

Teorija Zvezdanih Spektara

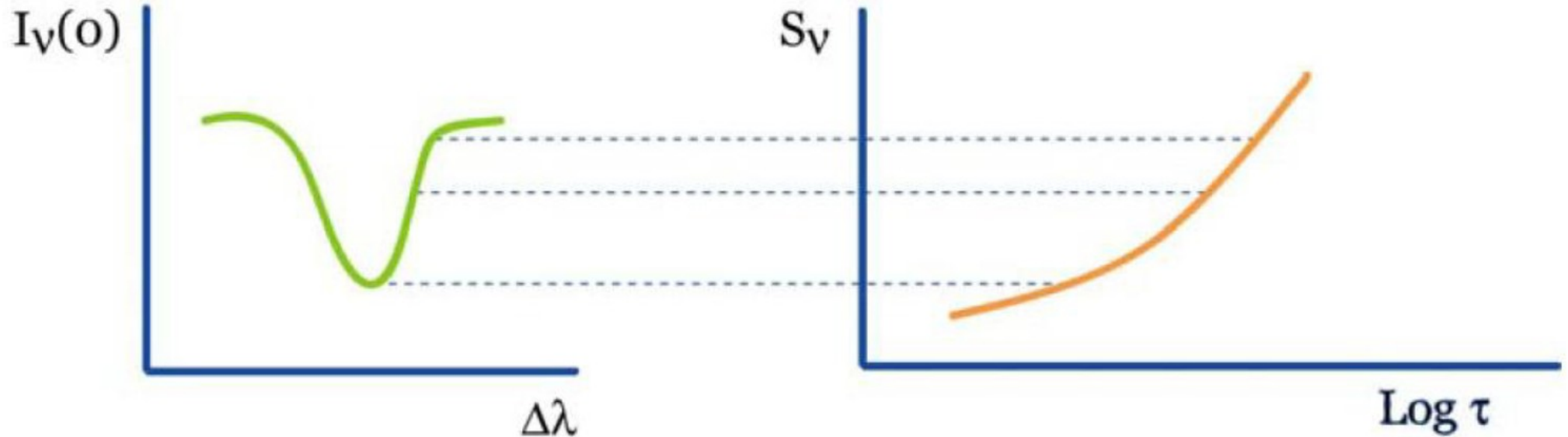
Lekcija 10: Širenje Spektralnih Linija

Ivan Milić (AOB / MATF)

15/12/2023

Podsetnik

- Spektralne linije nam daju uvid u (relativno) veliki opseg dubina na malom opsegu talasnih dužina. Razlog za to je jaka zavisnost neprozračnosti od talasne dužine.



Podsetnik

- Koeficijenti emisije i apsorpcije u spektralnoj liniji izgledaju ovako:

Populacija gornjeg nivoa

$$j_{\lambda} = n_u A_{ul} \frac{hc}{\lambda 4\pi} \phi_{\lambda}$$

Einstein-ovi koeficijenti

Apsorpcioni profil – o ovome pričamo danas!

$$\chi_{\lambda} = (n_l B_{lu} - n_u B_{ul}) \frac{hc}{\lambda 4\pi} \phi_{\lambda}$$

Populacija donjeg nivoa

Detailed description: The diagram illustrates the equations for emission and absorption coefficients in a spectral line. It features two equations. The first equation, $j_{\lambda} = n_u A_{ul} \frac{hc}{\lambda 4\pi} \phi_{\lambda}$, represents the emission coefficient. The second equation, $\chi_{\lambda} = (n_l B_{lu} - n_u B_{ul}) \frac{hc}{\lambda 4\pi} \phi_{\lambda}$, represents the absorption coefficient. Blue arrows point from text labels to specific terms in the equations: 'Populacija gornjeg nivoa' points to n_u ; 'Einstein-ovi koeficijenti' points to A_{ul} and B_{ul} ; 'Apsorpcioni profil – o ovome pričamo danas!' points to ϕ_{λ} ; and 'Populacija donjeg nivoa' points to n_l .

Podsetnik

- Funkcija izvora u liniji:

$$S = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}}$$

- U LTR ovo mora da bude jednako Plankovoj funkciji, pa:

$$S = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

- Ali odnosi izmedju konstanti važe uvek (zato su konstante), pa smo dobili:

$$\frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{2hc^2}{\lambda^5}$$
$$\frac{B_{ul}}{B_{lu}} = \frac{g_l}{g_u}$$

Podsetnik

- Funkcija izvora u liniji:

$$S = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}}$$

- U Ne-LTR smo prepostavili da funkcija izvora ima Plankovski deo i deo sa rasejanjem (ove dve formulacije su ekvivalentne, što ćemo pokazati uskoro)

$$S_\lambda = \epsilon B_\lambda + (1 - \epsilon) J_\lambda$$

- Videćemo da će se ovde pojaviti naše A i B konstante koje su, setimo se, konstante:

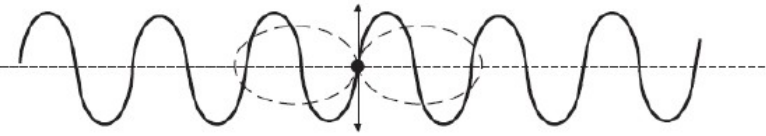
$$\frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{2hc^2}{\lambda^5}$$
$$\frac{B_{ul}}{B_{lu}} = \frac{g_l}{g_u}$$

Širenje spektralnih linija

- Važno nam da shvatimo oblike spektralnih linija i **da** kompletiramo sliku o rasejanju u spektralnim linijama
- U “nultoj” aproksimaciji – spektralne linije su delta funkcije
- Rasejanje je onda **koherentno**. Talasna dužina ostaje ista u procesu rasejanja
- Videćemo da postoje dva razloga da odstupimo od ove slike:
- Širenje energetskih nivoa
- Doplerovsko pomeranje apsorpcije / emisije usled kretanja atoma

Klasičan izraz za koeficijent apsorpcije u liniji

- Klasično, spektralna linija se može tretirati kao vezani elektron koji osciluje – Harmonijski oscilator



$$F = -kx \quad \omega_o = \sqrt{k/m} \quad m\ddot{x} = -kx$$

sopstvena frekvencija elektrona

- Električno polje ovakvog oscilatora je:

$$E = E_o e^{i(\omega t - ky)} = E_o e^{i\omega(t - (\frac{k}{\omega})y)} = E_o e^{i\omega(t - \boxed{\sqrt{\epsilon/\epsilon_o}} \frac{y}{c})}$$

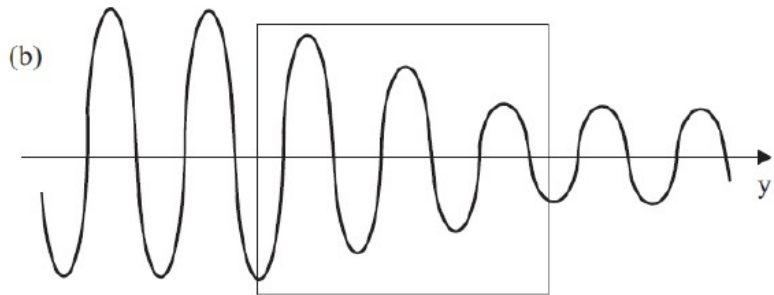
$$v = \omega/k = c/n \quad n = \boxed{\sqrt{\epsilon/\epsilon_o}}$$

Vežu između ovo
dvoje možemo da
shvatimo kao
Fourierovu
transformaciju

- Dobijamo **idealni ravan harmonijski talas**. $I_\lambda = I_0 \delta(\lambda - \lambda_0)$

Klasičan izraz za koeficijent apsorpcije u liniji

- Medjutim, realističniji model bi bio prigušeni harmonijski oscilator u prisustvu pozadinskog polja:

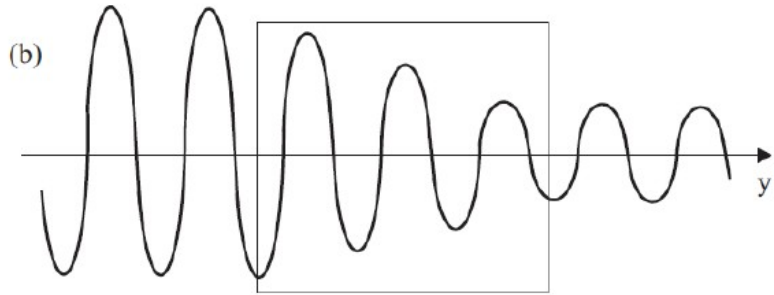


$$m\ddot{x} = -m\gamma\dot{x} - m\omega_o^2x + eE_o e^{i\omega t}$$

$$x = x_o e^{i\omega t}$$

- Rešenje ovog problema je malko komplikovanije:
$$x = \frac{e}{m} \frac{E}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$
- Gama se ovde naziva **konstanta prigušenja**. Opisuje koliko brzo amplituda talasa opada

Spektralna linija kao prigušeni oscilator



$$x = \frac{e}{m} \frac{E}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

- Na osnovu x možemo da nadujemo rezultujuće električno polje EM talasa (zavisiće od drugog izvoda x po vremenu) – **ovo ćemo uraditi natenane na vežbama**
- Dobićemo da je indeks prelamanja kompleksan, da kompleksni deo opisuje apsorpciju, i najvažnije:

$$\chi_\nu^L = \kappa_\nu^L \rho = 2 \frac{\omega}{c} n^* = \frac{4\pi N e^2}{mc} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} = \frac{4\pi N e^2}{mc} \frac{\gamma \omega^2}{4\omega^2 \cdot \Delta\omega^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

