

FYS-LAB/H17/FYS2160/Termodynamikk og statistisk fysikk

DKD, CAL

Fysisk institutt, Universitetet i Oslo

TSLab 1: Adiabatisk reversibel termodynamikk: lydbølger.

Vi skal i denne labøvelsen studere noen enkle (men ikke trivielle) sider av termodynamikken: *adiabatiske og reversible (isentropiske) prosesser* i luft ($\approx N_2 + O_2$), og i karbondioksyd (CO_2).¹ Ved å utnytte interferens (resonans) i Kundts rør til å måle lydhastigheten kan vi avlede en rekke termodynamiske størrelser.

TSLab 2: Ikke-adiabatisk termodynamikk: faseoverganger.

Vi skal i denne labøvelsen studere noen viktige ikke-adiabatiske (reversible) termodynamiske prosesser: *faseoverganger i H_2O* .² Vi bestemmer smeltevarmen L_s for is ved hjelp av kalorimetri, og fordampningsvarmen L_f for vann ved å studere damptrykkets temperaturavhengighet $p(T) \propto \exp(-L_f/RT)$ (Clausius-Clapeyrons ligning for en ideell gass).

I. (TSLAB 1) ADIABATISK REVERSIBEL TERMODYNAMIKK: LYDBØLGER

Avsnitt **A - E** er en oppsummering av de viktigste ideene som skal belyses av denne øvelsen. De fem resultatene som er nødvendige for å kunne fullføre oppgavene i avsnitt **F** er rammet inn.

A. Innledning: Hva er en fysisk teori (modell)?

En teori skal være så enkel som mulig, men ikke enklere. Albert Einstein

Virkelig, reell materie består av molekyler, som består av atomer, som består av elektroner, protoner og nøytroner, som består av kvarker og gluoner, som består av ... Hvordan kan vi gjøre fysikk når materien er så komplisert? Svaret er at vi bare kan modellere ett lag av “den kosmiske løken” om gangen. Fysikk er kunsten å forenkle – å ignorere detaljer som ikke er viktige for det man har valgt å modellere.

Dette lar seg gjøre fordi de fleste detaljene som er viktige (relevante) for mikrofysikken ikke er viktige for makrofysikken. Tenk Solsystemet. I forhold til planetene er du mikrofysikk, og du er revnende likegyldig for Jordens bane gjennom verdensrommet. For å finne denne er det en meget god tilnærming å modellere Solen og planetene som punkter som adlyder Newtons mekanikk.

Det er ikke uvanlig at makroskopiske begreper ikke har noen mikroskopisk mening. Et enkelt atom har hverken trykk eller temperatur. Dette fenomenet, at helheten (den kollektive oppførselen) er mer (eller i hvert fall anderledes) enn summen av sine bestanddeler, kalles *emergens*. At “kollektivet” (gassen) glemmer “individenes personlighet” (molekylenes mikroskopiske detaljer) kalles *universalitet*. Uten disse begrepene kan vi ikke forstå

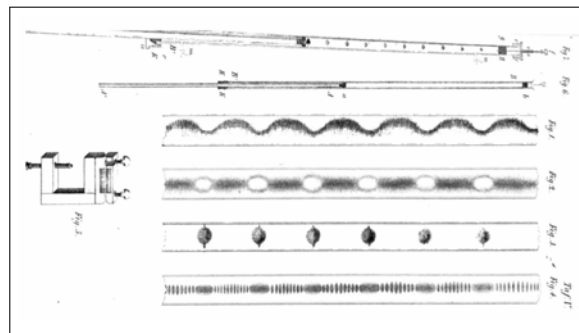


Figure 1. Originalillustrasjon fra artikkelen til August Kundt i Annalen der Physik i 1866, som viser stående bølger i Kundts rør.³ Vi skal i denne øvelsen gjenta hans eksperiment med moderne måleutstyr, blant annet for å teste den termodynamiske gassteorien.

fysikk eller noen annen naturvitenskap. *Paradeeksemplet er termodynamikk og statistisk mekanikk.*

I denne oppgaven skal vi blant annet tenke over hva som er viktig og hva som ikke er viktig i termodynamisk gassteori. Det første vi må finne ut er hvordan vi skal modellere molekyler i en gass: hva er relevant, og hva er ikke relevant? Vi ønsker å vite hvordan de termodynamiske variablene trykk, temperatur osv. beskriver den kollektive makroskopiske oppførselen til de mikroskopiske molekylerne.

