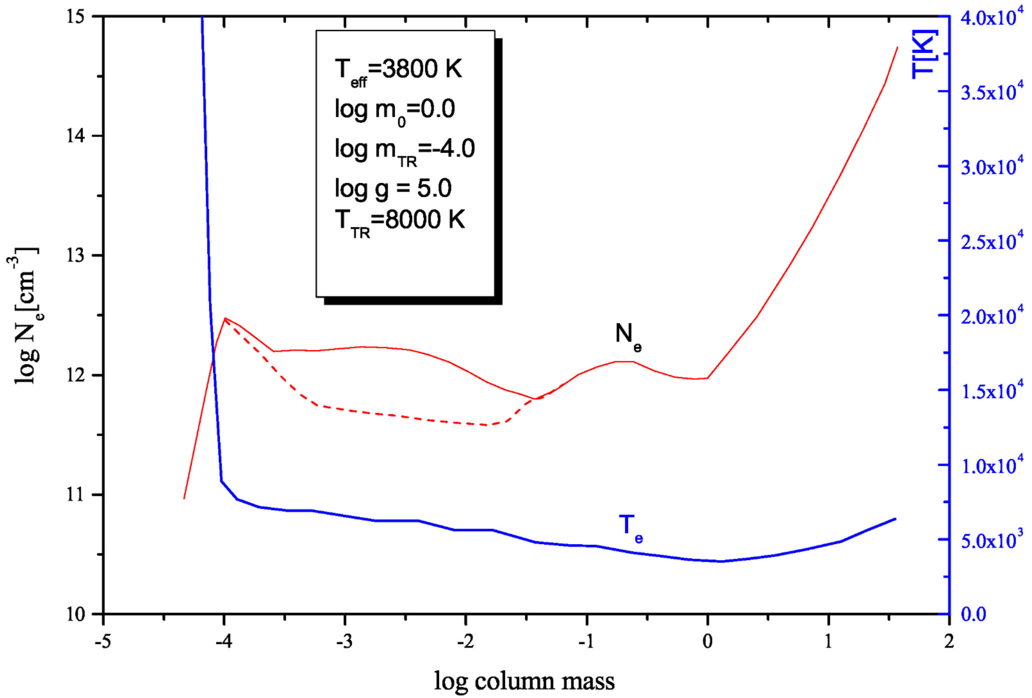


Teorija Zvezdanih Spektara
Lekcija 7: Siva Atmosfera u Ravnoteži Zračenja

Ivan Milić (AOB / MATF)

21/11/2023

Pitanje za zagrevanje

- Naći zavisnost intenziteta od optičke dubine i pravca za sivu, Milne-Eddington atmosferu (Funkcija izvora je linearna funkcija optičke dubine).
- Tabla! (Ostaje za domaći).

Podsetnik

- Upoznali smo se sa pojmom **sive atmosfere.** Sve je opisano jednom talasnom dužinom!
- **Modelovanje:** Nalazimo prihvatljive strukture zvezdane atmosfere za dati fluks.
- **Prihvatljive:** (akka “samokonzistentne”): Ispunjavaju neki set pretpostavki.
- Za nas su to (za sada): **Ravnoteža zračenja + Jednačina Prenosa Zračenja**
- **(2-3 min diskusija o konceptualnim razlikama izmedju ove dve pretpostavke)**
- U sivoj atmosferi ravnoteža zračenja ima jako jednostavan oblik: **S = J**
- Ukoliko na to dodamo LTR (treća pretpostavka):

$$S = B = J$$

Prenos zračenja u unutrašnjosti zvezde

$$\mu \frac{1}{-\chi} \frac{dI}{dh} = I - S; \; 2\pi \int_{1}^{-1} \mu d\mu$$

JPZ

K integral

$$-4\pi \frac{1}{\chi} \frac{dK}{dh} = \mathcal{F}; \; p_{\mathrm{zr}} = \frac{4\pi K}{c}$$

Prvi moment JPZ

$$-\frac{c}{\chi} \frac{dp_{\mathrm{zr}}}{dh} = \mathcal{F}$$

$$K \approx \frac{J}{3} = \frac{B}{3} = \frac{1}{3} \sigma T^4$$

Izotropija + LTR

$$\boxed{\mathcal{F} = -\frac{16}{3} \frac{\sigma}{\chi} T^3 \frac{dT}{dh}}$$

Čemu je sve srazmeran fluks? Da li ima smisla? **(3 min diskusija)**

Šta je "K-integral"?

$$K = \int K_\lambda d\lambda = \frac{1}{4\pi} \int \oint I_\lambda \cos^2 \theta d\Omega d\lambda$$

- Drugi moment intenziteta:
  ili, za sivu, 1D atmosferu:

$$K = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} I(\mu)\mu^2 d\mu$$

- Koji je fizički smisao K integrala?
- K integral je proporcionalan **pritisku zračenja:**

$$p = \frac{4\pi}{c} K$$

- **Takodje, za izotropno zračenje J = 3K (pokazati oboje → tabla)**
- Ovo će nam trebati kasnije. Sada idemo nazad na Milneov problem.

Momenti intenziteta (momenti polja zračenja)

- Ovo je pod pretpostavkom sive, 1D plan paralelne atmosfere. U generalnom slučaju, sve vrednosti zavise od talasne dužine i integracija se vrši po oba ugla

$$J = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(\mu)d\mu$$

$$H = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(\mu)\mu d\mu$$

$$K = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(\mu)\mu^2 d\mu$$

- Ukoliko je intenzitet izotropan, lako se dobija da: $J = I = 3K$

$$H = 0$$

Milneov problem

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S = I - J$$

- Intenzitet zavisi od samog sebe!
- Ovo je primer **spregnutosti (kuplovanja)** u prenosu zračenja. Videćemo još ovakvih situacija kada budemo razmatrali takozvanu ne-LTR.
- Ovo je primer tzv. Integro-diferencijalne jednačine:

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S = I - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} I(\mu) d\mu$$

- I zavisi od J(S) a J zavisi od I, ovo je spregnutost.
- **Pitanje:** Da li izotermna atmosfera može da bude u ravnoteži zračenja?

