

# Teorija Zvezdanih Spektara

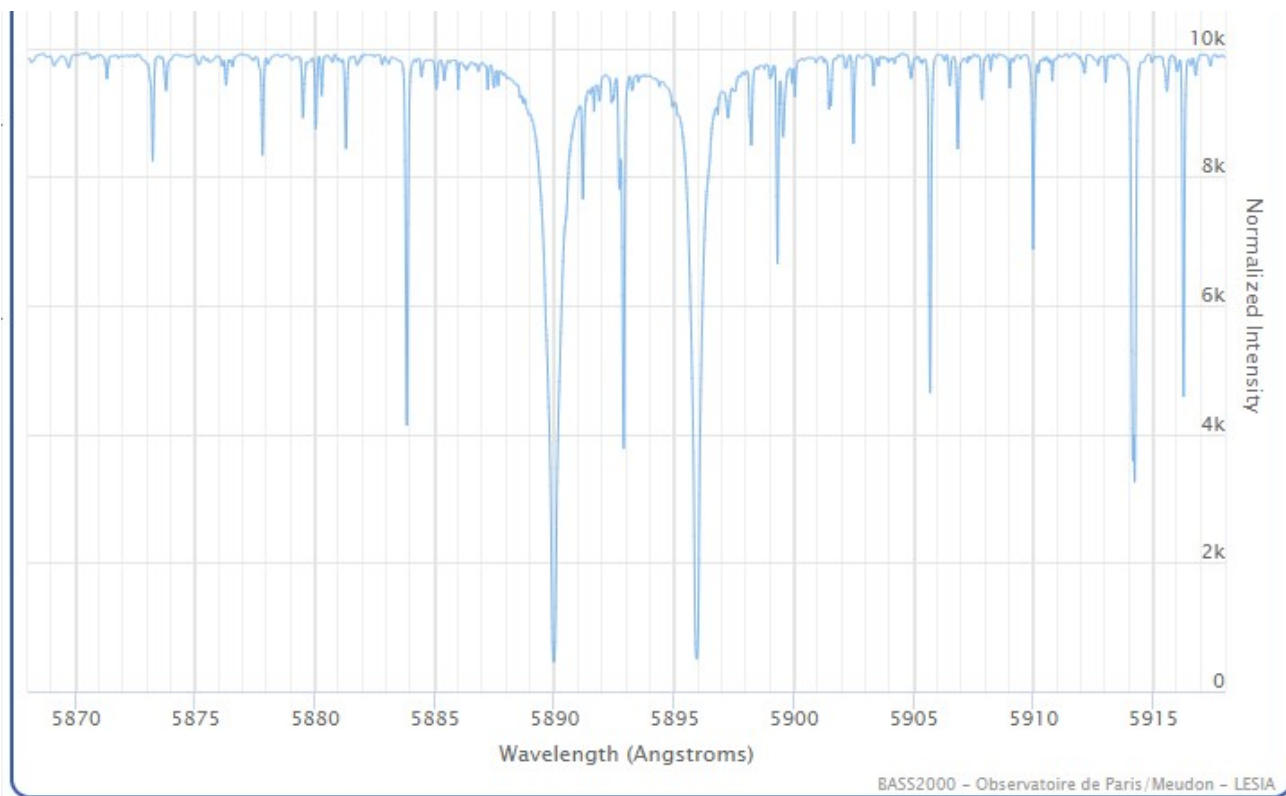
## Lekcija 9: Modeli Formiranja Spektralnih Linija

Ivan Milić (AOB / MATF)

01/10/2025 (nadoknada iz 2024)

# Zašto spektralne linije?

- Spektralne linije su zanimljive zato što u njima koeficijent apsorpcije brzo varira sa talasnom dužinom. Pogledajte koliko spektralnih linija unutar samo 5 nm!
- Ako želite još da razgledate: [https://bass2000.obspm.fr/solar\\_spect.php](https://bass2000.obspm.fr/solar_spect.php)

