

# Prvi Domaći zadatak

TZS

22. novembar 2025.

U izradi domaćeg zadatka se možete konsultovati međusobno i sa mnom. Svaki domaći koji predajete, međjutim, mora biti samostalno napisan.

**Rok za predaju ovog domaćeg zadatka je petak 31.12.2025. 23:59.**

## 1 Setup i atmosferski model

Cilj ovog zadatka je da sintetizujete profil spektralne linije u lokalnoj termodinamičkoj ravnoteži (LTE) iz datog atmosferskog modela (u ovom slučaju poznatog FALC modela iz rada Averett et al. 1993). Izračunavate populacije atomskih nivoa koristeći Boltzmanovu i Sahinu jednačinu, zatim neprozračnost i funkciju izvora, i konačno rešiti JPZ. U procesu ćete takođe implementirati realističnu neprozračnost u kontinuumu.

Koristite dati jednodimenzioni atmosferski model dat u fajlu `falc71.dat`. Učitajte ga pomoću `numpy.loadtxt` ili slične funkcije. Model ima više kolona, od kojih nam trebaju:

- 0: Log optičke dubine u kontinuumu na 500 nm:  $\log \tau_{500}$
- 1: Visina  $z$  u cm
- 2: Temperatura  $T(z)$  u K
- 3: Pritisak gasa  $P_{\text{gas}}(z)$  u dyn/cm<sup>2</sup>
- 4: Elektronski pritisak  $n_e(z)$  u dyn/cm<sup>2</sup>

**Obratite pažnju na jedinice!**

## 2 Zadatak

### 2.1 Korak 1: Jonizacija vodonika

Kao uvod, iskoristite Sahinu jednačinu **samo za vodonik** (kao na času) da izračunate jonizaciono stanje vodonika kao funkciju visine. Iz toga ćete dobiti i elektronsku koncentraciju. Uporedite dobijene rezultate sa vrednostima iz modela (plotujte u log skali!).

Sahina jednačina glasi (uvek proverite ovo):

$$\frac{n_{j+1}n_e}{n_j} = \frac{2Z_{j+1}}{Z_j} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{E_j}{kT} \right). \quad (1)$$

Ovde je  $Z$  particiona funkcija. U dubokim slojevima dobićete dobro slaganje sa modelom, ali u višim slojevima naši rezultati pokazuju pad elektrona ispod vrednosti datih u FALC modelu.

**Zašto se ovo dešava?**

*Napomena: još uvek ne objašnjavamo zašto su naši rezultati iznad modela u najvišim slojevima.*

### 2.2 Korak 2: Dodavanje magnezijuma kao dodatnog donora elektrona

Da bismo popravili rezultate u srednjoj atmosferi, uvodimo dodatni element: magnezijum (pomnožićem njegovu zastupljenost sa 2 da obračunamo i doprinos gvožđa, umesto da rešavamo problem za još jedan element).

Ponovite Saha proračun za sistem H i Mg. Ovo sada zahteva rešavanje **nelinarnog sistema jednačina** pomoću, na primer, `scipy.optimize.fsolve`.

Koristite sledeće parametre:

- Energija jonizacije Mg I  $\rightarrow$  Mg II: 7.646 eV
- Energija jonizacije Mg II  $\rightarrow$  Mg III: 15.035 eV
- Zastupljenost Mg:  $3.8 \times 10^{-5}$  **Pomnožiti sa 2 da se uračuna i Fe**
- Particione funkcije:  $Z_{\text{Mg I}} = 2$ ,  $Z_{\text{Mg II}} = 1$ ,  $Z_{\text{Mg III}} = 1$

Ponovo izračunajte elektronsku gustinu. Trebalo bi da dobijete znatno bolje slaganje sa modelom. Možete dodatno da varirate zastupljenost Mg ili

particionu funkciju za Mg+ da dobijete još bolje rešenje.

**Napomena:** Često je dovoljno uzeti samo Mg I–Mg II i zanemariti Mg III.

## 2.3 Korak 3: Neprozračnost i intenzitet u kontinuumu

Pre sinteze profila linije potrebno je odrediti **neprozračnost u kontinuumu** i onda rešiti JPZ za kontinuum.

Dominantni izvori neprozračnosti u vidljivom domenu su negativni jon vodonika  $H^-$  i neutralni vodonik. Neprozračnost u kontinuumu definišemo definišemo kao:

$$\chi_{\lambda}^{\text{cont}} = \chi_{\lambda}^{H^-} + \chi_{\lambda}^H. \quad (2)$$

Da biste obračunali ova dva doprinosa, potrebno je da iskoristite jednačine koje se pojavljuju knjizi Gray-a i opisuju neprozračnost negativnog jona vodonika i neutralnog vodonika. Ako nemate pristup knjizi, javite se meni.

