

Teorija Zvezdanih Spektara

Lekcija 8: Ne-Siva Atmosfera u Ravnoteži Zračenja

Ivan Milić (AOB / MATF)

25/11/2023

Šta nam je ideja?

- Znamo / zadajemo ukupnu energiju koju zvezda proizvodi / izrači , tj. ukupni **fluks**.
- Znamo / zadajemo i njenu površinsku gravitaciju / hemijski sastav
- **Tražimo strukturu (stratifikaciju) atmosfere ($T(z)$) koja zadovoljava neke** pretpostavke.
- Za nas su to:

Jednačina Prenosa

Ravnoteža Zračenja

$$\mu \frac{dI_\lambda}{dz} = -\chi_\lambda I_\lambda + j_\lambda$$
$$\int_0^\infty \chi_\lambda S_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \chi_\lambda J_\lambda d\lambda$$

$$S_\lambda = B_\lambda$$

$$\chi_\lambda = f(T, p; \lambda)$$

LTR

Specifičan oblik
neprozračnosti

Hajde da prodiskutujemo ove pretpostavke

- Šta od ovih pretpostavki može da se “slomi” i kako?
- Da li smo pokrili sve od ovih pretpostavki / uslova na našim časovima do sada?
- 3-4 minuta samostalan rad i diskusija

Jednačina Prenosa

Ravnoteža Zračenja

$$\mu \frac{dI_\lambda}{dz} = -\chi_\lambda I_\lambda + j_\lambda$$
$$\int_0^\infty \chi_\lambda S_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \chi_\lambda J_\lambda d\lambda$$

$$S_\lambda = B_\lambda$$

$$\chi_\lambda = f(T, p; \lambda)$$

LTR

Specifičan oblik
neprozračnosti

Jednačina prenosa zračenja – uvodni časovi

- **Uvek važi.** Jednačina prenosa zračenja je Bolcmanova jednačina za fotone i ona prosto opisuje kako se intenzitet menja.
- (U specijalnim slučajevima, može da ima drugačiji oblik)

$$\mu \frac{dI_\lambda}{dz} = -\chi_\lambda I_\lambda + j_\lambda$$
$$\int_0^\infty \chi_\lambda S_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \chi_\lambda J_\lambda d\lambda$$
$$S_\lambda = B_\lambda$$
$$\chi_\lambda = f(T, p; \lambda)$$

Ravnoteža zračenja – prošli čas

- Ravnoteža zračenja **ne mora da važi**. Mi smo pretpostavili da se energija prenosi samo zračenjem jer tako ne moramo da uvodimo druge fizičke procese.
- Konvekcija, talasi, u nekim zvezdama i konduktivni prenos... Moderni 3D modeli zvezdanih atmosfera sadrže sve ove druge procese i **ne moraju** da se oslanjaju na RZ.

$$\mu \frac{dI_\lambda}{dz} = -\chi_\lambda I_\lambda + j_\lambda$$

$$\int_0^\infty \chi_\lambda S_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \chi_\lambda J_\lambda d\lambda$$

$$S_\lambda = B_\lambda$$
$$\chi_\lambda = f(T, p; \lambda)$$

Obratiti pažnju!

- Promaklo je i meni, ali:
- U sivoj atmosferi:

$$S = J$$

- U ne-sivoj atmosferi:

$$\int_0^\infty \chi_\lambda J_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \chi_\lambda S_\lambda d\lambda$$

Odakle ovo?

Pod po kojim
pretpostavkama
smo izveli ovaj izraz
za ravnotežu
zračenja?

(Tabla?)

LTR – uvodni časevi

- Lokalna Termodinamička Ravnoteža pretpostavlja da funkcija izvora u nekoj tački ima zavisnost samo od temperature i talasne dužine.
- Ipak, funkcija izvora zavisi, samim tim od dubine (jer T zavisi od dubine), pa je intenzitet rešenje JPZ. **LTR ne mora da važi!**

$$\mu \frac{dI_\lambda}{dz} = -\chi_\lambda I_\lambda + j_\lambda$$
$$\int_0^\infty \chi_\lambda S_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \chi_\lambda J_\lambda d\lambda$$
$$\boxed{S_\lambda = B_\lambda}$$
$$\chi_\lambda = f(T, p; \lambda)$$

Neprozračnost – 4. čas

- Uvek mora da postoji **neka zavisnost**.
- Ista zavisi od toga koje procese uzimamo u obzir pri računanju neprozračnosti.
- Standardni krivci: Neutralni H, H-, Rejljevo i Tomsonovo rasejanje, b-f i f-f na ostalim česticama...