Milneov problem

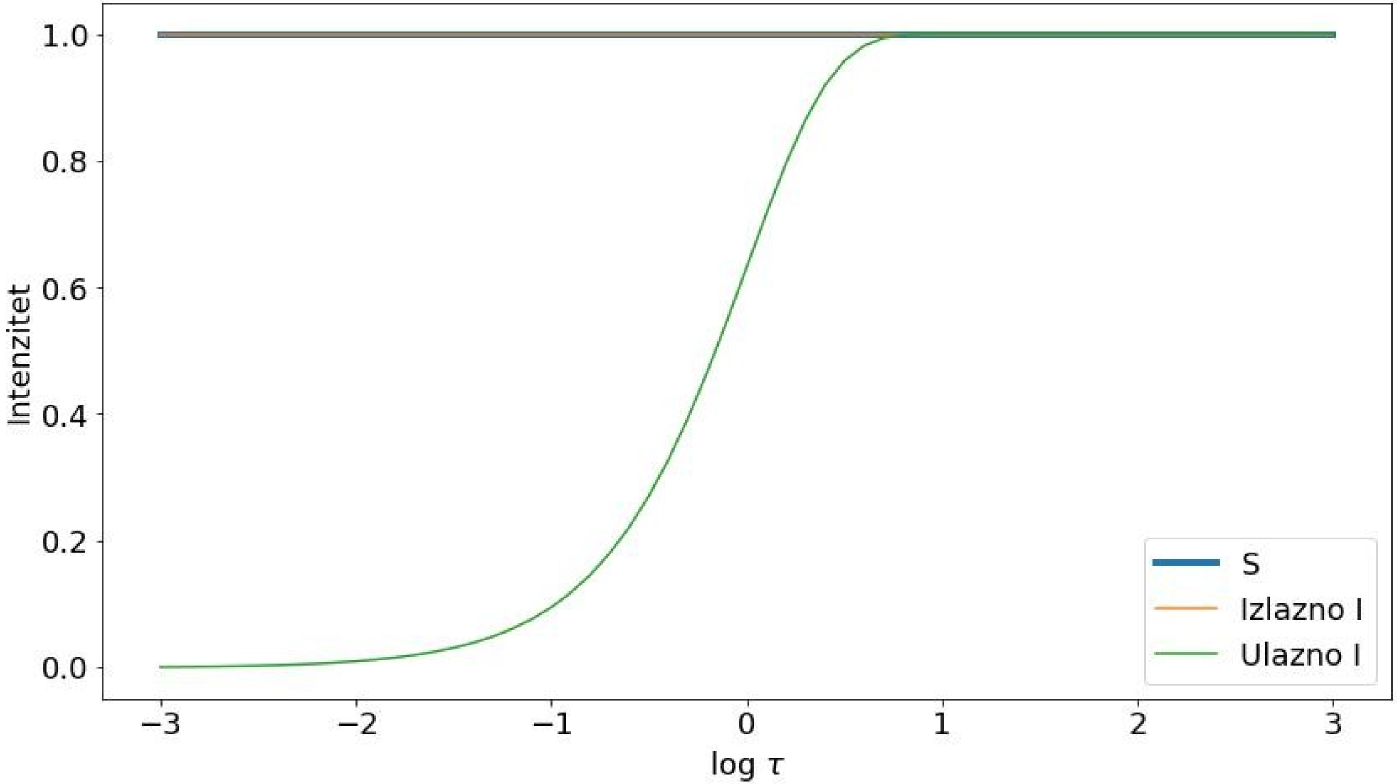
$$\mu\frac{dI}{d\tau} = I - S = I - J$$

- **Pitanje:** Da li izotermna atmosfera u LTR može da bude u ravnoteži zračenja?
- Izračunajmo J pod pretpostavkom izotermne atmosfere i uporedimo sa S. Ako nisu jednaki, ne može!
- B = const, npr B = 1. Izračunajmo I u svakom pravcu svuda u atmosferi.
- (Tabla)

Milneov problem

$$\mu\frac{dI}{d\tau} = I - S = I - J$$

- **Pitanje:** Da li izotermna atmosfera u LTR može da bude u ravnoteži zračenja?
- Izračunajmo J pod pretpostavkom izotermne atmosfere i uporedimo sa S (tj B). Numeričko rešenje:

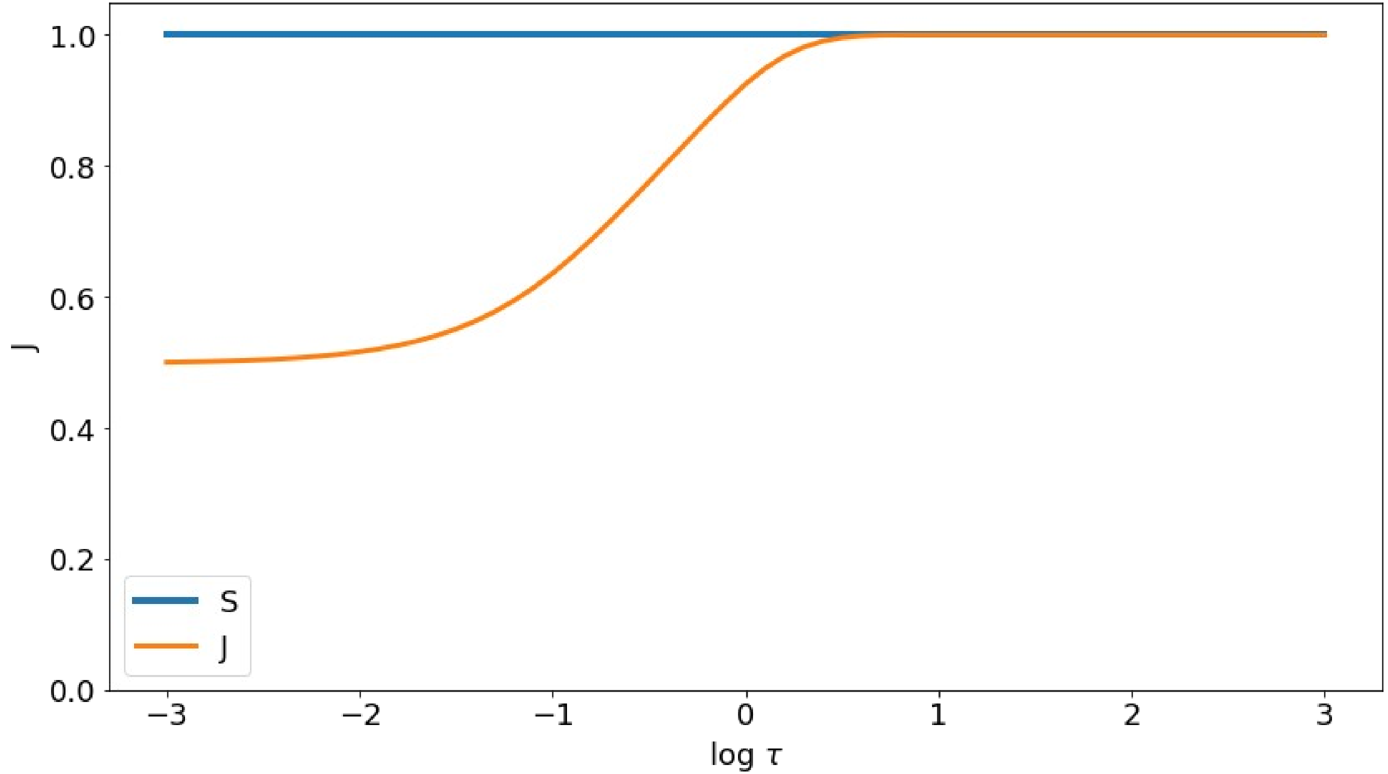


Milneov problem

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S = I - J$$

- **Pitanje:** Da li izotermna atmosfera u LTR može da bude u ravnoteži zračenja?

