

Beregning av elastisitetsmodulen til messing ved måling av nedbøying og hastighet til bølger i stav

IVAR SVALHEIM HAUGERUD
Universitetet i Oslo

(Dated: 8. april 2018)

Ekperimentelle målinger for å beregne elastisitetsmodulen til en sylindrisk messingstav ble gjennomført med to forskjellige utgangspunkter for å teste den fysiske modellen for elastisitet. Den ene metoden tok utgangspunkt i å måle statisk nedbøying av stavens midtpunkt som funksjon av belastning på midtpunktet til staven, mens staven hviler på to kniver. Den andre metoden baserte seg på å måle utbredelseshastigheten til frie longitudinelle svingninger i staven som oppstår ved slag i aksial retning på staven. Det kreves at de to verdiene for elastisitetsmodulen er det samme for at det skal være en korrekt fysisk modell. De to verdiene for elastisiteten til messingstaven er med de to metodene henholdsvis $E = 110(1)$ GPa og $109.3(3)$ GPa. Differansen mellom de to resultatene er $0.7(11)$ GPa. Siden differansen mellom de to verdiene er mindre enn usikkerheten i differansen, er det overensstemmelse innenfor måleusikkerhetene.

I. INTRODUKSJON

Ekperimentet i denne rapporten ble gjennomført i håp om å beregne elastisitetsmodulen til messing på to måter, med forskjellig utgangspunkt, og ved dette teste kvaliteten på modellen for elastisitet. En god modell burde kunne beskrive flere fenomener med så få parametere som mulig. Vi skal derfor finne elastisitetsparameteren, elastisitetsmodulen, ved å ta utgangspunkt i to forskjellige fenomener for å se om vi får samme verdi for elastisitetsmodulen.

Elastisitet er egenskapen til et legeme som gjør at legemet returnerer til sin originale form etter å ha blitt utsatt for ytre krefter. Dersom et legeme kommer tilbake med nøyaktig samme form som før den ble utsatt for ytre krefter sier man at det er hundre prosent elastisk legeme [4]. Elastisiteten beskriver legemets evne til å oppta arbeid ved deformasjon, og bevare dette som potensiell energi, som legemet bruker til å få sin opprinnelige form når kraften opphører. Elastisitet blir også brukt om kollisjoner mellom legemer, hvor det beskriver hvor mye av bevegelsesenergien til legemene som er bevart mellom før og etter kollisjonen. Hvis det er et elastisk støt vil all kinetisk energi være bevart, hvis det er et uelastisk støt vil energi bli brukt til å deformere legemene i kollisjonen.

Når noe blir utsatt for spenning (*stress*) vil tøyingen (*strain*) generelt sett øke lineært med spenningen, til det når et punkt som kalles *elastisitetsgrensen*. Øker spenningen over elastisitetsgrensen vil legeme ikke komme tilbake til sin opprinnelige form når kraften opphører, deformasjonen slutter å være elastisk [4]. Øker spenningen enda mer kan man nå *bruddgrensen* hvor legemet brytes i stykker [4]. I dette ekperimentet kommer vi bare til å jobbe med spenninger mindre enn den som trengs for å nå elastisitetsgrensen, og vi forventer derfor et lineært forhold mellom tøyingen og spenningen i målingene våre. Elastisitetsmodulen som vi kommer til å finne under ekperimentet, også

kalt *Young's modulus*, gir forholdet mellom spenningen som et legeme blir utsatt for, og den resulterende tøyingen til legemet. Og siden vi er under elastisitetsgrensen er forholdet lineært.

Det ene fenomenet vi skal se på for å finne elastisitetsmodulen, er at objekter blir bøyd eller deformert når de blir utsatt for en kontinuerlig kraft. For å måle dette fester vi vekter midt mellom to punkter som en messingstav hviler på, og måler hvor mye stavens midtpunkt blir bøyd. Med denne metoden finner vi sammenhengen mellom lasten staven må bære, og graden av deformasjon i staven.

Den andre metoden er å finne utbredelseshastigheten til longitudinelle bølger i staven. Ifølge teorien er utbredelseshastigheten avhengig av tettheten og elastisitetsmodulen til materialet. Vi kommer ikke til å måle utbredelseshastigheten direkte, men heller å begrense oss til en bølgelengde, og finne frekvensen til denne, som gjør at vi kan regne oss fram til utbredelseshastigheten.

Dette er to fenomener som ifølge teorien bare beskrives av en parameter, som er et tegn på en god teori. Men teorien må selvfølgelig stemme med det vi observerer for å være en god modell. Vi ønsker derfor å teste dette ved å måle elastisitetsmodulen med utgangspunkt i to forskjellige fenomener, som burde gi samme verdi for elastisitetsmodulen. Er de to verdiene vi finner innenfor usikkerhetene til hverandre er det et tegn på at det er en korrekt modell. Hvis de to verdiene er ulike, utenfor usikkerhetene, kan det skyldes systematisk feil i ekperimentet eller feil i teorien. I dette tilfellet burde det bli gjennomført flere eksperimenter av samme type for å se nærmere på elastisitetsmodellen.