$$\mu \frac{dI_\lambda}{dz} = -\chi_\lambda I_\lambda + j_\lambda$$
$$\int_0^\infty \chi_\lambda S_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \chi_\lambda J_\lambda d\lambda$$
$$S_\lambda = B_\lambda$$

$$\chi_\lambda = f(T, p; \lambda)$$

Siva Atmosfera

- Pretpostavljamo da se struktura atmosfere i prenos energije mogu opisati **jednom istom srednjom neprozračnošću**.
- Sasvim je ok odabrati jednu referentnu talasnu dužinu da predjemo iz visine u optičku dubinu
- Ali nema garancije da će ta ista optička dubina zaista odgovarati svim momentima jednačine prenosa zračenja.
- Zato je siva atmosfera **aproksimacija!**
- Ona opisuje kompletan prenos energije pa je: $S = B = \sigma T^4$

Analitički modeli Sivih Atmosfera

$$S(\tau) = F(\tau + \frac{1}{2})$$

Švarcšild-Šusterovo rešenje

LTR

$$T^4(\tau) = T_{ef}^4(\tau + 1/2)$$

E-B
relacija

Limb darkening

$$\frac{I(0, \mu)}{I(0, 1)} = \frac{2}{3}(\mu + \frac{1}{2})$$

$$I^{SS}(0, 0) = 0.33 I(0, 1)$$

$$S(\tau) = \frac{3}{4}F(\tau + \frac{2}{3})$$

Eddington-ovo rešenje

LTR

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4}T_{ef}^4(\tau + \frac{2}{3})$$

$$T = T_{ef} \text{ na } \tau = 2/3$$

E-B
relacija

Limb darkening

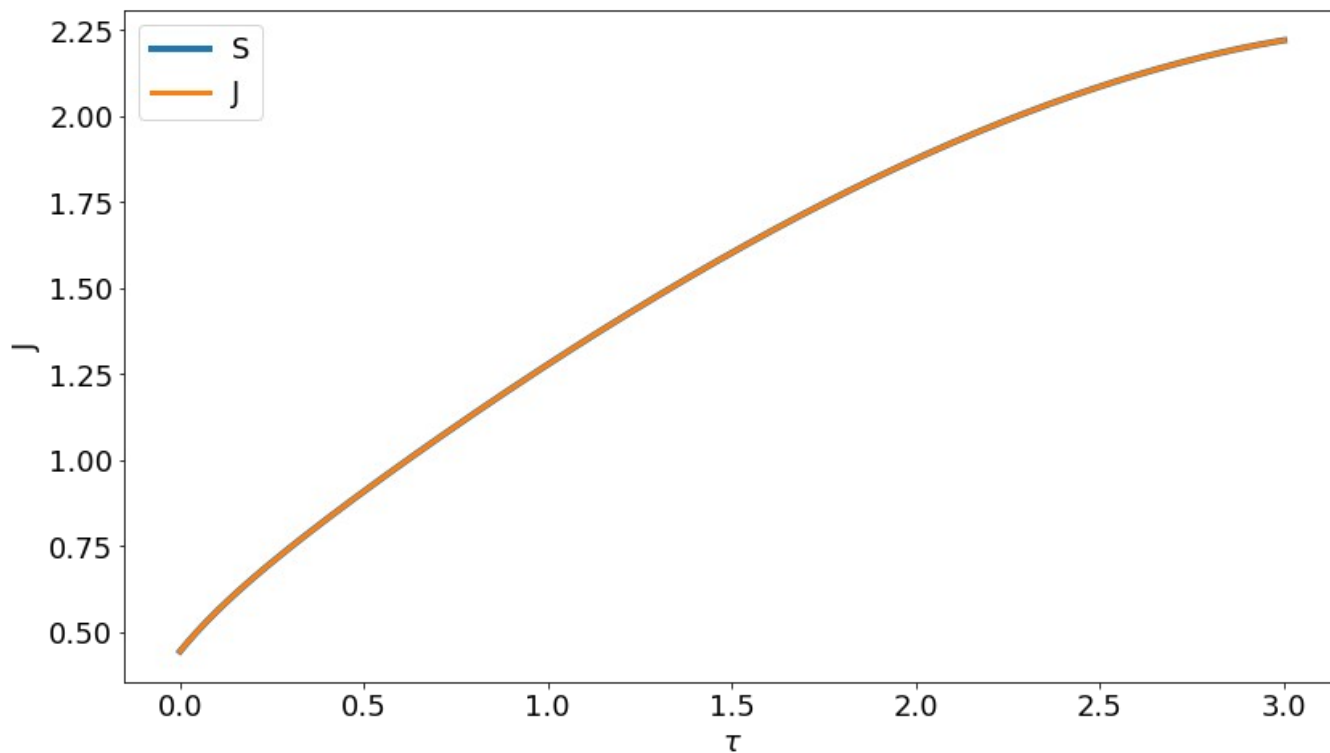
$$\frac{I(0, \mu)}{I(0, 1)} = \frac{3}{5}(\mu + \frac{2}{3})$$

$$I^{Ed}(0, 0) = 0.40 I(0, 1)$$

Numeričko rešenje sive atmosfere u RZ

- Dobijeno iterativnim rešavanjem:

$$J(\tau) = \Lambda_\tau[S] = \int_0^\infty S(t) E_1(|\tau - t|) dt$$
$$S(\tau) = J(\tau)$$

