Elastisitet

IVAR SVALHEIM HAUGERUD
Universitetet i Oslo
(Dated: 26. mars 2018)

I. TEORI

defleksjonen $h(m)$ til en bjelke, som støtter seg på to punkter med avstand l, som bærer en last på mg i midten av bjelken gitt ved

$$h(m) = \frac{mgl^3}{48EI}. \tag{1}$$

I dette uttrykket er E elastisitetsmodulen og I er arealtreghetsmomentet til bjelken, ikke massetreghetsmomentet som brukes i dynamikk. Arealtreghetsmomentet, også kalt andre arealmoment, er integralet over tversnittet til bjelken

$$I = \int\int x^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

hvor bjelken strekker seg ut i z-retning, og lasten virker i x-retning. For eksperimentet vi skal gjøre kommer bjelken til å være en sylinder. Vi kan derfor beregne arealtreghetsmomentet til en sylinder med radius R. Vi beregner integralet i sylinderkoordinater, og har derfor multiplisert med jacobideterminanten, og brukt at $x = r\sin\theta$. Vi får

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^R r^2 \sin^2\theta r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}, \tag{3}$$

der d er diameteren. Setter vi dette inn i (1) får vi

$$h(m) = \frac{4mgl^3}{3\pi Ed^4}.$$

Siden vi er interesert i å måle elastisitetsmodulen til bjelken kan vi løse for likningen for E for å få

$$E = \frac{4mgl^3}{3\pi hd^4}. \tag{4}$$

Under eksperimentet kommer vi til å finne $h(m)$, som vi forventer har en lineært forhold med lasten m

$$h(m) = Am + B. \tag{5}$$

Konstantleddet B vil være tilnærmet lik null, og vi kan derfor erstatte h/m med stigningstallet A som vi vil beregne under målingene. Setter vi dette inn i (4) får vi et uttrykk for elastisitetsmodulen til bjelken hvor vi kan måle alle de ukjente variablene

$$E = \frac{4gl^3}{3\pi Ad^4}. \tag{6}$$

Fra dette uttrykket kan vi beregne en verdi for elastisitetsmodulen.
Vi ønsker å bruke en annen metode for å finne elastisitetsmodulen. Denne metoden for bestemmelse av E baserer seg på at utbredelseshastigheten v for longitudinalbølger i en stav er gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

hvor ρ er mediets tetthet. For å beregne ρ kan vi måle massen og volumet til staven som er gitt av

$$\rho = \frac{4M}{\pi Ld^2}. \tag{7}$$

Vi kan sette dette inn for ρ i (I) og løse for E, som gir oss

$$E = \frac{4Mv^2}{\pi Ld^2}. \tag{8}$$

For å kunne beregne elastisitetsmodulen mangler vi bare utbredelseshastigheten i staven. Denne kan vi bestemme ved å måle verdien til frekvens f og bølgelengden λ, som gir oss hastigheten ved sammenhengen

$$v = \lambda f. \tag{9}$$

Både bølgelengde og frekvens kan bestemmes ved måling på en stående bølge i staven. Det kan vises at ved frie longitudinelle svingninger i en homogen stav med lengde L opphengt i midtpunktet og med frie ender, får vi stående bølger slik at

$$L = \frac{n\lambda}{2}, \tag{10}$$

dette kan løses for λ, som gir oss

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \tag{11}$$

der n er et oddetall $n = 1, 3, 5, ...$ Ved å slå staven i aksial retning dannes det flere egensvingninger i staven. Av disse stående bølgendene er det den med støst bølgelengde, $\lambda = 2L$, som blir sterkest. Denne bølgen vil også bli svakest dempet, og vil derfor etterhvert bli den dominerende bølgen i staven. Ved noen verdier for L kan disse bølgene gi hørbar lyd. Vi kommer derfor til å bruke

$$\lambda = 2L \tag{12}$$

i beregningen av elastisitetsmodulen. Setter vi dette inn for bølgelengden i (9) og får vi

$$v = 2Lf, \tag{13}$$

som vi kan sette inn for utbredelseshastigheten i (8) får vi

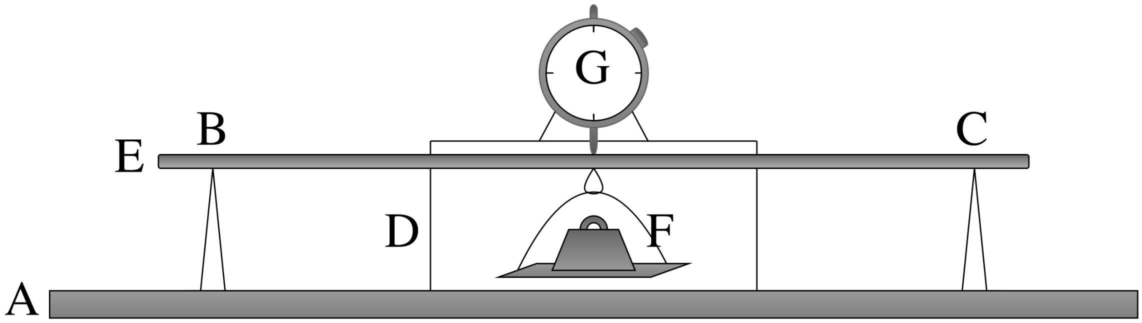
$$E = \frac{16MLf^2}{\pi d^2}.. \tag{14}$$

Ved å kunne måle de geometriske størrelsene til stangen og frekvensen når vi slår på den klarer vi å beregne elastisitetsmodulen på en ny måte.

II. METODE

[1] Squires, G.L. *Practical Physics*, Cambridge University Press, 2001.

[2] Fysisk institutt *Elastisitet*, Universitetet i Oslo, februar 2018.



Figur 1: Eksperimentelt oppsett for målinger. Vi bruker en messingstang E som hviler på to kniver B og C. Midt på bjelken er det festet en flate F hvor vi kan feste vekter, og vi kan måle avstanden den faller ned med måleuret G. Hele eksperimentet foregår på en plate A.