B. Fra molekyler til mol

Den aller enkleste molekylmodellen er at atomene er udelelige matematiske punkter uten “personlighet” (dvs. ingen andre fysisk målbare attributter), som holdes sammen av stive pinner uten personlighet. Dette *punkt&pinne* molekylet kan bevege seg og rotere i rommet, men det er alt. En bedre modell er å erstatte

pinnene med fjærer, slik at molekylet også kan vibrere (*punkt&fjær* modellen). En enda bedre modell er å erstatte punktene med Bohrske atomer, hvor elektronene kan eksiteres til forskjellige tilstander med ulik energi (*oscillator&fjær* modellen), men det skal vi ikke studere her.

Ved romtemperatur ($T \approx 300\text{ K}$) kan vi komme forbausende langt ved å tenke på luften som *punkt&pinne* molekyler som ikke snakker sammen, en såkalt *ideell gass*. Et atom i grunntilstanden har en maksimalt symmetrisk bølgefunksjon som vi kan modellere med et matematisk punkt. Ved lav temperatur kan atomene hverken eksiteres eller vibrere, fordi det krever en temperatur på tusen grader eller mer.

For ideelle gasser har vi en svært direkte og enkel bro mellom mikro- og makrofysikken, som går via *varmekapasiteten*. Det eneste som termodynamikken til denne “matematiske” gassen husker av mikrofysikken er hvor mange *frihetsgrader* f molekylerne har, og hvor tunge de er. **MERK:** Med “frihetsgrader” mener vi i denne sammenheng *ikke* alltid det samme som i klassisk mekanikk (se neste avsnitt).

Jo flere frihetsgrader molekylerne i en gass har, jo mer varme kan gassen lagre. Dette måles av de molare varmekapasitetene c_p (konstant trykk) og c_v (konstant volum).

For en ideell gass bidrar hver termodynamiske frihetsgrad med $R/2$ til c_v :

$$c_v = f \frac{R}{2}, \quad c_p = (f + 2) \frac{R}{2}, \quad (1)$$

hvor R er den molare gasskonstanten:⁴

$$c_p - c_v = R = 8.3144598(48) \text{ J/K/mol}. \quad (2)$$

Forholdet mellom varmekapasitetene kalles *adiabatkonstanten* eller *isentropeksponenten*

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{f + 2}{f}, \quad (3)$$

hvor den siste ligningen forutsetter at gassen er ideell. Dette forholdstallet bestemmer bl.a. de makroskopiske *adiabatligningene* for en ideell gass, som sier at pV^γ , $T V^{\gamma-1}$ og $T p^{1/\gamma-1}$ er konstanter.

For en ideell gass er *tilstandsligningen*

$$pV = n_{\text{mol}}RT, \quad (4)$$

hvor n_{mol} er stoffmengden målt i SI-enheten *mol*, dvs. $n_{\text{mol}} = m/M_{\text{mol}} = N/N_A$ er antall mol i gassen, hvor m er massen til gassen, M_{mol} er massen til ett mol av gassen, N er antall molekyler i gassen, og N_A er Avogadros tall.

Sammenhengen med statistisk mekanikk fremgår av

$$pV = Nk_B T, \quad k_B = 1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23} \text{ J/K} \quad (5)$$

hvor k_B er Boltzmanns konstant.⁴ Den termodynamiske gasskonstanten R er proporsjonal med den statistisk-mekaniske konstanten k_B , og forholdstallet er Avogadros

konstant⁴

$$N_A = R/k_B = 6.022\,140\,857(74) \times 10^{23} / \text{mol}. \quad (6)$$

Den vanlige utledningen av denne sammenhengen er såpass kronglete at det ikke er helt klart hvor lite som skal til for at den holder. Dette er grunnen til at denne teorien er så universell som den er: *såfremt noen enkle betingelser er tilfredsstilt så holder termodynamikken alle steder til alle tider*. For spesielt interesserte (dette er *ikke* pensum) har vi derfor lagt ved en alternativ (og *mye* enklere) konstruksjon av statistisk mekanikk.

