Måling av elastisitetsmodulen til messing stav med sirkulært tversnitt

IVAR SVALHEIM HAUGERUD
Universitetet i Oslo
(Dated: 3. april 2018)

Vi beregner elastisitetsmodulen til en sylindrisk messingstav ved eksperimentelle målinger med to forskjellige utgangspunkter, i håp om å teste modellen for elastisitet. Den ene metoden ved å måle statisk nedbøying av stavens midtpunkt som funksjon av vekten som festes på punktet, mens staven hviler på to kniver. Den andre metoden ved å måle utbredelseshastigheten til frie longitudinelle svingninger i staven som oppstår ved et slag i aksial retning. De to verdiene er henholdsvis $E = (1.101 \pm 0.001) \times 10^{11}$ Pa og $E = (1.101 \pm 0.001) \times 10^{11}$ Pa. Differenasen mellom to de resultatene er $D = (8.678 \pm 5.321) \times 10^{8}$ Pa.

I. INTRODUKSJON

Eksperimentet i denne rapporten ble gjennomført i håp om å beregne elastistsmodulen til en sylindrisk messingstav på to måter, med forskjellig utgangspunkt, og ved dette teste kvaliteten på modellen for elastistet. En god modell burde kunne skrive flere fenomen med så få parametere som mulig. Vi skal derfor finne elastisitesparameteren, elastistsmodulen, ved å ta utgangspunkt i to forskjellige fenomener for å se om vi får samme verdi for elastistsmodulen.

Det ene fenomenet er at objekter blir bøyd eller deformert på andre måter ned de blir utsatt for en kontinuerlig kraft. For å måle dette fester vi vekter midt mellom to punkter som staven hviler på og måler hvor mye staven blir bøyd . Med denne metoden finner vi sammenhengen mellom vekten vi bruker og avstanden staven blir nedbøyd.

Den andre metoden er å finne utbredelseshastigheten til longitudinelle bølger i staven. Ifølge teorien er utbredelseshastigheten avhengig av tettheten og elastisiteten til materialet. Vi kommer ikke til å måle utbredelseshastigheten direkte, men heller å begrense oss til en bølgelengde, og finne frekvensen til denne, som gjør at vi kan regne oss fram til hastigheten.

Dette er to fenomener som ifølge teorien bare beskrives av en parameter, som er et tegn på en god teori. Men teorien må selvfølgelig stemme med det vi observer for å være en god modell. Vi ønsker derfor å teste dette ved å måle elastistsmodulen med utgangspunkt i to forskjellige fenomener, som burde gi samme verdi for elastisitetsmodulen. Er de to verdiene vi finner innenfor usikkerhetene til hverandre har vi vist at det er en god modell. Hvis de to verdiene er ulike, utenfor usikkerhetene, kan det skyldes systematisk feil i eksperimentet eller feil i teorien. I dette tilfellet burde det bli gjennomført flere eksperimenter av samme type for å se nærmere på målingene.

Hensikten med en god modell for elastisitet er lett å se nytten av. For eksmepel ønsker byggningsingeniører å forutsi hvor mye en struktur klarer å bære før det ikke er trygt lenger, og denne vitenskapen baserer seg på en god forståelse av elastisiteten til materialene man bruker. Om man måtte teste eksperimentelt for hvert hus, blokk, bil eller båt som blir bygd hvor mye det tåler før det ikke lenger er trygt, ville det vært ekstremt tidkrevende og uøkonomisk oppførsel. Med en god fysiskmodell vil man slippe dette, og vi kan leve livene våre uten å bekymre oss for at alt, fysisk, rundt oss kommer til å rase.

II. TEORI

A. Måling av nedbøying

Nedbøyingen $h(m)$ til en bjelke, som støtter seg på to punkter med avstand l, som bærer en last på mg i midten av bjelken gitt ved

$$h(m) = \frac{mgl^3}{48EI}. \tag{1}$$

I dette uttrykket er E elastisitetsmodulen og I er arealtreghetsmomentet til bjelken, ikke massetreghetsmomentet som brukes i dynamikk. Arealtreghetsmomentet, også kalt andre arealmoment, er integralet over tversnittet til bjelken

$$I = \int\int x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

hvor bjelken strekker seg ut i z-retning, og lasten virker i x-retning. For eksperimentet vi skal gjøre kommer bjelken til å være en sylinder. Vi kan derfor beregne arealtreghetsmomentet til en sylinder med radius R. Vi beregner integralet i sylinderkoordinater, og multipliserer derfor med jacobideterminanten, og bruker at $x = r\sin\theta$. Vi får