Hensikten med en god modell for elastisitet er lett å se nytten av. Elastisitet spiller en stor rolle for byggkonstruksjoner, for forplantning av lyd, for forståelsen av vibrasjoner, og for studiet av kreftene mellom atomer eller molekyler i krystallgittere [4]. For eksempel ønsker bygningsingeniører å forutsi hvor mye en struktur klarer å bære før det ikke er trygt lenger, og denne

kunnskapen baserer seg på en god forståelse av elastisiteten til materialene man bruker. Med en god fysisk modell vil man kunne forutsi hvor mye noe tåler, som sparer ingeniørene for mye arbeid og gjør omgivelsene trygge.

II. TEORI

A. Måling av nedbøying

Nedbøyingen $h(m)$ til en bjelke, eller stav som vi skal bruke i vårt eksperiment, som støtter seg på to punkter med avstand l , som bærer en last på mg i midten av staven, er gitt ved

$$h(m) = \frac{mgl^3}{48EI} \quad [2]. \quad (1)$$

I dette uttrykket er E elastisitetsmodulen og I er arealtregghetsmomentet til bjelken. Arealregghetsmomentet, også kalt andre arealmoment, er integralet over tverrsnittet til bjelken

$$I = \int \int x^2 dx dy,$$

hvor bjelken strekker seg ut i z -retning, og lasten virker i x -retning. For eksperimentet vi skal gjøre kommer bjelken til å være en sylinder. Vi kan derfor beregne arealtregghetsmomentet til en sylinder med radius R . Vi beregner integralet i sylinderkoordinater, og multipliserer derfor med jacobideterminanten, og bruker at $x = r \sin \theta$. Vi får

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin^2 \theta r dr d\theta = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64},$$

der d er diameteren. Setter vi dette inn i uttrykket for nedbøyingen av staven (1) får vi

$$h = \frac{4mgl^3}{3\pi Ed^4}.$$

Siden vi er interessert i å finne elastisitetsmodulen til bjelken kan vi løse likningen for E for å få

$$E = \frac{4mgl^3}{3\pi h d^4}. \quad (2)$$

Under eksperimentet kommer vi til å måle nedbøyingen h som en funksjon av lasten m , der vi forventer har en lineært forhold

$$h(m) = \alpha m + \beta.$$

Hvor α er stigningstallet, og konstantleddet β vil være tilnærmet lik null siden staven ikke vil være bøyd med null last, og vi kan derfor erstatte h/m med stigningstallet α som vi vil beregne fra målingene. Setter

vi dette inn i likning (2) får vi at uttrykket for elastisitetsmodulen til en sylinderformet stav er

$$E = \frac{4gl^3}{3\pi \alpha d^4}. \quad (3)$$

Under eksperimentet kan vi måle alle de ukjente variablene i uttrykket slik at vi får en verdi for elastisitetsmodulen til messing.

For å finne tyngdeakselerasjonen i Oslo bruker vi *International gravitational formula (IGF)* som tar hensyn til breddegraden og høyde over havet under beregningen av tyngdeakselerasjonen [3]. Man beregner da tyngdeakselerasjonen med

$$g = 9.7803253 \left[\frac{1 + 0.001931 \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - 0.006694 \sin^2 \phi}} \right] \text{ m/s}^2 - 3.086 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2} \cdot h \quad (4)$$

der h er høyden over havet, og ϕ er breddegraden.

B. Måling av utbredelseshastigheten til bølger

Vi ønsker å bruke en annen metode for å finne elastisitetsmodulen. Denne metoden for bestemmelse av elastisitetsmodulen, baserer seg på å finne utbredelseshastigheten v for longitudinale svingninger i en homogen stav. Vi kan bruke dette som utgangspunkt, siden utbredelseshastigheten er avhengig av elastisitetsmodulen ved

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (5)$$

hvor ρ er mediets massetetthet. Siden massetetthet er masse per volum, kan vi finne ρ ved å måle massen og volumet til staven, og beregne tettheten fra

$$\rho = \frac{4M}{\pi L d^2},$$

hvor L er lengden på hele staven og M er den totale massen til staven. Vi kan sette dette inn for ρ i likning (5) og løse for E , som gir oss

$$E = \frac{4Mv^2}{\pi L d^2}. \quad (6)$$

For å kunne beregne elastisitetsmodulen mangler vi bare utbredelseshastigheten i staven. Denne kan vi bestemme ved å måle verdien til frekvens f og bølgelengden λ , som gir oss utbredelseshastigheten ved sammenhengen

$$v = \lambda f. \quad (7)$$

Det kan vises [2] at ved frie longitudinelle svingninger i en homogen stav med lengde L opphengt i midtpunktet og med frie ender, danner svingninger slik at

$$L = \frac{n\lambda}{2},$$

der n er et oddetall $n = 1, 3, 5, \dots$. Dette kan løses for bølgelengden λ , som gir oss en sammenheng mellom bølkelengden og lengden av staven

$$\lambda = \frac{2L}{n}.$$

Ved å slå staven i aksial retning dannes det flere ståendebølger i staven, en til hver n . Det blir stående bølger siden det ikke virker krefter i endene av staven på grunn av opphengingen [2]. Av disse egensvingningene er det den med lengst bølgelengde, $\lambda = 2L$, som blir mest dominerende som tiden går. Ved noen lengder for staven vil frekvensene til svingningene gi hørbar lyd. Under eksperimentet kommer dette til å være tilfellet, og vi kan høre lyden fra svingningene. Siden svingningen med lengst bølgelengde er den mest dominerende, og derfor den vi hører tydeligst og lengst, vil det være den svingningen vi fokuserer på videre. Vi velger derfor $n = 1$ for utregningen, som gir oss