### Optička dubina u kontinuumu

Kao i uvek:

$$\tau_{\lambda}^{\text{cont}}(z) = \int_z^{\infty} \chi_{\lambda}^{\text{cont}}(z') dz'. \quad (3)$$

U diskretnoj formi:

$$\tau_{\lambda,i}^{\text{cont}} = \tau_{\lambda,i+1}^{\text{cont}} + \chi_{\lambda,i}^{\text{cont}}(z_{i+1} - z_i). \quad (4)$$

Kao i za linije pretpostavićemo LTR za funkciju izvora, pa nam ne treba eksplicitno koeficijent emisije.

$$S_{\lambda}^{\text{cont}} = B_{\lambda}(T). \quad (5)$$

### Rešavanje JPZ

Kao i za liniju, koristimo formalno rešenje:

$$I_{\lambda,i} = I_{\lambda,i+1} e^{-(\tau_{i+1}-\tau_i)} + S_{\lambda,i} (1 - e^{-(\tau_{i+1}-\tau_i)}) . \quad (6)$$

Na dnu atmosfere:

$$I_{\lambda}(\tau_{\max}) = B_{\lambda}(T(\tau_{\max})). \quad (7)$$

Na kraju izračunajte izlazi intenzitet u kontinuumu na nekom razumnom intervalu talasnih dužina (recimo od 100 do 1000 nm) i proverite da li ima fizički smisao. Npr, da li vidite ikakav Balmerov i Pašenov skok.

## 2.4 Korak 4: Populacije nivoa

Izaberite spektralnu liniju koju ćete sintetisati. Ne mora biti linija vodonika ili magnezijuma, mada je lakše uzeti neku od njih. Na primer, Mg I b2 linija na 517.2 nm.

Potrebni podaci (energije nivoa, statističke težine  $g = 2J + 1$ ) mogu se preuzeti sa:

[https://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/lines\\_form.html](https://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/lines_form.html)

Boltzmanova formula za populacije nivoa je:

$$n_{j,i} = n_j g_i \frac{\exp(-E_i/kT)}{Z_j(T)}. \quad (8)$$

Prikažite kako populacije vaša dva omiljena nivoa zavise od visine.

## 2.5 Korak 5: Neprozračnost u liniji

U LTE važi  $S_{\nu} = B_{\nu}(T)$ . Fokusiramo se na:

$$\chi_{\nu} = (n_l B_{lu} - n_u B_{ul}) \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu). \quad (9)$$

Sa NIST baze preuzmite  $A_{ul}$  i iz njega izvedite  $B_{ul}$  i  $B_{lu}$ .

## 2.6 Korak 6: Apsorpcioni profil linije

Sada određujemo zavisnost neprozračnosti od frekvencije/talasne dužine. Izaberite opseg talasnih dužina i za svaku dubinu izračunajte:

- Doplerovu širinu iz mase atoma i temperature
- Damping frekvenciju (možete uzeti  $\Gamma = A_{ul}$ )
- Zatim, tzv. bezdimenzionu frekvenciju:  $u = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu_D$
- Damping parametar  $a = \Gamma/(4\pi\Delta\nu_D)$
- Voigtov profil  $\phi(u, a)$

Zatim izračunajte:

$$\chi_\nu = (n_l B_{lu} - n_u B_{ul}) \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu). \quad (10)$$

## 2.7 Korak 7: Optička dubina u liniji i funkcija izvora

**Ukupna neprozračnost je zbir neprozračnosti u kontinuumu i liniji**

Integracijom neprozračnosti dobijamo ukupno optičku dubinu. Funkcija izvora u LTE je  $B_\nu(T)$ .

Prikažite  $S_\lambda(\tau_\lambda)$  za više talasnih dužina radi provere.

## 2.8 Korak 8: Formalno rešenje jednačine prenosa

Iskoristite isto numeričko rešenje kao i gore, a i na času da izračunate spektar vaše linije! Prikažite izlazni spektar kao funkciju talasne dužine.

## 2.9 Diskusija

Kada sve proradi, možete eksperimentisati sa:

- promenom energije donjeg nivoa,
- uključivanjem realističnijeg sudarnog širenja,
- uvođenjem polja brzina
- izborom različitih atoma

- promenom atmosferskog modela (možete podići ili spustiti temperaturu)

### **3 Predaja**

- Kratak izveštaj (cca 5-7 strana) sa metodologijom i plotovima.
- Rok: 31. decembar 2025. u 23:59.
- Python kod (opciono, samo ako nešto ne radi).