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^R r^2 \sin^2\theta r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64},$$

der d er diameteren. Setter vi dette inn i (1) får vi

$$h = \frac{4mgl^3}{3\pi E d^4}.$$

Siden vi er interesert i å måle elastisitetsmodulen til bjelken kan vi løse for likningen for E for å få

$$E = \frac{4mgl^3}{3\pi h d^4}. \tag{2}$$

Under eksperimentet kommer vi til å måle nedbøyingen h som en funksjon av lasten m, der vi forventer har en lineært forhold

$$h(m) = \alpha m + \beta.$$

Konstantleddet β vil være tilnærmet lik null siden staven ikke vil være bøyd med null last, og vi kan derfor erstatte h/m med stigningstallet α som vi vil beregne under målingene. Setter vi dette inn i (2) får vi et uttrykk for elastisitetsmodulen til en sylinderformet stav er

$$E = \frac{4gL^3}{3\pi\alpha d^4}. \tag{3}$$

Under eksperimentet kan vi måle alle de ukjente variablene i uttrykket slik at vi får en verdi for elastisitetsmodulen til messing.

B. Måling av utbredelseshastigheten til bølger

Vi ønsker å bruke en annen metode for å finne elastisitetsmodulen. Denne metoden for bestemmelse av E baserer seg på å finne utbredelseshastigheten v for longitudinalbølger i en stav. Vi kan bruke dette som utgangspunkt siden utbredelseshastigheten er avhengig av elaststsmodulen ved

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{4}$$

hvor ρ er mediets tetthet. Siden massetetthet er masse per volum kan vi finne ρ ved å måle massen og volumet til staven, og beregne tettheten fra

$$\rho = \frac{4M}{\pi L d^2},$$

hvor L er lengden på hele staven. Vi kan sette dette inn for ρ i (4) og løse for E, som gir oss

$$E = \frac{4Mv^2}{\pi L d^2}. \tag{5}$$

For å kunne beregne elastisitetsmodulen mangler vi bare utbredelseshastigheten i staven. Denne kan vi bestemme ved å måle verdien til frekvens f og bølgelengden λ, som gir oss utbredelseshastigheten ved sammenhengen

$$v = \lambda f. \tag{6}$$

Det kan vises at ved frie longitudinelle svingninger i en homogen stav med lengde L opphengt i midtpunktet og med frie ender, får vi svingninger slik at

$$L = \frac{n\lambda}{2},$$

der n er et oddetall $n = 1, 3, 5, \ldots$ Dette kan løses for bølgelengden λ, som gir oss en sammenheng mellom bølelengden og lengden av staven

$$\lambda = \frac{2L}{n},$$

Ved å slå staven i aksial retning dannes det flere egensvingninger i staven. Av disse svingningene er det den med lengst bølgelengde, $\lambda = 2L$, som blir mest dominerende som tiden går. Ved noen lenger til staven vil disse frekvensene gi hørbar lyd. Under eksperimentet kommer dette til å være tilfellet, og vi kan høre lyden fra frekvensen. Siden svingningen med lengst bølgelengde er den mest dominerende, og derfor hører tydeligst og lengst, vil det være den svingningen vi fokuserer på videre ved å velge $n = 1$ og får

$$\lambda = 2L. \tag{7}$$

Setter vi dette inn for bølgelengden i (6) og får vi

$$v = 2Lf,$$

som vi kan sette inn for utbredelseshastigheten i (5) får vi

$$E = \frac{16MLf^2}{\pi d^2}. \tag{8}$$

Ved å kunne måle de geometriske størrelsene og massen til staven, og frekvensen når vi slår på den, klarer vi å beregne elastisitetsmodulen med utgangspunkt i et annet fenomen. Hvis man istedenfor ønsker å finne frekvensen kan man gjøre dette ved å vite elastisitetsmodulen, massen og de geometriske størelsene til staven ved