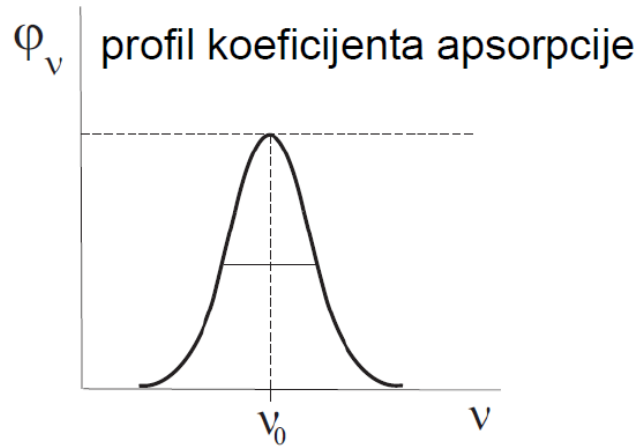
Ovo je udaljenost od
centra linije

Lorencov profil

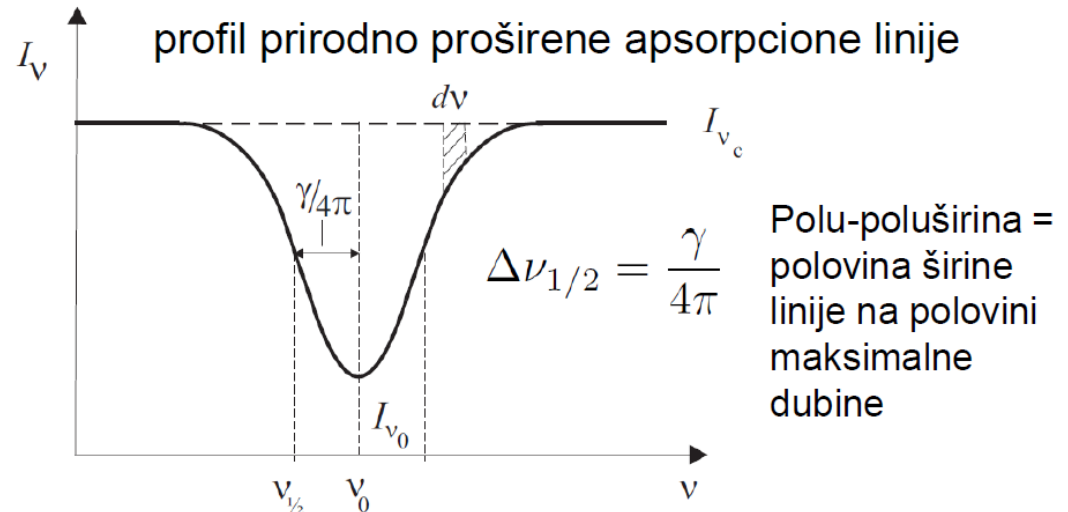
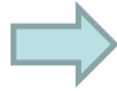
Ovo je tzv. Lorencov profil

$$\chi_{\nu}^L = \kappa_{\nu}^L \rho = k_{\nu}^L N = N \left(\frac{\pi e^2}{mc} \right) \frac{1}{\pi} \frac{(\gamma/4\pi)}{(\nu - \nu_o)^2 + (\gamma/4\pi)^2} = N \frac{\pi e^2}{mc} \varphi_{\nu}^L$$

- Ovde, za promenu, radimo sa frekvencijama jer je **gama** prirodno u jedinicama frekvencije (frekvencije nam takodje prirodno dolaze iz Furijeove transformacije)



$$I_{\lambda} = I_{\lambda}^0 e^{-\chi_{\lambda} \Delta l}$$



Prirodno širenje

- Spektralna linija je sama po sebi proširena (elektron gubi energiju oscilovanjem pa je oscilovanje prigušeno)
- Znači da **nije** delta funkcija.
- Ovo širenje se često zove **prirodno širenje** (atomi sami po sebi emituju / apsorbuju proširene linije). Kvantna "adaptacija" ovog izraza bi bila ovakva:

$$\chi_{\nu}^L = \kappa_{\nu} \rho = k_{\nu} n_i = \frac{\pi e^2}{mc} n_i f_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma_{rad}/4\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Gamma_{rad}/4\pi)^2}$$

Populacija donjeg nivoa

"Snaga oscilatora"

φ_{ν}^L disperziji ili Lorencov profil

Prirodna širina energetskeg nivoa

Kvantno objašnjenje

Konačne širine energetskeg nivoa

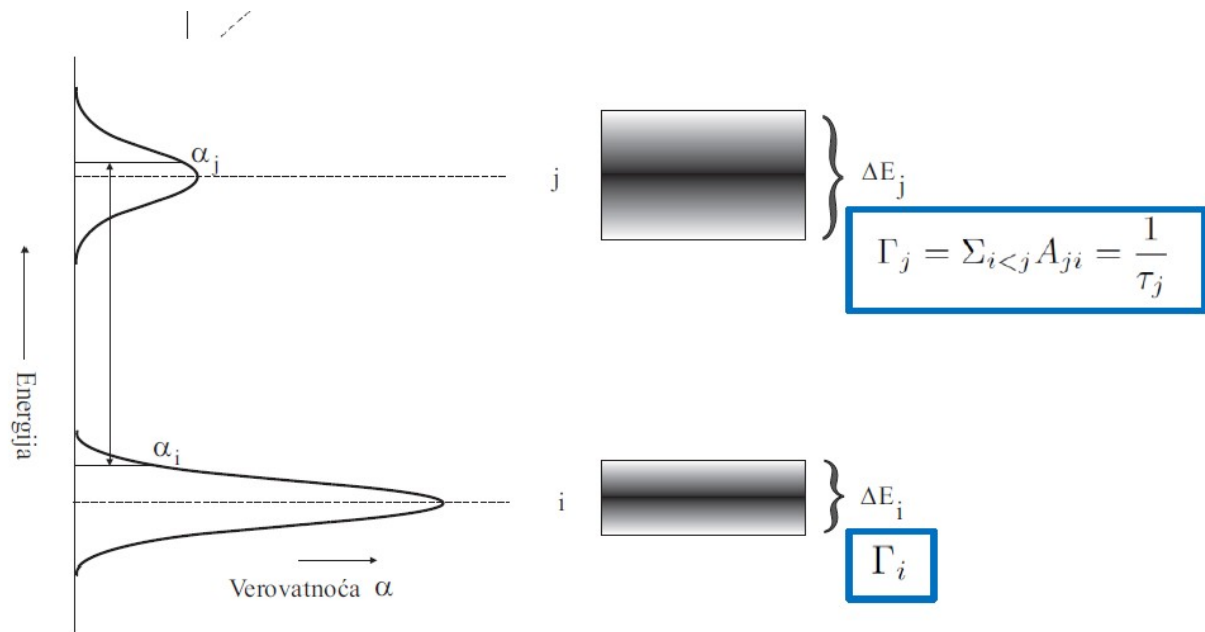
$$\Delta W \cdot \tau \approx h$$

$$\frac{dW}{dt} = -\Gamma W \quad W = n_j h\nu$$

$$\frac{dn_j}{dt} = -\Gamma n_j \quad \text{brzina smanjenja naseljenosti nivoa}$$

