Måling av elastisitetsmodulen til messingstav med sirkulært tversnitt

Ivar Svalheim Haugerud
Universitetet i Oslo

(Dated: 4. april 2018)

Eksperimentelle målinger for å beregne elastisitetsmodulen til en sylindrisk messingstav ble gjennomført med to forskjellige utgangspunkter for å teste den fysiske modellen for elastisitet. Den ene metoden tok utgangspunkt i å måle statisk nedbøying av stavens midtpunkt som funksjon av belastning på midtpunktet til staven, mens staven hviler på to kniver. Den andre metoden baserte seg på å måle utbredelseshastigheten til frie longitudinelle svingninger i staven som oppstår ved slag i aksial retning. Det kreves at de to verdiene for elastisitetsmodulen er det samme for at det skal være en korrekt fysisk modell. De to verdiene for elastisiteten til messingstaven er med de to metodene henholdsvis $E = 110(1)$ GPa og $109.3(3)$ GPa. Differenasen mellom to de resultatene er $0.7(11)$ GPa. Siden differansen mellom de to verdiene er mindre enn usikkerheten i differansen er det overenstemmelse innenfor måleusikkerhetene.

I. INTRODUKSJON

Eksperimentet i denne rapporten ble gjennomført i håp om å beregne elastistsmodulen til en sylindrisk messingstav på to måter, med forskjellig utgangspunkt, og ved dette teste kvaliteten på modellen for elastistet. En god modell burde kunne beskrive flere fenomen med så få parametere som mulig. Vi skal derfor finne elastisitesparameteren, elastistsmodulen, ved å ta utgangspunkt i to forskjellige fenomener for å se om vi får samme verdi for elastistsmodulen.

Elastisitet er egenskapen til et legme som gjør at legmet returnere til sin originale form etter å ha blitt utsatt for ytre krefter [4]. Dersom et legme kommer tilbake med nøyaktig samme form som før den ble utsatt for ytre krefter sier man at det er hundre prosent elastisk legme. Elastisiteten beskriver legmets evne til å oppta arbeid ved deformasjon, og bevare dette som potensiell energi som legmet bruker til å få sin opprinlige form når kraften opphører. Elastisitet blir også brukt om kollisjoner mellom legmer, hvor det beskriver hvor mye av bevegelsesenergien til legmene som er bevart mellom før og etter kollisjonen. Hvis det er et elastisk støt vil all kinetisk energi være bevart, hvis det er et uelastisk støt vil energi bli brukt til å deformere legmene i kollisjonen.

Når noe blir utsatt for spenning (*stress*) vil tøyingen (*strain*) generelt sett øke lineært med spenningen til det når et punkt som kalles *elastisitetsgrensen*. Øker spenningen over elastisitetsgrensen vil legme ikke komme tilbake til sin opprinlige form når kraften opphører, deformasjonen slutter å være elastisk [4]. Øker spenningen enda mer kan man nå *bruddgrensen* hvor legeme brytes i stykker. I dette eksperimentet kommer vi bare til å jobbe med spenninger mindre enn den som trengs for å nå elastisitetsgrensen, og vi forventer derfor et lineært forhold mellom tøyingen og spenningen i målingene våre. Elastisitetsmodulen som vi kommer til å finne under eksperimentet, også kalt *Young's modulus*, gir forholdet mellom spenningen som et legme blir utsatt for og den resulterende tøyingen til legmet. Og siden vi er under elastisitetsgrensen er forholdet lineært.

Det ene fenomenet vi skal se på for å finne elastisitetsmodulen er at objekter blir bøyd eller deformert når de blir utsatt for en kontinuerlig kraft. For å måle dette fester vi vekter midt mellom to punkter som staven hviler på og måler hvor mye staven blir bøyd. Med denne metoden finner vi sammenhengen mellom vekten vi bruker og avstanden staven blir nedbøyd.

Den andre metoden er å finne utbredelseshastigheten til longitudinelle bølger i staven. Ifølge teorien er utbredelseshastigheten avhengig av tettheten og elastisiteten til materialet. Vi kommer ikke til å måle utbredelseshastigheten direkte, men heller å begrense oss til en bølgelengde, og finne frekvensen til denne, som gjør at vi kan regne oss fram til utbredelseshastigheten.

Dette er to fenomener som ifølge teorien bare beskrives av en parameter, som er et tegn på en god teori. Men teorien må selvfølgelig stemme med det vi observer for å være en god modell. Vi ønsker derfor å teste dette ved å måle elastistsmodulen med utgangspunkt i to forskjellige fenomener, som burde gi samme verdi for elastisitetsmodulen. Er de to verdiene vi finner innenfor usikkerhetene til hverandre er det et tegn på at det er en korrekt modell. Hvis de to verdiene er ulike, utenfor usikkerhetene, kan det skyldes systematisk feil i eksperimentet eller feil i teorien. I dette tilfellet burde det bli gjennomført flere eksperimenter av samme type for å se nærmere på elastisitetmodellen.