$$f = \sqrt{\frac{\pi E d^2}{16ML}}. \tag{9}$$

C. Usikkerheter

På grunn av usikkerhet i målingene forventer vi ikke nøyaktig like svar for elastisitetsmodulen med de to metodene. Det er derfor viktig å vite usikkerhetene i de to metodene. Ved å bruke uttrykket for nedbøying av staven (3) får vi at usikkerheten i elastisitetsmodulen er

$$\Delta_{E_1} = E_1 \sqrt{\left(3\frac{\Delta_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_A}{A}\right)^2 + \left(4\frac{\Delta_d}{d}\right)^2}, \tag{10}$$

hvor konstantleddet forran L og d kommer fra eksponten de har i uttrykket. Usikkerheten ved å bruke utrrykket for elaststsmodulen ved måling av frekvens (8) er

$$\Delta_{E_2} = E_2 \sqrt{\left(\frac{\Delta_M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_L}{L}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta_f}{f}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta_d}{d}\right)^2}. \tag{11}$$

Som sagt forventer vi ikke at de to metodene skal gi at differanse til elastisitetsmodulen

$$D = |E_1 - E_2|$$

skal være null, hvor E_1 og E_2 er de to forskjellige verdiene vi får i vår utregning av elaststsmodulen ved våre to forskjellige metoder. Men vi ønsker at differeansen D

skal være mindre enn usikkerheten i differansen Δ_D. Når vi har gjort målingene må vi derfor sjekke om de tilfredstiller

$$D < \Delta_D, \tag{12}$$

der

$$\Delta_D = \sqrt{\Delta_{E_1}^2 + \Delta_{E_2}^2}. \tag{13}$$

Hvis målingene våre tilfrestiller denne ulikheten kommer årsaken til differansen D fra usikkerheterer i målemetoden og tilfeldige feil. Hvis dette er tilfellet sier vi at det er *overenstemmelse innenfor måleusikkerhetene.* Derimot hvis

$$D > 2\Delta_D \tag{14}$$

er det lite sansynlig at det bare er tilfeldige feil og usikkerheter i målinger som er årsaken til feilen, da er det mest sansynlig systematiske feil som har forårsaket forskjellen mellom de to svarene vi fikk for elastistsmodulen med de to metodene.