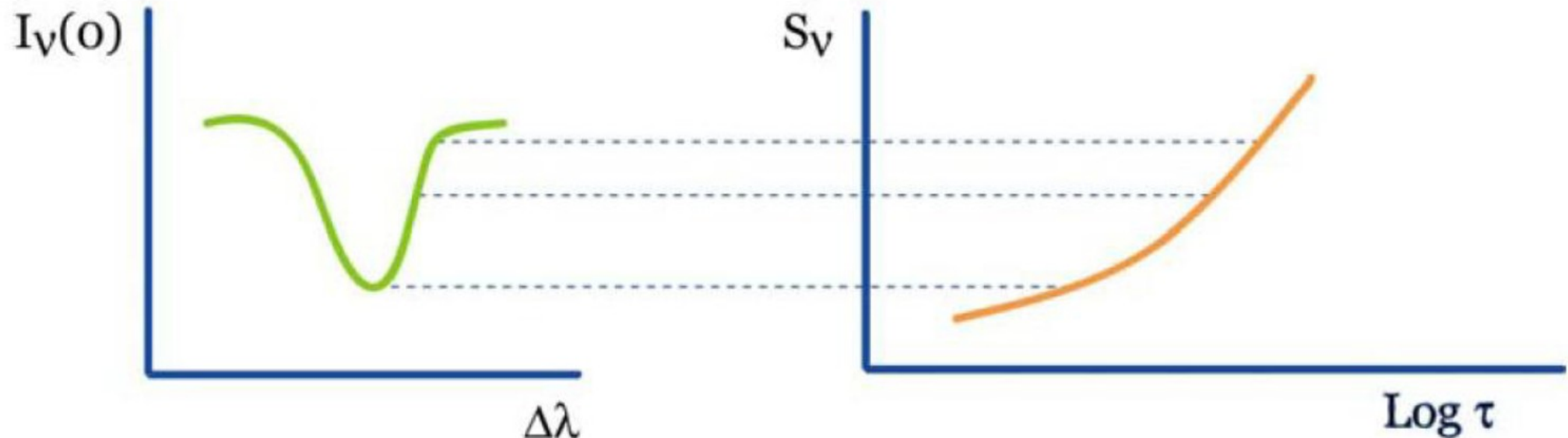


Region oko 589  
nm iz  
takozvanog  
Solarnog  
Atlasa

Setimo se Eddinton-Barbije relacije

$$I_\nu \approx S_\nu(\tau_\nu = 1)$$

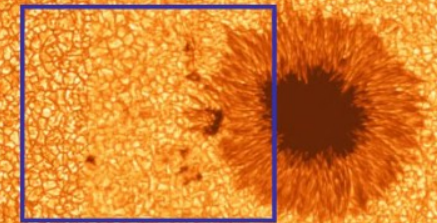
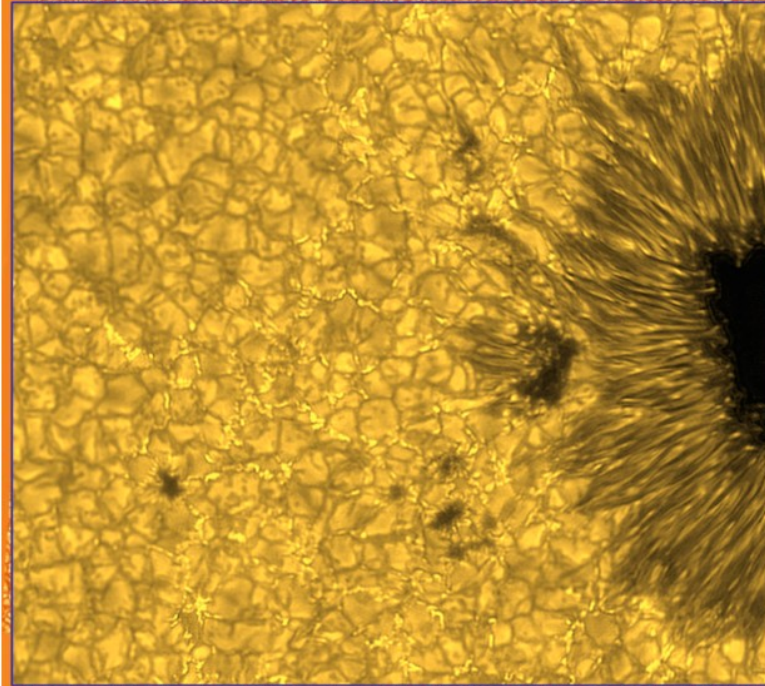
- To znači da frekvencije/talasne dužine na kojima je atmosfera neprozračnije “bivaju formirane” u višim slojevima.



# Posledice i važnost spektralnih linija

- Ovde vidimo tri slike istog istog dela Sunčeve atmosfere na talasnim dužinama koje odgovaraju kontinuumu i dvema spektralnim linijama.
- U pitanju su čuvene:
  - Ca II 854.2 nm
  - H alpha (H I 656.3 nm)
  - Po čemu se ove dve linije sve mogu razlikovati?

