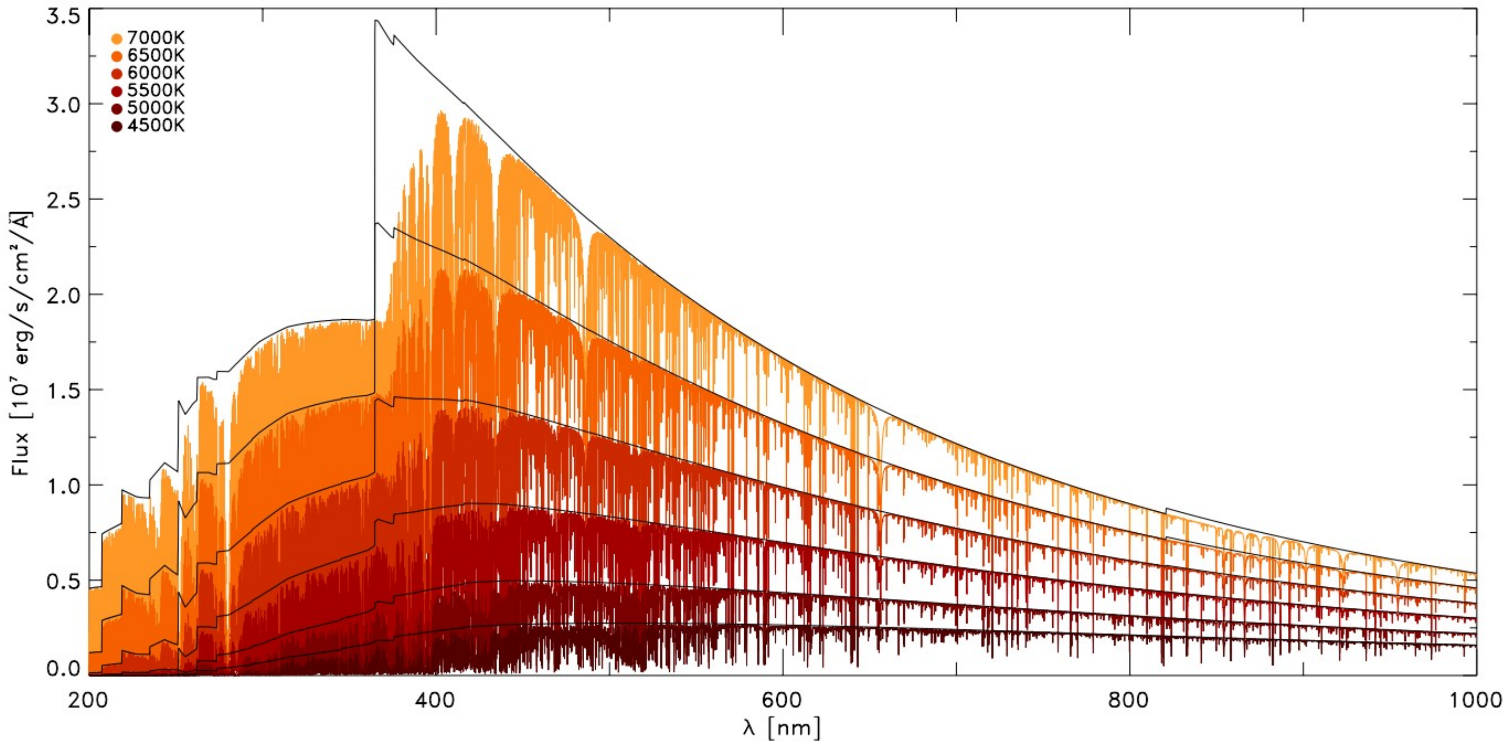


Teorija Zvezdanih Spektara
Lekcija 6: Momenti JPZ i modelovanje Atmosfera

Ivan Milić (AOB / MATF)
14/11/2023

Podsetnik

- Sada znamo da rešimo jednačinu prenosa ako su nam dati skala optičkih dubina i funkcija izvora, u bilo kom pravcu, za bilo koju dubinu u 1D plan-paralelnoj atmosferi.