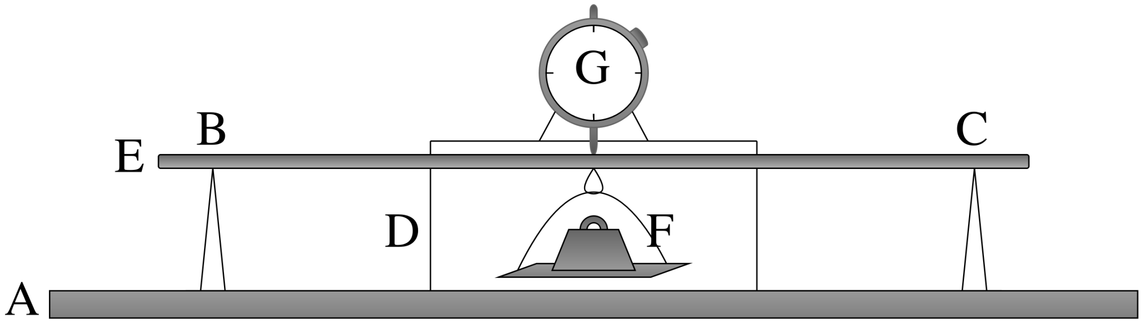
III. METODE

A. Nedbøying av messingstav

I eksperimentet vårt bruker vi en messingstav med sirkulært tversnitt som er mye lenger enn diameteren sin. Vi ønsker først å måle elastisitetsmodulen ved å måle nedbøying av messingstaven når vi fester vekter på midten av staven. Oppsettet brukt i dette eksperimentet er vist i figur 1 on the following page. I eksperimentet bruker vi en messingstav E som hviler på to kniver B og C. Midt på messingstaven er det festet en holder F hvor vi setter loddene på. Ved måleuret G kan vi måle bøyingen avmessingstaven. Hele eksperimentet foregår på en plate A.
Før vi begynner eksperimentet er det viktig at at holderen F er festet midt mellom de to knivene. Vi måler derfor avstanden mellom B og C og flyttet på staven slik at midten av staven var halvparten av denne avstanden fra B. For å sjekke at alt var gjort korrekt gjorde vi målingene på nytt, men nå målte vi avstanden fra B til F og fra F til B som gir oss mindre usikkerhet. Fra dette kunne vi finjustere posisjonen til staven til vi var sikkre på den var sentrert riktig. Itilegg er det viktig at punktet hvor nålen fra måleuret treffer normalt på flaten til sylinderen. For å være sikker på at den er normalt på kan vi bruke et vater og justere til vi er fornøyde.
Målet vårt er å bruke (3) til å beregne elastisutetsmodulen, og for å gjøre dette trenger vi å vite både lengden av staven og diameteren. Vi bruker derfor et skyvelær til måle diameteren til staven. Siden staven er mye lengere i lengden enn i bredden måtte vi bruke en tommestokk. Siden disse verdiene er i tredje og fjerde potens er det viktig å gjøre presise målinger, siden usikkerhetene her vil ha store utslag i usikkerheten i det endelige resultatet. Vi trenger også å finne en nøyaktig verdi tyngdeakselerasjonen g, og usikkerheten i denne verdien. Denne verdien kan variere avhengig av hvor på kloden man er, og vi må derfor finne en verdi for Oslo, Norge.
Nå som eksperimentet er klart for måling, men før vi kan begynne må vi kalibrere loddene med presisjonsvektene. For å kalibrere loddene bruker vi en balansevekt, og setter den i likevekt med presisjonsvektene, for så å bytte presisjonsvektene ut med loddene og måle avviket mellom dem. Når dette er gjort er alt klart for å måle nedbøyingen av staven.
Vi leser av nedbøyingen av staven som en funksjon av massen til loddene vi legger på festepunktet. Mellom hver måling tar vi av loddene og sjekker at utslaget til måleuret er tilbake til 0-punktet. Massene vi har valgt å bruke går fra 0 til 3.5kg med en lineær økning på 0.5kg. På disse målingene forventer vi et lineært forhold mellom vekten på loddene og nedbøyingen. For å bruke (3) trenger vi stigningstallet til målepunktene, som vi kan beregne fra minste kvadraters metode på målingene.

B. Måling av utbredelseshastigheten til bølger

For å beregne elastisitetsmodulen ved å måle frekvensen til trykkbølger i staven bruker vi likning (8). Vi trenger derfor å vite diameteren og lengen til staven, men disse verdiene har vi allerede målt. Vi kan derfor måle massen. For å veie bruker vi balansevekten som vi har kalibrert tidligere. For å holde staven stabil på vekten måler vi den med et balanse ledd som vi trekker fra den totale massen for å finne massen til staven. Vi lar staven henge horisontalt og gir den et slag aksialt på med en plastikk hammer. Dette slaget danner trykkbølger i staven hvor den mest dominerende vil være den med kortest bølgelengde. For å måle frekvensen er det to forskjellige fremgangsmåter, fouriertransformasjon eller svevning.
For å bruke fouriertransformasjon bruker vi en mikrofon som vi setter nære staven. Fra et matlabprogram som leser signalene fra mikrofonen og tar en fouriertransformasjon av signalene, kan vi velge en samplingsfrekvens og en samplingstid for målingen. Etter slaget på staven venter vi litt før vi starter målingen med mikrofonen siden de andre frekvensene enn den med lengst bølgelengde dør ut først. Ved å finne en verdi for frekvensen med denne metoden har vi alle verdiene vi trenger for å beregne elastisitetsmodulen ved likning (8).
For å bruke sveve-metoden antar vi en verdi for frekvensen til trykkbølgene og bruker denne frekvensen i en høytaler som sender en tone med samme frekvens. Hvis frekvensen vi hører fra høytaleren er nesten lik frekvensen vi hører fra å slå på staven vil det oppstå en effekt som kalles svevning. Denne svevningen er lett å høre, og jo nærmere frekvensene er hverandre vil tidsavstanden mellom to perioder i svevningen øke. For å gjøre det lettere å høre svevningen burde styrken fra høytaleren



Figur 1: Eksperimentelt oppsett for målinger.

være rundt samme styrke som den fra staven. Vi kan med denne metoden endre på frekvensen til signalet fra høytaleren mens vi hører signalet fra staven. Hvis vi starter med en frekvens og endrer den slik at perioden på svevningen øker kan vi endre frekvens i samme retning til svevningen er helt borte. Når svevningen er helt borte har vi funnet frekvens til signalet. Med denne metoden er det vanskelig å beregne en usikkerhet i frekvensen. Å velge en frekvens til høytaleren kan gjøres ved å først bruke fouriertransformasjons-metoden ovenfor for å finne en frekvens, og så velge samme frekvens på høytaleren, eller bruke likning (9) hvis man har elastisitetsmodulen.