IBIS Mosaic – 03 August, 2010  
Continuum @6300 Å

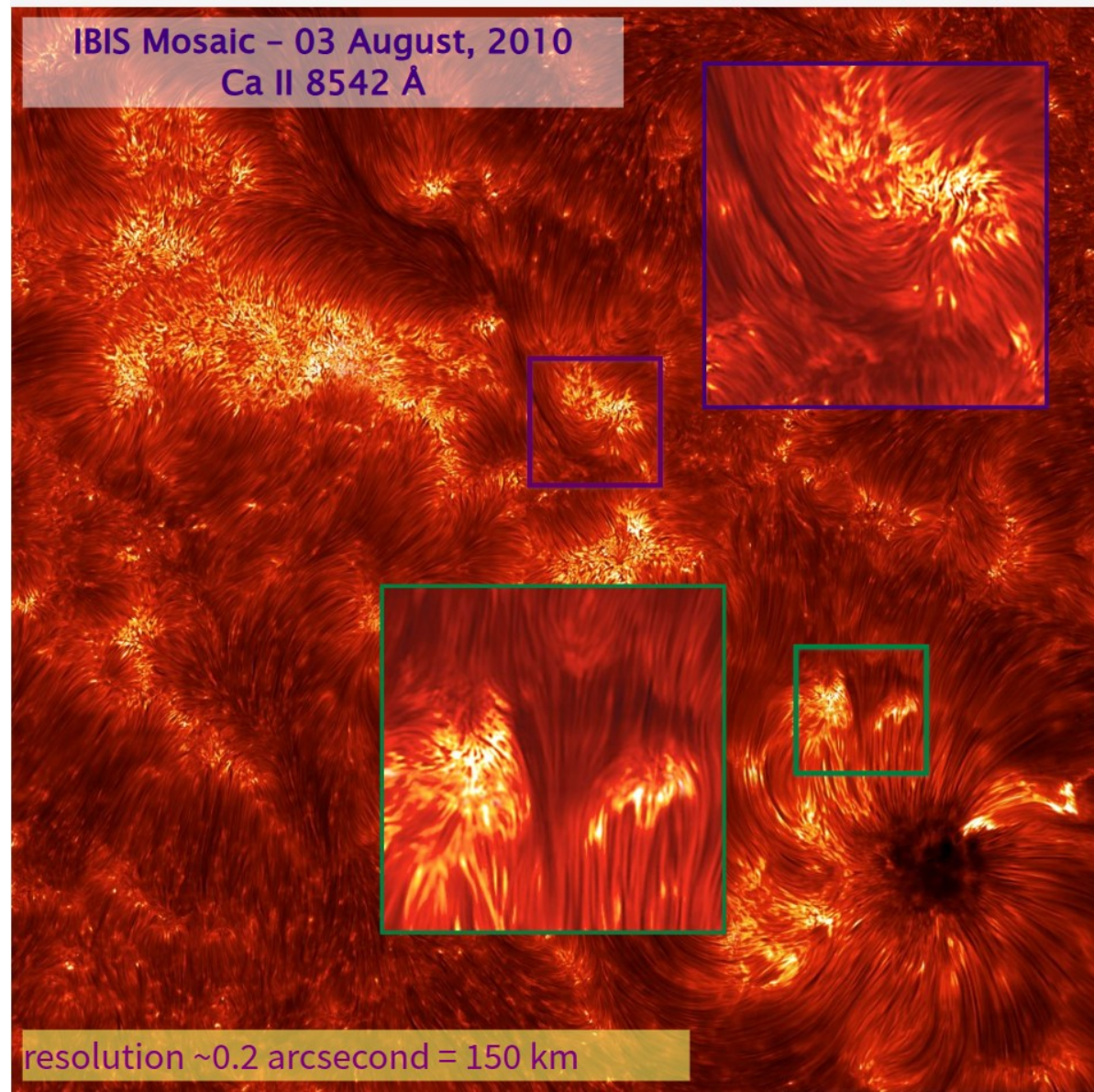


resolution ~0.2 arcsecond = 150 km



# Posledice i važnost spektralnih linija

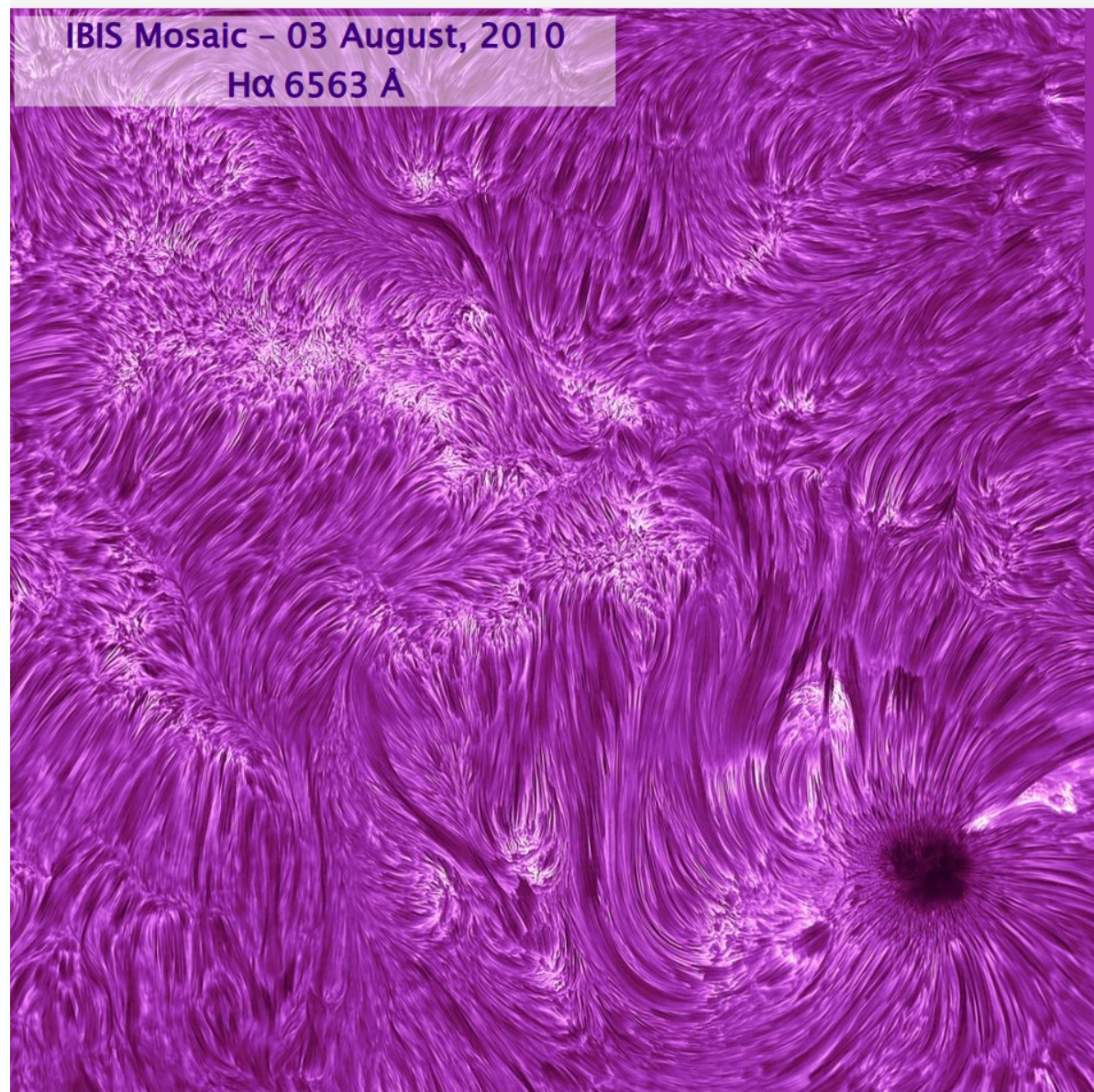
- Ovde vidimo tri slike istog istog dela Sunčeve atmosfere na talasnim dužinama koje odgovaraju kontinuumu i dvema spektralnim linijama.
- U pitanju su čuvene:
  - Ca II 854.2 nm
  - H alpha (H I 656.3 nm)
  - Po čemu se ove dve linije sve mogu razlikovati?





# Posledice i važnost spektralnih linija

- Ovde vidimo tri slike istog istog dela Sunčeve atmosfere na talasnim dužinama koje odgovaraju kontinuumu i dvema spektralnim linijama.
- U pitanju su čuvene:
  - Ca II 854.2 nm
  - H alpha (H I 656.3 nm)
  - Po čemu se ove dve linije sve mogu razlikovati?



# Računanje koeficijenta apsorpcije i emisije (!tabla)

- Koeficijenti emisije i apsorpcije u spektralnoj liniji izgledaju ovako:

Diagram illustrating the calculation of emission and absorption coefficients in a spectral line, with labels pointing to specific terms in the equations:

**Top Equation (Emission):**

$$j_{\lambda} = n_u A_{ul} \frac{hc}{\lambda 4\pi} \phi_{\lambda}$$

**Bottom Equation (Absorption):**

$$\chi_{\lambda} = (n_l B_{lu} - n_u B_{ul}) \frac{hc}{\lambda 4\pi} \phi_{\lambda}$$

**Labels and Arrows:**

- Populacija gornjeg nivoa** (Upper level population) points to  $n_u$  in the emission equation.
- Populacija donjeg nivoa** (Lower level population) points to  $n_l$  in the absorption equation.
- Einstein-ovi koeficijenti** (Einstein coefficients) points to  $A_{ul}$  and  $B_{lu}$  and  $B_{ul}$  in the equations.
- Apsorpcioni profil** (Absorption profile) points to  $\phi_{\lambda}$  in both equations.

Pošto nemamo tablu, moraćemo dimenzionirati da se uverimo

$$j_\lambda = \frac{dI_\lambda^{em}}{ds} = \frac{d^5 E^{em}}{dA dt d\Omega d\lambda \cos \theta ds}$$

Koeficijent  
emisije:

Energija  
jednog fotona

Einsteinov koeficijent  
spontane emisije, opisuje  
koliko je emisija "efikasna", tj  
koliko se često dešava  
(jedinica - Hz)

Apsorpcioni  
profil, opisuje  
zavisnost od  
talasne dužine

Koncentracija  
atoma u  
ekscitovanom  
stanju - koliko  
emitera imamo  
na raspolaganju

$$j_\lambda = n_u A_{ul} \frac{hc}{\lambda 4\pi} \phi_\lambda$$

$$\chi_\lambda = (n_l B_{lu} - n_u B_{ul}) \frac{hc}{\lambda 4\pi} \phi_\lambda$$

Izotropna  
emisija, delimo  
sa 4 pi



# Ukupan koeficijent apsorpcije

- U odnosu na spektralnu liniju, apsorpcija u kontinuumu ne zavisi od talasne dužine.
- Treba da je uzmemo u obzir: apsorpcioni profil u jednom trenutku opadne na nulu, bez obzira koliko je linija jaka

Kontinuum

$$\chi_{\lambda} = \chi^c + \chi^l \phi_{\lambda}$$

Ukupna neprozračnost  $\uparrow$

$\uparrow$  Ukupna neprozračnost u liniji

Profil (bezimendzioni).  
Videćemo sledeći put zašto. Za sada recimo da je to tako jer želimo jednostavnije jedinice

- Podsetnik: Računanje neprozračnosti zahteva da rešimo jednačinu stanja, tj hemijske ravnoteže, da dobijemo koncentracije apsorbera (i emitera)

# Funkcija izvora u liniji

- Može se pokazati da:

$$S = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}}$$

- U LTE ovo mora da bude jednako Plankovoj funkciji, pa:

$$S = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

- Ali odnosi izmedju konstanti važe uvek (zato su konstante), pa smo dobili:

$$\frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{2hc^2}{\lambda^5}$$
$$\frac{B_{ul}}{B_{lu}} = \frac{g_l}{g_u}$$

# Medjutim

- Funkcija izvora ne mora da bude u LTR
- Generalno, materija ne mora da bude u LTR!

$$j_{\lambda} = n_u A_{ul} \frac{hc}{4\pi\lambda} \phi_{\lambda}$$

$$\chi_{\lambda} = (n_l B_{lu} - n_u B_{ul}) \frac{hc}{4\pi\lambda} \phi_{\lambda}$$

- Pretpostavimo da je donji nivo ovog prelaza osnovni nivo (ovo generalno ne mora da bude slučaj).
- Koji nivo će lakše da odstupi od LTR?