Hensikten med en god modell for elastisitet er lett å se nytten av. Elastisitet spiller en stor rolle for byggkonstruksjoner, for forståelsen av vibrasjoner, for forplantning av lyd og for studiet av kreftene mellom atomer eller molekyler i krystallgittere [4]. For eksmepel ønsker byggningsingeniører å forutsi hvor mye en struktur klarer å bære før det ikke er trygt lenger, og denne vitenskapen baserer seg på en god forståelse av elastisiteten til materialene man bruker. Om man måtte teste eksperimentelt for hvert hus, blokk, bil eller båt som blir bygd hvor mye det tåler før det ikke lenger er trygt, ville det vært ekstremt tidkrevende og uøkonomisk oppførsel. Med en god fysisk modell vil man slippe dette, og vi kan leve livene våre uten å bekymre oss for at alt, fysisk, rundt oss kommer til å rase.

II. TEORI

A. Måling av nedbøying

Nedbøyingen $h(m)$ til en bjelke, eller stav som vi skal bruke i vårt eksperiment, som støtter seg på to punkter med avstand l, som bærer en last på mg i midten av staven, er gitt ved

$$h(m) = \frac{mgl^3}{48EI} \text{ [2]}. \tag{1}$$

I dette uttrykket er E elastisitetsmodulen og I er arealtreghetsmomentet til bjelken. Arealtreghetsmomentet, også kalt andre arealmoment, er integralet over tversnittet til bjelken

$$I = \int\int x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

hvor bjelken strekker seg ut i z-retning, og lasten virker i x-retning. For eksperimentet vi skal gjøre kommer bjelken til å være en sylinder. Vi kan derfor beregne arealtreghetsmomentet til en sylinder med radius R. Vi beregner integralet i sylinderkoordinater, og multipliserer derfor med jacobideterminanten, og bruker at $x = r\sin\theta$. Vi får

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\sin^2\theta r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64},$$

der d er diameteren. Setter vi dette inn i uttrykket for nedbøyingen av staven (1) får vi

$$h = \frac{4mgl^3}{3\pi E d^4}.$$

Siden vi er interesert i å finne elastisitetsmodulen til bjelken kan vi løse likningen for E for å få

$$E = \frac{4mgl^3}{3\pi h d^4}. \tag{2}$$

Under eksperimentet kommer vi til å måle nedbøyingen h som en funksjon av lasten m, der vi forventer har en lineært forhold

$$h(m) = \alpha m + \beta.$$

Hvor α er stigningstallet, og konstantleddet β vil være tilnærmet lik null siden staven ikke vil være bøyd med null last, og vi kan derfor erstatte h/m med stigningstallet α som vi vil beregne under målingene. Setter vi dette inn i (2) får vi at uttrykket for elastisitetsmodulen til en sylinderformet stav er

$$E = \frac{4gL^3}{3\pi\alpha d^4}. \tag{3}$$

Under eksperimentet kan vi måle alle de ukjente variablene i uttrykket slik at vi får en verdi for elastisitetsmodulen til messing.
For å finne tyngdeakselerasjonen i Oslo bruker vi *International gravitational formula (IGF)* som tar hensyn til breddegraden og høyde over havet under beregningen av tyngdeakselerasjonen [3]. Man beregner da tyngdeakselrasjonen med

$$\begin{aligned} g = 9.7803253 &\left[\frac{1 + 0.001931\sin^2\phi}{\sqrt{1 - 0.006694\sin^2\phi}}\right] \mathrm{m/s^2} \\ &- 3.086\times 10^{-6}\,\mathrm{s^{-2}}\cdot h \end{aligned} \tag{4}$$

der h er høyden over havet, og ϕ er breddegraden.

B. Måling av utbredelseshastigheten til bølger

Vi ønsker å bruke en annen metode for å finne elastisitetsmodulen. Denne metoden for bestemmelse av E baserer seg på å finne utbredelseshastigheten v for longitudinalbølger i en stav. Vi kan bruke dette som utgangspunkt siden utbredelseshastigheten er avhengig av elastistsmodulen ved

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{5}$$

hvor ρ er mediets tetthet. Siden massetetthet er masse per volum kan vi finne ρ ved å måle massen og volumet til staven, og beregne tettheten fra

$$\rho = \frac{4M}{\pi L d^2},$$

hvor L er lengden på hele staven og M er den totale massen til staven. Vi kan sette dette inn for ρ i (5) og løse for E, som gir oss

$$E = \frac{4Mv^2}{\pi L d^2}. \tag{6}$$

For å kunne beregne elastisitetsmodulen mangler vi bare utbredelseshastigheten i staven. Denne kan vi bestemme ved å måle verdien til frekvens f og bølgelengden λ, som gir oss utbredelseshastigheten ved sammenhengen

$$v = \lambda f. \tag{7}$$

Det kan vises [2] at ved frie longitudinelle svingninger i en homogen stav med lengde L opphengt i midtpunktet og med frie ender, får vi svingninger slik at

$$L = \frac{n\lambda}{2},$$

der n er et oddetall $n = 1, 3, 5, \ldots$ Dette kan løses for bølgelengden λ, som gir oss en sammenheng mellom bølelengden og lengden av staven