$$\lambda = 2L. \quad (8)$$

Setter vi dette inn for bølgelengden i likning (7) får vi

$$v = 2Lf,$$

som vi kan sette inn for utbredeshastigheten i likning (6), hvor vi får

$$E = \frac{16MLf^2}{\pi d^2}. \quad (9)$$

Ved å kunne måle de geometriske størrelsene og massen til staven, og frekvensen når vi slår på den, klarer vi å beregne elastisitetsmodulen til messing. Hvis man istedenfor ønsker å finne frekvensen, kan man gjøre dette ved å vite elastisitetsmodulen, massen, og de geometriske størrelsene til staven ved

$$f = \sqrt{\frac{\pi E d^2}{16ML}}. \quad (10)$$

Den ene måten å måle frekvensen på er å bruke et fenomen som kalles svingning. Svingning kan utnyttes når man har en kjent frekvens som er omtrent den samme som frekvensen til svingingen man er interessert i. Da kan man spille av den omtrentlige frekvensen på en høyttaler mens man hører frekvensen man er interessert i. For vårt tilfelle må vi slå på staven mens vi spiller av en frekvens fra en høyttaler. De to lydbølgene, den ene fra høyttaleren og den andre fra

staven, vil da danne konstruktiv og destruktiv interferens med hverandre. Dette fører til den lett hørlige effekten svingning. Når to kilder med nesten samme frekvens sender bølger, vil de starte med konstruktiv interferens, men som tiden går vil den lille forskjellen i frekvens føre til at den konstruktive interferensen blir destruktiv. Årsaken til dette er at som tiden går vil den lille frekvensforskjellen føre til en halv faseforskjell etter en viss tid. Når de to signalene har en halv faseforskjell vil bølgetopp møte bølgebunn, og vi får destruktiv interferens. Når interferensen er destruktiv vil man ikke høre noe, og intensiteten vil deretter øke som signalene kommer mer og mer i fase. Denne effekten vil fortsette som tiden går. Dette høres som en oscillerende styrke i volumet. Når differansen mellom de to frekvensene er svært liten, vil det ta lengre tid før frekvensforskjellen har ført til en faseforskjell. Er differansen litt større, tar det kortere tid. Derfor kan man ved å endre den ene frekvensen relativt til den andre, finne når de to frekvensene er like ved å høre når perioden til svingningen øker, helt fram til man ikke lenger klarer å høre noe svingning. Hvis man da kjenner frekvensen man endrer på, har man funnet frekvensen ved å høre svingningen. For å gjøre det lettere å høre svingningen, burde styrken fra høyttaleren være rundt samme styrke som den fra staven.

C. Usikkerheter

På grunn av usikkerhet i målingene, forventer vi ikke nøyaktig like svar for elastisitetsmodulen med de to metodene. Det er derfor viktig å vite usikkerhetene i elastisitetsmodulen vi finner med de to metodene. Ved å bruke uttrykket for nedbøying av staven (3) får vi at usikkerheten i elastisitetsmodulen er

$$\Delta_{E_1} = E_1 \sqrt{\left(3 \frac{\Delta_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_A}{A}\right)^2 + \left(4 \frac{\Delta_d}{d}\right)^2}, \quad (11)$$

hvor konstantleddet foran L og d kommer fra eksponenten de har i likning (3). I uttrykket representerer variablene det samme som før, og Δ med en indeks indikerer usikkerheten i denne målingen. Usikkerheten ved å bruke uttrykket for elastisitetsmodulen ved måling av frekvens (9) er

$$\Delta_{E_2} = E_2 \sqrt{\left(\frac{\Delta_M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_L}{L}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta_f}{f}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta_d}{d}\right)^2}. \quad (12)$$

Som sagt forventer vi ikke at de to metodene skal gi at differansen til elastisitetsmodulen

$$D = |E_1 - E_2|$$

skal være null, hvor E_1 og E_2 er de to forskjellige verdiene vi får i vår utregning av elastisitetsmodulen ved

våre to forskjellige metoder. Men vi ønsker at differansen D skal være mindre enn usikkerheten i differansen Δ_D . Når vi har funnet de to verdiene for elastisitetsmodulen må vi derfor sjekke om de tilfredstiller

$$D < \Delta_D, \quad (13)$$

der

$$\Delta_D = \sqrt{\Delta_{E_1}^2 + \Delta_{E_2}^2}. \quad (14)$$

Hvis målingene våre tilfredstiller denne ulikheten kommer årsaken til differansen D mest sannsynlig fra usikkerheter i målemetoden og tilfældige feil. Hvis dette er tilfellet, sier vi at det er *overensstemmelse innenfor måleusikkerhetene*. Derimot hvis

$$D > 2\Delta_D \quad (15)$$

er det lite sannsynlig at det bare er tilfældige feil og usikkerheter i målinger som er årsaken til feilen, da er det mest sannsynlig systematiske feil som har forårsaket forskjellen mellom de to verdiene vi fikk for elastisitetsmodulen med de to metodene. Regnemetoden vi bruker for usikkerheten til målingene er beskrevet i boken *Practical Physics* av G.L. Squires [1].