C. Frihetsgrader

Mekaniske (kanoniske) frihetsgrader er (generaliserte) koordinater: de uavhengige variable som er nødvendige for å beskrive systemets tilstand. For n partikler er det totale antallet koordinater $F_{\text{tot}} = 3n$, uavhengig av hvilken dynamikk de har (hvilke krefter som virker mellom dem). Med andre ord, gitt $3n$ initialbetingelser så har de koblete bevegelsesligningene en entydig løsning.

Med det vi kan kalle “termodynamiske” eller “energetiske” frihetsgrader f mener vi alle forskjellige måter vi kan lagre energi i systemet.

Hvis atomer i denne sammenheng er uten utstrekning (uten indre tregghetsmoment), og molekylet har s rotasjonssymmetriakser, så er det $3 - s$ rotasjoner av molekylet som kan lagre kinetisk rotasjonsenergi. Kinetisk energi kan også lagres ved å bevege massesenteret i tre forskjellige retninger. Ved “romtemperatur” er dette alt som kan skje, slik at det totale antallet mekaniske og energetiske frihetsgrader er det samme:

$$f_{\text{rom}} = F_{\text{rom}} = 6 - s \quad (7)$$

Ved høy temperatur (mye høyere enn den vi har i denne øvelsen) kan atomene i et fleratomig molekyl også vibrere. Antallet mekaniske vibrasjonsfrihetsgrader er

$$F_{\text{vib}} = F_{\text{tot}} - F_{\text{rom}} = 3n - 6 + s, \quad (8)$$

mens antallet energetiske vibrasjonsfrihetsgrader er

$$f_{\text{vib}} = 2F_{\text{vib}} = 6n - 12 + 2s. \quad (9)$$

Legg merke til at $F_{\text{rot}} + F_{\text{vib}} = 3n$ er konstant, slik at flere rotasjonsfrihetsgrader (mindre symmetri) går på bekostning av vibrasjonsfrihetsgradene, og omvendt (mer symmetri gir flere vibber).

Grunnen til at vi må doble energiregnskapet for en oscillator er at den har både kinetisk og potensiell energi. Hvis vi modellerer bindingen mellom to atomer som en fjær med en gitt fjærstivhet ν_k (som bestemmes av hvor sterk bindingen er) så lagres det en potensiell energi proporsjonal med ν_k i fjæren når den er strukket eller sammenpresset. Ved tiltrekkelig høy temperatur

kan hver fjær lagre like mye energi av hver type, og derfor bidrar vibrasjoner dobbelt så mye som translasjoner og rotasjoner til energilagringskapasiteten. Vi definerer Θ_k som den *karakteristiske temperaturen* som må overskrides for at en gitt vibrasjonsmode skal kunne eksiteres ($k = 1, 2, \dots, F_{\text{vib}}$). Verdien på $\Theta_k \propto \nu_k/k_B$ er bestemt av fjærkonstanten. For vanlige molekyler er Θ_k flere tusen grader, og ofte mener vi med “romtemperatur” $T_{\text{rom}} \ll \Theta_k (\forall k)$.

D. Lydbølger

Lyd er longitudinelle trykkbølger, og hastigheten til denne bølgen vil følgelig avhenge av temperatur, trykk, og andre termodynamiske størrelser. Vi skal bruke Kundts rør til å måle lydhastigheten (se Fig. 1), og bruke dette til å undersøke hvordan varmekapasiteten $c_*(n, s, M_{\text{mol}}, T)$ avhenger av molekylstrukturen og temperaturen.

Direkte bestemmelse av lydhastigheten ved å finne resonansene i røret

Vi skal kontrollere frekvensen til en lydbølge som mates inn i et rør med en eller flere gasser. Ved å “lytte” oss frem til resonansfrekvensene for stående bølger i røret kan vi bestemme lydhastigheten til gassen inni røret, ved å utnytte at: *hastigheten c til en bølge tilfredsstiller alltid*

$$c = \lambda \nu \quad (10)$$

hvor λ er bølgelengden og ν er frekvensen til bølgen. Poenget er at vi ved hjelp av kunnskap fra bølgelæren for stående bølger kan resonere oss frem til bølgelengden for resonansfrekvensene.