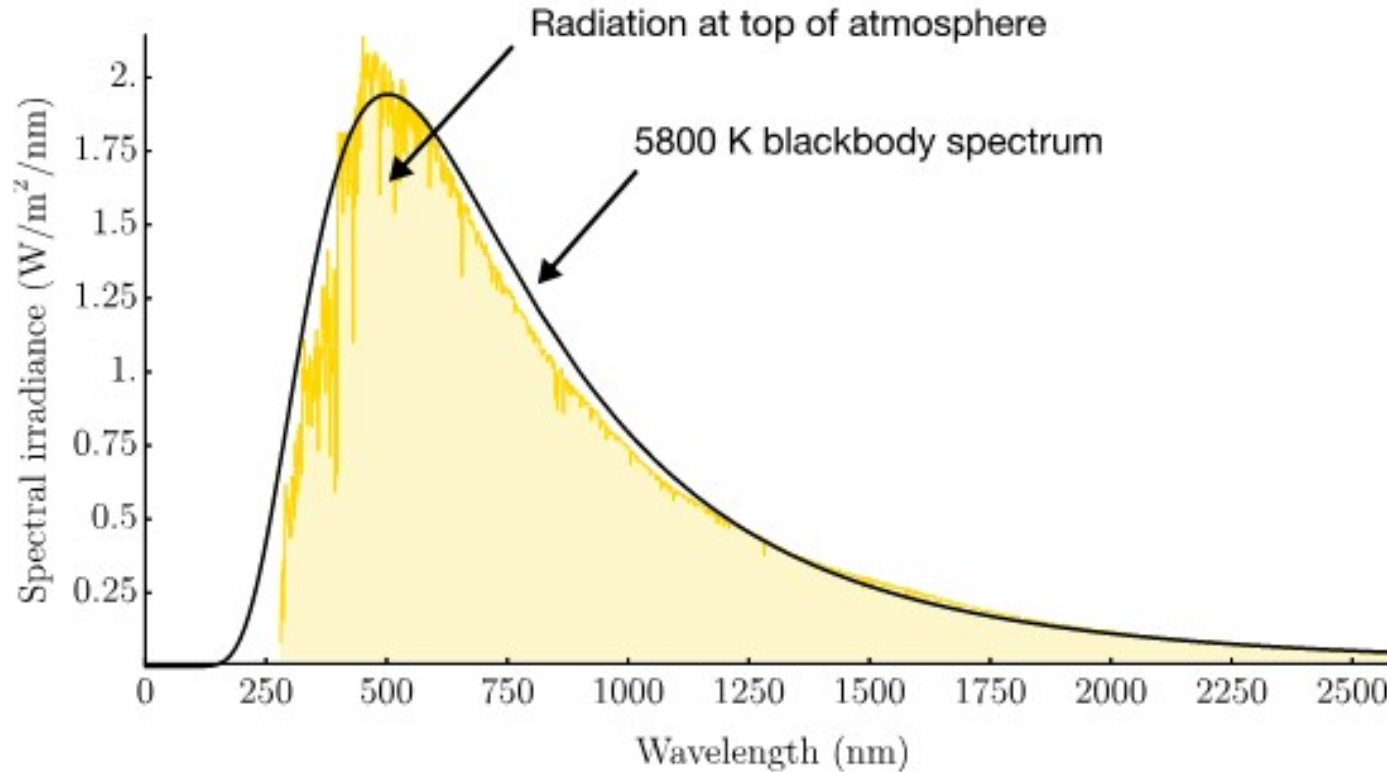


Kviz pitanje:

- Kakav je izlazni spektar sive atmosfere?

Kviz pitanje:

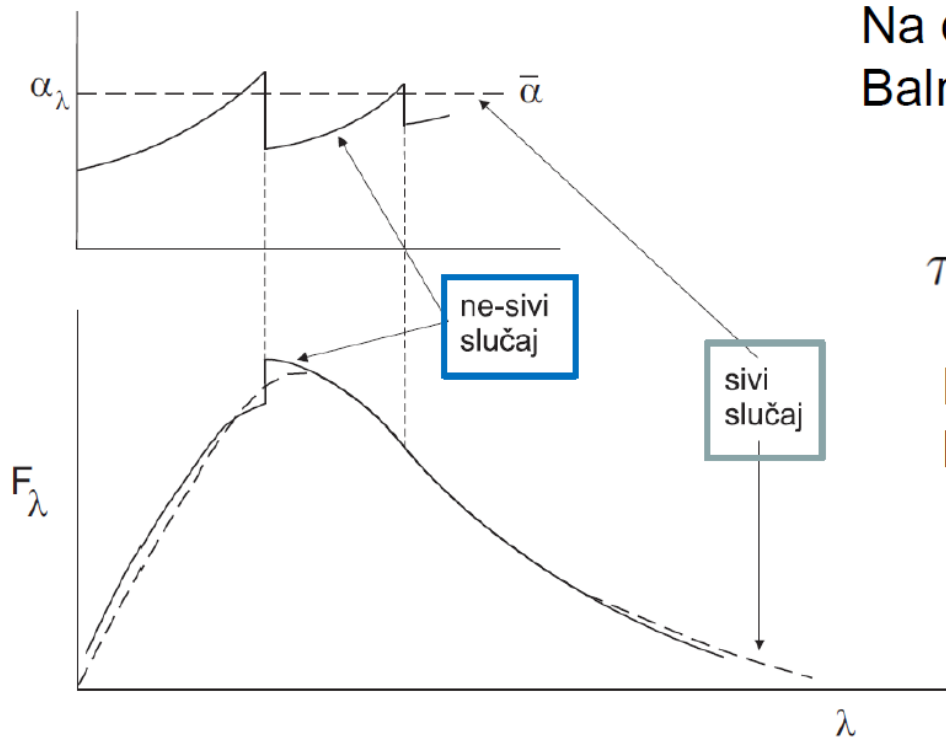
- Kakav je izlazni spektar sive atmosfere? **Spektar apsolutno crnog tela na $T = T_{\text{eff}}$**