- Izračunajmo J pod pretpostavkom izotermne atmosfere i uporedimo sa S (tj B).
Numeričko rešenje:



Milneov problem

$$\mu\frac{dI}{d\tau} = I - S = I - J$$

- Intenzitet zavisi od samog sebe!
- Ovo je primer **spregnutosti (kuplovanja)** u prenosu zračenja. Videćemo još ovakvih situacija kada budemo razmatrali takozvanu ne-LTR.
- Ovo je primer tzv. Integro-diferencijalne jednačine:

$$\mu\frac{dI}{d\tau} = I - S = I - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(\mu)d\mu$$

- I zavisi od J(S) a J zavisi od I, ovo je spregnutost.
- Zar ne bi bilo lepo da možemo da napišemo ovo tako da imamo jednu nepoznatu **funkciju?**

Lambda operator

- Proces intergracije JPZ i integracije po uglovima možemo da zovemo **operatorom.** Zato što od jedne funkcije (S) pravimo drugu funkciju (J).

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(\mu)d\mu = \\
&= \frac{1}{2}\int_{\tau}^{\infty} S(t)e^{(\tau-t)/\mu}dt/\mu + \frac{1}{2}\int_{0}^{\tau} S(t)e^{(t-\tau)/|\mu|}dt/|\mu| = \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} S(t)E_1(|t-\tau|)dt
\end{aligned}
$$

$$J(\tau) = \Lambda_\tau[S(t)]$$

"Kernel", u ovom slučaju tzv. prvi eksponencijalni integral

Švarcšild-Milne jednačine. Momenti intenziteta

$$\int_{-1}^{1} I_\nu(\tau_\nu, \mu)\mu^n d\mu =$$

$$\int_0^1 \mu^n d\mu \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu) e^{-(t_\nu - \tau_\nu)/\mu} \frac{dt_\nu}{\mu} + \int_{-1}^{0} \mu^n d\mu \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) e^{-(t_\nu - \tau_\nu)/\mu} \frac{dt_\nu}{-\mu}$$

$$\int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu) dt_\nu \int_1^{\infty} e^{-(t_\nu - \tau_\nu)y} \frac{dy}{y^{n+1}} + (-1)^n \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) dt_\nu \int_1^{\infty} e^{-(\tau_\nu - t_\nu)y} \frac{dy}{y^{n+1}} =$$

$$\int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu) E_{n+1}(t_\nu - \tau_\nu) dt_\nu + (-1)^n \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) E_{n+1}(\tau_\nu - t_\nu) dt_\nu$$

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xy}}{y^n} dy$$

Šta su ove funkcije En?

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xy}}{y^n} dy$$

- Eksponencijalni integrali!
- “Kerneli” prenosa zračenja koji nam omogućavaju da dobijemo različite momente intenziteta “direktno” iz funkcije izvora.
- Na osnovu njih možemo da definišemo operatore, slične **Lambda** operatoru
- Milneova jednačina za fluks & K-integral
- Do na konstante, koje možemo da odredimo dimenzionom analizom, važi da je:

$$\mathcal{F}_\tau = \Phi_\tau[S(t)]$$

$$K_\tau = \frac{1}{4} X_\tau[S(t)]$$

- n-ti moment intenziteta zračenja na nekoj optičkoj dubini jednak integralu Funkcije izvora puta eksponencijalni integral n+1-og reda, po optičkoj dubini.