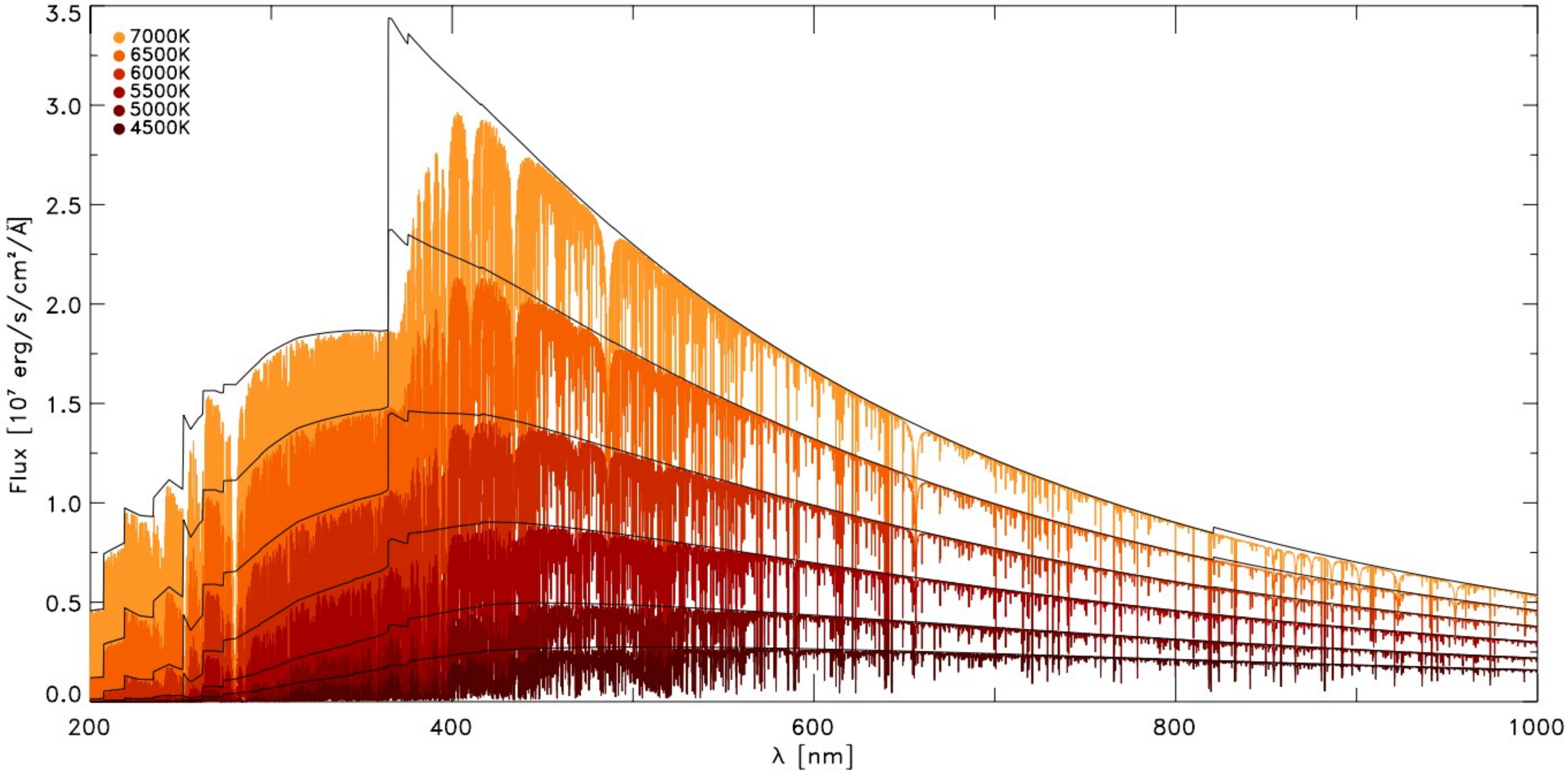
$$I_\lambda(\tau_\lambda, \mu > 0) = \int_{\tau_\lambda}^{\infty} S(t) e^{-(t-\tau_\lambda)/\mu} dt/\mu$$

$$I_\lambda(\tau_\lambda, \mu < 0) = \int_{0}^{\tau_\lambda} S(t) e^{-(\tau_\lambda - t)/|\mu|} dt/|\mu|$$

- Znamo i da lepo aproksimiramo funkciju izvora (Plankova f-ja, LTR) i da izračunamo neprozračnost (sistem Sahinih jednačina → Boltzmann → saberemo sve doprinose (b-f, f-f, itd.).

- Mi smo, u principu, spremni da računamo spektre na osnovu datih modela zvezdanih atmosfera. **10 min podsetnik i diskusija**

Dakle sada bi trebalo da možemo da razumemo ovaj plot



Magic et al. (2015) – ovo izračunate zvezdane atmosfere

Sledeći korak – dve opcije

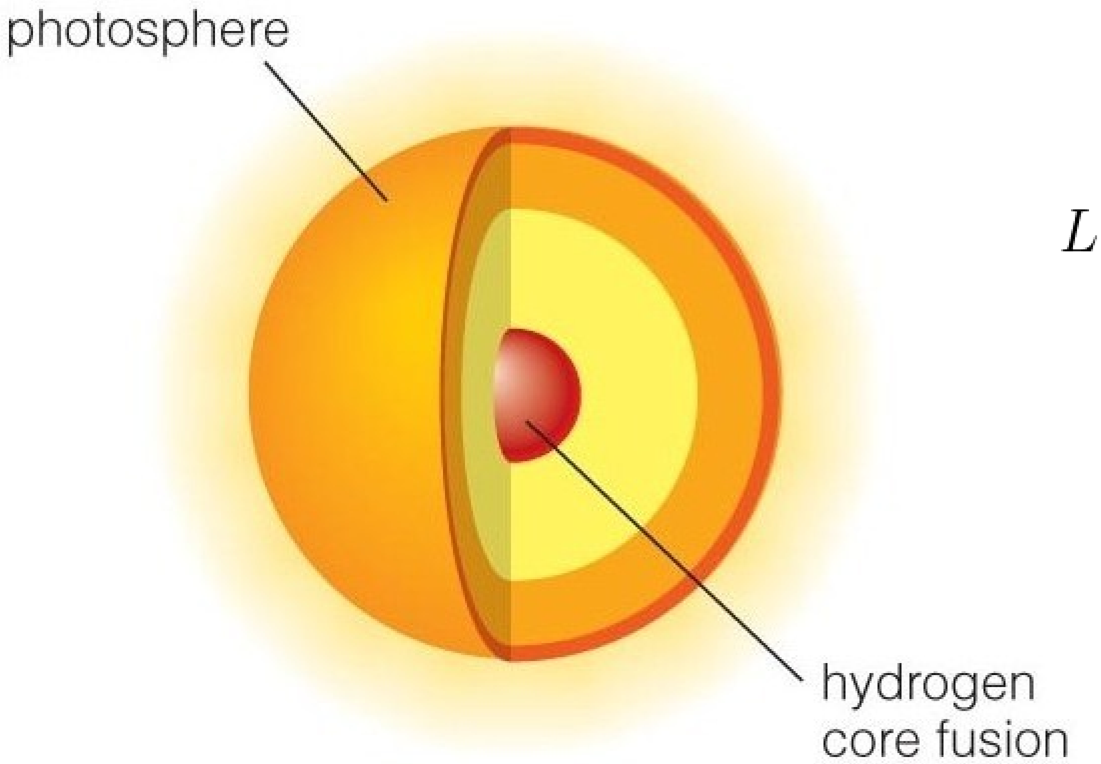
- Zračenje interaguje sa materijom i utiče na strukturu zvezdane atmosfere. Uz neke dodatne aproksimacije možemo da nadjemo strukturu atmosfere za date zvezdane parametre