Šta možemo bolje / dalje?

- Pretpostavimo da Eddingtonova aproksimacija važi: $F = S$ ($\tau = 2/3$)

Ako koeficijent apsorpcije zavisi od λ , optička dubina $\tau_\lambda = 2/3$ odgovaraće različitim geometrijskim dubinama.



Na dugotalasnoj strani
Balmerovog diskontinuiteta

$$\chi_\lambda^+ < \chi \quad \Rightarrow \quad h^+ > h$$
$$\tau_\lambda = \tau = 2/3 \quad \Rightarrow \quad T(h^+) > T(h)$$

Na kratkotalasnoj strani
Balmerovog diskontinuiteta

$$\chi_\lambda^- > \chi \quad \Rightarrow \quad h^- < h$$
$$T(h^-) < T(h)$$

Šta možemo bolje / dalje?

- Očigledno, da **relaksiramo pretpostavku sive atmosfere**.
- Drugo pitanje koje se prirodno nameće je: **Kakva je raspodela temperature po visini?**

Atmosfera u hidrostatičkoj ravnoteži

- Vratimo se na sivu atmosferu. (Ubedićemo se da ovo važi i za ne-sivu atmosferu).
- **Nemamo** način da prizovemo skalnu visinu pošto smo sve izračunali u skali optičke dubine.
- Treba nam jedna dodatna pretpostavka – hidrostatička ravnoteža.

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g; \quad | \times \frac{-1}{\chi}$$

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{\rho}{\chi} g = \frac{g}{\kappa}$$

$$\chi = \chi(p, T)$$

$$T(z) = ?; p(z) = ?$$

Računanje atmosferske strukture.

- Za ovaj proces su nam potrebni: $T(\tau), p_0 = p(\tau = 0), g$

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{\rho}{\chi} g$$

$$\rho_0 = f(T_0, p_0)$$

$$\chi_0 = f(T_0, p_0)$$

$$p_1 = p_0 + \frac{dp}{d\tau}(\tau_1 - \tau_2) \rightarrow p_1, \rho_1$$

Kada znamo ova dva,
možemo dalje da
integralimo na dole
itd..

Numerička integracija (može da
bude i komplikovanija, ako želimo
da preciznije izračunamo izvod)

Računanje doprinosa svih
relevantnih procesa

Mapiranje optičke dubine na z osu

- Sad znamo pritisak svuda po dubini, a usput smo odredili i neprozračnost u svakoj tački.
- Možemo da izračunamo z (numerički) kao:

$$\tau_i - \tau_{i-1} = (z_{i-1} - z_i) \frac{\chi_i + \chi_{i-1}}{2}$$

- Krenemo od bilo koje granice (npr $z=0$ za $i = i_{\max}$) i računamo u suprotnom pravcu.
- Opet, možemo koristiti i neku komplikovaniju šemu za integraciju / diferenciranje
- Ovo važi **za bilo koju talasnu dužinu na kojoj znamo raspodelu temperature** $T(\tau_\lambda)$

Kako izračunati taj “srednji” koeficijent neprozračnosti?

$$\frac{dH_\nu}{\kappa_\nu \rho dh} = J_\nu - S_\nu \quad \frac{dH}{\kappa \rho dh} = 0$$

$$\frac{dK_\nu}{\kappa_\nu \rho dh} = H_\nu \quad \frac{dK}{\kappa \rho dh} = H$$

Imajte u vidu notaciju na ovom slajdu! Pojavljuju se maseni koeficijent apsorpcije i frekvencija