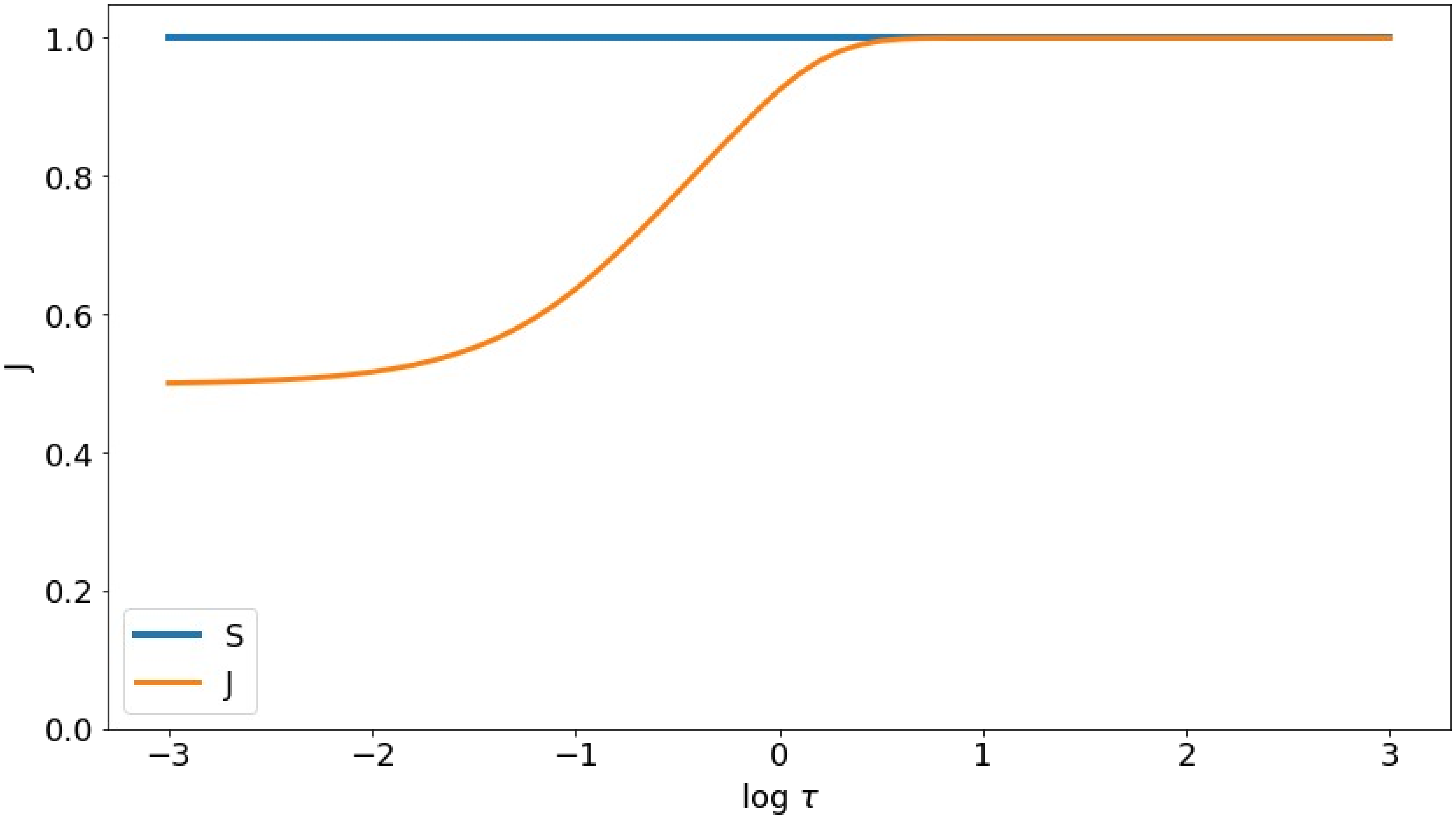
Srednji intenzitet kroz Lambda operator

Razložimo detaljno šta je srednji intenzitet preko formalnog rešenja:

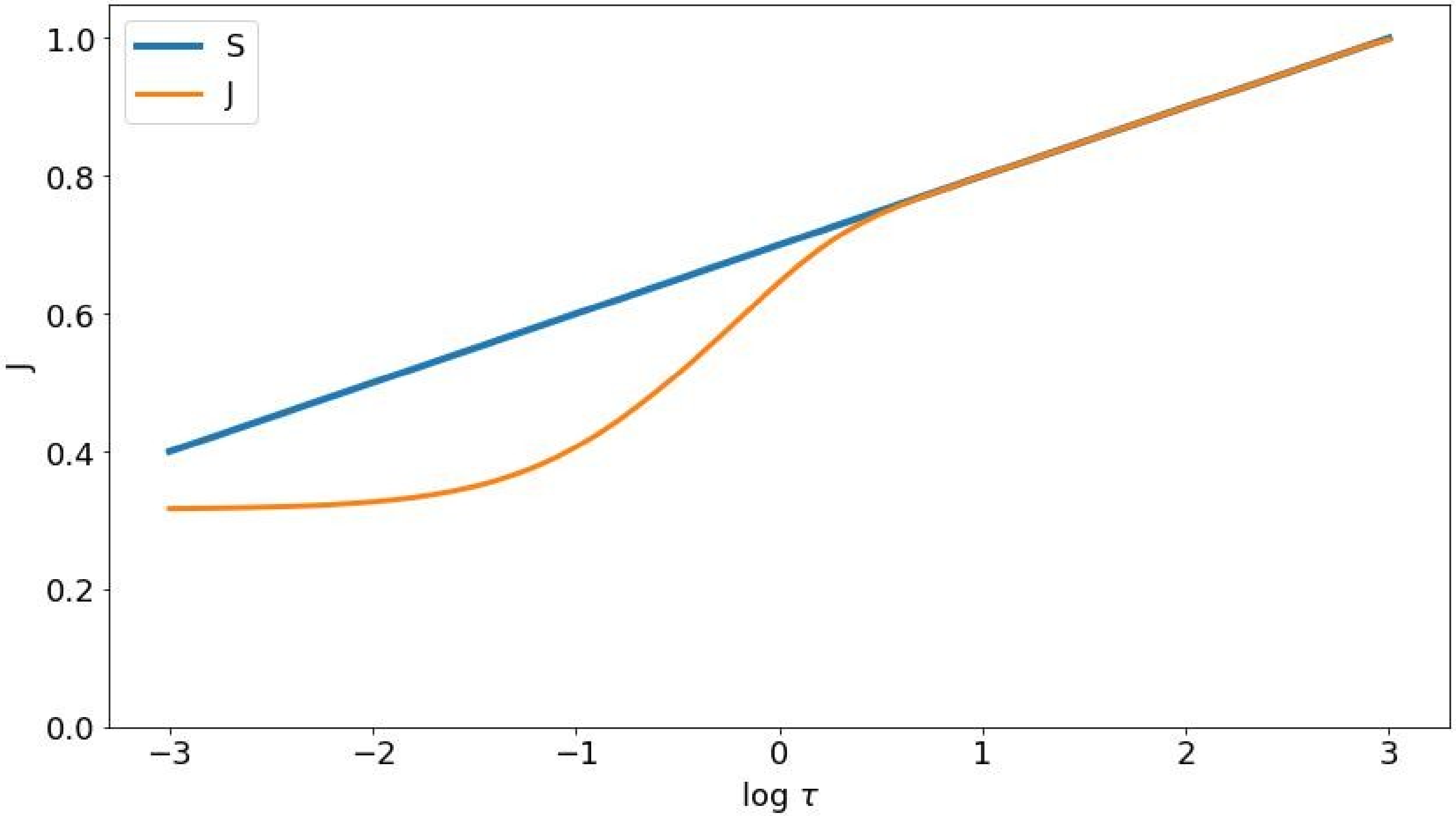
$$
\begin{aligned}
J(\tau) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(\mu)d\mu \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\int_{\tau}^{\infty} S(t)e^{(\tau-t)/\mu}\frac{dt}{|\mu|}d\mu + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\tau} S(t)e^{(\tau-t)/\mu}\frac{dt}{|\mu|}d\mu \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} S(t)E_1(|t-\tau|)dt
\end{aligned}
$$

- Hajde da vidimo kako izgleda raspodela od J sa dubinom za neke date S(t), tj. kako izgleda **transformacija S u J.**