# Odstupanje od LTR

- Ne-LTR: Bilo koje odstupanje od lokalne termodinamičke ravnoteže:

Od Sahine Raspodele

ili

Od Bolcmanove Raspodele

ili

Od Maksvelove Raspodele

Ovo će naš najčešće zanimati, da li možete da smislite proces koji će da “prevari” Bolcmanovu raspodelu?

Razmatrajte hladan gas, koji na neki način pogodimo svetlošću (npr laserom) koji tačno odgovara prelazu  $l \rightarrow u$ .

# Odstupanje od LTR

- Ne-LTR: Bilo koje odstupanje od lokalne termodinamičke ravnoteže:

Od Sahine Raspodele

ili

Od Bolcmanove Raspodele

ili

Od Maksvelove Raspodele

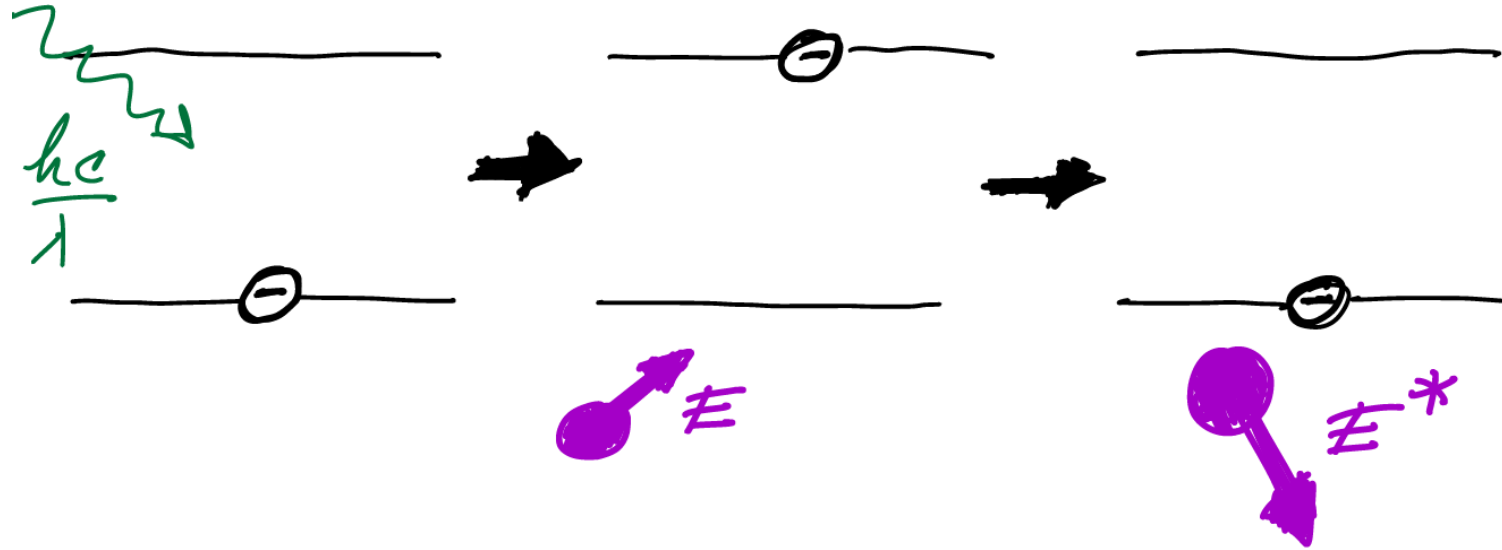
Ovo će naš najčešće zanimati, da li možete da smislite proces koji će da “prevari” Bolcmanovu raspodelu?

Razmatrajte hladan gas, koji na neki način pogodimo svetlošću (npr laserom) koji tačno odgovara prelazu  $l \rightarrow u$ .

Ovako možemo da ekscitujemo gas mnogo više nego što to njegova temperatura sugerije (par min o zagrevanju putem linija)

# LTR

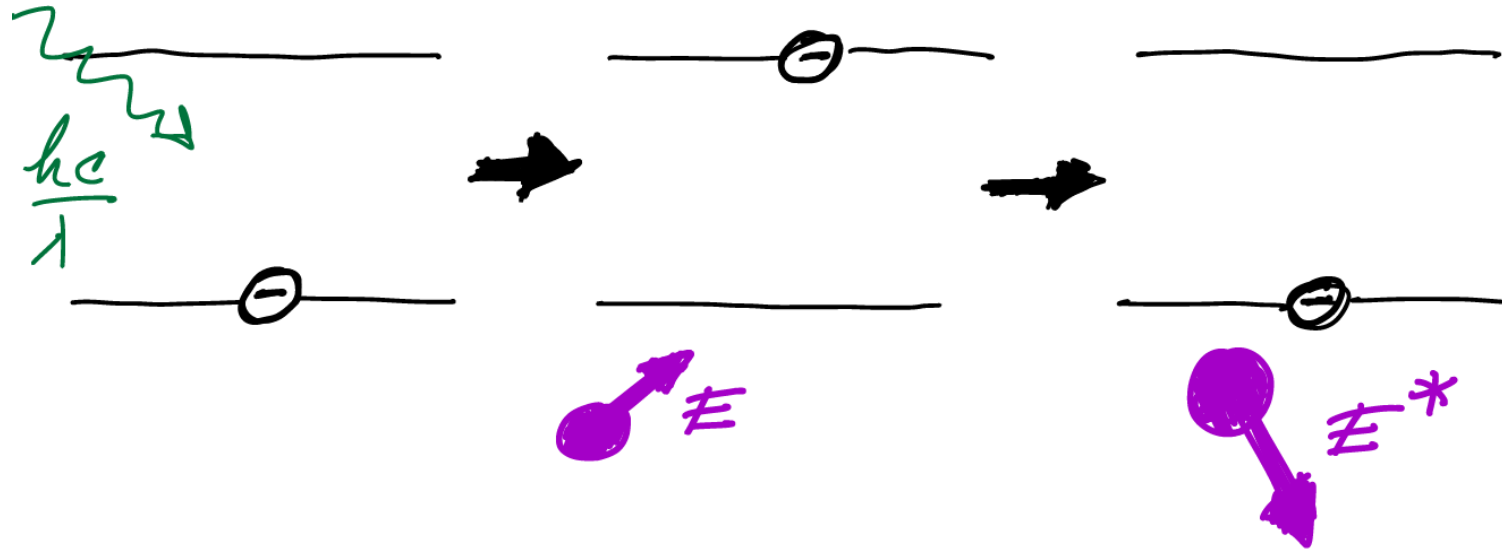
- Šta se dešavalo u fotosferi:



- Atom je apsorbovao foton, elektron je time prešao u više stanje.
- Atom se, pre nego što je atom stigao da otpusti foton, sudario sa nekom česticom i njoj predao tu energiju



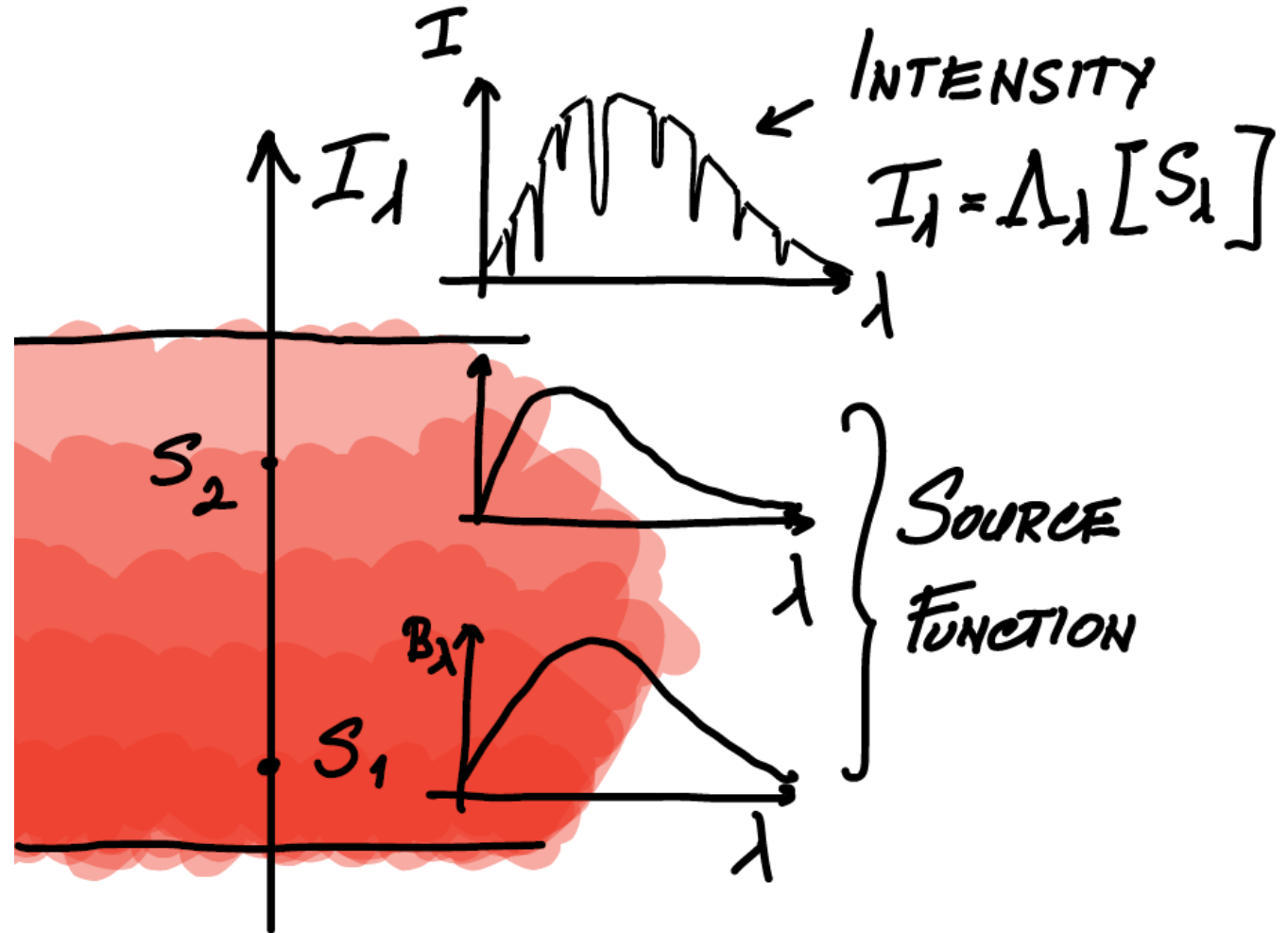
LTR



- Atom je apsorbovao foton, elektron je time prešao u više stanje.
- Atom se, pre nego što je atom stigao da otpusti foton, sudario sa nekom česticom i njoj predao tu energiju
- Ključ: odnos između učestanosti de-ekscitacije i učestanosti sudara!

# LTE i zračenje

- Još jednom podsetnik da LTR ne znači da je spektar zvezde spektar ACT
- Odnos između koeficijenta emisije i apsorpcije će pratiti Plankovu funkciju
- Izlazni intenzitet je i dalje rešenje JPZ
- Drugi način da mislimo o ovome: Temperatura se dovoljno brzo menja sa optičkom dubinom!



# LTR i zračenje

- U LTR zračenje ne deluje na materiju
- Materija određuje koeficijente apsorpcije i emisije pa samim tim i intenzitet
- Ovo čini LTR mnogo jednostavnijim nego ne-LTR (videćemo tokom sledećih nedelja)
- NE-LTR:



$$n_u = \frac{g_u e^{-E_u/kT}}{Z}$$

$$n_u \neq \frac{g_u e^{-E_u/kT}}{Z}$$



## III kao što stoji u knjizi Stellar Atmospheres III (Mihalas & Hubeny)

*"... the material's absorption and emission coefficients are set by the local radiation field. But in turn, local radiation field is the result of not only local photon emission and absorption, but also photons that have penetrated from other (perhaps remote) points in the atmosphere where the physical conditions might be quite different. In short, the radiation field determines the non-equilibrium properties of the material, but those properties in turn determine the radiation field. The two are inextricably coupled. This is the central problem in computing a theoretical stellar spectrum"*

Nije očigledno, ali povezano je sa ovim problemom:



2.5k



r/askscience · Posted by u/Forestlight\_ 1 month ago 2



## Why is the absorbtion spectra from stars not cancelled out by re-emission?

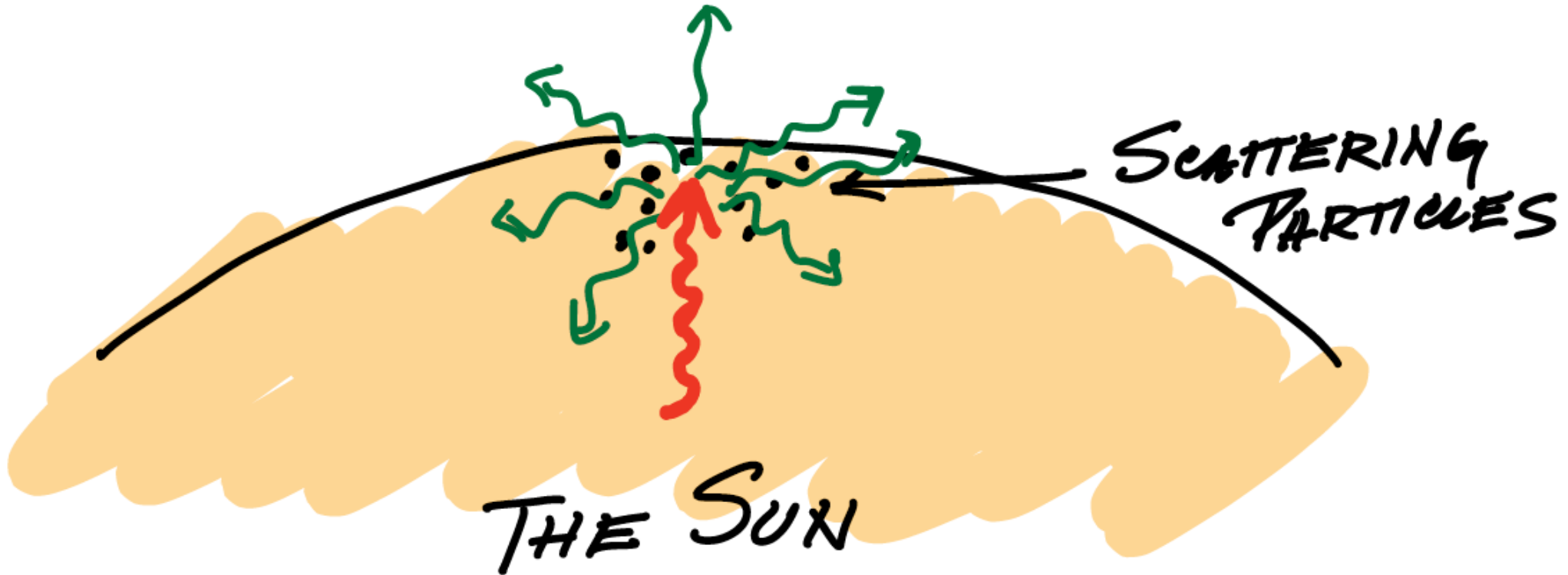
Astronomy



I have done some googling on this topic but I haven't found a definite answer. I know that atoms in stars can absorb photons of certain wavelengths and that these atoms can re-emit these photons. So the answer I usually read on this particular question is that while the light from the sun has to travel in a certain direction to reach the earth, the photons of a particular wavelength can be absorbed and re-emitted in every possible direction so that the amount of photons from that particular wavelength that reaches the earth is less than the other wavelengths. So here's my question: While the above is true for light traveling through a small region of a star, there have to be other regions in the sun that would send their light to a different part of the universe than our earth but their absorbed and re-emitted light can also be scattered in all directions so some of that light could be re-emitted in our direction when it otherwise wouldn't (without absorption and emission). So wouldn't all these regions cancel each other out? We receive less light from a particular wavelength from a certain region from the sun, but we also receive some light of that wavelength from other regions of the sun that don't send their light of "normal wavelengths" to us? If this wasn't true, where would these photons go? They can't just dissapear right? What am I missing here?

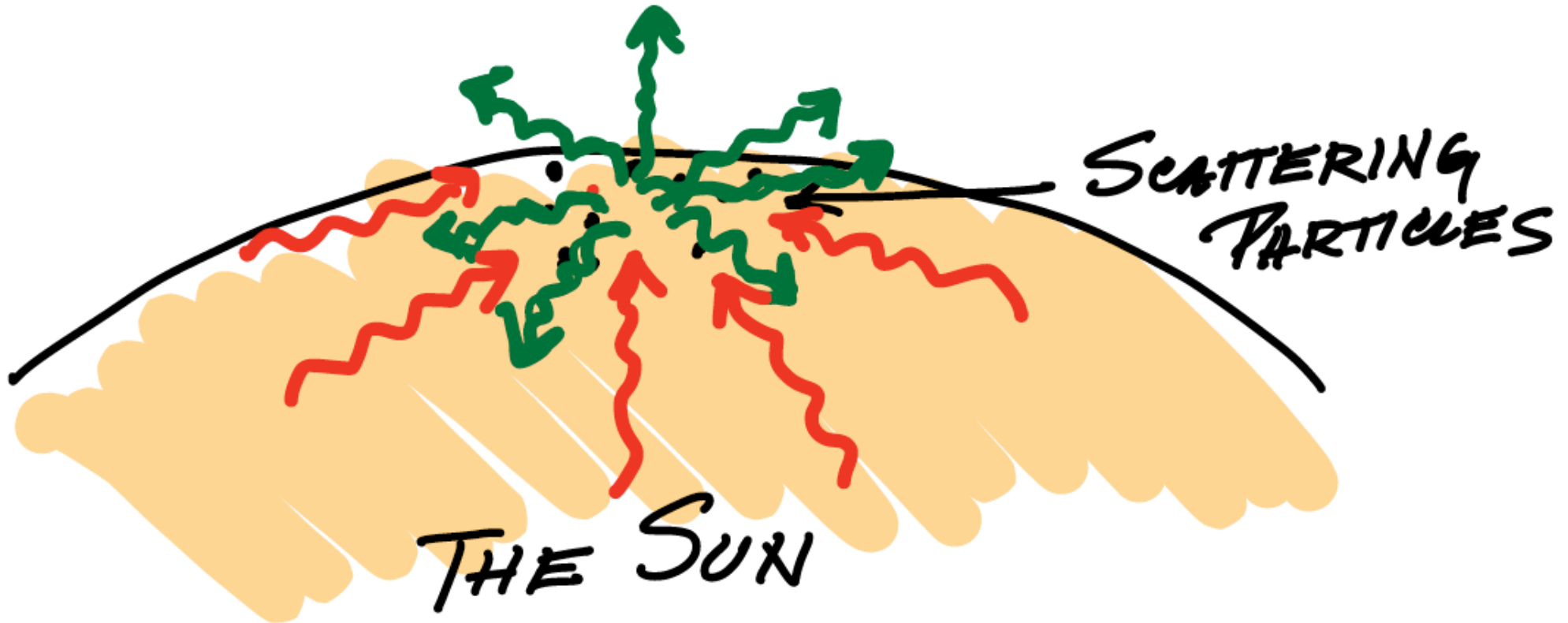
Da skiciramo (možemo i tablu):

- Crveno su apsorbovani fotoni, zeleno su rasejani (re-emitovani, 2-3 min diskusija)



Da skiciramo (možemo i tablu):

- Crveno su apsorbovani fotoni, zeleno su rasejani (re-emitovani, 2-3 min diskusija)