Beregning av lydhastigheten for ideelle gasser ved å finne temperaturen i røret

Fra bølgelæren vet vi at lydhastigheten c er gitt av tettheten ρ til materialet (gassen) og den *adiabatiske kompresjonsmodulen* K :

$$K = -V \frac{dp}{dV} = \gamma p \implies \quad (11)$$

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{(f+2)p}{f\rho}}, \quad (12)$$

hvor vi har brukt at $K = \gamma p$ følger av adiabatligningen $p \propto V^{-\gamma}$, og ligning (3).

Eksempel: Tettheten til luft er $\rho_0 \approx 1.29 \text{ kg/m}^3$ ved $T_0 = 0^\circ\text{C}$ og høyden $h_0 = 0 \text{ m}$ over havet (hvor trykket er $p_0 = 1 \text{ atmosfære} \approx 1.0125 \times 10^5 \text{ Pa}$). Hvis luften er en

ideell gass gir $f_{\text{rom}} = 5$ lydhastigheten $c_0 \approx 331 \text{ m/s}$, som stemmer godt med den eksperimentelle verdien.

Siden $\rho = m/V = nM_{\text{mol}}/V$ og $pV = nRT$ får vi den termodynamiske ligningen for lydhastigheten i en ideell gass:

$$c^{\text{id}}(T) = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_{\text{mol}}}} = \sqrt{\frac{(f+2)RT}{fM_{\text{mol}}}} \quad (13)$$

Kombinerer vi dette resultatet med ‘termistorfunksjonen’ $T(r)$ får vi lydhastigheten i en ideell gass ved romtemperatur direkte fra resistansen $r = R_t/10^5 \Omega$ i termistoren (hvor R_t , som er antall Ohm i termistoren, ikke må forveksles med gasskonstanten R):

$$c_{\text{rom}}^{\text{id}}(r, s) = k_{\text{rom}}^{\text{id}}(s) \sqrt{t_0 - \ln r} \quad (14)$$

der $t_0 \approx (T_0 + 25)/24 \approx 12.4464$, og

$$k_{\text{rom}}^{\text{id}}(s)^2 = \frac{f_{\text{rom}} + 2}{f_{\text{rom}}} \times \frac{bR}{M_{\text{mol}}} = \frac{8-s}{6-s} \times \frac{24R}{M_{\text{mol}}}. \quad (15)$$

Legg merke til at det er den molare massen som er viktigst for lydhastigheten: jo lettere gassen er jo forttere går lyden. For eksempel er lydhastigheten i helium ved romtemperatur (20°C) over 1000 m/s . Et unntak fra denne regelen er neon, som er litt tyngre enn ammoniak og vann: $M_{\text{mol}}(\text{NH}_3) = 17.03 \text{ g/mol} < M_{\text{mol}}(\text{H}_2\text{O}) = 18.02 \text{ g/mol} < M_{\text{mol}}(\text{Ne}) = 20.12 \text{ g/mol}$. Grunnen er at neon har færre frihetsgrader, som i dette tilfellet er nok til å overkomme den lille forskjellen i molekylmassene.

E. Termistorfysikk

Hensikten med denne delen av lab-øvelsen er å understreke at måleapparatene (sensorene) vi bruker også er fysiske systemer. De er derfor bare nyttige i den grad vi forstår deres fysikk. I praksis benytter vi ofte tabeller og grafer for å konvertere den uavhengige variabelen vi faktisk måler til den avhengige variabelen vi trenger.

Et godt eksempel som vi kjenner fra tidligere kurs er *Hall-effekten*, som oppstår når en elektrisk strøm møter et magnetfelt. Dette er et interessant fenomen som vi studerte i FYS1120: *Elektromagnetisme*, for å få en bedre forståelse av både elektromagnetismen og båndstrukturen (kvantemekanikken) i halvledere. Etter å ha forstått denne fysikken kan vi utnytte fenomenet til å lage apparater som kan bestemme magnetfeltstyrken med stor nøyaktighet, ved å måle Hall-motstanden (potensialet) på tvers av strømrretningen. Det er ofte slike *Hall-sonder* av halvledere som brukes kommersielt.