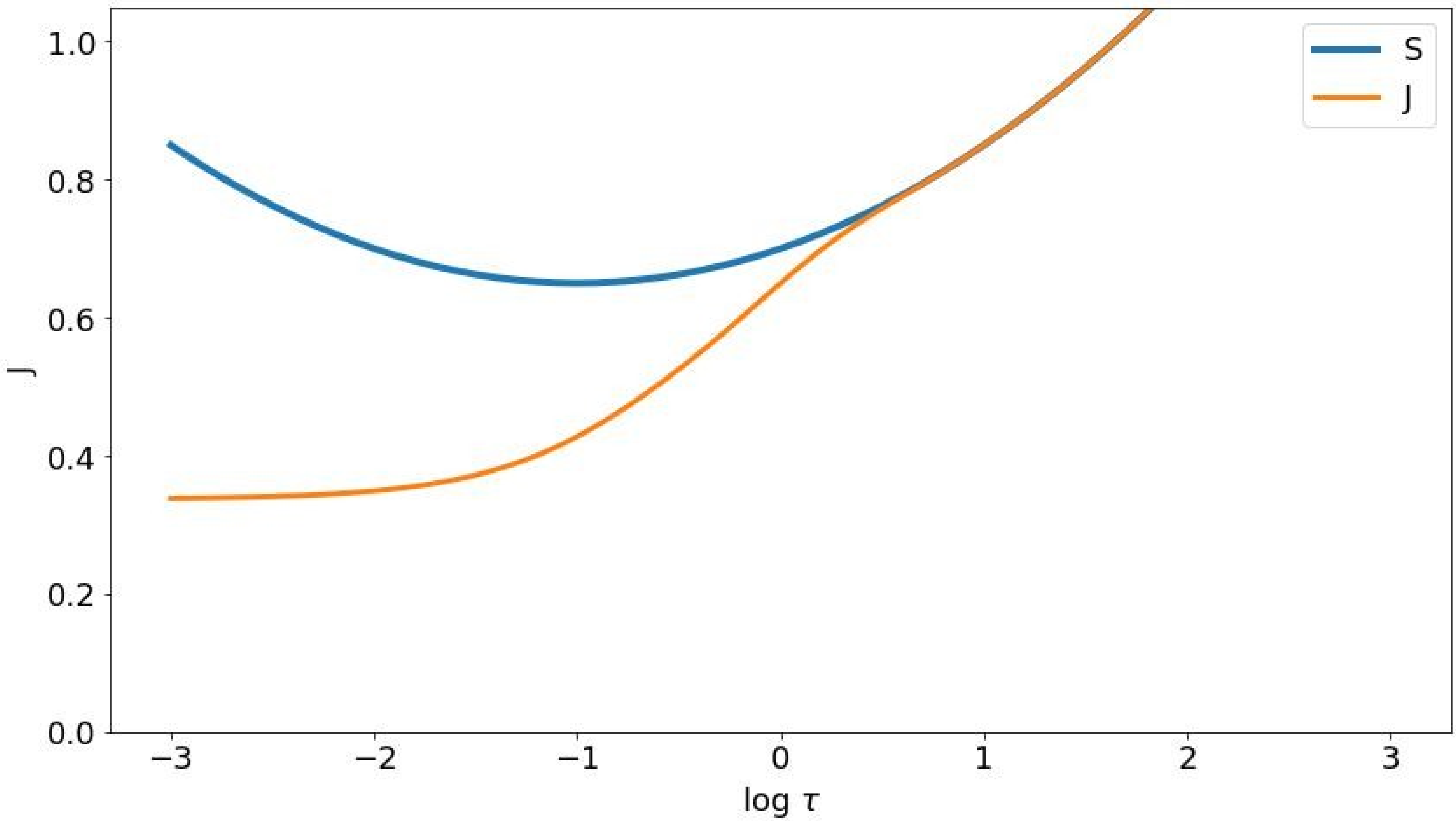
Konstantno S



S linearno opada sa log tau



S je kvadratna funkcija od logtau



Milneov problem zapisan preko lambda operatora

Setimo se da je:

$$
\begin{aligned}
J(\tau) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(\mu)d\mu = \Lambda[S] \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\int_{\tau}^{\infty} S(t)e^{(\tau-t)/\mu}\frac{dt}{|\mu|}d\mu + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\tau} S(t)e^{(\tau-t)/\mu}\frac{dt}{|\mu|}d\mu \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} S(t)E_1(|t-\tau|)dt
\end{aligned}
$$

Naš problem možemo sada zapisati kao:

$$J(\tau) = \Lambda[J] = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} J(t)E_1(|t-\tau|)dt$$

Ovo je primer jedne **integralne jednačine.** Mi možemo relativno lako da je rešimo numerički.

Kako su ovaj problem rešili pre 100 godina?

- “Egzaktno” rešenje nije bilo moguće, zato što nije moguće analitički “invertovati” ovaj integral.
- Oba rešenja koja ćemo izvesti (i uporediti sa posmatranjima) se oslanjaju na neke aproksimacije
- Poredjenje sa posmatranjima će nam u stvari reći **koja od tih aproksimacija je bliža realnosti**

Momenti JPZ

Pomnožimo sa μ^n, integralimo u podelimo sa 2 (tj. Usrednjimo po uglovima).

$$\mu\frac{dI}{d\tau} = I - S$$

$$\frac{dH}{d\tau} = J - S = 0 \to H = \frac{F}{4} = \mathrm{const}$$

$$\frac{dK}{d\tau} = \frac{F}{4}$$

Četiri promenljive (I, J, F, K) i tri jednačine. Ne možemo da "zatvorimo" sistem. Trebaju nam neke dodatne pretpostavke.

Švarcšild-Šusterovo rešenje

Izlazni intenzitet i ulazni intenzitet su izotropni unutar odgovarajućih intervala → Eliminišemo intenzitet.

$$J^+ = \int_0^1 I(\mu)d\mu;\ J^- = \int_{-1}^0 I(\mu)d\mu$$

$$\int_0^1 I(\mu)\mu d\mu \approx \frac{1}{2}J^+$$

$$\int_{-1}^0 I(\mu)\mu d\mu \approx \frac{-1}{2}J^-$$

→

$$\mu\frac{dI}{d\tau} = I - J;\ \int_0^1 \mu d\mu;\ \int_{-1}^0 \mu d\mu$$

$$\frac{1}{2}\frac{dJ^+}{d\tau} = J^+ - J$$

$$\frac{-1}{2}\frac{dJ^-}{d\tau} = J^- - J$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(J^+ + J^-) = J^+ - J^- = F}$$

$$\boxed{\frac{dJ}{d\tau} = F = \mathrm{const} \rightarrow \mathrm{J} = \mathrm{F}\tau + \mathrm{C}}$$