$$\frac{dn_{ji}}{dt} = -A_{ji} n_j \quad \text{verovatnoća spontanog prelaza}$$

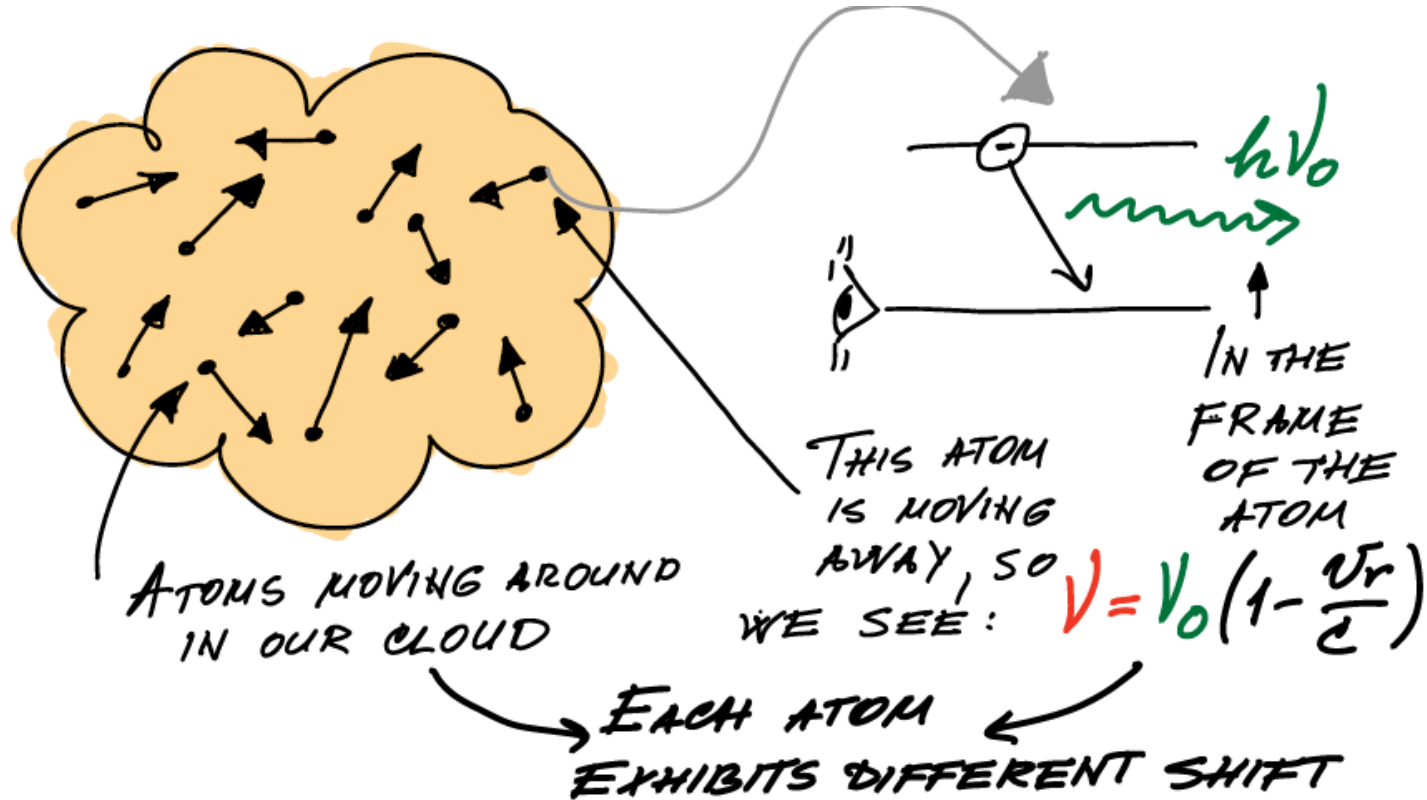
$$\frac{dn_j}{dt} = \sum_{i < j} \frac{dn_{ji}}{dt} = -n_j \sum_i A_{ji}$$



$$\Gamma_{rad} = \Gamma_{ij} = \Gamma_i + \Gamma_j$$

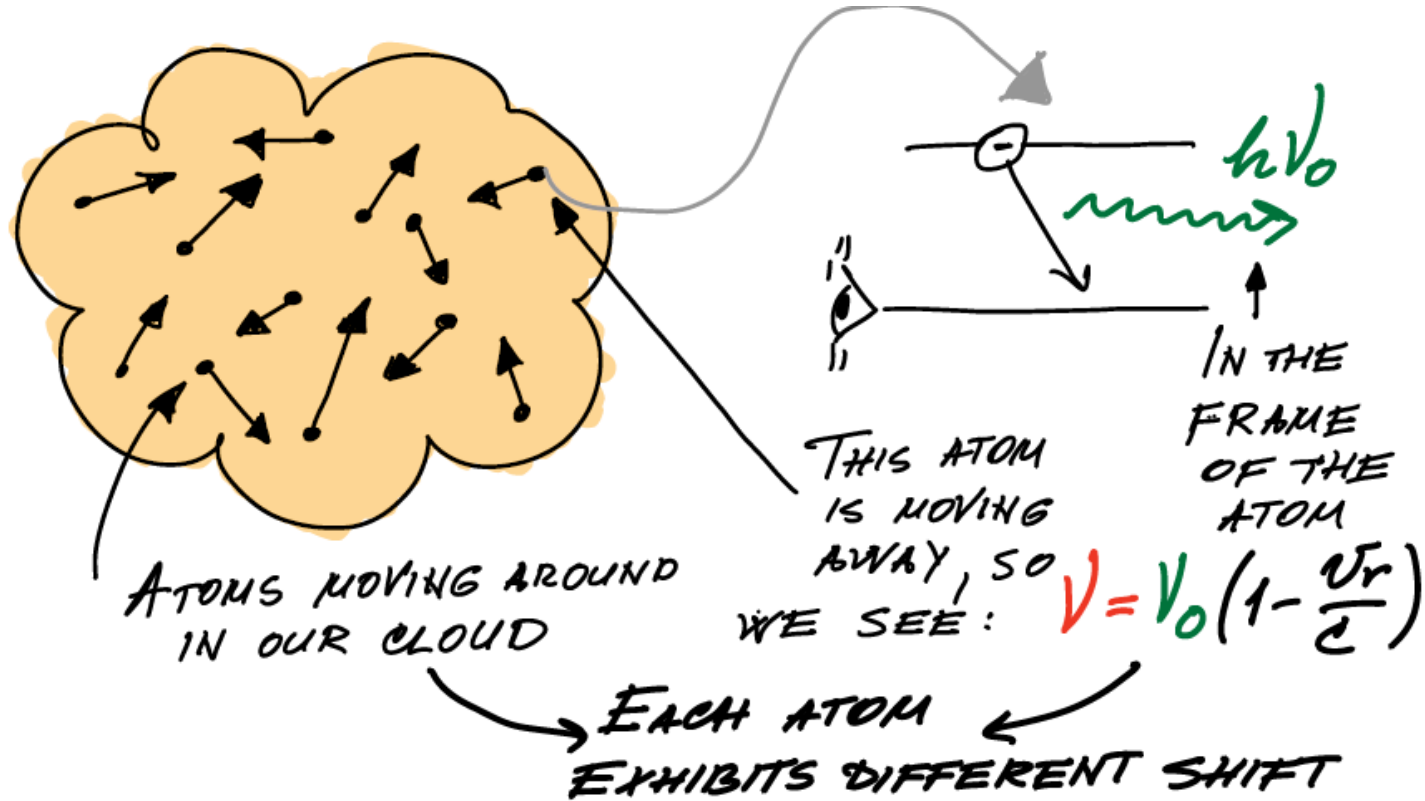
fizičko značenje Γ – preko vremena života e^- na en. nivou

Doplerov(sk)o širenje



Raspodela brzina atoma na pravac vizure prati Gausovu raspodelu. Kada sumiramo emisiju po svim česticama, koeficijent emisije će takodje imati Gausovsku raspodelu (pod pretpostavkom da svaki atom, u stanju mirovanja emituje kao delta funkcija).

Doplerov(sk)o širenje



Za tablu: Ubedimo se da isti argument kao na prošlom slajdu važi i za apsorpciju!

Drugi način da ovo zapišemo bi bio:

- Svaki atom emituje / apsorbuje kao delta funkcija
- Ali mi gledamo neki statistički ansambl atoma:

Delta funkcija, pomeren
usled Doplerovog efekta

$$\phi_{\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\lambda_0\left(1 - \frac{v}{c}\right)\right) p(v) dv$$

Ukupan/ prosečni profil
spektralne linije

Verovatnoća da atom
ima odgovarajuću brzinu

- Ovako dobijamo Gausijan

Gausovski profil

- Ukoliko je prirodno širenje linije malo / zanemarljivo u odnosu na Doplerovo širenje, oblik apsorpcionog profila spektralne linije je Gausijan:

$$\phi_{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\lambda_D} e^{-\frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{\Delta\lambda_D^2}}$$

- Gde je:

$$\Delta\lambda_D = \frac{\bar{v}}{c}\lambda_0 = \frac{\lambda_0}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

- Ovo sledi iz Maksvelove raspodele po brzinama

Masa emitujuće/
apsorbujuće čestice

Mikroturbulentna brzina

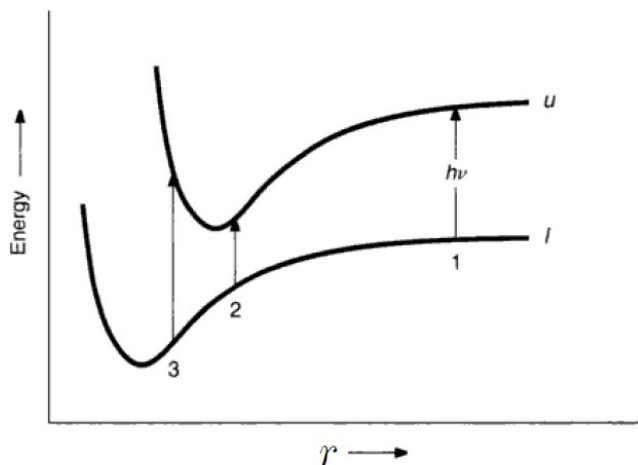
- Ispostavlja se da linije posmatrane “u prirodi” često imaju veću širinu nego što temperatura predviđa
- (Ovo znamo zato što su linije osetljive na temperaturu ne samo zbog širenja linije!)
- Mikroturbulentna : postoje brzine na skalama koje ne možemo da vidimo, i koje su manje od srednje slobodne putanje fotona.
- Doplerova brzina onda postaje:

$$\Delta\lambda_D = \frac{\bar{v}}{c}\lambda_0 = \frac{\lambda_0}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m} + v_t^2}$$



Mikroturbulentna brzina

Sudarno širenje – širenje pritiskom



promena energije usled sudara

$$\Delta W(r) = \frac{a}{r^n}$$

$$\Delta \nu(r) = \frac{1}{h} [\Delta W_j(r) - \Delta W_i(r)] = \frac{C_n}{r^n}$$