- Srednji $\bar{\kappa}$ po fluksu ili **Čandrasekarov** srednji koeficijent

$$\frac{d \int K_\nu d\nu}{\rho dh} = \int \kappa_\nu H_\nu d\nu = \frac{dK}{\rho dh} = \bar{\kappa} H$$

$$\bar{\kappa} = \frac{\int_0^\infty \kappa_\nu H_\nu d\nu}{H}$$

$$\frac{dp_{\text{zr}}}{\rho dh} = \frac{4\pi}{c} \frac{dK}{\rho dh} = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \kappa_\nu H_\nu d\nu \quad \frac{dp_{\text{zr}}}{d\tau} = \frac{4\pi}{c} H = \frac{\pi F}{c} = \frac{\mathcal{F}}{c} = \frac{\sigma T_{\text{ef}}^4}{c}$$

- Plankov** srednji koeficijent

$$\bar{\kappa}_P = \frac{\int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu(T) d\nu}{B(T)}$$

- Roselandov** srednji koeficijent

$$\frac{1}{\rho} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dK_\nu}{dh} d\nu = \int_0^\infty H_\nu d\nu = H = \frac{1}{\rho} \frac{1}{\bar{\kappa}_R} \frac{dK}{dh}$$

$$\frac{1}{\bar{\kappa}_R} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dK_\nu}{dh} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dK_\nu}{dh} d\nu}$$

$$\frac{1}{\bar{\kappa}_R} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}$$

Ne-siva atmosfera

- Ako želimo da dozvolimo da koeficijent apsorpcije zavisi od talasne dužine situacija se komplikuje.
- Glavni problem je što moramo da izračunamo konkretne vrednosti neprozračnosti, da bismo rešili JPZ.
- Model mora da zadovolji:

$$\mu \frac{dI_\lambda}{dz} = -\chi_\lambda I_\lambda + j_\lambda$$

$$\int_0^\infty \int_{-1}^1 I_\lambda(\mu) \mu d\mu d\lambda = \sigma T_{\text{eff}}^4 = \text{const}$$

$$\int_0^\infty B_\lambda d\lambda = \int_0^\infty J_\lambda d\lambda$$

Procedura temperaturske korekcije

- Krenemo od neke nulte aproksimacije (npr siva atmosfera)

$$\int_0^{\infty} \chi_{\lambda} B_{\lambda}(T_0) d\lambda \neq \int_0^{\infty} \chi_{\lambda} J_{\lambda} d\lambda$$

$$\int_0^{\infty} \chi_{\lambda} B_{\lambda}(T_0 + \Delta T) d\lambda = \int_0^{\infty} \chi_{\lambda} J_{\lambda} d\lambda$$

$$B_{\lambda}(T_0 + \Delta T) = B_{\lambda}(T_0) + \left(\frac{dB_{\lambda}}{dT} \right)_{T_0} \Delta T$$

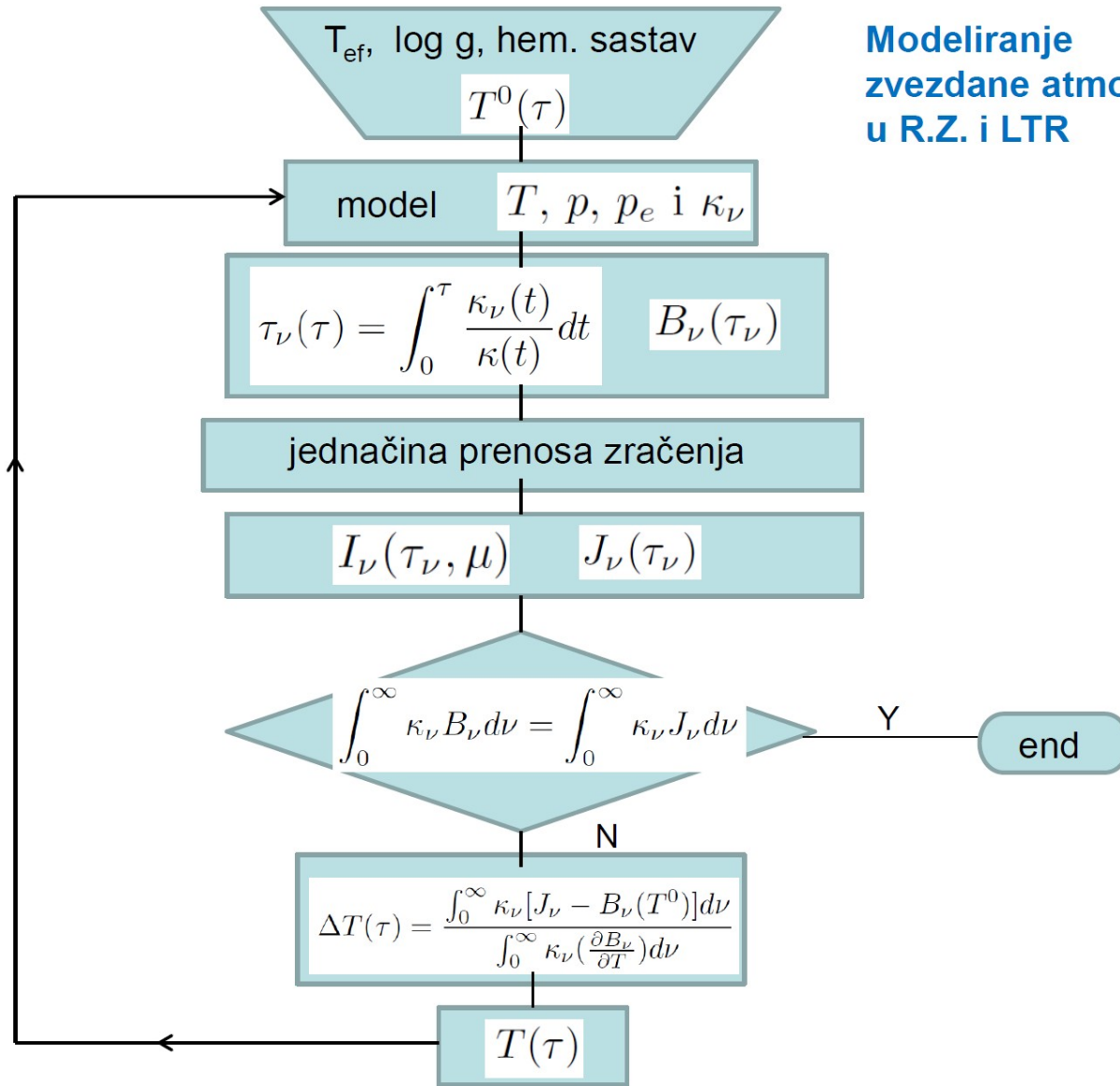
$$\int_0^{\infty} \chi_{\lambda} B_{\lambda}(T_0) d\lambda + \Delta T \int_0^{\infty} B'_{\lambda} \chi_{\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} \chi_{\lambda} J_{\lambda} d\lambda$$