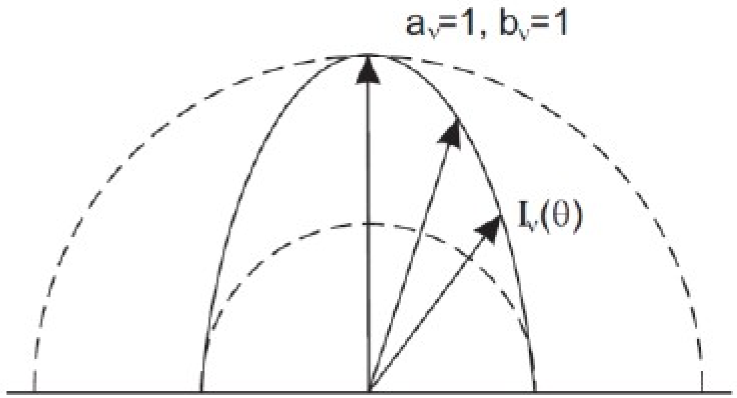
Kako naći konstantu C? Diskusija nekoliko minuta.

Švarcšild-Šusterovo rešenje

Izlazni intenzitet i ulazni intenzitet su izotropni unutar odgovarajućih intervala → Eliminišemo intenzitet.

$$\frac{dJ}{d\tau} = F = \text{const} \rightarrow \mathrm{J} = \mathrm{F}\tau + \mathrm{C}$$

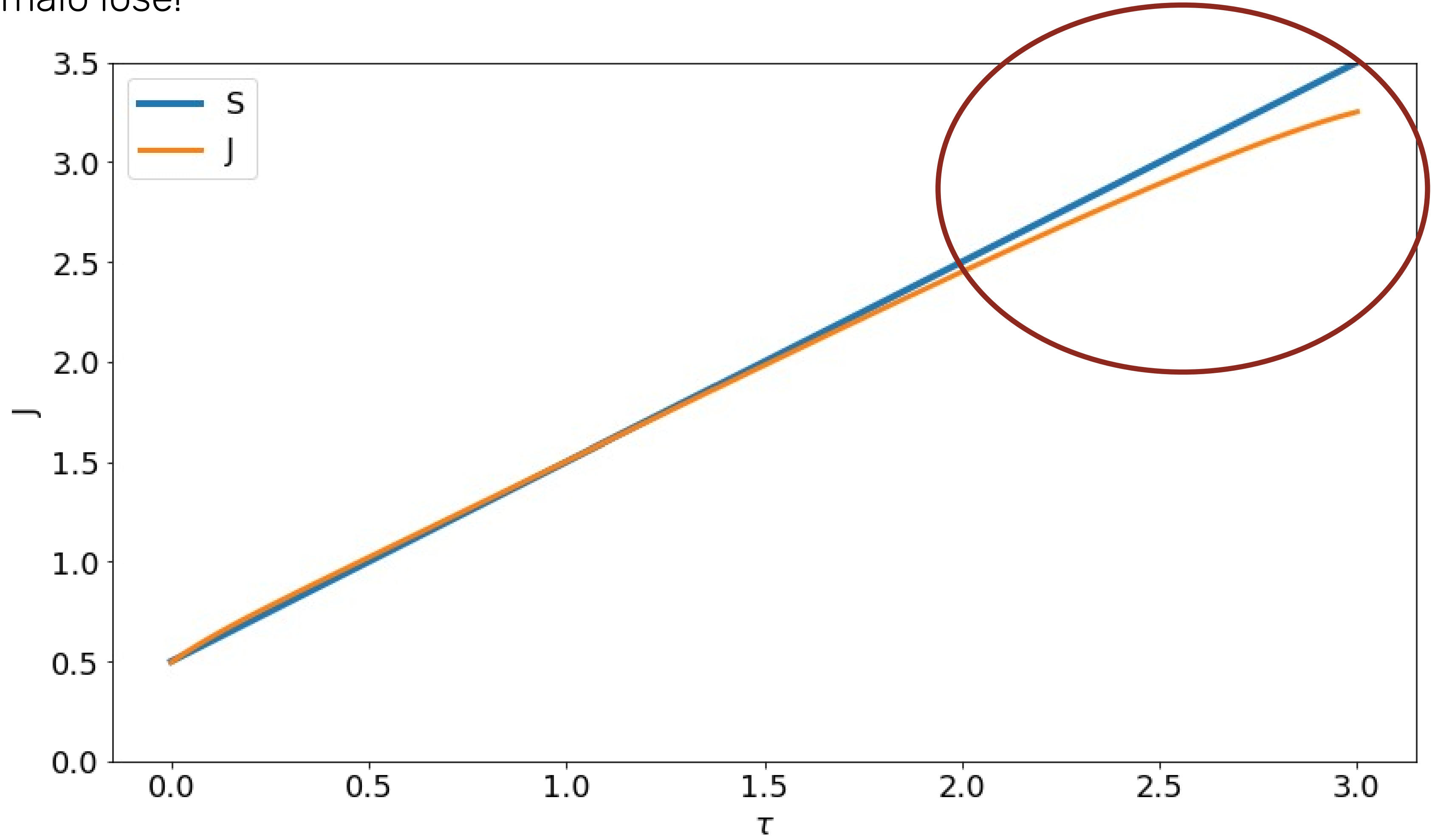
$$C = J(0) = \frac{1}{2}J^{+}(0) = \frac{1}{2}F(0) = \frac{F}{2}$$
$$J(\tau) = S(\tau) = F(\tau + \frac{1}{2})$$



I bez nameštanja smo dobili da funkcija izvora linearno zavisi od optičke dubine. Milne- Eddingtonova aproksimacija ima smisla! (Ali nije konzistentna sa pretpostavkom sa početka!)

Proverimo numerički

- Nimalo loše!