For å kunne gi en kvantitativ sammenligning av fysikken til en trykkbølge (lyd) med termodynamisk gassteori må vi kunne måle temperaturen med god nøyaktighet. Vi skal gjøre dette ved å måle den elektriske

motstanden R_t i en spesiell type halvleder som kalles en *termistor*. “Termistorfunksjonen”

$$T(r) \approx 25 - 24 \ln r \quad (16)$$

der $r = R_t/10^5 \Omega$ og R_t er antall Ohm i termistoren,⁵ gir temperaturen i grader Celsius.

Denne formelen avviker litt fra tabellen ved lave temperaturer, men siden den stemmer meget godt i det temperaturområdet vi skal studere (20 – 50°C) (se Fig. ??), så ser den ut til å modellere den mest relevante fysikken i termistoren.

F. OPPGAVER

Oppgave I.1 Hva er lyd?

(teoretisk “prelab”: repetisjon av bølgelæren)

Hensikten med denne oppgaven er å minne om hva lyd er (Fig. 2), hva plane og stående trykkbølger i et rør er, og hvordan resonansbetingelsen avhenger av grensebetingelsene, dvs. hva man har i endene av røret.

I.1.1 Plane trykkbølger

Bruk den vedlagte analoge trykkbølgesimulator #1 (Fig. 9) til å bli fortrolig med hva en *plan longitudinell trykkbølge* er.

I.1.2 Stående trykkbølger

Bruk den vedlagte analoge trykkbølgesimulator #2 (Fig. 10) til å bli fortrolig med hva en *stående longitudinell trykkbølge* er.

I.1.3 Resonans-betingelsen

Fra tidligere kurs (FYS2130: *Svingninger og bølger*, eller lignende) vet vi at betingelsen for resonans og stående lydbølger i et rør med lengde L er:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n + \delta}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \delta = 0, \frac{1}{2} \quad (17)$$

der $\delta = 0$ ($\delta = 1/2$) hvis antall propper i endene på røret er et liketall (oddetall). Diskuter dette, og utled en formel for differansen $\Delta\nu_k = \nu_k - \nu_0$ mellom resonans-frekvensene $\nu_k \propto n_k = n_0 + k$ og en vilkårlig referanse-resonans ν_0 med ukjent resonans-tall n_0 . Vi skal finne lydhastigheten fra stigningstallet til grafen av $\Delta\nu_k$.

Oppgave I.2 Måling av lydhastigheten

(den eksperimentelle delen av denne lab-øvelsen)

Vi skal i dette eksperimentet bruke stående lydbølger for å måle lydhastigheten i gasser. En skisse av hovedapparatet er vist i Fig. 3. Gassen er inni et langt rør (med oppgitt indre lengde L med usikkerhet ± 1.5 mm, målt med laser) som er “korket” i begge ender med massive messingskiver.

Proppen i den ene enden har et lite hull i midten som slipper inn lydbølger generert av en liten høyttaler. Denne drives av en harmonisk vekselspanning fra en signalgenerator, som har flere knotter på høyre side hvor amplituden (signalstyrken) kan reguleres slik at lydtektoren ikke “klipper” toppen og/eller bunnen av signalet.

I den andre enden av røret registreres lyden med en miniatrymikrofon plassert midt på innsiden av den andre proppen. Denne er koblet til en batteridrevet forsterker festet på utsiden av proppen, jmf. fotografiet i Fig. 4. Signalet fra mikrofonforsterkeren, som er proporsjonalt med lydtrykket ved mikrofonen, sendes til et oscilloskop. Pass på at signalet inn og ut av røret alltid er en klassisk sinus-kurve, uten “klipping” av noe slag. I motsatt fall er amplituden til innkommende signal for stor.

Oppgaven er å finne resonansfrekvenser hvor signalet er betydelig større enn for nærliggende frekvenser. Selv om vi med denne avanserte generatoren kan velge frekvenser med en nøyaktighet på 10^{-3} Hz, så kan vi ikke bestemme maksimalt utslag på oscilloscopet med noe i nærheten av denne usikkerheten.

Dere er fire undergrupper som skal finne hver sin lydhastighet i fire forskjellige rør:

K1: inneholder CO_2 ved $T = T_{\text{rom}}$ (fylles av labveileder!)