$$\Delta T(\tau) = \frac{\int_0^{\infty} \chi_{\lambda} [J_{\lambda} - B_{\lambda}] d\lambda}{\int_0^{\infty} \chi_{\lambda} \frac{dB_{\lambda}}{dT} d\lambda}$$

Konačna šema

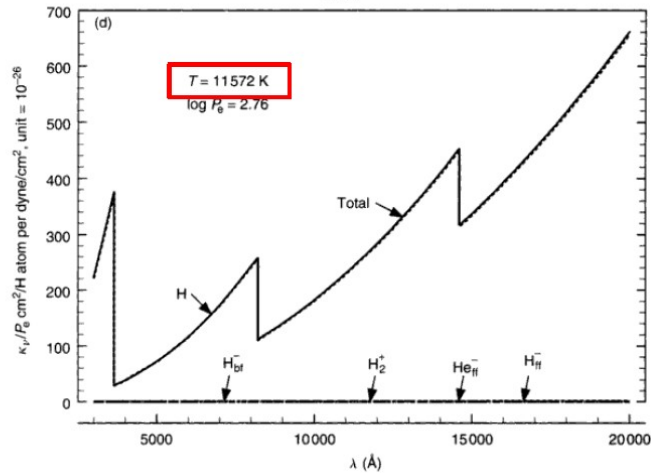
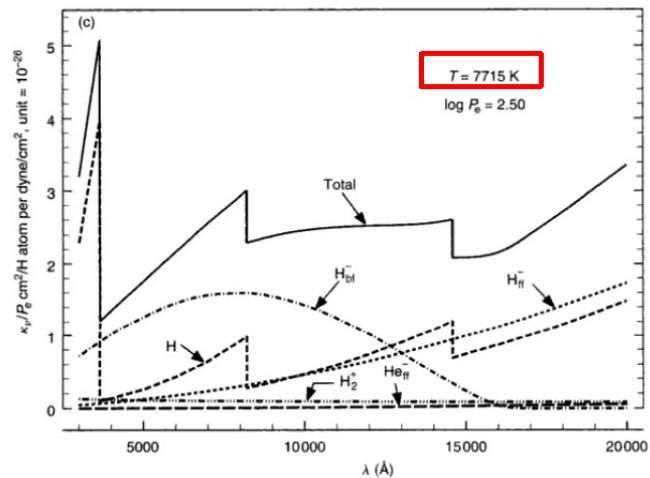
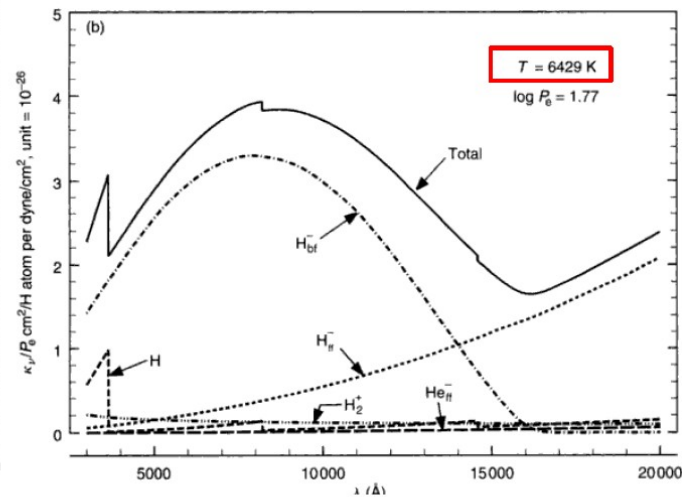
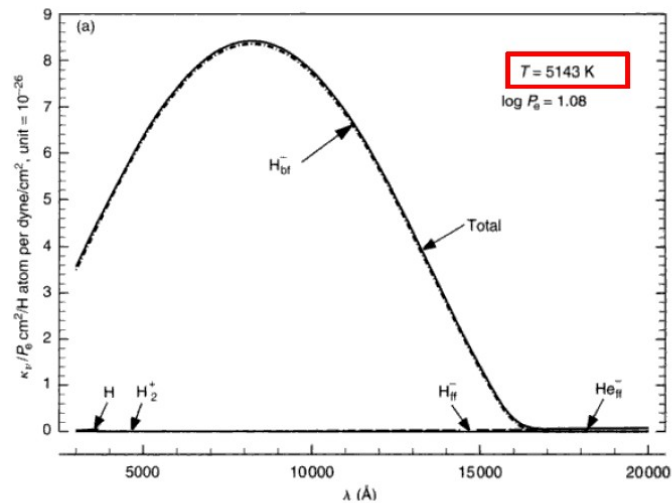
- Ovako možemo da dobijemo konzistentnu strukturu zvezdane atmosfere u LTR koja zadovoljava ravnotežu zračenja.