Eddingtonovo rešenje

Pretpostavimo da je K = J/3 i na površini! Eliminišemo K!

$$\frac{dK}{d\tau} = \frac{F}{4} \rightarrow K = \frac{F}{4}\tau + C$$

$$\boxed{K(\tau) \approx \frac{J(\tau)}{3} = \frac{S(\tau)}{3}}$$

Eddingtonova aproksimacija

$$S(\tau) = \frac{3}{4}F\tau + C$$

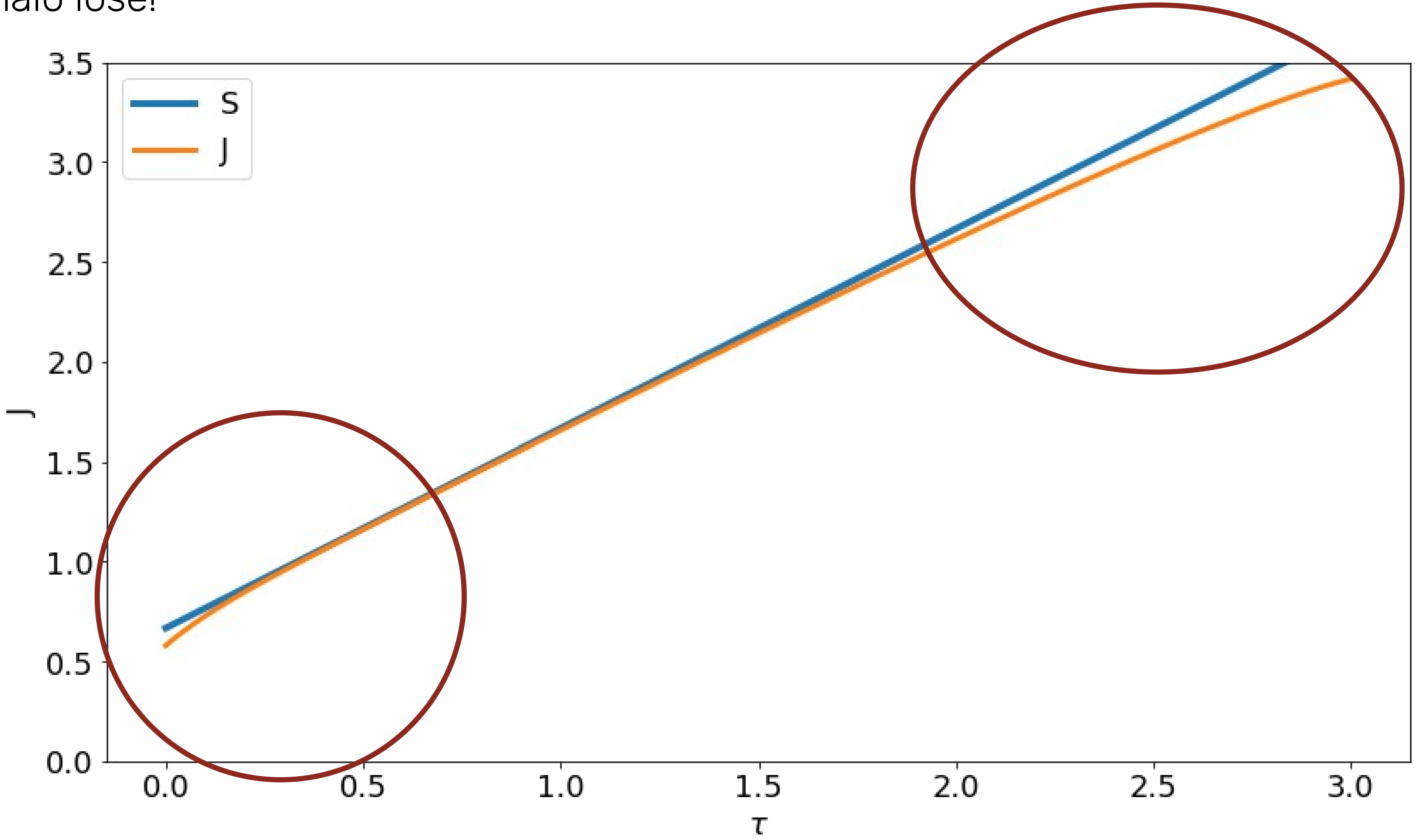
$$\boxed{C = \frac{F}{2}}$$

II Eddingtonova aproksimacija

$$\boxed{S(\tau) = \frac{3}{4}F(\tau + \frac{2}{3})}$$

Proverimo numerički

- Nimalo loše!



Poredjenje:

Švarcšild-Šusterovo rešenje

$$\boxed{S(\tau) = F(\tau + \frac{1}{2})}$$

LTR

$$T^4(\tau) = T_{ef}^4(\tau + 1/2)$$

E-B relacija

Limb darkening

$$\frac{I(0,\mu)}{I(0,1)} = \frac{2}{3}(\mu + \frac{1}{2})$$

$$I^{SS}(0,0) = 0.33\, I(0,1)$$

Eddington-ovo rešenje

$$\boxed{S(\tau) = \frac{3}{4}F(\tau + \frac{2}{3})}$$

LTR

$$\boxed{T^4(\tau) = \frac{3}{4}T_{ef}^4(\tau + \frac{2}{3})}$$

$$T = T_{ef} \text{ na } \tau = 2/3$$

E-B relacija

Limb darkening

$$\boxed{\frac{I(0,\mu)}{I(0,1)} = \frac{3}{5}(\mu + \frac{2}{3})}$$

$$I^{Ed}(0,0) = 0.40\, I(0,1)$$

Posmatrački test

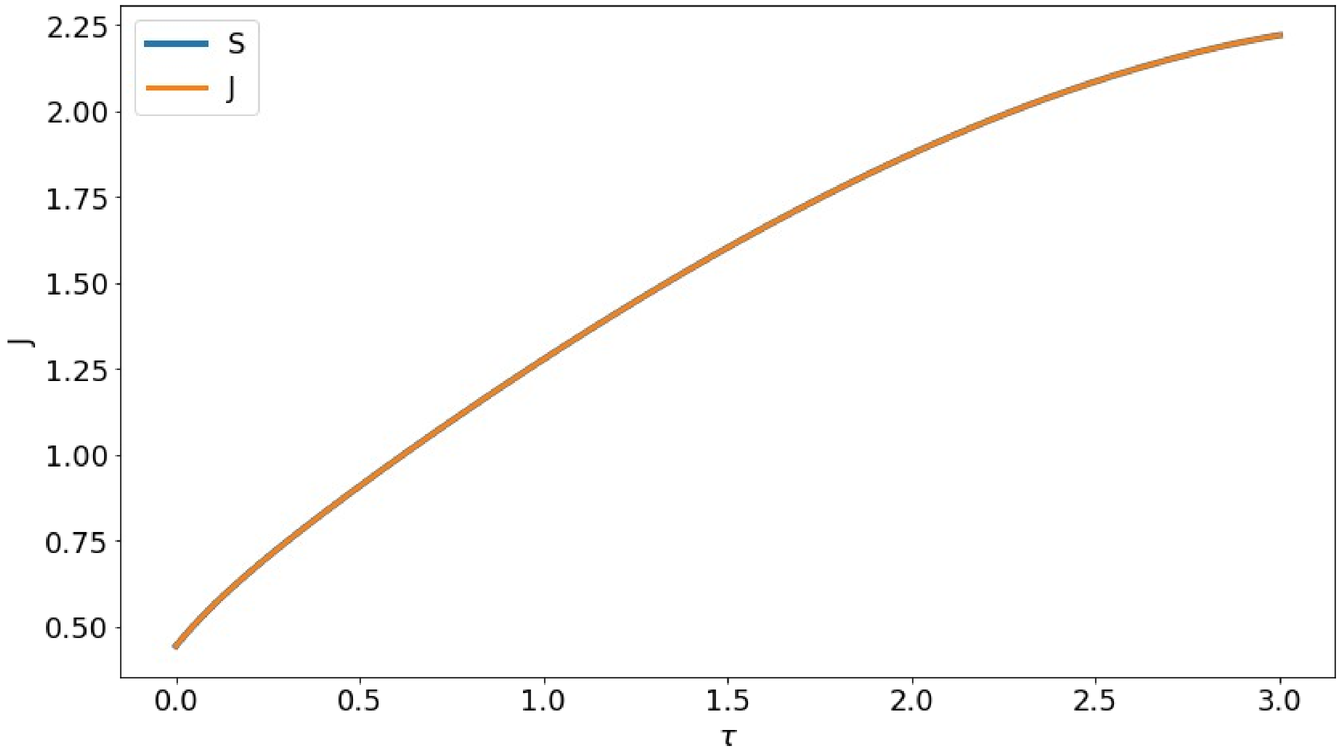
- Gledamo kako rešenja reprodukuju potamnjenje ka rubu Sunčevog diska