IV. RESULTATER

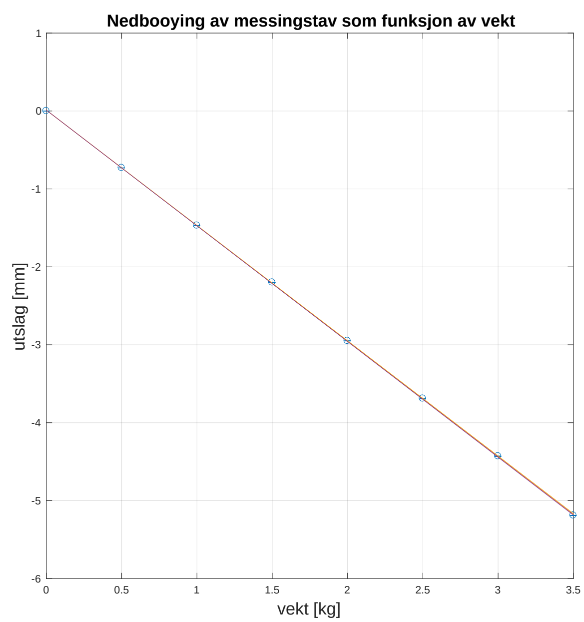
Målingene av messingstaven som vi brukte i eksperimentet, usikkerheten i målingene og måleinstrument, er vist i tabell I. Dette er all informasjonen vi trenger å vite om messingstaven, som vi trenger for begge metodene å måle elastistsmodulen på.

Tabell I: Målinger gjort av de geometriske størrelsene til messingstaven. Usikkerhetene er hentet fra databladet til måleinstrumentene, navnene på måleinstrumentene er vist i listen VI on the next page.

Egenskap	Målt verdi	Usikkerhet	Målemetode
Lengde L [m]	1.490	± 0.004	tommestokk
Avstand kniver l [m]	1.365	± 0.004	tommestokk
Diameter D [cm]	15.96	± 0.001	skyvelær
Masse M [kg]	2.5173	± 0.0006	balansevekt

A. Måling av nedbøying

For å bruke likning (3) trenger vi å vite de geometriske størrelsene til staven vist i tabell I, itillegg til tyngdeakselerasjonen g. Verdien for Tyngdeakselerasjon g er oppgitt i KILDENAVN [3], hvor vi finner at $g = 9.81 \pm 0.03\,\mathrm{m/s^2}$. Da er det eneste vi mangler for å finne elastistsmodulen stigningstallet α fra målingene. Målingene vi brukte for å beregne stigningstallet er vist i figur 2. Fra denne figuren finner vi at stigningstallet er $1.482 \pm 0.003\,\mathrm{mm\,kg^{-1}}$. Ved



Figur 2: Målinger gjort av nedbøyingen av staven h som funksjon av lasten m vi fester på midten av staven. De røde sirklene er målepunktene, og den blå linja er minstekvadraters lineærtilpassning.

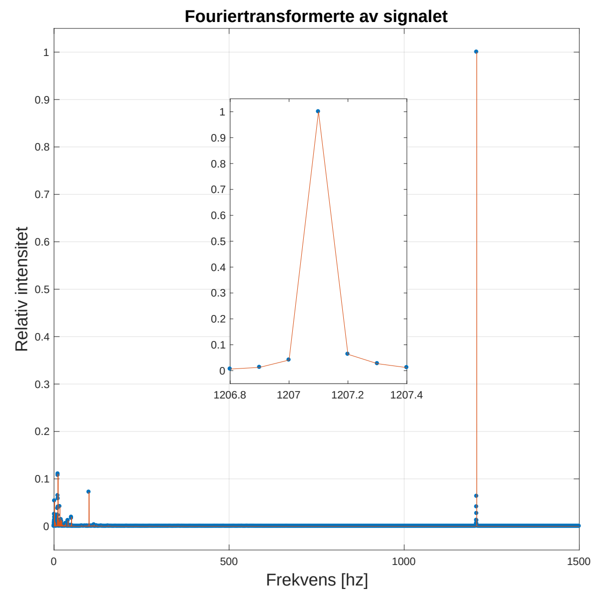
å sette inn for diameteren og lengden fra tabell I on the preceding page, og tyngdeakselerasjonen og stigningstallet, inn i (3) finner vi at $E = 110(1)$ GPa. Usikkerheten er beregnet fra likning (10), hvor vi har brukt usikkerheten i målingene nevnt ovenfor.