III. METODE

A. Nedbøying av messingstav

I eksperimentet vårt bruker vi en messingstav med sirkulært tverrsnitt som er mye lenger enn diameteren sin. Vi ønsker først å måle elastisitetsmodulen ved å måle nedbøying av messingstaven når vi fester lodd på midten av staven. Oppsettet brukt i dette eksperimentet er vist i figur 1 på neste side. I eksperimentet bruker vi en messingstav E som hviler på to kniver B og C . Midt på messingstaven er det festet en holder F hvor vi setter loddene på. Ved måleuret G kan vi måle bøyingen av messingstavens midtpunkt. Hele eksperimentet foregår på en platform A .

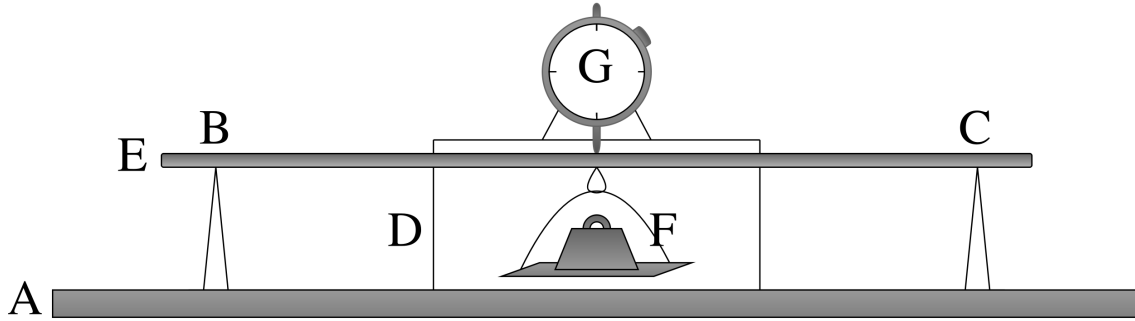
Før vi begynner å måle nedbøyingen av staven, er det viktig at at stavens midtpunkt er midt mellom de to knivene staven hviler på. Dette er nødvendig siden teorien vi skal teste forutsetter det. Midt mellom de to knivene kommer holderen F til å være festet. Vi måler derfor avstanden mellom B og C og flyttet på staven slik at midten av staven er halvparten av denne avstanden fra B . For å sjekke at alt var gjort korrekt gjorde vi målingene på nytt, men nå målte vi avstanden fra B til F og fra F til C som gir oss mindre usikkerhet. Fra dette kunne vi finjustere posisjonen til staven til vi var sikre på den var sentrert

riktig. Det er også viktig at punktet hvor nålen fra måleuret treffer, er normalt på flaten til sylindere. For å være sikker på at den er normalt på, brukte vi et vater og justerte vinkelen til det var vannrett. For å måle nedbøyingen brukte vi et måleuret på grunn av den gode presisjonen og praktiske monteringen for eksperimentet.

Målet vårt er å bruke likning (3) til å beregne elastisitetsmodulen, og for å gjøre dette trenger vi å vite avstanden mellom knivene B og C som staven hviler på, og diameteren til staven. Vi bruker derfor et skyvelær til måle diameteren til staven, siden et skyvelær har mye mindre systematisk usikkerhet enn en linjal eller meterstokk. Siden avstanden mellom knivene er mye lengre enn diameteren til staven måtte vi bruke en meterstokk for å måle avstanden. Målinger med meterstokk gir et stort bidrag til usikkerheten i det endelige resultatet, siden måleinstrumentet ikke er like presist som de andre som blir brukt. Siden avstanden mellom knivene, og diameteren er i henholdsvis tredje og fjerde potens i uttrykket for elastisitetsmodulen (3) er det viktig å gjøre presise målinger, siden usikkerhetene her vil ha store utslag i usikkerheten i det endelige resultatet. Vi trenger også å finne en nøyaktig verdi for tyngdeakselerasjonen g , og usikkerheten i denne verdien. Denne verdien kan variere avhengig av hvor på kloden man er, og vi må derfor finne en verdi for Oslo, Norge. Mest sannsynlig er usikkerheten i tyngdeakselerasjonen mye mindre enn målingene vi har gjort, spesielt med meterstokk, men man burde være presis uansett.

Når vi måler nedbøyingen av staven bruker vi lodd med kjent masse. For å få presise målinger må vi kalibrere massen til loddene ved å sammenlikne loddene vekt med vekten til presisjonslodd. For å kalibrere loddene bruker vi en balansevekt, og setter den i likevekt med presisjonsloddene, for så å bytte presisjonsloddene ut med loddene vi bruker under eksperimentet, og måle avviket til balansevekten mellom loddene og presisjonsloddene. Ved å bruke en balansevekt og denne metoden, får vi en ekstremt god oppløsning i differansen mellom loddene og presisjonsloddene. Når dette er gjort er alt klart for å måle nedbøyingen av staven.