- Zračenje (pre svega u spektralnim linijama) je osetljivo na različite parametre na različitim dubinama u atmosferi. Detaljno modeliranje spektralnih linija će nam omogućiti da zaključimo ove parametre

- **Tokom ostatka kursa ćemo se baviti sa oba aspekta!**

Prenos energije kroz zvezdu

- Energija zvezdi nastaje u jezgru, van jezgra mora da važi zakon održanja energije!



$$L(r) = \frac{dE^{\text{out}} - dE^{\text{in}}}{dt} = \text{const}$$

$$4r^2\pi F(r) = \text{const}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F(r) &\approx \text{const} \\ \int_0^\infty F_\lambda(z)d\lambda &= \text{const} \end{aligned}}$$

Dimenzije atmosfere su mnogo manje od poluprečnika zvezde

Specifični monohromatski fluks (gustina fluksa)

- Količina energije transportovana kroz jediničnu površinu, u jedinici vremena po jedinici talasne dužine. Gledamo **neto** energiju.

$$F_\lambda = \oint I_\lambda \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\mu = \cos\theta$$

$$F_\lambda = 2\pi \int_{-1}^{1} I_\lambda(\mu)\mu d\mu$$

- Nekad ćete naći:

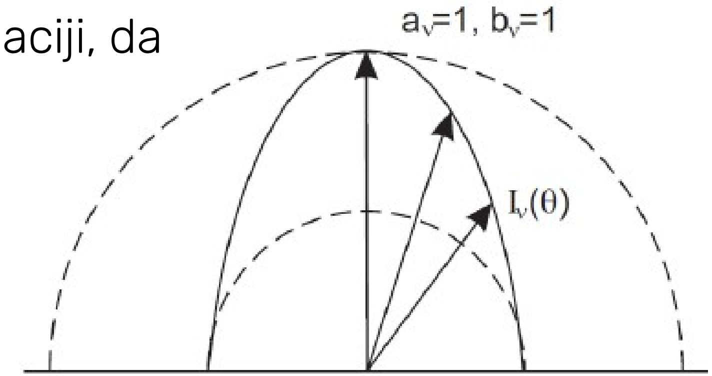
$$\mathcal{F}_\lambda = 2\pi \int_{-1}^{1} I_\lambda(\mu)\mu d\mu$$ Fluks

$$F_\lambda = 2 \int_{-1}^{1} I_\lambda(\mu)\mu d\mu$$ Astrofizički fluks

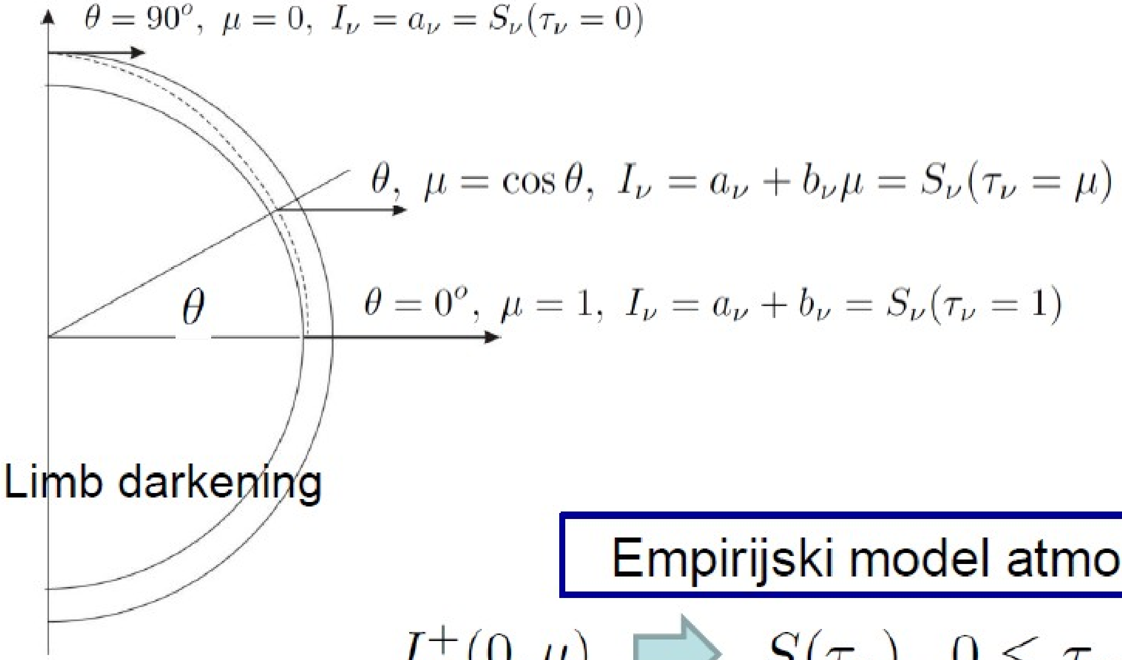
$$\Phi_\lambda = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} I_\lambda(\mu)\mu d\mu$$ Eddingtonov fluks