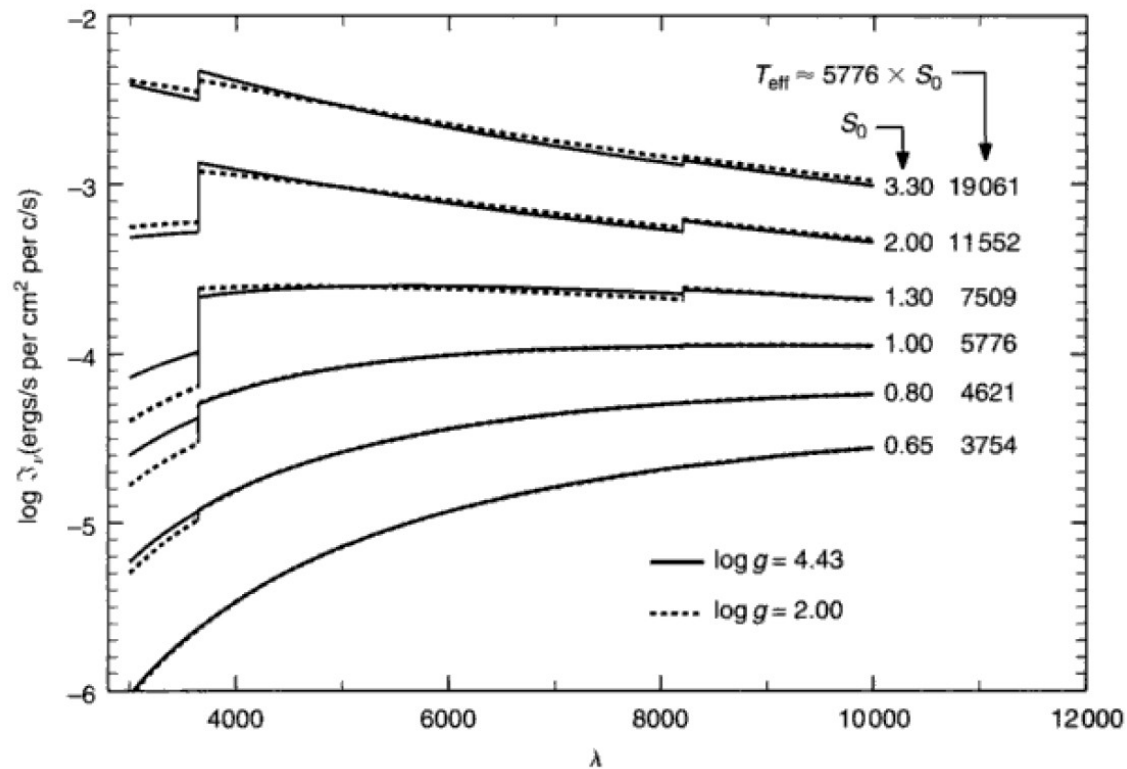
Modeliranje
zvezdane atmosfere
u R.Z. i LTR