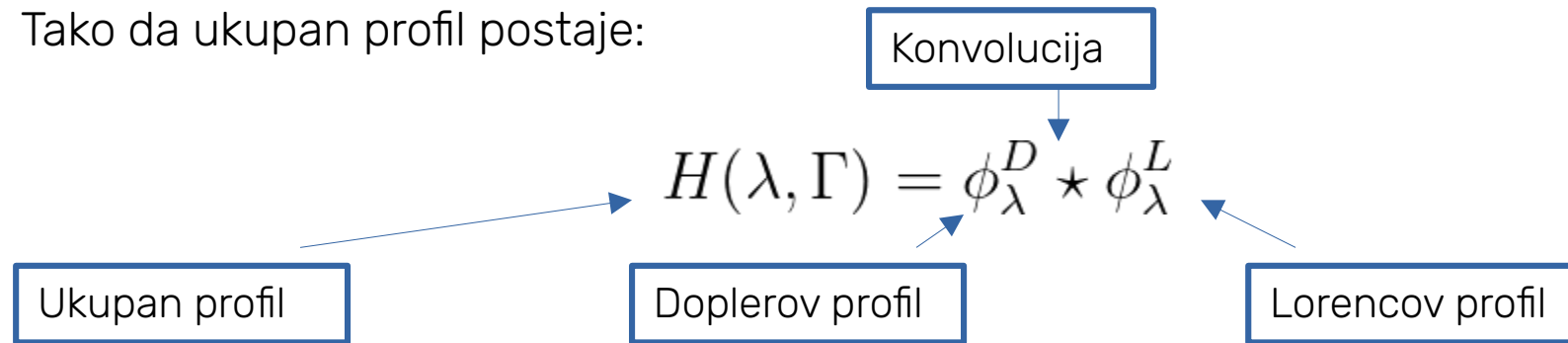
| n | tip | apsorber | perturber | linija |
|---|-------------------------------|---------------------|-----------------------|-------------------------------------|
| 2 | linerni Štarkov efekat | H i He ⁺ | joni i e ⁻ | nepomerena, simetrično proširena |
| 4 | kvadratični Štarkov efekat | atomi ≠ H | joni i e ⁻ | asimetrija i pomak |
| 3 | rezonantno širenje | neutralni atomi | atomi iste vrste | nepomerena, simetrično proširena |
| 6 | van der Waalsovo | neutralni atomi | uglavnom H | širenje i pomak |

Ukupan apsorpcioni profil linije

- Ispostavlja se da sudarno širenje takodje možemo da tretiramo kao prigušenje:

$$\phi_\nu = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma/4\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Gamma/4\pi)^2}$$

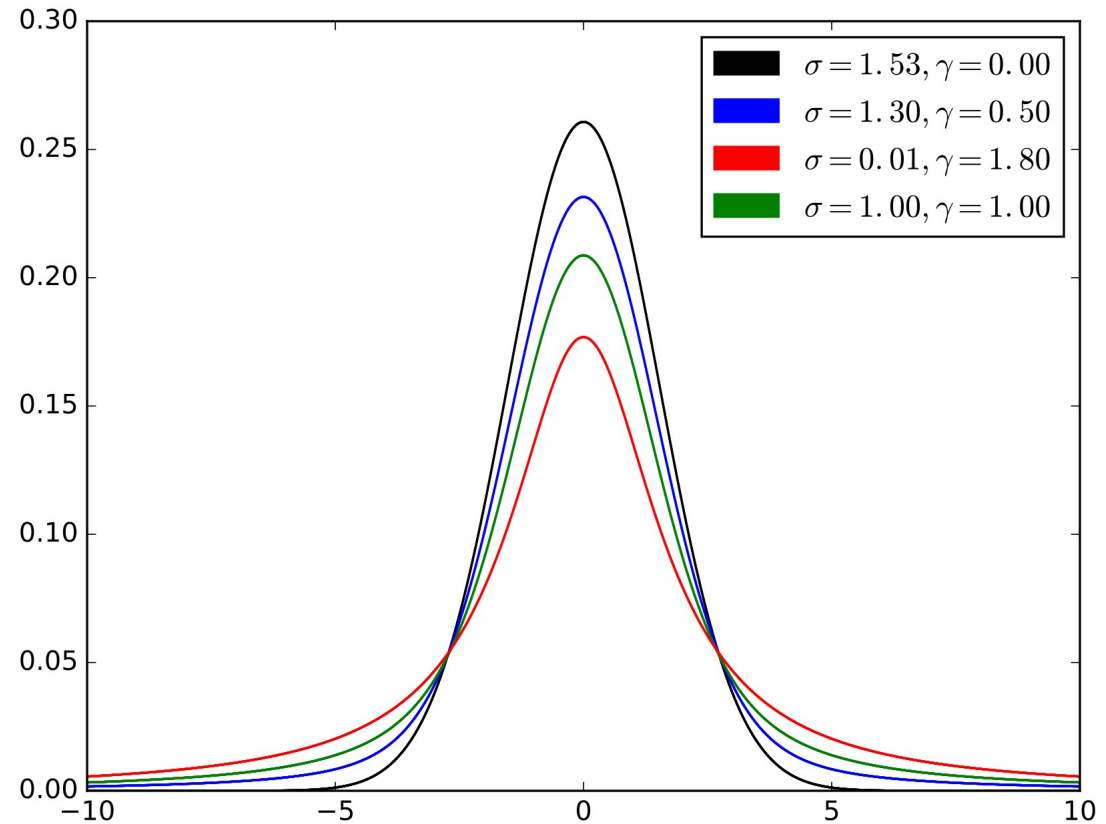
- Tako da ukupan profil postaje:



- Ovaj profil najčešće ima oblik Voigt-ove (Fojtove) funkcije

Voigtov profil

- Je nešto između Gausijana i Lorencijana
- Ima relativno “oblo” jezgro, kao Gausijan, ali ima jaka krila, slični lorencovoj funkciji
- Za većinu spektralnih linija, Voigtov profil je odlična aproksimacija, kao što ćemo videti uskoro na vežbama



Sada znamo da izračunamo koeficijente apsorpcije i emisije

$$j_{\lambda} = n_u A_{ul} \frac{hc}{\lambda 4\pi} \phi_{\lambda}$$

$$\chi_{\lambda} = (n_l B_{lu} - n_u B_{ul}) \frac{hc}{\lambda 4\pi} \phi_{\lambda}$$

- Obratite pažnju da su i naseljenosti nivoa, kao i oblik profila zavisni od temperature i pritiska
- Oblik profila takodje zavisi od brzine. Može da bude pomeren zbog makroskopskog kretanja atmosfere
- Potrebno je da izračunamo koeficijente apsorpcije i emisije u celoj atmosferi i onda rešimo JPZ

Oblici spektralnih linija – primeri

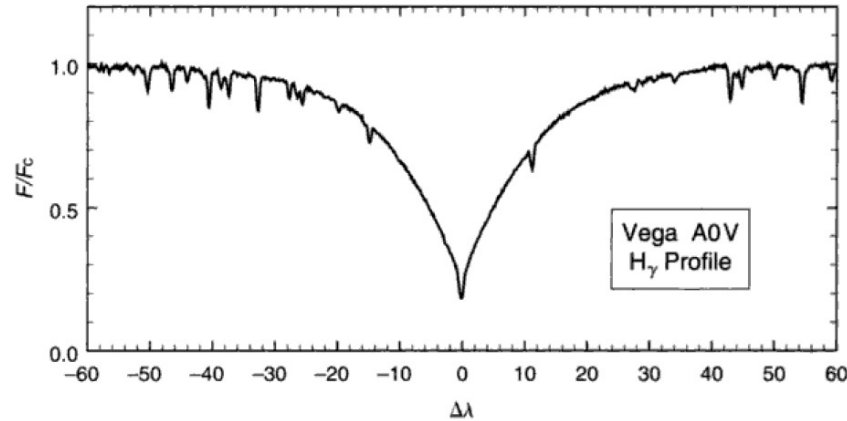


Fig. 11.5. The hydrogen lines in hot stars like Vega are about two orders of magnitude wider than typical metal lines. Taken at Observatoire de Haute-Provence; resolving power of $\sim 16\,000$. Courtesy of F. Royer.