Nazad na Milne-Eddingtonovu aproksimaciju

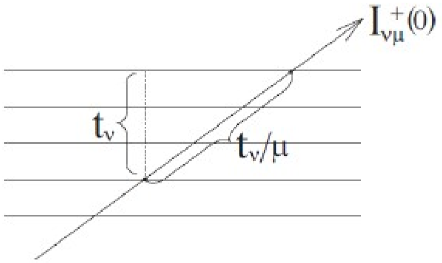
- Rešili smo JPZ u ME (Milne-Barbier-Unsold-ovoj) aproksimaciji, da dobijemo tzv. Eddington Barbier relaciju



$$I^+(\mu) = a + b\mu$$



$$\boxed{I_\nu(0,\mu) = S_\nu(\tau_\nu = \mu)}$$



Empirijski model atmosfere

$$I^+_\nu(0,\mu) \Rightarrow S(\tau_\nu),\ 0 \leq \tau_\nu \leq 1 \Rightarrow T(\tau_\nu)$$

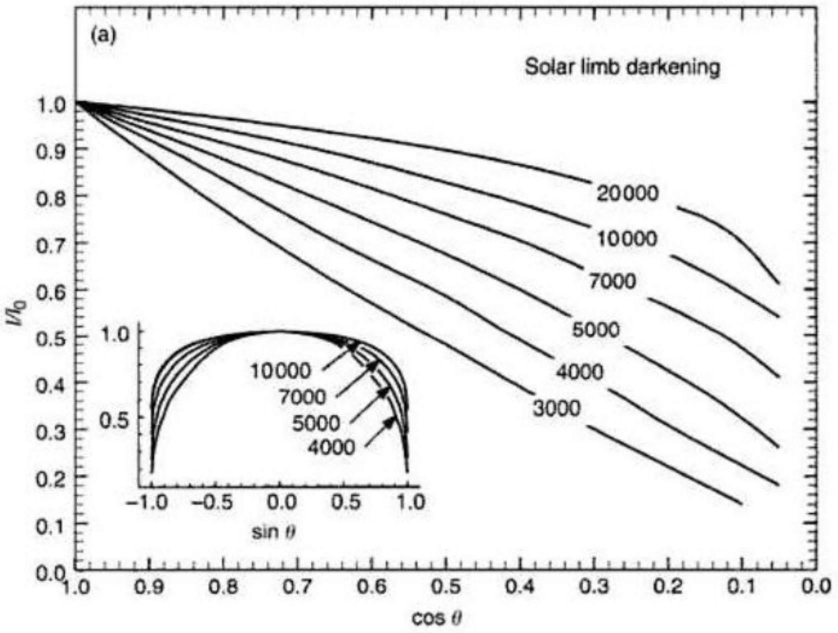
LTR

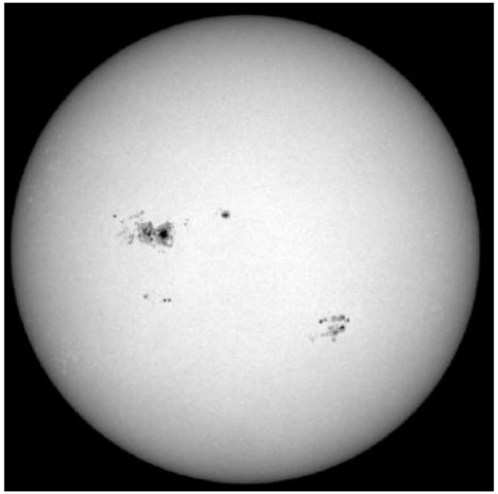
Mapiranje atmosfere po dubini

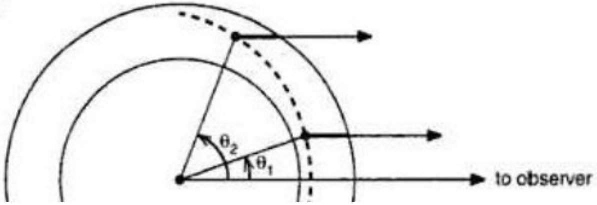
- Ideja je da posmatranjem limb darkeninga zaključimo raspodelu temperature po dubini