Vi leser av nedbøyingen av staven som en funksjon av massen til loddene vi legger på festepunktet F . Mellom hver måling tar vi av loddene og sjekker at utslaget til måleuret er tilbake til 0-punktet. Massene vi har valgt å bruke går fra 0 til 3.5kg med en lineær økning på 0.5kg. På disse målingene forventer vi et lineært forhold mellom vekten på loddene og nedbøyingen. For å bruke likning (3) trenger vi stigningstallet til målepunktene, som vi kan beregne fra minste kvadraters metode på målingene [1].



Figur 1: Eksperimentelt oppsett for målinger. Illustrasjon av staven som hviler på to knvier, med et måleutrustning som måler nedbøyningen av stavens midtpunkt. På stavens midtpunkt fester vi loddene for å måle nedbøyning som funksjon av belastningen.

B. Måling av utbredelseshastigheten til bølger

For å beregne elastisitetsmodulen ved å måle frekvensen til longitudinalbølger i staven, bruker vi likning (9). Vi trenger derfor å vite diameteren og lengden til staven, diameteren er allerede målt, men ikke lengden. På grunn av den store lengden til staven må vi bruke en meterstokk for å måle lengden. En meterstokk har ikke like god presisjon som et skyvelær, og vi får derfor en høyere usikkerhet i det endelige svaret fra å bruke en meterstokk for å måle lengden. For å veie massen til staven bruker vi balansevekten som vi brukte under kalibreringen av loddene. For å holde staven stabil på vekten måler vi den med en liten messingbit for å holde balansen under målingene. Vi måler massen til messingbiten alene etterpå, og trekker denne fra den totale massen, for å finne massen til staven. Etter å ha målt størrelsene til staven lar vi staven henge horisontalt og gir den et slag aksialt med en plastikkhammer. Dette slaget danner stående bølger i staven, hvor den mest dominerende bølgen vil være den med lengst bølgelengde. For å måle frekvensen er det to forskjellige fremgangsmåter; fouriertransformasjon og svevning.

For å bruke fouriertransformasjon trenger vi målinger av lydsignalet. Vi har derfor en mikrofon som er koblet til en datamaskin. På datamaskinen har vi et matlab-program som leser målingene fra mikrofonen og bruker *fast fourier transform* på målingene. I matlab-programmet kan vi spesifisere en samplingsfrekvens og en samplingsperiode. Etter slaget på staven venter vi litt før vi starter målingen med mikrofonen, slik at de andre frekvensene, som vi ikke er interessert i, skal tilnærmet dø ut før målingen begynner. Den fouriertransformerte av målingene til mikrofonen gir oss en verdi for frekvensen, som er det siste vi trenger for å beregne elastisitetsmodulen ved likning (9).

For å bruke svevemetoden trenger vi en frekvens som er omtrent den samme frekvensen som svingningene i staven. Å finne denne frekvensen kan gjøres ved å først bruke fouriertransformasjons-metoden ovenfor for å finne en frekvens, eller bruke likning (10) hvis man har elastisitetsmodulen, eller høre seg fram. Hvordan effekten svevning fungerer er beskrevet i teoridelen i seksjon IIB på side 2. Vi kan med denne metoden endre på frekvensen til signalet fra høyttaleren, med omtrent lik frekvens som den i staven, mens vi hører signalet fra staven. Hvis vi starter med en frekvens og endrer den slik at perioden på svevningen øker, endrer vi frekvensen i riktig retning. Dette kan vi gjøre til svevningen er helt borte. Når svevningen er helt borte er de to frekvensene tilnærmet like, og vi har ved å vite frekvensen til lydsignalet fra høyttaleren funnet frekvensen til signalet. Denne frekvensen kan vi bruke i likning (9) til å beregne elastisitetsmodulen til messing.

IV. RESULTATER

Målingene av messingstaven som vi brukte i eksperimentet, usikkerheten i målingene og typen måleinstrument brukt, er vist i tabell I på neste side. Dette er all informasjonen vi trenger om messingstaven, verdiene i denne tabellen blir brukt under begge metodene for å beregne elastisitetsmodulen.

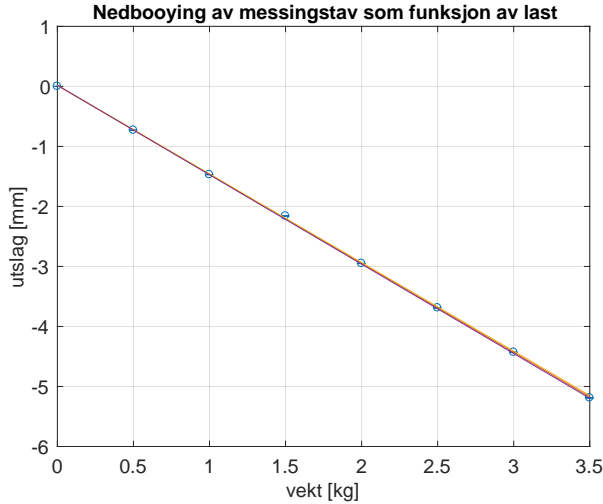
A. Måling av nedbøyning

For å bruke likning (3) trenger vi å vite diameteren til staven og avstanden mellom knivene, disse verdiene er vist i tabell I på neste side. Vi trenger

Tabell I: Målinger gjort av de geometriske størrelsene og massen til messingstaven. Usikkerhetene er hentet fra databladet til måleinstrumentene brukt.