## Razmišljajmo o sledećem:

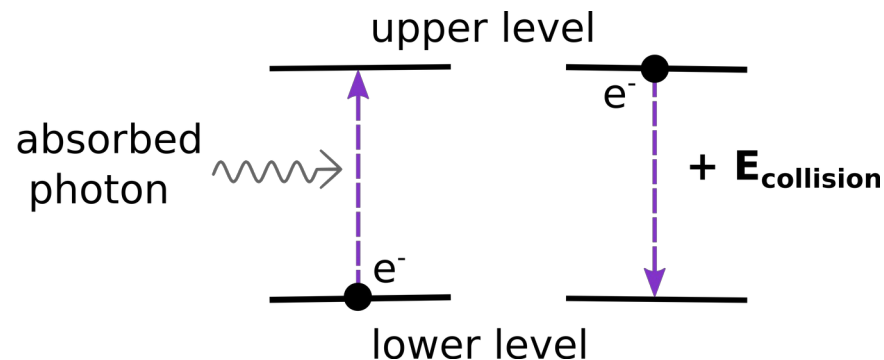
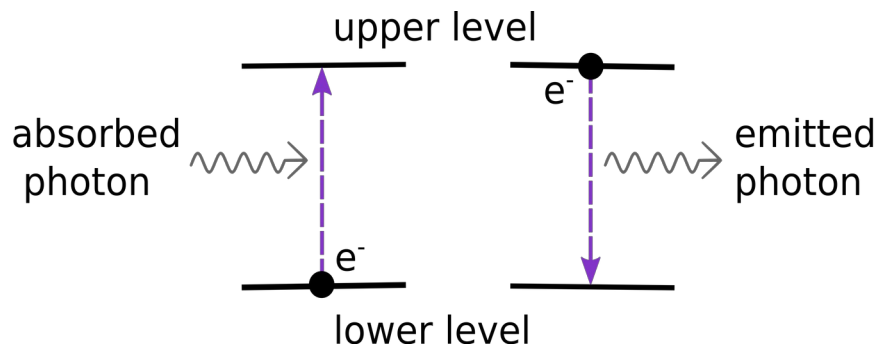
- Lako: Gledano duž pravca vizure, više se zračenja ukloni iz zraka nego što se vrati u zrak
- Malo teže: Ako hoćemo da obračunamo rasejanje u emitovane fotone (tj. u koeficijent emisije, moraćemo da se pomučimo)
- Još teže: Na kraju ovog problema ćemo ponovo završiti sa nekom integro-diferencijalnom jednačinom
- Zašto, odjednom, razmatramo rasejanje?



## Razmišljajmo o sledećem:

- Lako: Gledano duž pravca vizure, više se zračenja ukloni iz zraka nego što se vrati u zrak
- Malo teže: Ako hoćemo da obračunamo rasejanje u emitovane fotone (tj. u koeficijent emisije, moraćemo da se pomučimo)
- Još teže: Na kraju ovog problema ćemo ponovo završiti sa nekom integro-diferencijalnom jednačinom
- Zašto, odjednom, razmatramo rasejanje?
- Zato što jake linije na neki način rasejavaju svetlost. Prvi modeli su pretpostavili da je to slično procesima u kontinuumu (ne-LTR se često zove `line scattering`)

# Rasejanje (u) spektralnim linijama



- Apsorpcija nakon koje odmah sledi emisija
- Verovatnoća da u ovom procesu foton bude stvarno apsorbovan (termalizovan) je:

Učestanost  
sudarne de-  
ekscitacije

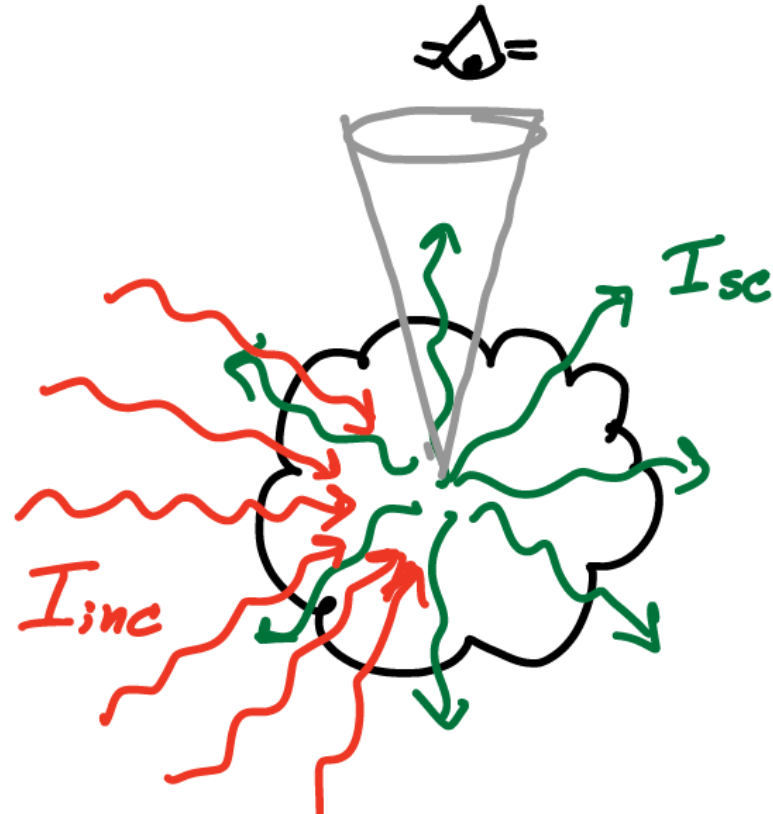
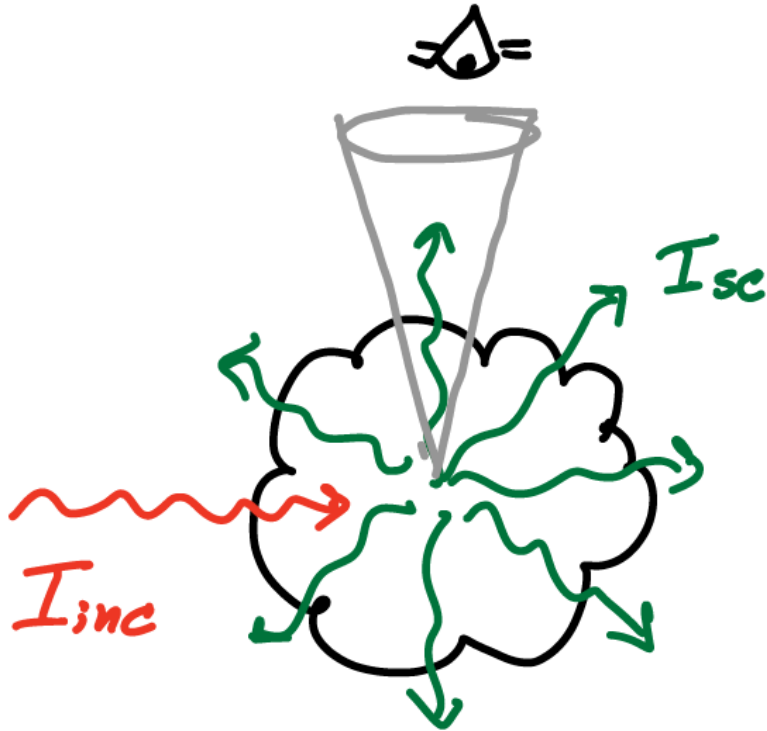
$$\epsilon = \frac{C_{ul}}{A_{ul} + C_{ul}} = \frac{\chi_{\text{abs}}}{\chi_{\text{abs}} + \chi_{\text{scatt}}}$$