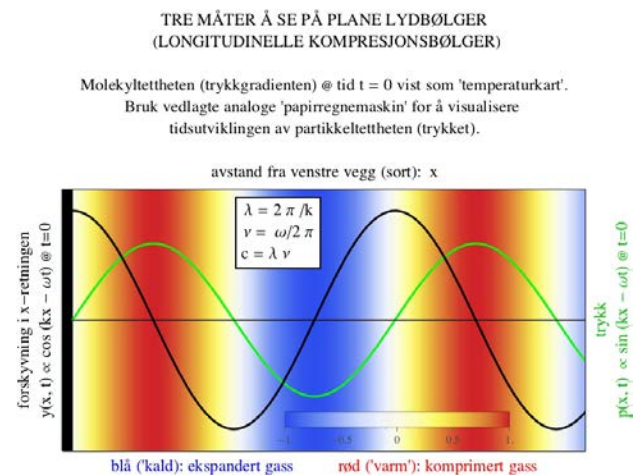


Figure 2. Tre måter å “se” lyd.

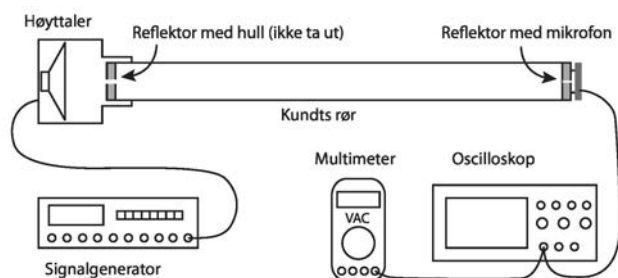


Figure 3. Skisse av en del av apparaturen vi bruker for å måle lyd hastigheten i en gass (enten luft eller CO_2 i denne øvelsen). Vi måler samtidig temperaturen inni røret med en liten termistor som ikke er vist her, og gjennom den samme dysen kan vi slippe inn andre gasser enn luft. Noen av apparatene er pakket inn for å kunne varme opp gassen til $50 - 60^\circ C$ ved hjelp av en varmekilde viklet rundt røret: enten en varmtvannsslange, eller en motstandstråd som varmes opp av en elektrisk strøm. (OBS: $I_{\max} = 0.25 A$!)

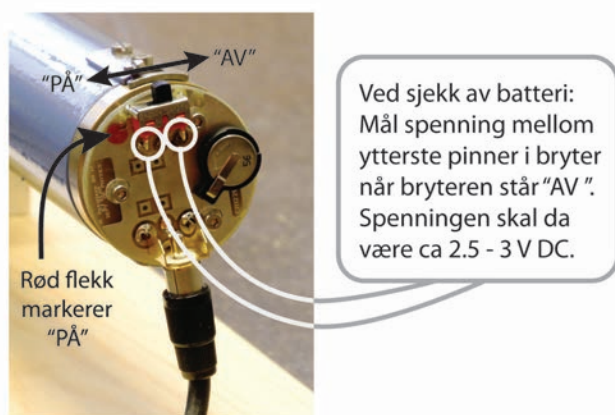


Figure 4. Kretskortet med av/på-bryter for mikrofonforsterkeren, som drives av et lite batteri (den runde skiven på høyre side) med spenning $\gtrsim 2.3 V$.

K2: inneholder luft ved $T > T_{\text{rom}}$ ($T_{\max} \approx 50^\circ C$)

K3: inneholder luft ved $T = T_{\text{rom}}$

K4: inneholder luft ved $T \gg T_{\text{rom}}$ ($I_{\max} = 0.25 A$!)

Til slutt skal resultatene fra K1 - K4 sammenlignes og kommenteres. Etter at neste oppgave er utført skal disse eksperimentelle verdiene for lyd hastigheten også sammenlignes med de teoretiske forventningene fra teorien for ideelle gasser.

I.2.1 Resonansene

Bestem frekvensen til *alle* resonansene i K1 - K4 i frekvensintervallet fra 200 - 300 Hz opp til ca. 2000 Hz. Du finner kanskje en resonans under 200 Hz, men den har så stor usikkerhet at det er bedre å fokusere på høyere frekvenser. Frekvensbestemmelsen skal være så nøyaktig

som du klarer i løpet av ca. 30 s med "fine-tuning" for hver resonans. Estimer en *omtrentlig* usikkerhet i resonansfrekvensene.

Bruk ligning (10) og (17) til å gjøre en *lineær tilpasning* (regresjonsanalyse, minste kvadraters metode) av dataene for å finne lyd hastigheten.