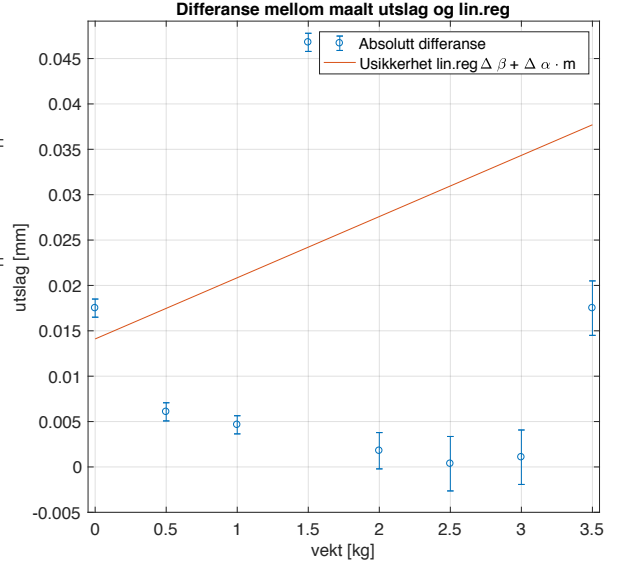
Egenskap	Målt verdi	Usikkerhet	Måleinstrument
Lengde L [m]	1.490	± 0.005	meterstokk
Avstand kniver l [m]	1.365	± 0.005	meterstokk
Diameter D [cm]	1.596	± 0.001	skyvelær
Masse M [kg]	2.5173	± 0.0006	balansevekt

også tyngdeakselerasjonen, verdien vi bruker for denne beregner vi fra likning (4). Ved å bruke at høyden over havet til fysikkbygget er 90 m og at Oslo har en breddegrad på 59.91° , får vi at tyngdeakselerasjonen er $g = 9.819(5) \text{ m/s}^2$. Usikkerheten kommer fra modellen brukt til å beregne tyngdeakselerasjonen [3]. Nå er det eneste vi mangler for å finne elastisitetsmodulen stigningstallet α fra målingene av nedbøyningen. Målingene vi brukte for å beregne stigningstallet er vist i figur 2. Fra denne figuren finner vi at stigningstallet α er $1.483(5) \text{ mm kg}^{-1}$. Usikkerheten kommer fra usikkerheten i lineærregresjonen med minste kvadraters metode [1]. Siden det er vanskelig å se hvordan



Figur 2: Målinger gjort av nedbøyningen av staven h som funksjon av lasten m vi fester på midten av staven. De blå sirklene er målepunktene, og den oransje linja er minstekvadraters lineærtilpassning.

usikkerheten til målingene er i forhold til usikkerheten i minste kvadraters metode i figur 2 er differansen mellom målt nedbøyning og tilpasningslinjen fra lineærregresjonen plottet for alle målepunktene i figur 3, med usikkerheten i hver måling. Ved å sette inn for diameteren og lengden fra tabell I, og tyngdeakselerasjonen og stigningstallet, inn i (3) finner vi at $E = 110(1) \text{ GPa}$. Usikkerheten er beregnet fra likning (11), hvor vi har brukt usikkerheten i målingene nevnt

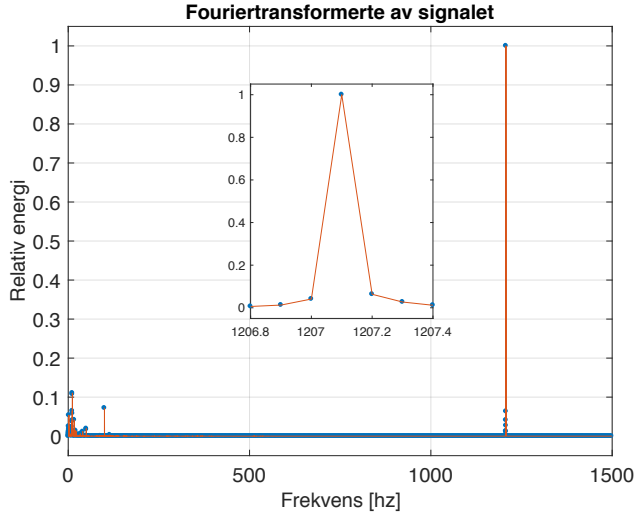


Figur 3: Absolutt differanse mellom måling av nedbøyning og tilpasningslinjen til målingene. Målepunktene er plottet med usikkerheten til målingene. Den oransje linjen er usikkerheten i stigningstallet $\Delta\alpha$ med konstanleddet $\Delta\beta$ for $m = 0$.

ovenfor.