B. Måling av utbredelseshastigheten til bølger

Med denne metoden bruker vi likning (8) for å beregne elastisitetsmodulen til messingstaven. For å beregne denne trenger vi igjen de geometriske størrelsene til staven vist i tabell I on the previous page, men nå tregner vi ikke tyngdeakselerasjonen. Istedenfor tyngdeakselrasjonen trenger vi frekvensen som oppstår når vi slår på staven. Vi gjorde flere målinger av frekvensen til bølgene som oppsto ved å slå på staven. Den fouriertransformerte av lyden mikrofonen tok opp på en av målingene er vist i figur 3. Fra å se på den fouriertransformerte ser vi at vi har en svært dominerende frekvens på 1207.1 Hz. Området rundt denne frekvens er tilnærmet lik null, og vi har litt støy for lave frekvenser under 100 Hz. Samplingstiden under eksperimentet var på 10 s som gir oss en oppløsning på 0.1 Hz. Ved å ta med usikkerheten får vi derfor at frekvens til bølgen i staven er på 1207.1 ± 0.1 Hz. Det ble gjort flere målinger av det samme, og på alle fikk vi samme frekvens. Vi målte også frekvensen til bølgen ved å lete etter svevninger i lyden. Vi brukte derfor (9) med elastisitetsmodulen vi fant ved å måle nedbøyingen til staven til å finne at grunnfrekvensen burde ligge på rundt 1211 Hz. Ved å bruke dette som startspunkt for å lete etter når perioden på svevningen økte eller minkte klarte vi å bestemme at frekvensen var på 1207.0 Hz. Under bruk av denne metoden brukte vi hørselen vår, og vi klarte å skille svevningen for frekvenser med en differanse på 0.2 Hz, vi får derfor en usikkerhet lik denne verdien. Ved svevning fant vi altså at frekvensen var på 1207 ± 0.2 Hz.
For å beregne elastisitetsmodulen kommer vi til å bruke verdien og usikkerheten vi fant for frekvensen ved å bruke mikorofon og fouriertransformasjon. Ved å sette inn denne verdien, samt verdien vi målte for masse, lengde og diameter, vist i tabell I on the previous page, i (8), får vi at elastisitetsmodulen er $E = 109.3(3)$ GPa. Usikkerheten er beregnet fra (11), hvor vi har brukt usikkerheten i målingene nevnt ovenfor.

V. DISKUSJON

Under kalibreringen av vekten med presisjonsloddene var det en nøyaktighet på 0.1 gram, men vi merket at balansevekten var svært sensitiv til hvor på vektene loddene var på plassert. Med asymetri målte vi en vektforskjell på 0.6g, og det er derfor en større usikkerhet enn presisjonen til instrumentet. Det var lett å unngå assymetri når vi kalibrerte med ett presisjonslodd, men måtte vi bruke to var det vanskeligere å plasere dem riktig på vekten. På grunn av dette måtte vi derfor bruke en større usikkerhet i resultatene for kalibreringene, der vi trengte flere presisjonslodd, enn presisjonen til vekten.



Figur 3: Den fouriertransformerte av lyden motatt fra mikrofonen for en av målingene. I figuren er det inkludert et zoomet inn område rundt der frekvens ligger for å vise fram oppløsningen på målingene.

VI. KONKLUSJON

Utstyrsliste

- aluminiumstav
- mikrofon
- tommestok
- skyvelær
- balansevekt
- opphengningsstativ

[1] Squires, G.L. *Practical Physics*, Cambridge University Press, 2001.
[2] Fysisk institutt *Elastisitet*, Universitetet i Oslo, februar 2018.
[3] kilde med tyngdeakselerasjonen gravitasjon, forlagnavn, mai 2020.