Dette gir også standardavviket som skyldes tilfeldige variasjoner i dataene (men ikke systematiske feil). Jo flere datapunkter, jo mindre blir denne usikkerheten.

Siden det er usikkert hvilken bølge som er lengst bør vi plote differanser for å eliminere en systematisk feiltildordning av resonanstallene (bruk $\Delta \nu_k$ fra forrige oppgave). Da behøver vi ikke vite hvilken verdi av resonanstallet n_0 som hører til første observerte resonansfrekvens ν_0 , forutsatt at vi ikke hopper over noen resonanser.

I.2.2 Temperaturavhengighet

Hvis røret ikke er pakket inn, prøv å endre temperaturen ved å blåse eller holde på røret (hvis røret ditt er pakket inn låner du naboens rør). Hvor stabil er målingene? Anslå måleusikkerheten i temperaturmålingene.

Oppgave I.3 Lyd og molekylenes termodynamikk (analytisk "postlab": lyden av ideelle og reelle gasser)

Vi skal først analysere hvordan antall mikroskopiske frihetsgrader avhenger av molekylstrukturen.

I.3.1 Geometri

Hvor mange rotasjonssymmetrier s_n kan et molekyl med $n = 1, 2, 3, \dots$ punkt-atomer ha?

I.3.2 Atomfysikk

Bruk resultatene fra Oppgave I.3.1 og det periodiske system til å lage en tabell som angir de forskjellige mekaniske og energetiske frihetsgradene i *punkt&fjær* modellen av edelgasser, luft, hydrogen, vann, karbondioksyd og ammoniakk. Tegn alle (rotasjons- og vibrasjons-) modene i diatomer og i CO_2 . [Hint: Symmetrien til molekylet avhenger av hvilken gruppe hvert atom tilhører.]

I.3.3 Temperaturavhengighet

Bruk (14) og (15) til å lage et diagram som viser beregnet lyd hastighet i hydrogen, helium, neon, argon, nitrogen, oksygen, luft, karbondioksyd og ammoniakk, som funksjon av resistansen i termistoren, under forutsetning av at gassen er ideell.

I.3.4 Sammenligning av målinger og beregninger

Sammenlign de eksperimentelle målingene fra Oppgave I.2 med de teoretiske resultatene for ideelle gasser fra Oppgave I.3.3. Hva kan du si om luft ($N_2 + O_2$) og karbondioksyd?

Oppgave I.4 Termistor-temperatur

(metrologi, halvledere og termodynamikk)

Vi har utnyttet at resistansen i en halvleder er et følsomt termometer. Fenomenet er en konsekvens av termodynamikken til ladningsbærerne i materialet.

I.4.1 Resistansen er temperaturavhengig

Resistansen i et metall øker tilnærmet lineært med temperaturen ("spærreballongeffekten"): $r(T) = \alpha + \beta T +$

.... Vi har i denne labøvelsen observert at det er motsatt i halvledere: hvorfor går motstanden i en halvleder *ned* når temperaturen går *opp*?

I.4.2 Båndpopulasjoner

Hva er den fysiske grunnen til at 'termistorligningen' (16) er omtrent riktig? Med andre ord, kan du finne en kvalitativ forklaring på at temperaturen i en halvleder ikke avhenger lineært, men logaritmisk (til ledende orden), av resistansen? [Hint: Hva er den statistiske fordelingen av ladningsbærerne (elektroner og hull) mellom valensbåndet og ledningsbåndet?]

¹ Dette er ikke bare av akademisk interesse. For å unngå en klimakrise ønsker vi å lagre drivhusgassen CO_2 i jordskopen, og i den forbindelse studerer man termodynamikken til CO_2 , og blandinger av CO_2 med andre gasser.

² Ved $T \gg 1 K$ drives faseoverganger av klassiske temperaturfluktuasjoner. Ved $T \ll 1 K$ kan vi ha kvantekritiske faseoverganger som drives av kvantefluktuasjoner. Disse er av interesse for fremtidens elektronikk, bl.a. kvantedatamaskiner.

³ A. Kundt (1866). "Über eine neue Art Akustischer Staubfiguren und über die Anwendung derselben zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in festen Körpern und Gasen". Annalen der Physik (Leipzig: J. C. Poggendorff.) **127** (4).