$$\lambda = \frac{2L}{n},$$

Ved å slå staven i aksial retning dannes det flere egensvingninger i staven. Av disse svingningene er det den med lengst bølgelengde, $\lambda = 2L$, som blir mest dominerende som tiden går. Ved noen lengder for staven vil frekvensene til svingningene gi hørbar lyd. Under eksperimentet kommer dette til å være tilfellet, og vi kan høre lyden fra svingningene. Siden svingningen med lengst bølgelengde er den mest dominerende, og derfor den vi hører tydeligst og lengst, vil det være den svingningen vi fokuserer på videre. Vi velger derfor $n = 1$ for utregningen, som gir oss

$$\lambda = 2L. \tag{8}$$

Setter vi dette inn for bølgelengden i (7) og får vi

$$v = 2Lf,$$

som vi kan sette inn for utbredelseshastigheten i (6), hvor vi får

$$E = \frac{16MLf^2}{\pi d^2}. \tag{9}$$

Ved å kunne måle de geometriske størrelsene og massen til staven, og frekvensen når vi slår på den, klarer vi å beregne elastisitetsmodulen med utgangspunkt i et annet fenomen. Hvis man istedenfor ønsker å finne frekvensen kan man gjøre dette ved å vite elastisitetsmodulen, massen og de geometriske størelsene til staven ved

$$f = \sqrt{\frac{\pi E d^2}{16ML}}. \tag{10}$$

Den ene måten å måle frekvensen på er å bruke et fenomen som kalles svevning. Svevning kan utnyttes når man har en frekvens som er omtrent det samme som frekvensen til svingingen man er interesert i. Da kan man spille av den omtrentlige frekvensen på en høytaler mens man hører frekvensen man er interesert i. For vårt tilfelle må vi slå på staven mens vi spiller av en frekvens fra en høytaler. De to lydbølgene, den ene fra høytaleren og den andre fra staven, vil da danne konstruktiv og destruktiv interferens med hverandre som fører til den lett hørlige effekten svevning. Når to kilder med nesten samme frekvens sender bølger vil de starte med konstruktiv interferens, mens som tiden går vil den lille forskjellen i frekvens føre til at den konstruktive interferensen har blitt destruktiv. Når interferensen er destruktiv vil man ikke høre noe, og intensiteten vil deretter øke som interferensen blir mer og mer konstruktiv. Denne effekten vil fortsette som tiden går. Dette høres som en oscilerende styrke i volumet. Når differansen mellom de to frekvensene er svært liten vil det ta lengere tid før frekvensforskjellen har ført til en faseforskjell. Er differansen litt større tar det kortere tid. Derfor kan man ved å endre den ene frekvensen relativt til en annen finne når de to frekvensene er like ved å høre når perioden til svevningen øker, helt fram til man ikke lenger klarer å høre noe svevning. Hvis man da kjenner frekvensen man endrer på har man funnet frekvensen ved å høre svevningen. For å gjøre det lettere å høre svevningen burde styrken fra høytaleren være rundt samme styrke som den fra staven.

C. Usikkerheter

På grunn av usikkerhet i målingene forventer vi ikke nøyaktig like svar for elastisitetsmodulen med de to metodene. Det er derfor viktig å vite usikkerhetene i de to metodene. Ved å bruke uttrykket for nedbøying av staven (3) får vi at usikkerheten i elastisitetsmodulen er

$$\Delta_{E_1} = E_1 \sqrt{\left(3\frac{\Delta_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_A}{A}\right)^2 + \left(4\frac{\Delta_d}{d}\right)^2}, \tag{11}$$

hvor konstantleddet forran L og d kommer fra eksponten de har i uttrykket. Usikkerheten ved å bruke utrrykket for elastistsmodulen ved måling av frekvens (9) er

$$\Delta_{E_2} = E_2 \sqrt{\left(\frac{\Delta_M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_L}{L}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta_f}{f}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta_d}{d}\right)^2}. \tag{12}$$

Som sagt forventer vi ikke at de to metodene skal gi at differanse til elastisitetsmodulen

$$D = |E_1 - E_2|$$

skal være null, hvor E_1 og E_2 er de to forskjellige verdiene vi får i vår utregning av elastistsmodulen ved våre to forskjellige metoder. Men vi ønsker at differeansen D skal være mindre enn usikkerheten i differansen Δ_D. Når vi har funnet de to verdiene for elastisitetsmodulen må vi derfor sjekke om de tilfredstiller

$$D < \Delta_D, \tag{13}$$

der

$$\Delta_D = \sqrt{\Delta_{E_1}^2 + \Delta_{E_2}^2}. \tag{14}$$

Hvis målingene våre tilfrestiller denne ulikheten kommer årsaken til differansen D mest sansynlig fra usikkerheterer i målemetoden og tilfeldige feil. Hvis dette er tilfellet sier vi at det er *overenstemmelse innenfor måleusikkerhetene*. Derimot hvis

$$D > 2\Delta_D \tag{15}$$

er det lite sansynlig at det bare er tilfeldige feil og usikkerheter i målinger som er årsaken til feilen, da er det mest sansynlig systematiske feil som har forårsaket forskjellen mellom de to verdiene vi fikk for elastistsmodulen med de to metodene.