- U prvom koraku pretpostavljamo ME aproksimaciju, u drugom LTR

$$I_\lambda^+(\mu) \to S_\lambda(\tau_\lambda) \to T(\tau_\lambda)$$

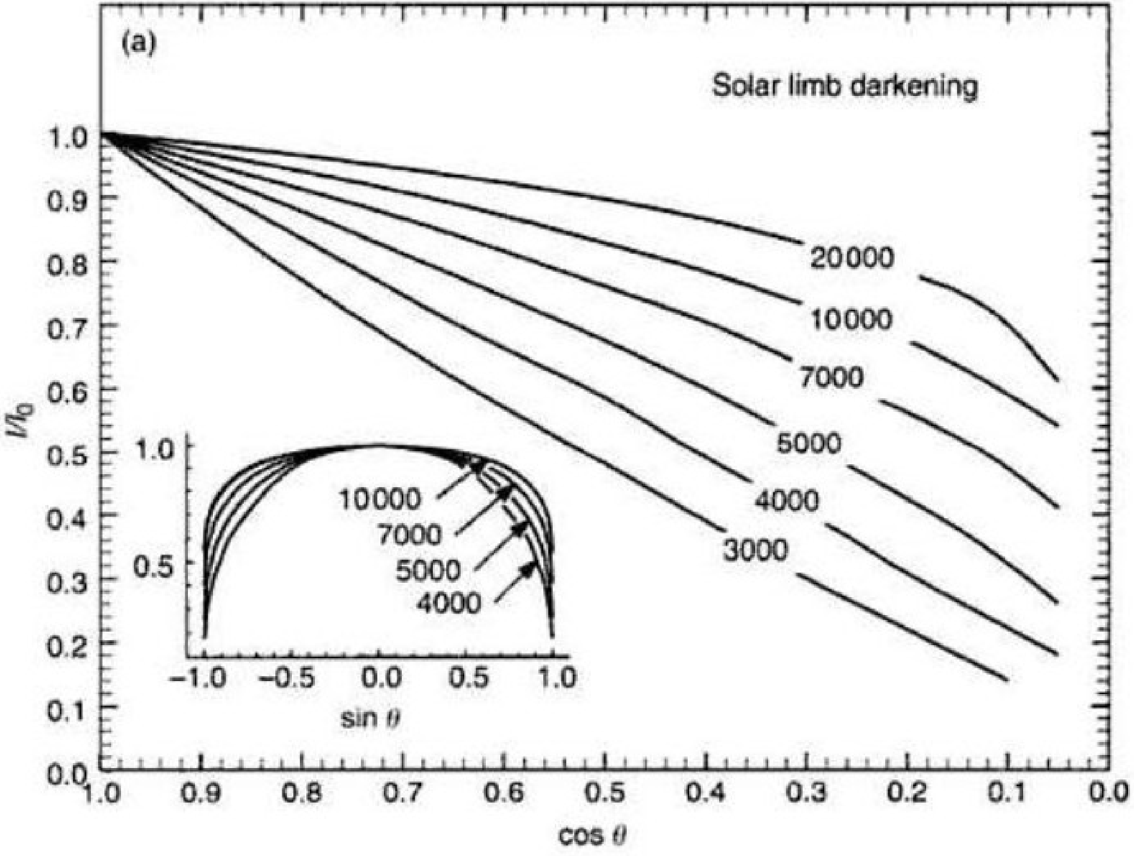






Limb darkening (potamnjenje ka rubu)

- Limb darkening zavisi od talasne dužine, zašto? (**tabla, podsetnik na model Sunčeve atmosfere)**



Limb darkening (potamnjenje ka rubu)

- Limb darkening zavisi od talasne dužine, zašto?
- Koeficijent apsorpcije zavisi od talasne dužine
- Funkcija izvora (Plankova funkcija) zavisi od talasne dužine: Setite se da je na većim talasnim dužinama funkcija izvora bila manje “strma” (vežbe od prošlog petka)
- Gledanje istog objekta pod različitim uglovima i na različitim talasnim dužinama nam daje uvid u raspodelu temperature po dubini.
- Ovo je tema koja će se provlačiti kroz ostatak kursa.

Milne-Eddingtonova aproksimacija za Fluks

- Pod pretpostavkom linearne funkcije izvora, izračunajte izlazni fluks
- Samostalan rad 5-6 min.

Milne-Eddingtonova aproksimacija za Fluks

- Pod pretpostavkom linearne funkcije izvora, izračunajte izlazni fluks

$$S_\lambda = a_\lambda + b_\lambda \tau_\lambda$$

$$\mathcal{F}_\lambda = 2\pi \int_{-1}^{1} I_\lambda^+ \mu d\mu = 2\pi \int_0^1 (a_\lambda + b_\lambda \mu) \mu d\mu$$

$$\mathcal{F}_\lambda = \pi(a_\lambda + \frac{2}{3} b_\lambda) = \pi S(\tau_\lambda = 2/3)$$

"Siva Atmosfera"

- Sve do sada izvedeno zavisi od talasne dužine (frekvencije). Možemo li nekako ustanovimo neku generalniju skalu dubina

- Aproksimacija sive atmosfere pretpostavlja da radimo samo sa jednom talasnom dužinom koja (nadamo se dobro) opisuje atmosferu

- Ovime opisujemo **celokupan** transport zračenja kroz zvezdanu atmosferu jednom talasnom dužinom