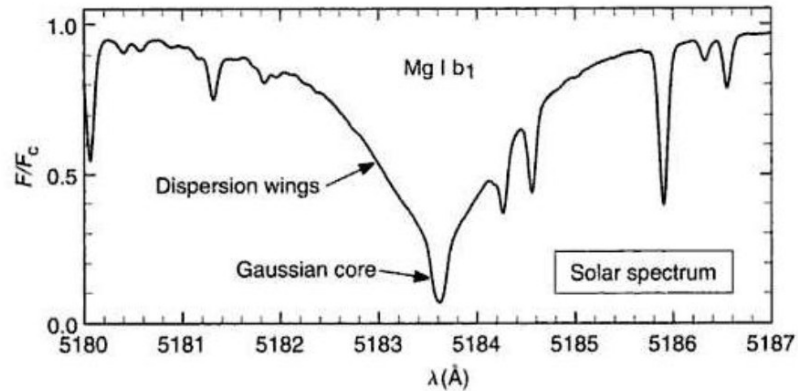
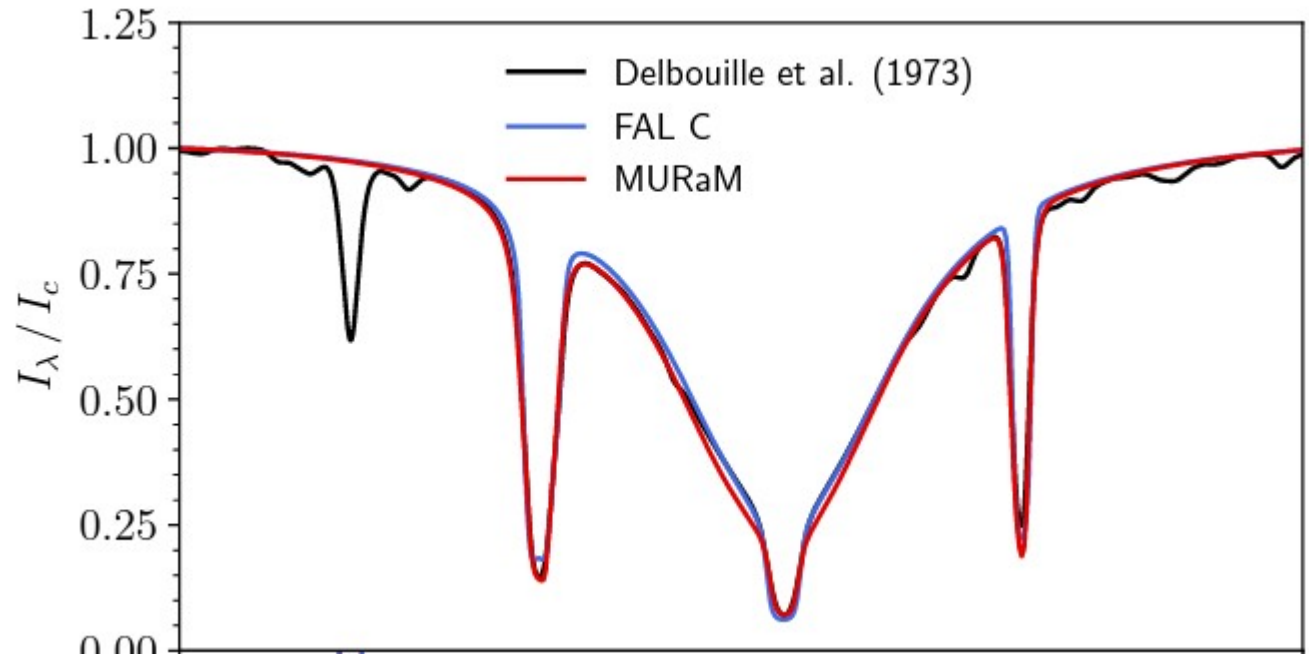


Fig. 11.11. In a few cases spectral lines, like this magnesium line in the solar spectrum, clearly show the Gaussian core and the dispersion wings with a relatively sharp transition between the two near $F/F_c \approx 0.3$.

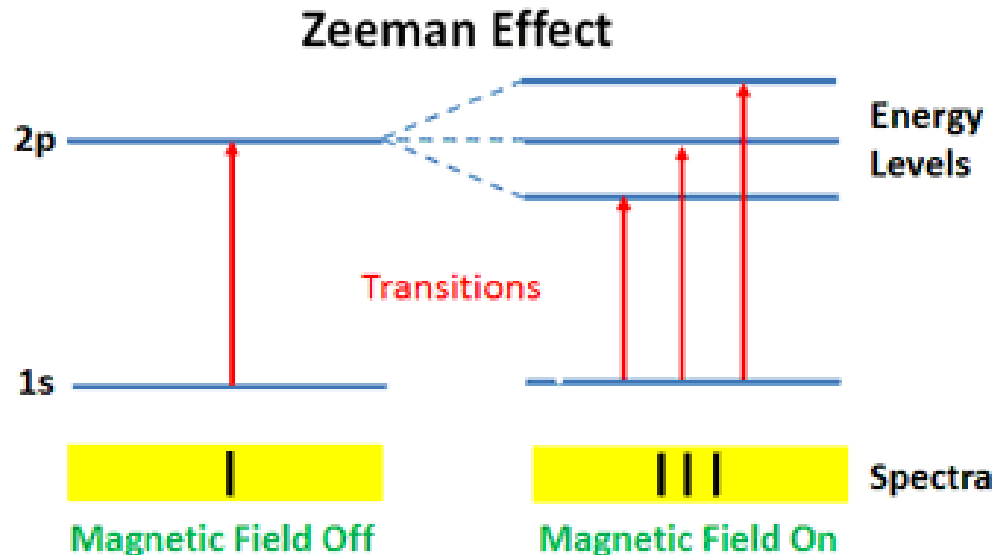
Oblici spektralnih linija - primeri

- Izračunati oblik Mg I b2 spektralne linije iz Vukadinović et al. (2022)
- Vidimo da se modeli dosta dobro slažu sa posmatranjima što govori i o modelima atmosfere ali i o našem poznavanju atomskih konstanti i procesa o kojima smo pričali danas

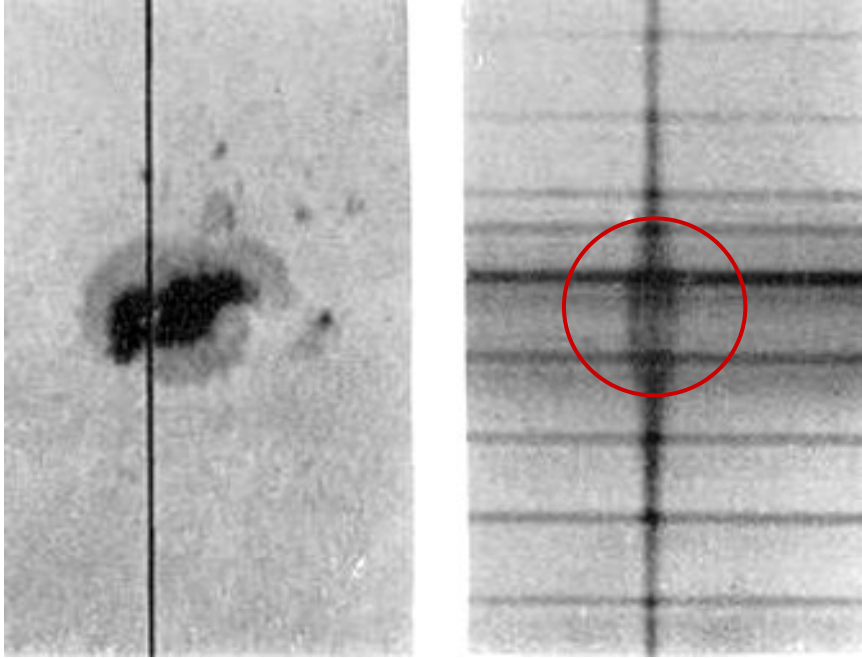


Zeeman-effect

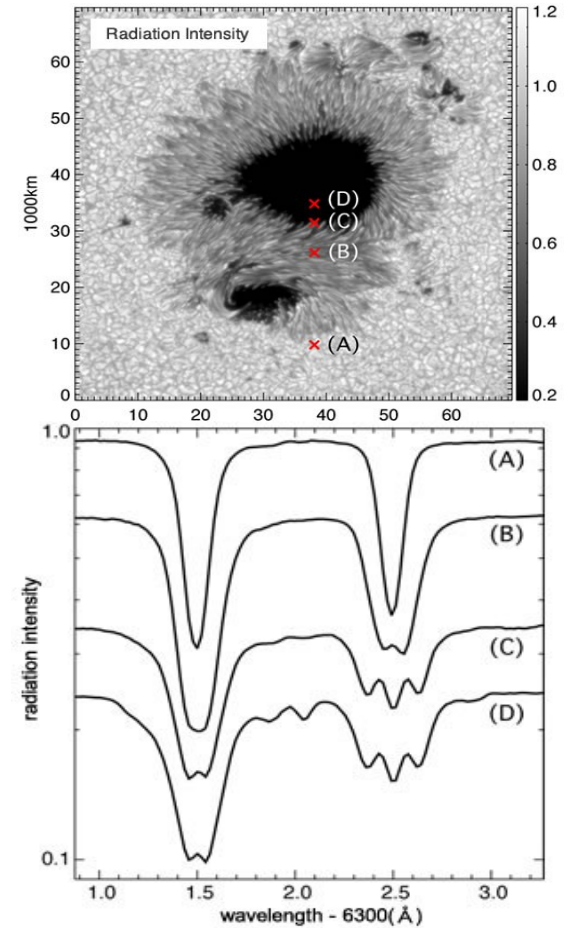
- U prisustvu magnetnog polja, nivoi se cepaju na pod-nivoje u zavisnosti od njihovog ukupnog kvantnog broja J (kvantni broj koji opisuje ukupan moment impulsa)
- To znači da se linije cepaju na više linija. Što jače magnetno polje – jače cepanje.
- Kada magnetno polje više nije dovoljno slabo za linearnu teoriju perturbacija – Paschen Back efekat