III. METODE

A. Nedbøying av messingstav

I eksperimentet vårt bruker vi en messingstav med sirkulært tversnitt som er mye lenger enn diameteren sin. Vi ønsker først å måle elastisitetsmodulen ved å måle nedbøying av messingstaven når vi fester vekter på midten av staven. Oppsettet brukt i dette eksperimentet er vist i figur 1 på neste side. I eksperimentet bruker vi en messingstav E som hviler på to kniver B og C. Midt på messingstaven er det festet en holder F hvor vi setter loddene på. Ved måleuret G kan vi måle bøyingen avmessingstaven. Hele eksperimentet foregår på en plate A.

Før vi begynner å måle nedbøyingen av staven er det viktig at at stavens midtpunkt er midt mellom de to knivene staven hviler på. Dette er nødvendig siden teorien vi skal teste forutsetter det. På sentrum av staven kommer holderen F til å være festet, hvor vi legger lasten. Vi måler derfor avstanden mellom B og C og flyttet på staven slik at midten av staven er halvparten av denne avstanden fra B. For å sjekke at alt var gjort korrekt gjorde vi målingene på nytt, men nå målte vi avstanden fra B til F og fra F til B som gir oss mindre usikkerhet. Fra dette kunne vi finjustere posisjonen til staven til vi var sikkre på den var sentrert riktig. Itilegg er det viktig at punktet hvor nålen fra måleuret treffer er normalt på flaten til sylinderen. For å være sikker på at den er normalt på brukte vi et vater og justere vinkelen til det var vannrett.

Målet vårt er å bruke likning (3) til å beregne elastisutetsmodulen, og for å gjøre dette trenger vi å vite avstanden mellom knivene B og C som staven hviler på, og diameteren til staven. Vi bruker derfor et skyvelær til måle diameteren til staven. Siden avstanden mellom knivene er mye lengere enn diameteren til staven måtte vi bruke en meterstokk for å måle avstanden. Siden disse verdiene er i tredje og fjerde potens er det viktig å gjøre presise målinger, siden usikkerhetene her vil ha store utslag i usikkerheten i det endelige resultatet. Vi trenger også å finne en nøyaktig verdi tyngdeakselerasjonen g, og usikkerheten i denne verdien. Denne verdien kan variere avhengig av hvor på kloden man er, og vi må derfor finne en verdi for Oslo, Norge.

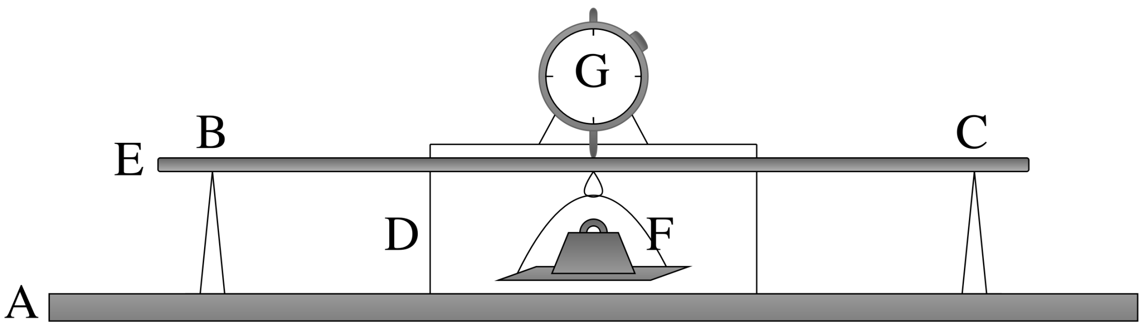
Når vi måler nedbøyingen av staven bruker vi lodd med kjent masse. For å få presise målinger må vi kalibrere massen til loddene ved å sammenlikne loddenes vekt med vekten til presisjonslodd. For å kalibrere loddene bruker vi en balansevekt, og setter den i likevekt med presisjonsvektene, for så å bytte presisjonsvektene ut med loddene vi bruker under eksperimentet og måle avviket mellom loddene og presisjonsloddene. Ved å bruke en balansevekt og denne metoden får vi en ekstremt god oppløsning i differansen mellom loddene og presisjonsloddene. Når dette er gjort er alt klart for å måle nedbøyingen av staven.

Vi leser av nedbøyingen av staven som en funksjon av massen til loddene vi legger på festepunktet F. Mellom hver måling tar vi av loddene og sjekker at utslaget til måleuret er tilbake til 0-punktet. Massene vi har valgt å bruke går fra 0 til 3.5kg med en lineær økning på 0.5kg. På disse målingene forventer vi et lineært forhold mellom vekten på loddene og nedbøyingen. For å bruke likning (3) trenger vi stigningstallet til målepunktene, som vi kan beregne fra minste kvadraters metode på målingene.