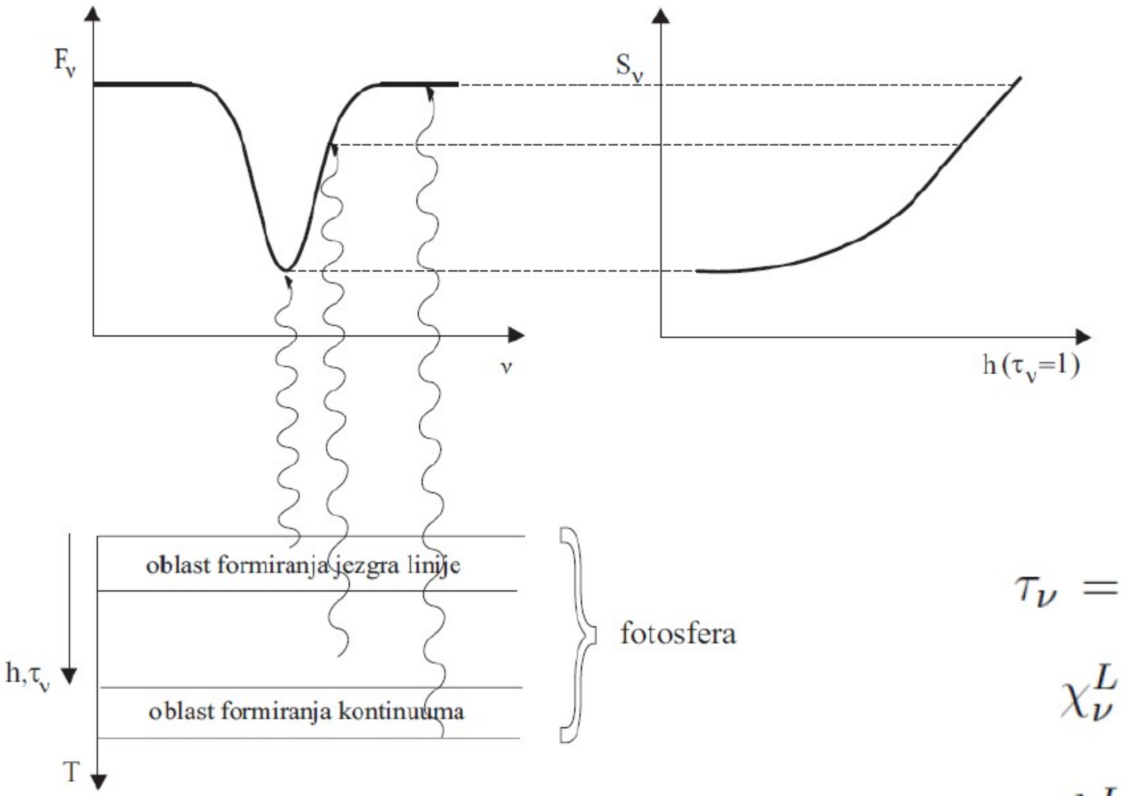
- Ova aproksimacija je očigledno netačna, ali može da nam pruži uvid u to kakve strukture atmosfere imaju smisla

- M-E relacija za fluks postaje:

$$\mathcal{F} = \pi S(\tau = 2/3)$$
$$T_{\text{eff}} = T(\tau = 2/3)$$

- Da li ova efikasna temperatura ima smisla? Pogledajte FALC model i ocenite!

Milne-Eddington relacija za linije - opisno



$$\tau_\nu = \chi_\nu \cdot h \approx 2/3$$

$$\chi_\nu^L >> \chi_\nu^c$$

$$h^L << h^c$$

$$T(h^L) < T(h^c)$$

Fotoni iz jezgra linije (za koje je velika neprozračnost) potiču iz viših slojeva, dok fotoni u krilima linije (gde je neprozračnost manja) stižu iz dubljih slojeva atmosfere.

Modeliranje zvezdanih atmosfera

- Videli smo da možemo da, na osnovu posmatranja limb darkeninga, probamo da zaključimo distribuciju temperature u Sunčevoj atmosferi.
- Sledeće pitanje je: Šta diktira tu raspodelu? Koji modeli imaju smisla? Koja fizika je važna?
- Pretpostavimo relevantnu fiziku.
- Rešimo jednačine.
- Uporedimo sa posmatranjima / merenjima.
- Zaključimo šta iz našeg modela radi a šta ne radi (ili suočimo modele).
- Videćete da se jako slična priča priča na Fizičkim Principima Strukture Zvezda
- "Kakve zvezde smeju da postoje?"

Ravnoteža zračenja

- Drugi način da napišemo da je fluks konstantan sa dubinom:

$$E^{\text{abs}} = E^{\text{em}}$$

$$dAdtdl \oint \int I_\lambda \chi_\lambda d\lambda d\Omega = dAdtdl \oint \int j_\lambda d\lambda d\Omega$$

$$\int J_\lambda d\lambda = \int S_\lambda d\lambda$$

- Šta smo ovde sve pretpostavili? (2–3 min diskusija)

Ravnoteža zračenja

- Drugi način da napišemo da je fluks konstantan sa dubinom:

$$E^{\mathrm{abs}} = E^{\mathrm{em}}$$

$$dAdtdl \oint \int I_\lambda \chi_\lambda d\lambda d\Omega = dAdtdl \oint \int j_\lambda d\lambda d\Omega$$

$$\int J_\lambda d\lambda = \int S_\lambda d\lambda$$

- Šta smo ovde sve pretpostavili? Da energija biva očuvana (razumno, nema nuklearnih reakcija van jezgra). Da su koeficijent apsorpcije i funkcija izvora izotropni (razumno).
- Pažnja! Ravnoteža zračenja važi iako temperatura opada sa visinom!

A šta je ovo "J"? Srednji intenzitet

- Srednji intenzitet je bukvalno intenzitet usrednjen po pravcu. Dakle, kao da računamo koliko fotona stigne u neku tačku, bez obzira na pravac iz kog dolaze.