Dijagnostika ne-sivih atmosfera

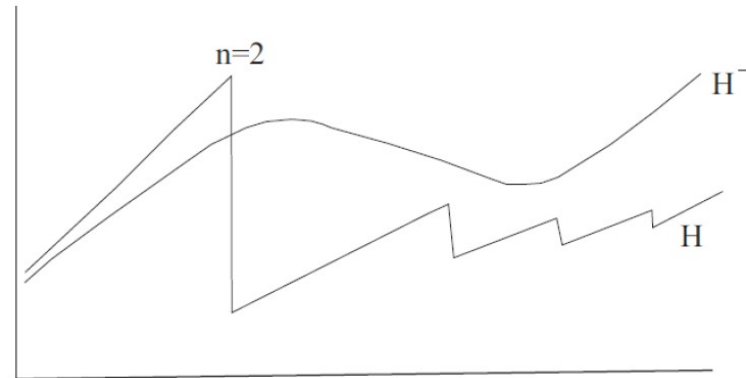
- Zavisnost koeficijenta apsorpcije od talasne dužine ostavlja potpis u spektru

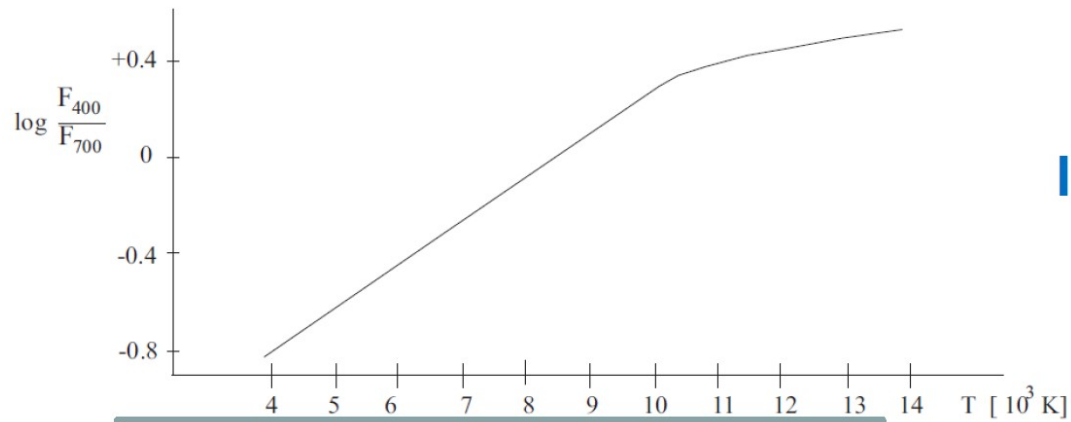




Zavisnost nagiba
Pašenovog kontinuuma
i veličine Balmerovog
skoka od T (spektralne
klase) i $\log g$ (klase
luminoznosti)

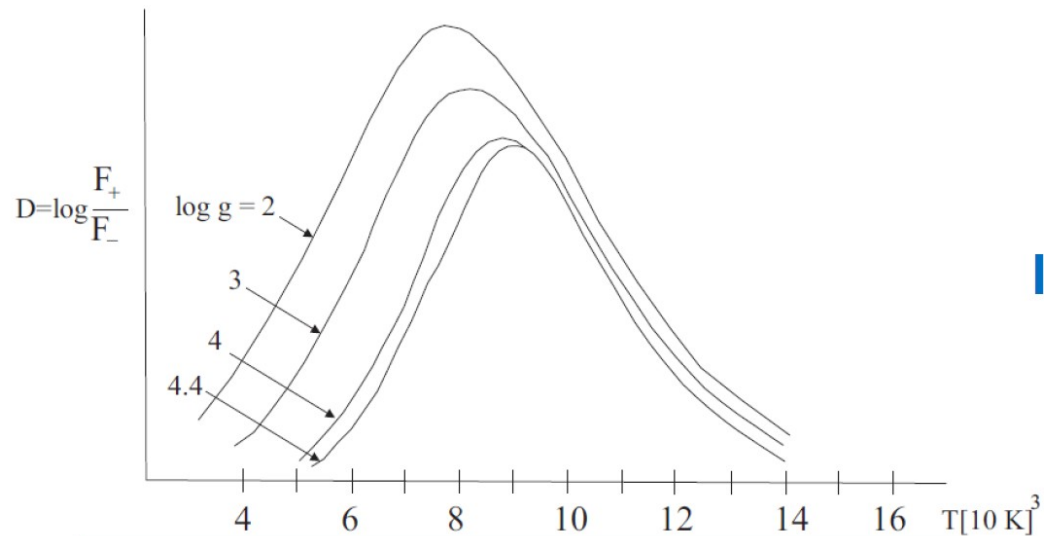
Uticaj $\log g$ na
veličinu Balmerovog
skoka





Indikator T

Sl. 22. Nagib Pašenovog kontinuuma u funkciji temperature



Indikator T i p

Sl. 23. Balmerov skok u funkciji temperature i površinske gravitacije

Ako ostane vremena...

- Nazad na numeričku vežbu od prošle nedelje!
- Ideja je da numerički rešimo jednačinu prenosa. To nam omogućava da vidimo šta se dešava u ne-sivoj atmosferi.
-