B. Måling av utbredelseshastigheten til bølger

For å beregne elastisitetsmodulen ved å måle frekvensen til trykkbølger i staven bruker vi likning (9). Vi trenger derfor å vite diameteren og lengden til staven, diameteren er allerede målt, men ikke lengden. På grunn av den store lengden til staven må vi bruke en meterstokk for å måle lengden av staven. En meterstokk har ikke like god presisjon som en skyvelær, og vi får derfor en høyere usikkerhet i det endelige svaret fra å bruke et meterstokk for å måle lengden. For å veie massen til staven bruker vi balansevekten som vi brukte under kalibreringen av loddene. For å holde staven stabil på vekten måler vi den med en liten messingbit for å holde balansen under målingene. Vi måler massen til messingbiten alene etterpå, og trekker denne fra den totale massen for å finne massen til staven. Vi lar staven henge horisontalt og gir den et slag aksialt med en plastikkhammer. Dette slaget danner trykkbølger i staven hvor den mest dominerende vil være den med kortest bølgelengde. For å måle frekvensen er det to forskjellige fremgangsmåter, fouriertransformasjon eller svevning.

For å bruke fouriertransformasjon bruker vi en mikrofon som vi setter nære staven. Fra et matlabprogram som leser signalene fra mikrofonen og tar en fouriertransformasjon av signalene, der vi velger en samplingsfrekvens og en samplingstid for målingen. Etter slaget på staven venter vi litt før vi starter målingen med mikrofonen siden de andre frekvensene som vi ikke er interesert i burde dø ut først. Den fouriertransformerte av målingene til mikrofonen gir oss en verdi for frekvensen, som er det siste vi trenger for å bereg-



Figur 1: Eksperimentelt oppsett for målinger. Illustrasjon av staven som hviler på to knvier, med et måleur som måler nedbøyingen av stavens midtpunkt. På stavens midtpunkt fester vi loddene for å måle nedbøying som funksjon av belastningen.

ne elastisitetsmodulen ved likning (9).
For å bruke sveve-metoden trenger vi en frekvens som er omtrent den samme frekvensen til svingningene i staven. Å finne denne frekvensen kan gjøres ved å først bruke fouriertransformasjons-metoden ovenfor for å finne en frekvens, eller bruke likning (10) hvis man har elastisitetsmodulen, eller høre seg fram. Effekten svevning er beskrevet i teoridelen i seksjon II B på side 2. Vi kan med denne metoden endre på frekvensen til signalet fra høytaleren med omtrent lik frekvens som den i staven, mens vi hører signalet fra staven. Hvis vi starter med en frekvens og endrer den slik at perioden på svevningen øker endrer vi frekvensen i riktig retning. Dette kan vi gjøre til svevningen er helt borte. Når svevningen er helt borte har vi funnet frekvens til signalet, som vi da kan lese av kilden til høytaleren for å finne frekvensen slik at vi kan bruke den i likning (9) til å beregne elastisitetsmodulen.

IV. RESULTATER

Målingene av messingstaven som vi brukte i eksperimentet, usikkerheten i målingene og måleinstrument, er vist i tabell I. Dette er all informasjonen vi trenger å vite om messingstaven, verdiene blir brukt under begge metodene å beregne elastistsmodulen.

A. Måling av nedbøying

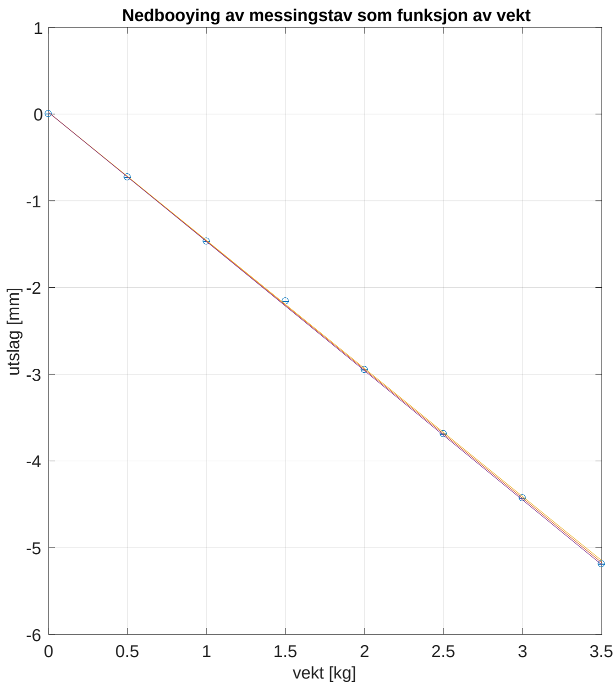
For å bruke likning (3) trenger vi å vite diameteren til staven og avstanden mellom knivene, disse verdiene er vist i tabell I. Vi trenger også tyngdeakselerasjonen, verdien vi bruker for denne beregner vi fra likning (4). Ved å bruke at høyden over havet til fysikkbygget er 90 m og at Oslo har en breddegrad på 59.91°, får vi at tyngdeakselrasjonen er $g = 9.819(5)\,\mathrm{m/s^2}$. Usikkerheten kommer fra modellen brukt til å beregne tyngdeakselrasjonen [3]. Nå er det eneste vi mangler for å finne elastistsmodulen stigningstallet α fra målingene av nedbøyingen. Målingene vi brukte for å beregne stigningstallet er vist i figur 2 på neste side. Fra denne figuren finner vi at stigningstallet α er $1.482 \pm 0.003\,\mathrm{mm\,kg^{-1}}$. Usikkerheten kommer fra usikkerheten i lineærregresjonen med minste kvadraters metode. Siden det er vanskelig å se hvordan usikkerheten til målingene er iforhold til usikkerheten i stigningstallet i figur 2 på neste side er differansen mellom målt nedbøying og tilpasningslinjen fra lineærregresjonen plottet for alle målepunktene i figur 3 på neste side. Ved å sette inn for diameteren og lengden fra tabell I, og tyngdeakselerasjonen og stigningstallet, inn i (3) finner vi at $E = 110(1)\,\mathrm{GPa}$. Usikkerheten er beregnet fra likning (11), hvor vi har brukt usikkerheten i målingene nevnt ovenfor.