Zeeman-ov efekat



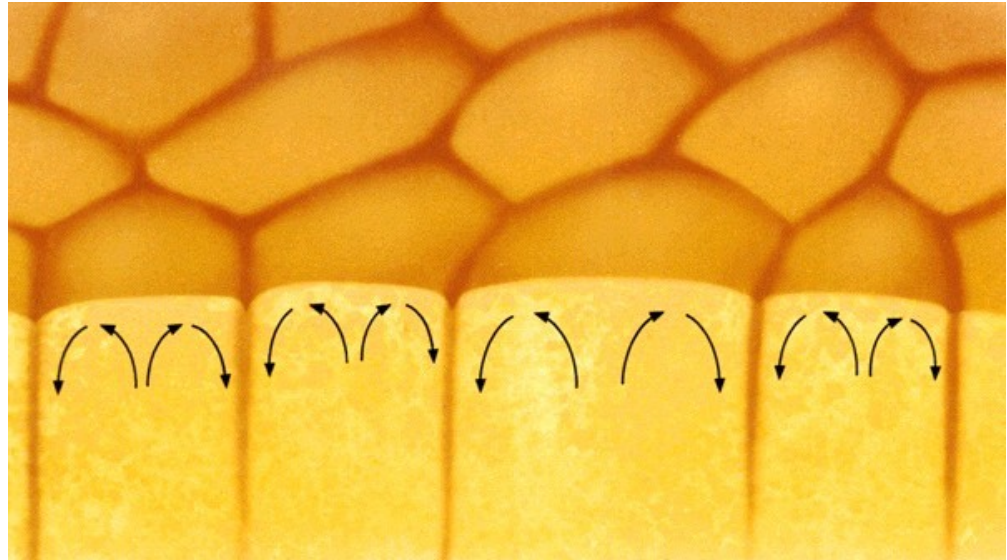
G.E. Hale, F. Ellerman, S.B. Nicholson,
and A.H. Joy (ApJ, 1919)



Credits: Yukio Katsukawa

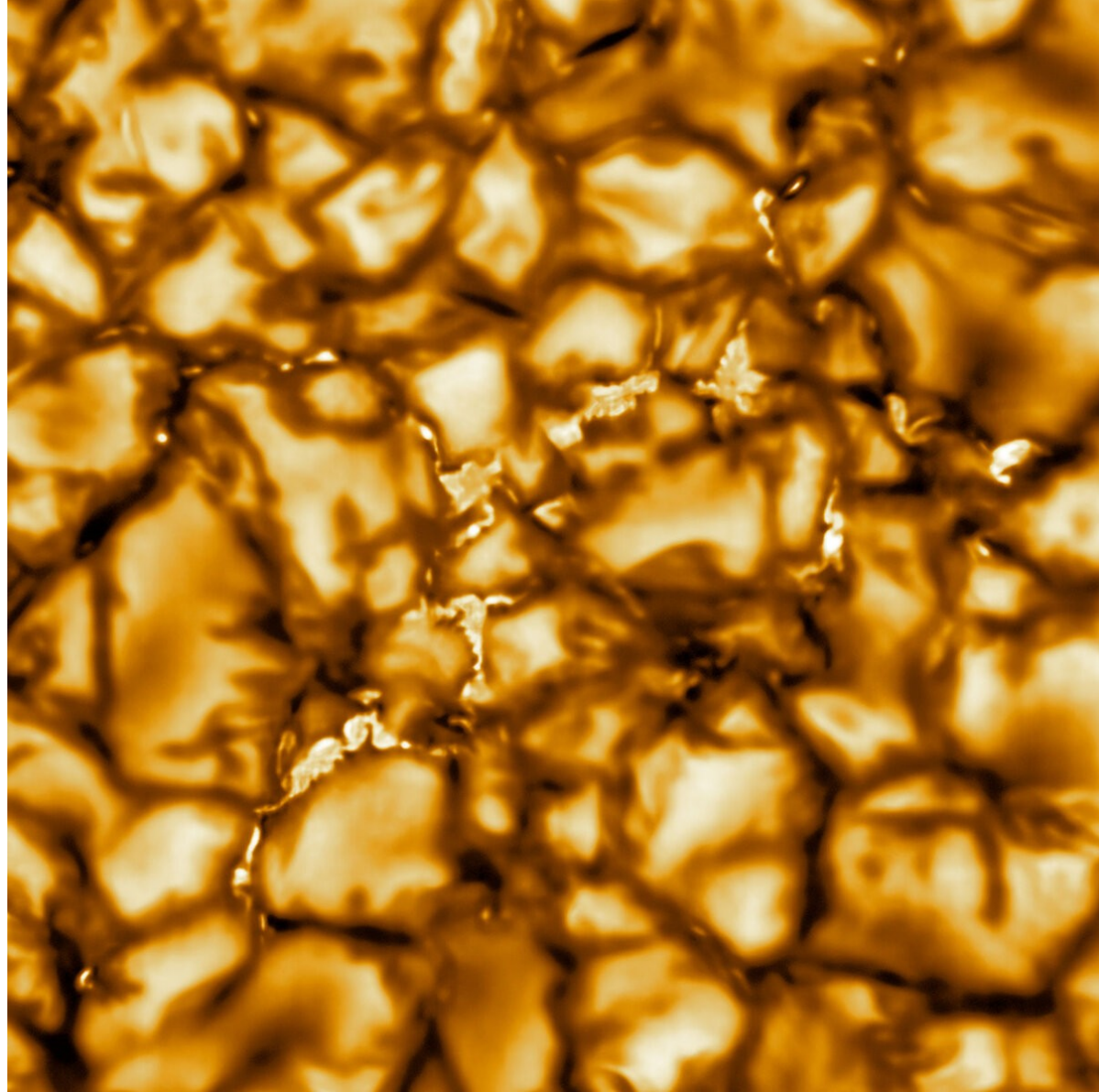
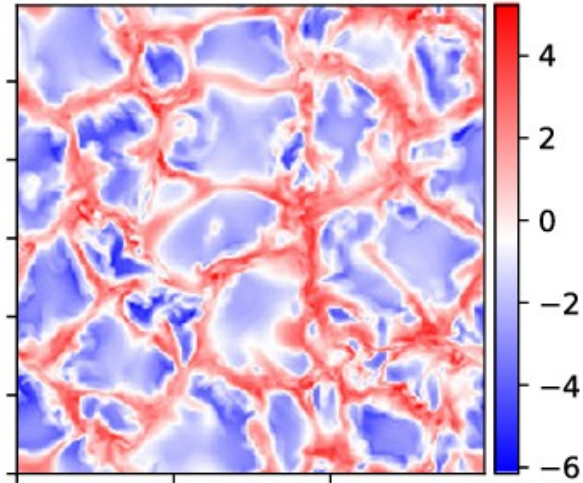
Makroskopsko vs mikroskopsko širenje

- Ovo do sada su bila širenja usled promene apsorpcionog profila linije
- Ovo širenje je "lokalno", dešava se na skalama manjim od srednje slobodne putanje fotona
- Medjutim linije mogu da se šire / menjaju oblik i zato što različiti delovi objekta imaju spektar koji je pomeren usled nekih makroskopskih kretanja
- Ovo širenje deluje na izlazni intenzitet, u svakom delu objekta nastaje odvojen spektar
- Npr. Granulacija u zvezdama:



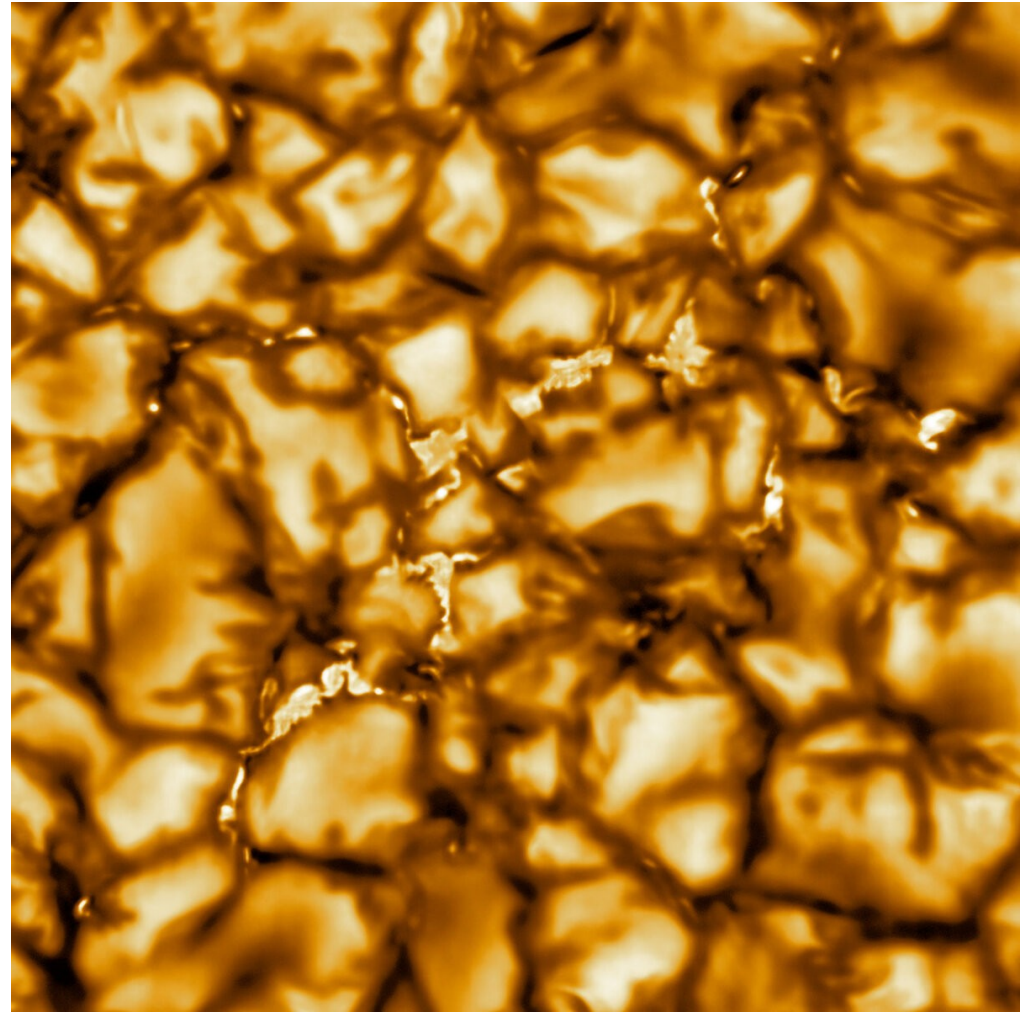
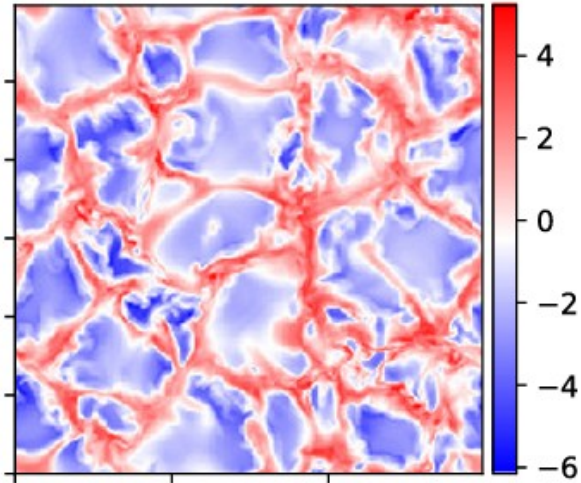
Granulacija