# Koherentno rasejanje

- Mi još uvek ni ne znamo da spektralna linija može da emituje i apsorbuje na opsegu talasnih dužina
- Možemo da zamislamo da je onaj profil u stvari delta funkcija
- Dalje, pretpostavljamo da su fotoni su rasejani izotropno, znači odakle god dodju, ravnomerno se rasejavaju svuda
- Ovo uopšte i ne mora da bude spektralna linija, može da bude npr. Tomsonovo ili Rejljevo rasejanje
- Hajde da se uverimo da je verovatnoća za apsorpciju:  $\epsilon = \frac{\chi_a}{\chi_s + \chi_a}$
- Gde indeksi a i s stoje za apsorpciju i rasejanje (scattering)

# U kom slučaju ćemo videti više rasejanih fotona?

- Ili: U kom slučaju će emisija usled rasejanja biti veća.  
(Par minuta da prodiskutujemo emisiju)



# Koeficijent emisije u kontinuumu usled rasejanja

- Hajde da nadujemo ukupnu rasejanu energiju:

$$dE_s(\theta, \phi) = \chi_s dl I(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi dA dt d\lambda$$

$$dE_s = \chi_s dl \left( \oint I(\theta, \phi) \sin \theta d\theta \right) d\phi dA dt d\lambda$$

$$j_s = \frac{dE_s}{dA dl dt d\Omega d\lambda} = \chi_s \frac{\oint I(\theta, \phi) \sin \theta d\theta}{4\pi}$$

$$j_s = \chi_s J$$

Ponovo smo  
dobili srednji  
intenzitet!

Ako ovo sada zamenimo nazad u JPZ:

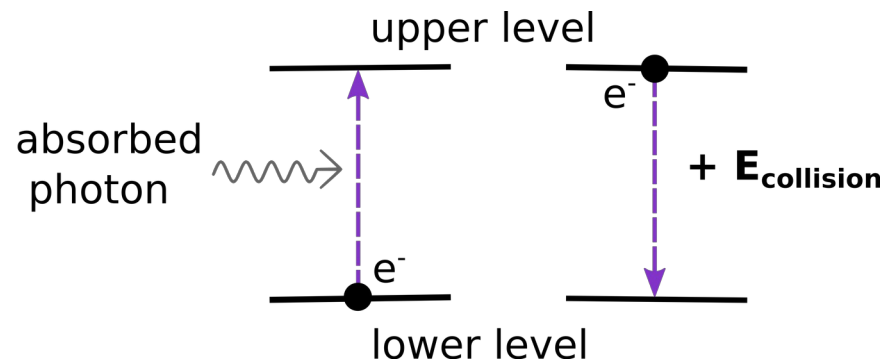
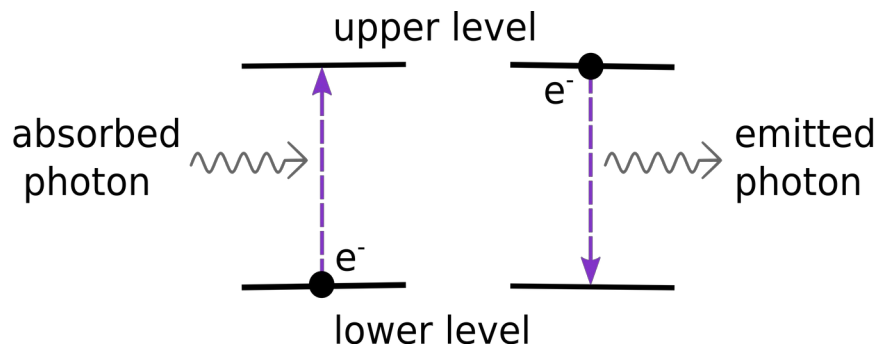
- Dobijamo integro-diferencijalnu jednačinu:

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - \epsilon B - (1 - \epsilon) \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\mu) d\mu$$

- Slično kao problem ravnoteže zračenja samo smo sada fiksirani na jednu talasnu dužinu.



# Nazad na rasejanje u linijama



- Možemo da pretpostavimo (videćemo kasnije da ima boljih pretpostavki), da će se linija ponašati isto kao kontinuum, samo sa malo drugačijim (ali konceptualno istim) izrazom za epsilon:

Učestanost  
sudarne de-  
ekscitacije

$$\epsilon = \frac{C_{ul}}{A_{ul} + C_{ul}} = \frac{\chi_{\text{abs}}}{\chi_{\text{abs}} + \chi_{\text{scatt}}}$$

## (Klasični) modeli formiranja spektralnih linija

- Termalna emisija i apsorpcija (Schwartzshield, 1914):

$$S_{\lambda}^l = B_{\lambda}(T)$$

- Izotropno i koherentno rasejanje (Shuster, 1905):

$$S_{\lambda}^l = J_{\lambda}$$

- Milne-Eddingtonov model: i termalni procesi i rasejanje (koherentno i izotropno)

$$S_{\lambda}^l = L_{\lambda}B_{\lambda} + (1 - L_{\lambda})J_{\lambda}$$

Videćemo da je jedino u ovom poslednjem slučaju funkcija izvora zavisna od  $\lambda$ !

# Milne-Eddingtonov model

- Zove se tako ne zato što pretpostavljamo linearnu funkciju izvora već zato što se rešava jako slično kao problem RZ (Milneov problem)

$$S_{\lambda}^l = L_{\lambda}B_{\lambda} + (1 - L_{\lambda})J_{\lambda}$$

- Izvedimo izraz za funkciju izvora u liniji ako:

$$\chi_{\lambda} = \chi^c + \chi_{\lambda}^l$$

$$\chi^c = \kappa^c + \sigma^c$$

- Da li sam svuda stavio dobre zavisnosti od talasne dužine?

$$\chi_{\lambda}^l = \chi^l \phi_{\lambda}$$

- Obratite pažnju da intenzitet i dalje zavisi od talasne dužine!

$$j_{\lambda} = j_{\lambda}^c + j_{\lambda}^l$$

$$j_{\lambda}^c = k^c B + \sigma^c J_{\lambda}$$

$$j_{\lambda}^l = \epsilon B \phi_{\lambda} + (1 - \epsilon) J_{\lambda} \phi_{\lambda}$$

Da sumiramo:

- Računanje (modelovanje) spektra u spektralnim linijama prati iste korake kao za kontinuum
- Izračunamo neprozračnost
- Zavisno od aproksimacije, nadjemo funkciju izvora u liniji (na željenim talasnim dužinama)
- Rešavamo:

$$I_{\lambda}^{+} = \int_0^{\infty} S_{\lambda}(\tau_{\lambda}) e^{-\tau_{\lambda}} d\tau_{\lambda}$$

- Videćemo da je ovo samo konačno računanje izlaznog spektra i da ćemo možda u medjuvremenu morati da rešimo još mnogo JPZ da bismo našli funkciju izvora.