{i+1}-\tau_i)} + S(\tau_i) \left(1 - e^{-(\tau_{i+1}-\tau_i)}\right). \quad (12)$$

Na dnu atmosfere:

$$I_\nu(\tau_{\max}) = B_\nu(T(\tau_{\max})). \quad (13)$$

Prikažite emergentni spektar kao funkciju talasne dužine.

2.9 Diskusija

Kada sve proradi, možete eksperimentisati:

- promenom donjeg nivoa,
- uključivanjem sudarnog proširenja,
- uvođenjem brzina radi linijske asimetrije,
- izborom različitih atomskih vrsta,
- promenom atmosferskog modela.

3 Predaja

- Kratak izveštaj (cca 5 strana) sa metodologijom i grafikonom.
- Rok: 31. decembar 2025. u 23:59.
- Python kod (opciono, samo ako nešto ne radi).