Srednji intenzitet

$$J_\lambda = \frac{1}{4\pi} \oint I_\lambda(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi$$

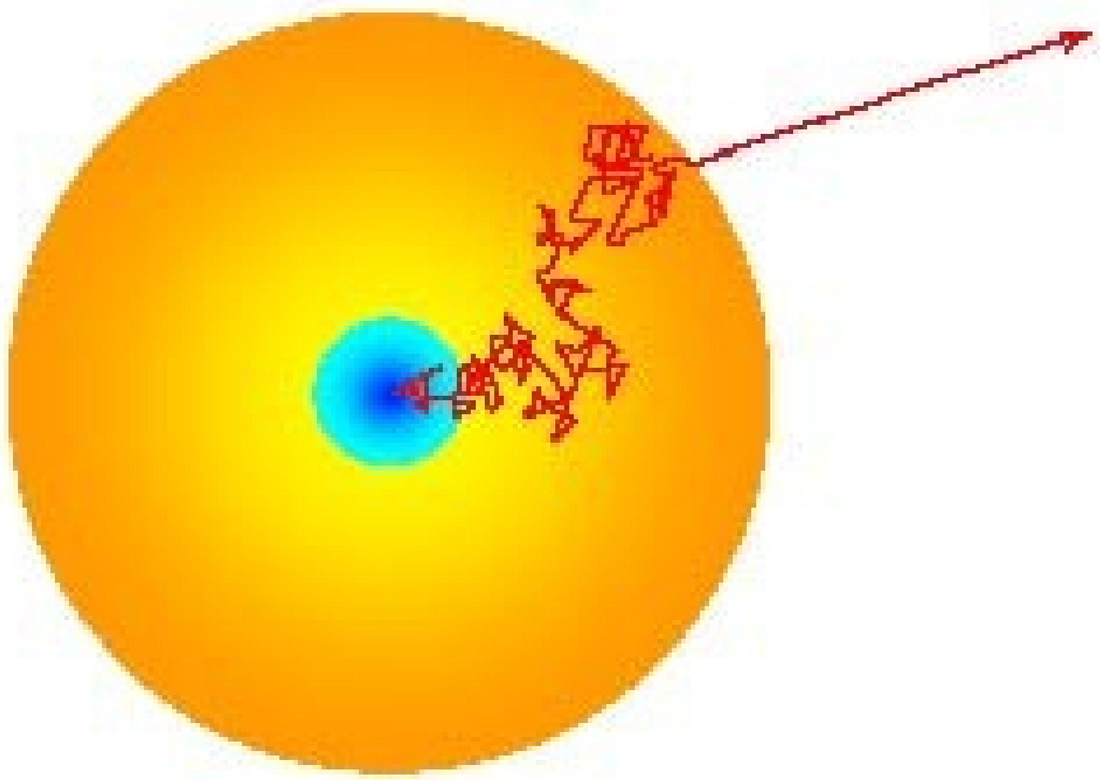
$$J_\lambda = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} I_\lambda(\mu) d\mu$$

Eddingtonov fluks, definisan da izgleda kao srednji intenzitet (naravno, obratite paznju na dodatno **mi**)

$$H_\lambda = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} I_\lambda(\mu) \mu d\mu$$

Sećate li se ovog primera? Fotonu treba x godina da napusti Sunce

- Izgleda da nisam jedini kog taj primer nervira: https://www.askamathematician.com/2013/08/q-why-does-it-take-thousands-of-years-for-light-to-escape-the-sun/



Besmisleno je da pričamo o "fotonu", svetlost konstantno menja svoju spektralnu raspodelu, time što se energija zračenja pretvara u toplotnu i obrnuto, te je mnogo bolje reći da se prosto toplota prenosi do površine a fotoni koje vidimo nastaju da površini!
(Ili na tau = 1 ;))

Ravnoteža zračenja u unutrašnjosti zvezde

Uslov R.Z.

$$\mu \frac{dI_\nu(h,\mu)}{dh} = \chi_\nu(h) I_\nu(h,\mu) - \eta_\nu(h)$$

$$\frac{d}{dh}\int_0^\infty d\nu \int I_\nu(h,\mu)\mu d\omega = \frac{d}{dh}\int_0^\infty \mathcal{F}_\nu(h) d\nu = 0$$

$$\boxed{\mathcal{F}(h) = \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu(h) d\nu = \pi F(h) = \mathrm{const}}$$

$$\boxed{\mathcal{F}_* = \pi F = \sigma T_{ef}^4}$$

$$\mu \frac{1}{\chi_\nu(h)} \frac{dI_\nu(h,\mu)}{dh} = I_\nu(h,\mu) - S_\nu(h)$$

$$\int d\nu \int \mu d\omega$$

$$\mathcal{F} = 4\pi \int \frac{1}{\chi_\nu}\frac{dK_\nu}{dh} d\nu = c\int \frac{1}{\chi_\nu}\frac{dp_\nu}{dh} d\nu = \mathrm{const}$$

$$\mathcal{F} = c\frac{1}{\chi}\frac{dp^{zr}}{dh} \qquad p^{zr} = \frac{4\pi}{c}K \qquad K \approx \frac{1}{3}J \approx \frac{1}{3}B = \frac{1}{3}\frac{\sigma T^4}{\pi}$$

$$\boxed{\mathcal{F} = \frac{c}{\chi}\frac{4\pi}{c}\frac{4}{3\pi}\sigma T^3 \frac{dT}{dh} = \frac{16}{3}\frac{\sigma}{\chi}T^3 \frac{dT}{dh}}$$

Temperaturski gradijent je odredjen ukupnim energetskim fluksom. To omogućava da se T(h) u atmosferi dobije iz uslova ravnoteže zračenja.

Šta je "K-integral"?