- Granulacija vidjena DKIST teleskopom
- Svaka tačka na ovoj slici ima svoj spektar
- Svaki od tih spektara možemo da tretiramo kao da je nastao u odvojenoj 1D plan-paralelnoj atmosferi
- Dole: simulirane granularne brzine



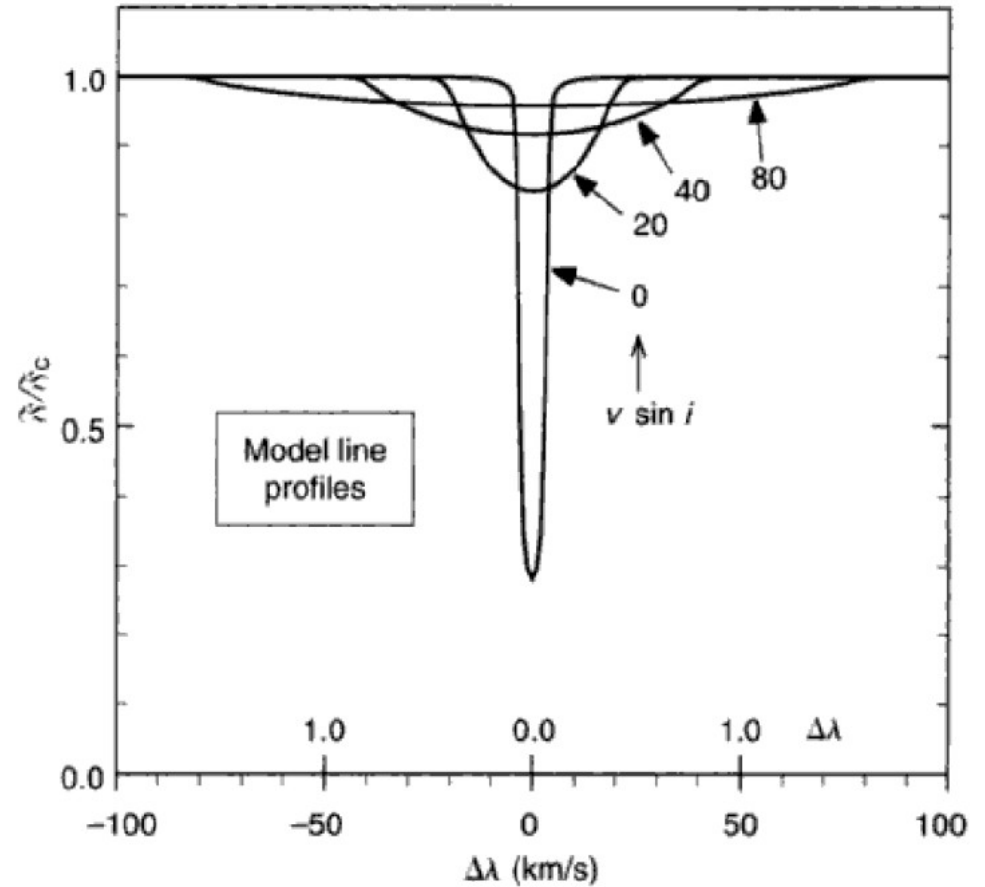
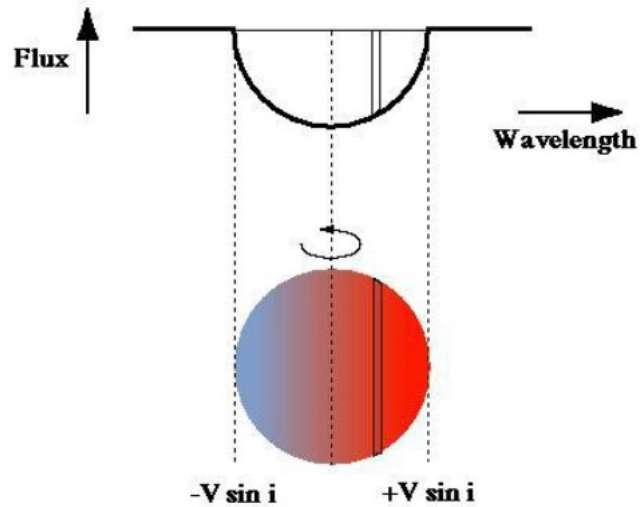
Konvektivni pomak

- Topli regioni su površinski veći i pomereni ka plavom
- To znači da je veći deo spektrara "blue shiftovan", pa spektralne linije Sunca i zvezda vidimo malo pomerene – tzv. Konvektivni plavi (može biti i crveni) pomak