Tabell I: Målinger gjort av de geometriske størrelsene til messingstaven. Usikkerhetene er hentet fra databladet til måleinstrumentene.

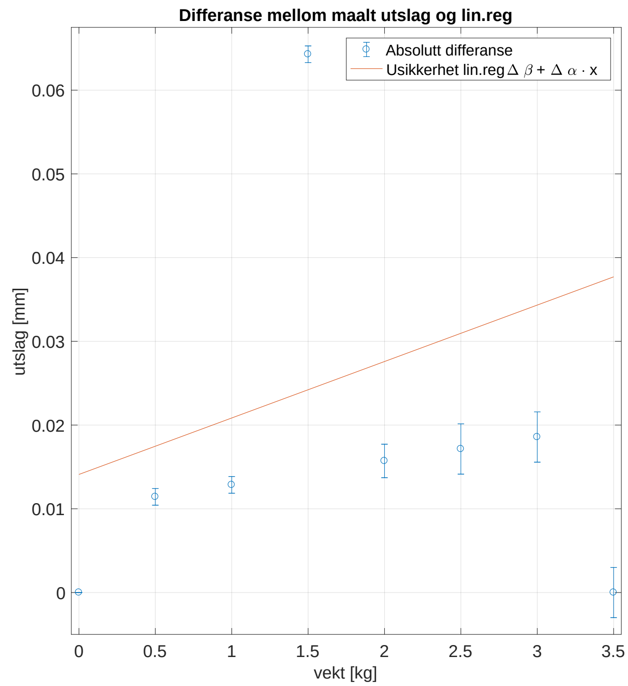
Egenskap	Målt verdi	Usikkerhet	Måleinstrument
Lengde L [m]	1.490	±0.004	meterstokk
Avstand kniver l [m]	1.365	±0.004	meterstokk
Diameter D [cm]	1.596	±0.003	skyvelær
Masse M [kg]	2.5173	±0.0006	balansevekt

B. Måling av utbredelseshastigheten til bølger

Med denne metoden bruker vi likning (9) for å beregne elastisitetsmodulen til messingstaven. For å bereg-



Figur 2: Målinger gjort av nedbøyingen av staven h som funksjon av lasten m vi fester på midten av staven. De blå sirklene er målepunktene, og den oransje linja er minstekvadraters lineærtilpassning.



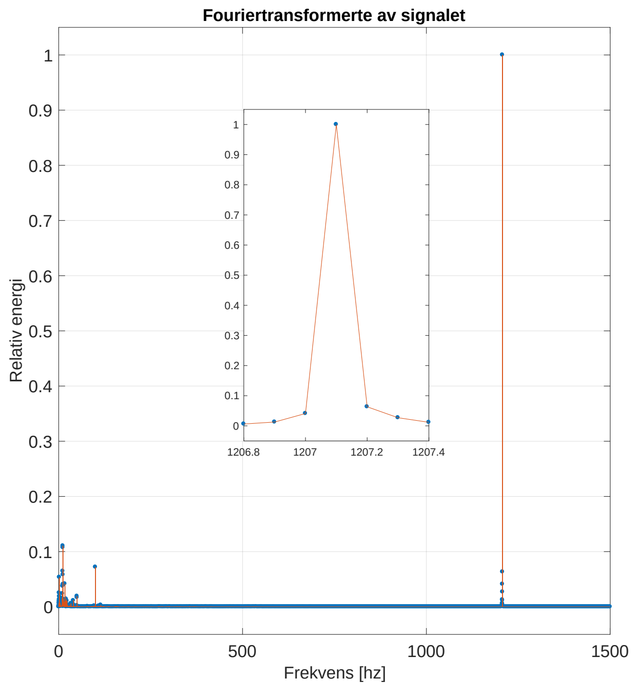
Figur 3: Absolutt differanse mellom måling av nedbøying og tilpasningslinjen til målingene. Målepunktene er plottet med usikkerheten til målingene. Den oransje linjen er usikkerheten i stigningstallet $\Delta\alpha$ med konstanleddet $\Delta\beta$ for $m = 0$.