μ	posmatranje	R.Z. (Š–Š)	R.Z. (Ed)
1	1	1	1
0.8	0.92	0.87	0.88
0.6	0.81	0.73	0.76
0.44	0.70	0.63	0.66
0.2	0.49	0.47	0.52
0	$\boxed{0.40}$	0.33	$\boxed{0.40}$

Tačno rešenje: tzv Hopfovo rešenje

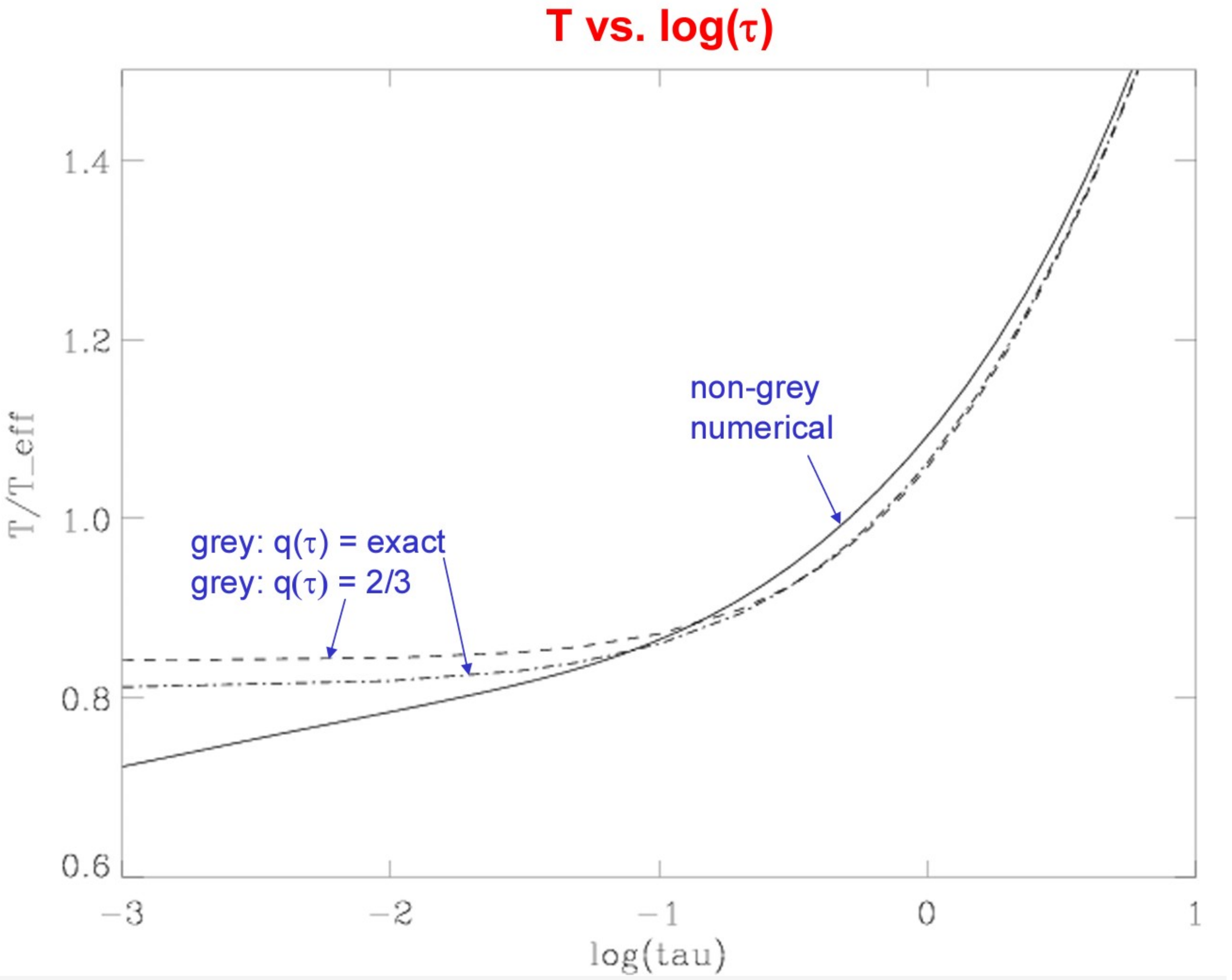
$$B = \sigma T^4 = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 (\tau + q(\tau))$$ Hopfova funkcija

$$q(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} < q(\tau) < q(\infty) = 0.71$$



Medjutim, najveći problem je pretpostavka sive atmosfere:

- Optička dubina drastično zavisi od talasne dužine.
- Možemo da odaberemo srednju neprozračnost za jedan momenat zračenja, ali ona neće biti odgovarajuća i za ostale.
- To je najveći izvor greške i u praksi razmatramo ne-Sive atmosfere
- Takodje, želimo da dobijemo zavisnost od visine, a ne od optičke dubine



Ako ostane vremena

- Vežba – ilustracija, iterativno rešavanje Milneovog problema