- Drugi moment intenziteta:
  ili, za sivu, 1D atmosferu:

$$K = \int K_\lambda d\lambda = \frac{1}{4\pi} \int \oint I_\lambda \cos^2\theta d\Omega d\lambda$$

$$K = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} I(\mu)\mu^2 d\mu$$

- Koji je fizički smisao K integrala?
- K integral je proporcionalan **pritisku zračenja:**

$$p = \frac{4\pi}{c} K$$

- **Takodje, za izotropno zračenje J = 3K (pokazati, tabla nekoliko minuta)**

Momenti intenziteta (momenti polja zračenja)

- Ovo je pod pretpostavkom sive, 1D plan paralelne atmosfere. U generalnom slučaju, sve vrednosti zavise od talasne dužine i integracija se vrši po oba ugla

$$J = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(\mu)d\mu$$

$$H = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(\mu)\mu d\mu$$

$$K = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(\mu)\mu^2 d\mu$$

- Ukoliko je intenzitet izotropan, lako se dobija da: $J = I = 3K$

$$H = 0$$

Ravnoteža zračenja u sivoj atmosferi

- Ako pretpostavimo sivu atmosferu, ne moramo da brinemo o “preraspodeli” po talasnim dužinama, funkcija izvora mora da bude jednaka srednjem intenzitetu.

$$S = J$$

- Sa druge strane, sve vreme radimo pod pretpostavkom LTR, pa:

$$S = B = J$$

- Srednji intenzitet zračenja je **direktno kuplovan** sa temperaturom. Dakle struktura naše atmosfere je odredjena uslovom ravnoteže zračenja.
- Kako naći model atmosfere koji, **za dati fluks (zašto baš za dati fluks?),** ispunjava jednačinu prenosa i ravnotežu zračenja?

Milneov problem

$$\mu\frac{dI}{d\tau} = I - S = I - J$$

- Intenzitet zavisi od samog sebe!
- Ovo je primer **spregnutosti (kuplovanja)** u prenosu zračenja. Videćemo još ovakvih situacija kada budemo razmatrali takozvanu ne-LTR.
- Ovo je primer tzv. Integro-diferencijalne jednačine:

$$\mu\frac{dI}{d\tau} = I - S = I - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(\mu)d\mu$$

- I zavisi od J(S) a J zavisi od I, ovo je spregnutost.
- Zar ne bi bilo lepo da možemo da napišemo ovo tako da imamo jednu nepoznatu **funkciju?**

Lambda operator

- Proces intergracije JPZ i integracije po uglovima možemo da zovemo **operatorom.** Zato što od jedne funkcije (S) pravimo drugu funkciju (J).

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(\mu)d\mu = \\
&= \frac{1}{2}\int_{\tau}^{\infty} S(t)e^{(\tau-t)/\mu}dt/\mu + \frac{1}{2}\int_{0}^{\tau} S(t)e^{(t-\tau)/|\mu|}dt/|\mu| = \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} S(t)E_1(|t-\tau|)dt
\end{aligned}
$$

$$J(\tau) = \Lambda_\tau[S(t)]$$

"Kernel", u ovom slučaju tzv. prvi eksponencijalni integral

Švarcšild-Milne jednačine. Momenti intenziteta

$$\int_{-1}^{1} I_\nu(\tau_\nu, \mu)\mu^n d\mu =$$

$$\int_0^1 \mu^n d\mu \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu) e^{-(t_\nu-\tau_\nu)/\mu} \frac{dt_\nu}{\mu} + \int_{-1}^{0} \mu^n d\mu \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) e^{-(t_\nu-\tau_\nu)/\mu} \frac{dt_\nu}{-\mu}$$

$$\int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu) dt_\nu \int_1^{\infty} e^{-(t_\nu-\tau_\nu)y} \frac{dy}{y^{n+1}} + (-1)^n \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) dt_\nu \int_1^{\infty} e^{-(\tau_\nu-t_\nu)y} \frac{dy}{y^{n+1}} =$$

$$\int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu) E_{n+1}(t_\nu-\tau_\nu) dt_\nu + (-1)^n \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) E_{n+1}(\tau_\nu-t_\nu) dt_\nu$$

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xy}}{y^n} dy$$

Šta su ove funkcije En?

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xy}}{y^n} dy$$

- Eksponencijalni integrali!
- “Kerneli” prenosa zračenja koji nam omogućavaju da dobijemo različite momente intenziteta “direktno” iz funkcije izvora.
- Na osnovu njih možemo da definišemo operatore, slične **Lambda** operatoru

$$\mathcal{F}_\tau = \Phi_\tau[S(t)]$$
$$K_\tau = \frac{1}{4} X_\tau[S(t)]$$

- Milneova jednačina za fluks & K-integral
- Do na konstante, koje možemo da odredimo dimenzionom analizom, važi da je:
- n-ti moment intenziteta zračenja na nekoj optičkoj dubini jednak integralu Funkcije izvora puta eksponencijalni integral n+1-og reda, po optičkoj dubini.

Srednji intenzitet kroz Lambda operator

Razložimo detaljno šta je srednji intenzitet preko formalnog rešenja:

$$
\begin{aligned}
J(\tau) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(\tau,\mu)d\mu \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\int_{\tau}^{\infty} S(t)e^{(t-\tau)/\mu}\frac{dt}{|\mu|}d\mu + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\tau} S(t)e^{(\tau-t)/\mu}\frac{dt}{|\mu|}d\mu = \\
&= \int_{0}^{\infty} S(t)E_1(|t-\tau|)dt
\end{aligned}
$$

- Hajde da vidimo kako izgleda raspodela od J sa dubinom za neke date S(t), tj. kako izgleda **transformacija S u J.**