ne denne trenger vi igjen de geometriske størrelsene til staven, som er vist i tabell I på forrige side, men nå trenger vi frekvensen også frekvensen som oppstår når vi slår på staven. Vi gjorde flere målinger av frekvensen til bølgene som oppsto ved å slå på staven. Den fouriertransformerte av lyden mikrofonen tok opp på en av målingene er vist i figur 4 på neste side. Fra å se på den fouriertransformerte ser vi at vi har en svært dominerende frekvens på 1207.1 Hz. Området rundt denne frekvens er tilnærmet lik null, og vi har litt støy for lave frekvenser under 100 Hz. Samplingstiden under eksperimentet var på 10 s som gir oss en oppløsning på 0.1 Hz. Ved å ta med usikkerheten får vi derfor at frekvens til bølgen i staven er på 1207.1±0.1 Hz. Det ble gjort flere målinger frekvensen, og på alle fikk vi samme verdi. Vi målte også frekvensen til bølgen ved å lete etter svevninger i lyden. Vi brukte (10) med elastisitetsmodulen vi fant ved å måle nedbøyingen til staven til å finne at grunnfrekvensen burde ligge på rundt 1211 Hz. Ved å bruke dette som startspunkt for å lete etter når perioden på svevningen økte eller minkte klarte vi å bestemme at frekvensen var på 1207.0 Hz. Under bruk av denne metoden brukte vi hørselen vår, og vi klarte å skille svevningen for frekvenser med en differanse på 0.2 Hz, vi får derfor en usikkerhet lik denne verdien. Ved svevning fant vi altså at frekvensen var på 1207.0 ± 0.2 Hz.

For å beregne elastisitetsmodulen kommer vi til å bruke verdien og usikkerheten vi fant for frekvensen ved å bruke mikorofon og fouriertransformasjon. Ved å sette inn denne verdien, samt verdien vi målte for masse, lengde og diameter, vist i tabell I på forrige side, i (9), får vi at elastisitetsmodulen er $E = 109.3(3)$ GPa. Usikkerheten er beregnet fra (12), hvor vi har brukt usikkerheten i målingene nevnt ovenfor.

C. Usikkerheter

Vi kan nå teste om ulikheten (13) er tilfredstilt ved å beregne differansen mellom de to verdiene vi har for elastistetsmodulen, og usikkerheten i differeansen som er gitt av (14). Ved å gjøre disse beregningene finner vi at $D = 0.7$ GPa, og at $\Delta D = 1.1$ GPa. Altså er



Figur 4: Den fouriertransformerte av lyden motatt fra mikrofonen for en av målingene. I figuren er det inkludert et zoomet inn område rundt der frekvens vi er interesert i for å vise fram oppløsningen på målingene, det er samme enhet på aksene.

$D < \Delta D$, som betyr at differansenen mellom elastisitetsmodulen vi fikk med de to forskjellige metodene kommer av tilfeldige feil og måleusikkerheter.

V. DISKUSJON

Under kalibreringen av vekten med presisjonsloddde-ne kunne vi merke et utslag i balansevekten under en masseendring av 0.1 gram, men vi merket at balansevekten var svært sensitiv til hvor på vekten loddene var på plassert. Med litt asymetri i plaseringen av loddene målte vi en vektforskjell på 0.6g, og det er derfor en større usikkerhet i målingene enn presisjonen til instrumentet. Det var lett å unngå assymetri når vi kalibrerte med ett presisjonslodd, men måtte vi bruke to presisjonslodd i kalibreringen var det vanskeligere å garantere symetri på vekten. På grunn av dette ble usikkerheten til vekten, for loddene som trengte flere presisjonslodd for å kalibreres, større enn presisjonen til vekten. Denne usikkerheten, og usikkerheten fra stigningstallet α, diameteren d og tyngdeakselerasjonen g er små iforhold til usikkerheten til målingene gjort med meterstokk. Neste gang eksperimentet skal gjennomføres burde man bruke en annen metode som fører til en mer presis lengde for å redusere usikkerheten.

Målingene for nedbøyingen av staven som funksjon av belastningen er vist i figur 2 på forrige side. Sammenhengen mellom nedbøyingen og lasten forventet vi å være lineær. Som vi ser fra målingene ble forventningen oppfylt i god grad, selv om det er små ujevnheter i noen av målingene. I denne figuren er det vanskelig å se hvordan målingene, og usikkerheten til målingene, står iforhold til stigningstallet og usikkerheten i stigningstallet. Dette er derfor vist tydeligere i figur 3 på forrige side. I denne figuren ser vi at alle målingene, utenom en, ligger innenfor usikkerheten. Dette gjelder uavhengig av om vi tar med usikkerheten i målingen eller ikke. Vi ser også at nedbøyingen til staven når lasten er på 1.5 kg avviker, godt utenfor usikkerhetene fra lineærregresjonen. Det forventes at 68%, burde ligge innenfor usikkerheten i stigningstallet, og det gjør det, men det store avviket kan tyde på at det var noe feil som skjedde under målingen av nedbøyingen med akkurat denne lasten. Det hadde vært ønskelig å oppdage dette avviket under eksperimentet slik at vi kunne gjort flere målinger med denne lasten, og lett etter mulige feil som kan ha påvirket målingen.