Širenje spektralnih linija usled rotacije zvezda

Rotational Broadening of Photospheric Absorption Lines



Širenje spektralnih linija usled rotacije

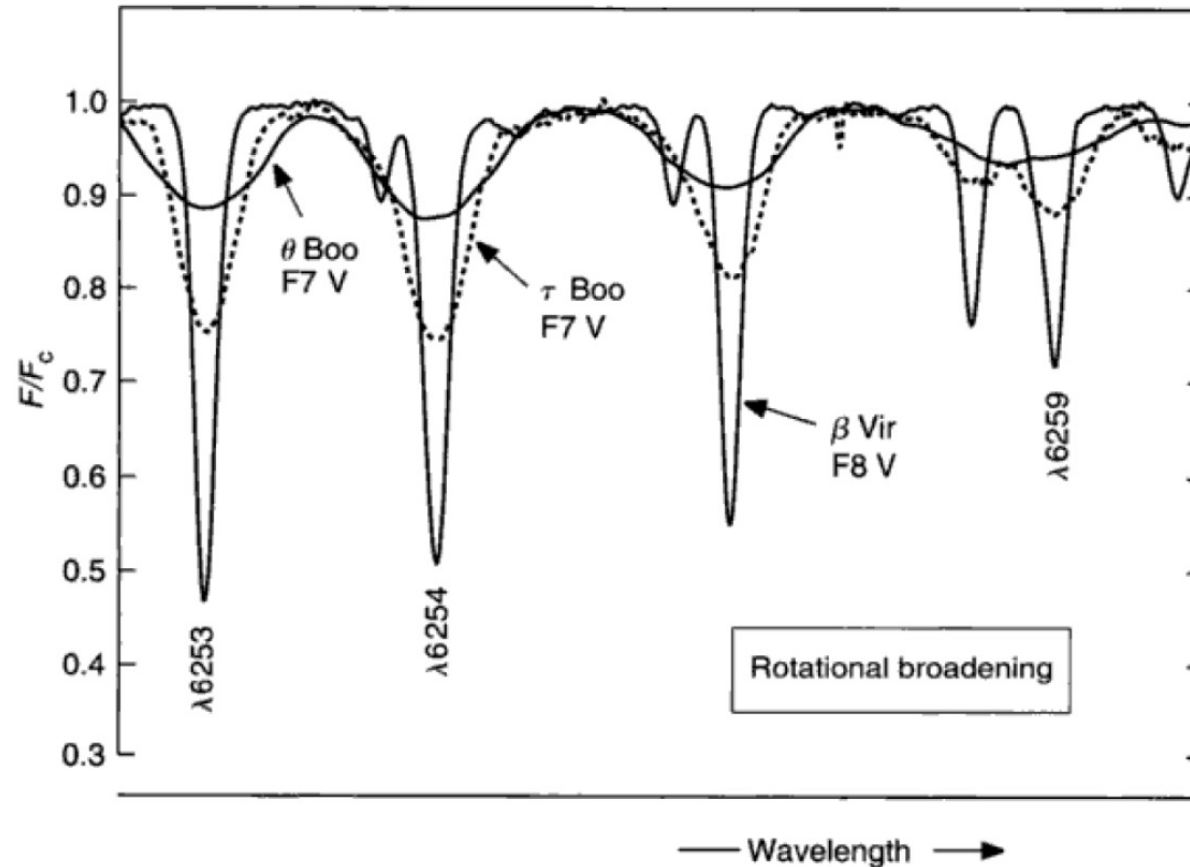


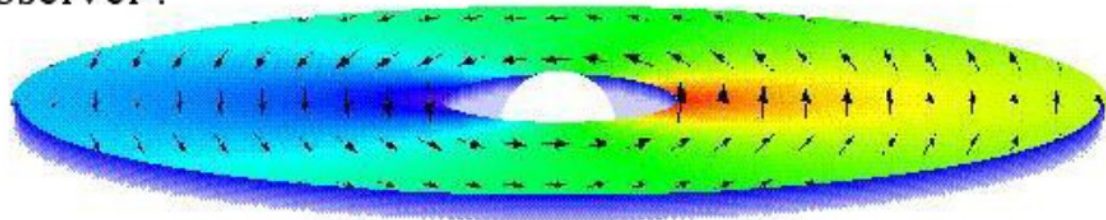
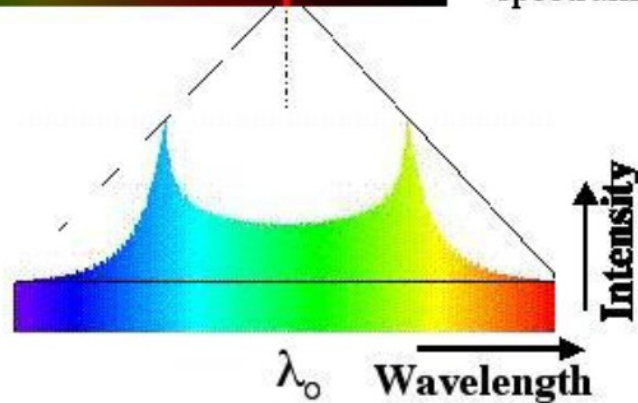
Fig. 18.8. The rotational broadening in three F dwarfs are compared. Data from the Elginfield Observatory.

Be stars

- Hot, bright, & rapidly rotating stars.
- Discovered by Father Secchi in 1868
- The “e” stands for **e**mission lines in the star’s spectrum

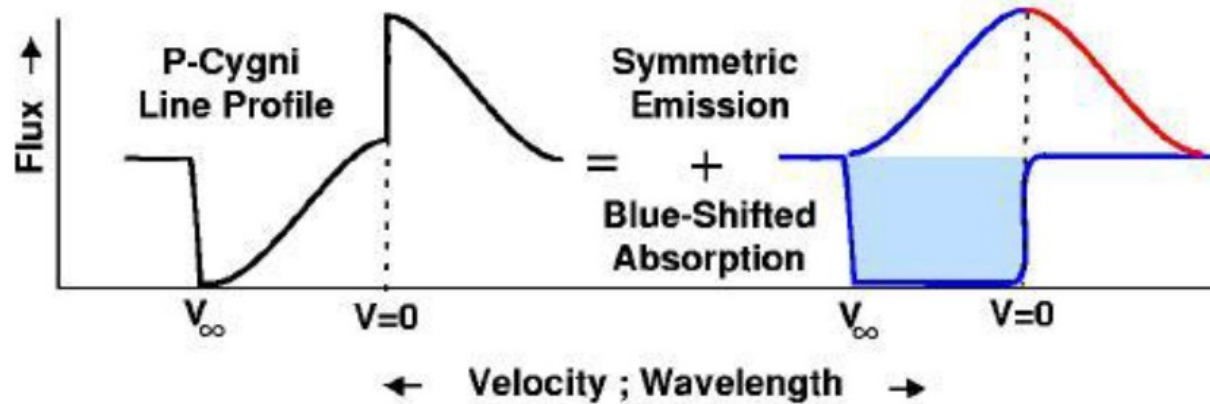
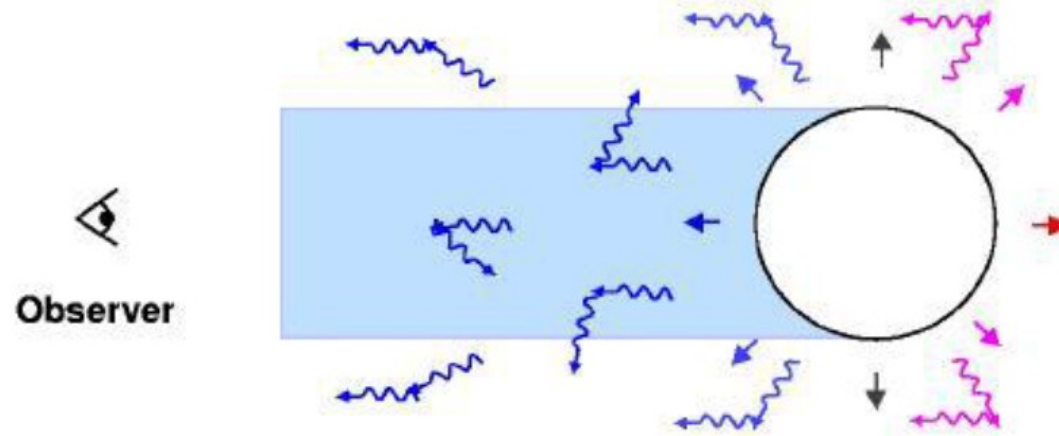


- Detailed spectra show emission intensity is split into peaks to **blue** and **red** of line-center.
- This is from Doppler shift of gas moving **toward** and **away** from the observer .

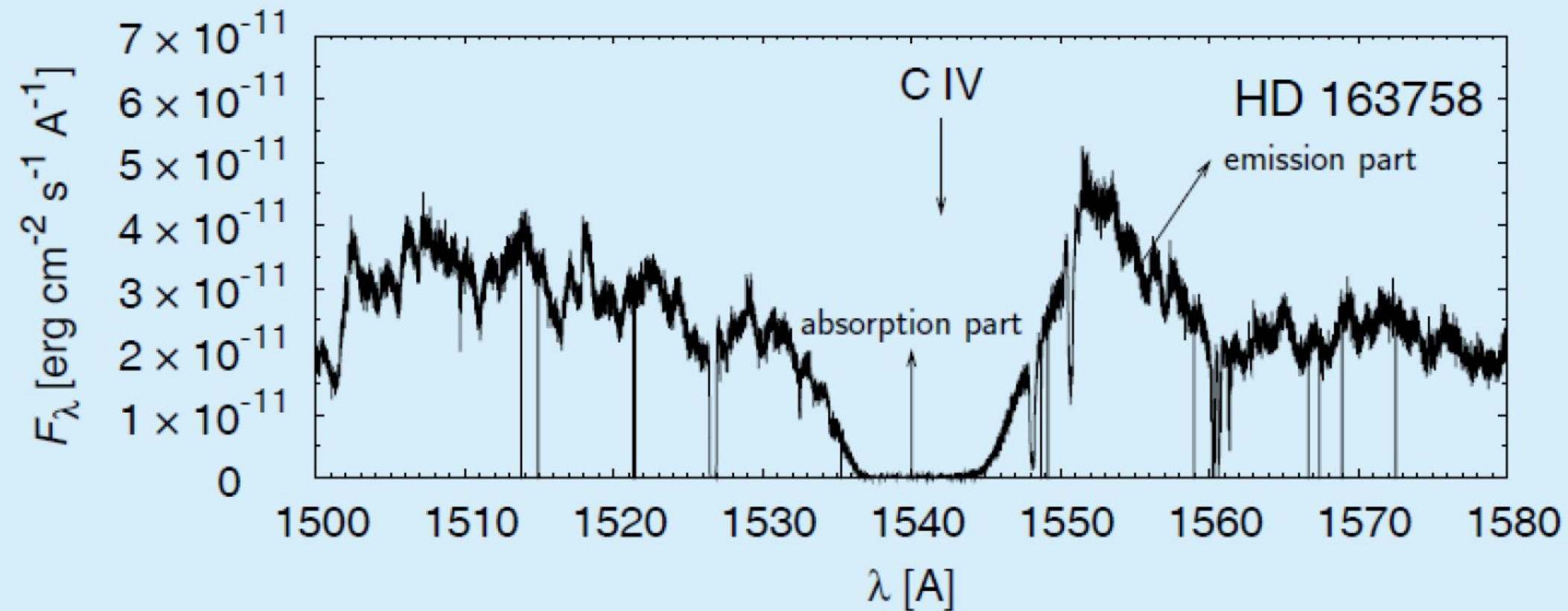


- Indicates a **disk of gas** orbits the star.

Spektri atmosfera u širenju: P Cygni profili



P Cygni profile



HD 163758 (HST)

Funkcija izvora u spektralnoj liniji

- Nakon svega ovoga, vidimo da spektralne linije apsorbuju i emituju u nekom intervalu talasnih dužina
- Ove profile možemo posmatrati kao neke raspodele verovatnoće – foton može biti emitovan na jednoj a apsorbovan na drugoj talasnoj dužini
- Pri rasejanju, funkcija izvora će zavisiti od tzv. “integrala rasejanja” (\mathcal{J}):

$$S = \epsilon B + (1 - \epsilon) J$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{-1}^1 I(\mu, \lambda) d\mu \phi_\lambda d\lambda$$

Apsorpcioni profil: ovaj scenario zovemo **kompletna redistribucija**.

- Ako ostane vremena – tabla!