B. Måling av utbredeshastigheten til bølger

Med denne metoden bruker vi likning (9) for å beregne elastisitetsmodulen til messing. For å beregne denne trenger vi massen, lengden og diameteren til staven. Verdiene for disse egenskapene er vist i tabell I. Vi trenger også frekvensen. Vi gjorde flere målinger av frekvensen til bølgene som oppsto ved å slå på staven. Den fouriertransformerte av lyden mikrofonen tok opp på en av målingene er vist i figur 4 på **nes-te side**. Fra å se på den fouriertransformerte ser vi at vi har en svært dominerende frekvens på 1207.1 Hz. Området rundt denne frekvens er tilnærmet lik null, og vi har litt støy for lave frekvenser under 100 Hz. Samplingstiden under eksperimentet var på 10 s som gir oss en oppløsning på 0.1 Hz. Ved å ta med usikkerheten får vi derfor at frekvensen til bølgen i staven er på $1207.1(1) \text{ Hz}$. Det ble gjort flere målinger av frekvensen, og på alle fikk vi samme verdi. Vi målte også frekvensen til bølgen ved å lete etter svingninger i lyden. Vi brukte (10) med elastisitetsmodulen vi fant ved å måle nedbøyningen av staven til å finne at grunnfrekvensen burde ligge på rundt 1211 Hz. Ved å bruke dette som startpunkt for å lete etter når perioden på svingningen økte eller minsket, klarte vi å bestemme at frekvensen var på 1207.0 Hz. Under bruk av denne



Figur 4: Den fouriertransformerte av lyden mottatt fra mikrofonen for en av målingene. I figuren er det inkludert et zoomet inn område rundt frekvens vi er interessert i. I dette vinduet ser vi oppløsningen til den fouriertransformerte. Det er de samme enhetene på aksene i den ytre og indre grafen.

metoden brukte vi hørselen vår, og vi klarte å skille svingningen for frekvenser med en differanse på 0.2 Hz, vi får derfor en usikkerhet lik denne verdien. Ved svingning fant vi altså at frekvensen var på 1207.0(2) Hz. For å beregne elastisitetsmodulen kommer vi til å bruke verdien og usikkerheten vi fant for frekvensen ved å bruke mikrofon og fouriertransformasjon. Ved å sette inn denne verdien, samt verdien vi målte for masse, lengde og diameter, vist i tabell I på forrige side, i (9), får vi at elastisitetsmodulen er $E = 109.3(3)$ GPa. Usikkerheten er beregnet fra (12), hvor vi har brukt usikkerheten i målingene nevnt ovenfor.

C. Usikkerheter

Vi kan nå teste om ulikheten (13) er tilfredstilt ved å beregne differansen mellom de to verdiene vi har for elastisitetsmodulen, og usikkerheten i differansen som er gitt av (14). Ved å gjøre disse beregningene finner vi at $D = 0.7$ GPa, og at $\Delta D = 1.1$ GPa. Altså er $D < \Delta D$, som betyr at differansen mellom elastisitetsmodulen vi fikk med de to forskjellige metodene kommer av tilfeldige feil og måleusikkerheter.

V. DISKUSJON

Under kalibreringen av vekten med presisjonsloddene kunne vi merke et utslag i balansevekten under

en masseendring på 0.1 gram, men vi merket at balansevekten var svært sensitiv til hvor på vekten loddene var på plassert. Med litt asymmetri i plaseringen av loddene målte vi en vektforskjell på 0.6g, og det er derfor en større usikkerhet i målingene enn presisjonen til instrumentet. Det var lett å unngå asymmetri når vi kalibrerte med ett presisjonslodd, men måtte vi bruke to presisjonslodd i kalibreringen, var det vanskeligere å garantere symmetri på vekten. På grunn av dette ble usikkerheten til vekten, for loddene som trengte flere presisjonslodd for å kalibreres, større enn presisjonen til vekten. Denne usikkerheten, og usikkerheten i diameteren d , frekvensen f og tyngdeakselerasjonen g er små iforhold til usikkerheten til målingene gjort med meterstokk. Neste gang eksperimentet skal gjennomføres burde man bruke en annen metode som fører til en mer presis lengde, for å redusere usikkerheten.

Målingene for nedbøyningen av staven som funksjon av belastningen er vist i figur 2 på forrige side. Sammenhengen mellom nedbøyningen og lasten forventet vi å være lineær. Som vi ser fra målingene ble forventningen oppfylt i god grad, selv om det er små ujevnheter i noen av målingene. I denne figuren er det vanskelig å se hvordan målingene, og usikkerheten til målingene, står i forhold til stigningstallet og usikkerheten i stigningstallet. Dette er derfor vist tydeligere i figur 3 på forrige side. I denne figuren ser vi at alle målingene, utenom to, ligger innenfor usikkerheten i stigningstallet. Dette gjelder uavhengig av om vi tar med usikkerheten i målingen fra måleuret eller ikke. Vi ser også at nedbøyningen av staven når lasten er på 1.5 kg avviker, godt utenfor usikkerhetene fra lineærregresjonen. Det forventes at 68% av målingene, burde ligge innenfor usikkerheten i stigningstallet, og det gjør det, men det store avviket kan tyde på at det var noe feil som skjedde under målingen av nedbøyningen med akkurat denne lasten. Det hadde vært ønskelig å oppdage dette avviket under eksperimentet, slik at vi kunne gjort flere målinger med denne lasten, og lett etter mulige feil som kan ha påvirket målingen.