Utenom denne målingen er eksperimentet gjennomført godt beskyttet fra systematiske feil. Målingene av størrelsene til staven ble gjennomført flere ganger, lydopptak fra slaget på staven ble gjort flere ganger og vi fikk et lineært forhold mellom bøying av stav og belastning. Eksperimentet var godt kontrolert, og vi analyserte resultatene våre underveis for å sjekke at målingene ga mening før vi fortsatte. De tilfeldig feilene har påvirket målingene og vi har tatt hensyn til dette med usikkerheten til de to verdiene vi fant for elastistetsmodulen. Siden usikkerheten i differansen til elastistetmodulen er større enn differansen er det de tilfeldige feilene og måleusikkerhetene som forårsaker differansen mellom dem. Vi kan derfor si at vi har overenstemmelse innenfor måleusikkerhetene. Dette gir oss en bekreftelse på at det ikke var merkbare systematiske feil tilstede under eksperimentet.

De to metodene ga oss det samme svaret, men med litt over en faktor tre forskjell i usikkerheten mellom de to metodene. Årsaken til den store forskjellen i usikkerhet er at målingene gjort med meterstokk er mye mindre presise enn de andre målingene. På grunn av dette vil metoden som hviler mest på målinger gjort av en meterstokk ha de største usikkerhetene. For metoden som bruker målingen av nedbøyingen til staven er avstanden mellom knivene svært viktig for elastisitetsmodulen, og elastisitetsmoduler går

derfor som avstanden mellom knivene i tredje potens. Metoden der man bruker utbredelseshastigheten til bølgen for å beregne elastisitetsmodulen kanseleres noen potenser av lengden i utregningen av uttrykket slik at lengden på staven går i første potens. Siden meterstokken er det desidert største bidraget til usikkerheten fører en faktor tre i bidraget fra denne usikkerheten til et stort utslag i den endelige usikkerheten. Det er dette som har forårsaket den store forskjellen i usikkerhetene til resultatet. Det burde derfor brukes en mer presis måte å beregne lengden til staven og avstanden mellom knivene neste gang eksperimentet blir gjennomført for å redusere denne usikkerheten.
Verdien vi får for elastisitetsmodulen til messing er 110(1) GPa. Denne verdien kan vi sammenlikne med verdien for elastisitetsmoduen til messing fra andre kilder. På wikipedia-siden til *Young's modulus* [**?**] står det at elastisitetsmodulen til messing er $100 - 125$ GPa. For tabellen står det at verdier kan avvike avhengig av målemetode, temperatur og deformasjonsgraden, men verdiene er vist er omtrentlig riktig og vist for relativ sammenlikning. Vår verdi for elastisitetsmodulen passer godt inn med verdien vist i tabellen. Selv om tabellen viser omtrentlige verdier burde vår måling ligge innenfor intervallet i tabellen, og det gjør det.

VI. KONKLUSJON

En god fysisk modell burde kunne beskrive flere fenomener med så få parametere som mulig. I dette eksperimentet har vi vist at modellen for elastisitet klarer netopp dette ved å beskrive nedbøyingen til en stav som funksjon av belastningen på midtpunktet, og utbredelseshastigheten til bølger i samme stav med samme parameter, elastisitetsmodulen. Ved å måle nedbøyingen som funksjon av last, og de geometriske størrelsene til staven, fant vi at elastisitetsmodulen for messing er $E = 110(1)$ GPa. Ved å fokusere på en bestemt bølgelengde for trykkbølgene klarer vi å bestemme utbredelseshastigheten ved å måle frekvensen til lydbølgen med en mikrofon. Verdien til frekvensen sammen med massen, lengden og diameteren til staven gir oss muligheten til å beregne at elastisitetsmodulen er 109.3(3) GPa. De to verdiene vi har funnet for elastisitetsmodulen har en differanse på $D = 0.7(11)$ GPa. Som vi ser er usikkerheten i differansen større en differansen, dette betyr at elastisitetsmodulene er tilnærmet like, men avviker på grunn av måleusikkerheter. Ved å ta utgangspunkt i to forskjellige fenomener har vi beregnet to forskjellige verdier for elastisitetsmodulen som har overenstemmelse innenfor måleusikkerhetene og stemmer med tidligere målte verdier for elastisitetsmodulen til messing.

Utstyrsliste

- meterstokk - Hultafors
- skyvelær - Cocraft Micrometer
- balansevekt - Ohaus Triple Beam Balance dial-o-gram
- Måleur - Baker
- opphengningsstativ
- aluminiumstav
- mikrofon

[1] Squires, G.L. Practical Physics, Cambridge University Press, 2001.
[2] Fysisk institutt Elastisitet, Universitetet i Oslo, februar 2018.
[3] W. J. Hinze, R. R. B. von Frese; A. H. Saad Gravity and Magnetic Exploration: Principles, Practices, and Applications, Cambridge university press, 2013.
[4] Øyvind Grøn elastisitet – fysikk https://snl.no/elastisitet_-_fysikk hentet 03.04.2018.