Utenom denne målingen er eksperimentet gjennomført godt beskyttet fra systematiske feil. Målingene av størrelsene til staven ble gjennomført flere ganger, lydopptak fra slaget på staven ble gjort flere ganger, og vi fikk et lineært forhold mellom bøyning av stav og belastning. Eksperimentet var godt kontrollert, og vi analyserte resultatene våre underveis for å sjekke at målingene ga mening før vi fortsatte. De tilfeldige feilene har påvirket målingene og vi har tatt hensyn til dette med usikkerheten til de to verdiene vi fant for elastisitetsmodulen. Siden usikkerheten i differansen til elastisitetsmodulen er større enn differansen er det de tilfeldige feilene og måleusikkerhetene som forårsaker differansen mellom dem. Vi kan derfor si at vi har overensstemmelse in-

nenfor måleusikkerhetene. Dette gir oss en bekreftelse på at det ikke var merkbare systematiske feil tilstede under eksperimentet.

De to metodene ga oss det samme svaret, men med litt over en faktor tre forskjell i usikkerheten mellom de to metodene. Årsaken til den store forskjellen i usikkerhet er at målingene gjort med meterstokk er mye mindre presise enn de andre målingene. På grunn av dette vil metoden som hviler mest på målinger gjort av en meterstokk ha de største usikkerhetene. For metoden som bruker målingen av nedbøyingen av staven, er avstanden mellom knivene svært viktig for elastisitetsmodulen. Dette ser vi ved at elastisitetsmodulen går som avstanden mellom knivene i tredje potens. I metoden der man bruker utbredelseshastigheten til bølgene for å beregne elastisitetsmodulen, kanselleres noen potenser av lengden i utregningen av uttrykket, slik at lengden på staven går i første potens. Siden meterstokken er det største bidraget til usikkerheten, fører en faktor tre i bidraget fra denne usikkerheten til et stort utslag i den endelige usikkerheten. Det er dette som har forårsaket den store forskjellen i usikkerhetene til resultatet. Det burde derfor brukes en mer presis måte å beregne lengden til staven, og avstanden mellom knivene, neste gang eksperimentet blir gjennomført, for å redusere denne usikkerheten. Den mest korrekte verdien for elastisitetsmodulen til messing blir derfor 109.3(3) GPa. Som er den verdien vi fikk ved å ta utgangspunkt i svingningene i staven.

Verdien vi får for elastisitetsmodulen til messing er 109.3(3) GPa. Denne verdien kan vi sammenlikne med verdien for elastisitetsmodulen til messing fra andre kilder. På wikipedia-siden til *Young's modulus* [5] står det at elastisitetsmodulen til messing er 100 – 125 GPa. For tabellen står det at verdier kan avvike, avhengig av målemetode, temperatur og deformasjonsgrad, men verdiene vist er omtrentlig riktig, og vist for relativ sammenlikning. Vår verdi for elastisitetsmodulen passer godt inn med verdien vist i tabellen. Selv om tabellen viser omtrentlige verdier, burde vår måling ligge innenfor intervallet i tabellen, og det gjør det.

VI. KONKLUSJON

En god fysisk modell burde kunne beskrive flere fenomener med så få parametere som mulig. I dette eksperimentet har vi vist at modellen for elastisitet klarer nettopp dette ved å beskrive nedbøyingen til en stav som funksjon av belastningen på midtpunktet, og utbredelseshastigheten til bølger i samme stav med samme parameter, elastisitetsmodulen. Ved å måle nedbøyingen som funksjon av last, og de geometriske størrelsene til staven, fant vi at elastisitetsmodulen for messing er $E = 110(1)$ GPa. Ved å fokusere på en bestemt bølgelengde for de stående bølgene klarer vi å bestemme utbredelseshastigheten ved å måle frekvensen til lydbølgen med en mikrofon. Verdien til frekvensen sammen med massen, lengden og diameteren til staven gir oss muligheten til å beregne at elastisitetsmodulen er 109.3(3) GPa. De to verdiene vi har funnet for elastisitetsmodulen har en differanse på $D = 0.7(11)$ GPa. Som vi ser er usikkerheten i differansen større enn differansen, dette betyr at elastisitetsmodulene er tilnærmet like, men avviker på grunn av måleusikkerheter. Ved å ta utgangspunkt i to forskjellige fenomener har vi beregnet to forskjellige verdier for elastisitetsmodulen som har overensstemmelse innenfor måleusikkerhetene, og stemmer med tidligere målte verdier for elastisitetsmodulen til messing.

Utstyrsliste

- meterstokk - Hultafors
- skyvelær - Cocraft Micrometer
- balansevekt - Ohaus Triple Beam Balance dial-o-gram
- måleur - Baker
- Lodd og presisjonslodd
- opphengningsstativ
- aluminiumstav
- mikrofon

-
- [1] Squires, G.L. Practical Physics, Cambridge University Press, 2001.
- [2] Fysisk institutt Elastisitet, Universitetet i Oslo, februar 2018.
- [3] W. J. Hinze, R. R. B. von Frese; A. H. Saad Gravity and Magnetic Exploration: Principles, Practices, and

- Applications, Cambridge university press, 2013.
- [4] Øyvind Grøn elastisitet – fysikk https://snl.no/elastisitet_-_fysikk hentet 03.04.2018.
- [5] Wikipedia Young's modulus https://en.wikipedia.org/wiki/Young%27s_modulus hentet 05.04.2018.