⁴ The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty. US National Institute of Standards and Technology. 2014 CODATA recommended values. OBS: SI-enhetene skal redefineres i november 2018.

⁵ Log-lineær tilpasning av $T(r) = 25 - b \ln r$ til fabrikantens tabell gir stigningstallet $b \approx 23.9548 \approx 23.955 \approx 23.96 \approx 24$. T -verdiene med $b \approx 23.9548$ og $b = 24$ avviker med mindre enn $\pm 0.05^\circ C$, så i våre eksperimenter kan vi sette $b = 24$.

VEDLEGG OM DATABEHANDLING

I fysikk er et tall uten benevnning og usikkerhet verdiløst.

Dette er en uformell introduksjon til "lineær regresjon", som er den viktigste og mest brukte metoden for å analysere eksperimentelle data.

Det er helt nødvendig for en fysiker å raskt kunne gjøre seg opp en mening om data som hun måler selv eller får presentert. Dette kan også bli aktuelt på eksamen. En måling eller et tall utledet fra målinger har ingen verdi uten tallets usikkerhet. Den raskeste og mest robuste metoden for å tilpasse en modell til målte data er å uttrykke den som en lineær sammenheng, plote måldataene på en slik måte at de faller omkring en rett linje, og så tilpasse en rett linje.

Del I og II er komplementære. Del I handler mest om selve eksperimentet og *data-innsamlingen*, i vårt konkrete eksempel der frekvensdata innhentes for å finne lydshastigheten i en gass. Del II handler mest om *data-*

analysen, og viser hvordan elektronisk databehandling utføres ved hjelp av vedlagte Matlab-skript (eller Python-skriptet som du finner på hjemmesiden til FYS 2160).

DEL I: KUNDT'S RØR

Oppgaven er å bruke litt bølgeteori og målinger til å konstruere en dataliste av tall-par, som kan oppfattes som punkter i et plan. Du skal bruke denne listen til å finne den mest sannsynlige verdien \bar{c} til lydshastigheten i gassen (basert på det du vet, som er bølgeteori og dine målinger, ikke noe annet.) Vi bruker "linjalmetoden" til å finne \bar{c} .

"Linjalmetoden" er en litt vag men grafisk illustrasjon av hvordan vi tilpasser en rett linje til et datasett. Etter å ha plottet datapunktene i et plan legger du en linjal mellom disse slik at de ligger *mest mulig "jevnt spredt"* på begge sider av linjalkanten, som er den rette linjen som passer "best" til datasettet (der "best" per definisjon betyr "den minste kvadratsummen", se under).

Legg merke til at du bruker hele datasettet, og derfor *all tilgjengelig informasjon*, når du plasserer linjalen. Det er derfor dette gir det beste estimatet basert på denne datalistene. Bare unntaksvis ser det ut som et punkt ligger på linjen, og du skal *aldri* "connect the dots": det forteller ingenting, det kan være misvisende, og det kombinerer ikke hele datasettet på noen fysisk meningsfull måte. Fy!

I praksis bruker vi en regnemaskin til å prøve ut alle linjer $y = ax + b$, ved at den varierer stigningstallet a og skjæringstallet b . For hver av disse linjene beregner den summen av kvadratet av datapunktens avstand fra linjen. Den minste kvadratsummen vinner, og stigningstallet \bar{a} til denne linjen inneholder informasjonen om det beste estimatet av lydshastigheten (andre ganger er vi også interessert i \bar{b} , men ikke her).

Spredningen av datapunktene rundt linjen gir standardavviket. Hvis du ikke allerede har en applikasjon som tilpasser linjen og finner standardavviket automatisk kan

du bruke vedlagte script. *Uten dette universalverktøyet kan du ikke gjøre fysikk, så hvis dette ikke allerede sitter i ryggmargen må du lære deg "lineær regresjon" nå!*

Til slutt skal du sammenligne ditt eksperimentelle resultat med teorien for ideelle gasser, som sier at $c \propto \sqrt{T}$. Du må derfor også estimere den mest sannsynlige verdien \bar{T} på temperaturen mens du tok data.

Denne sammenligningen er meningsløs hvis vi ikke vet usikkerheten δc i estimatet \bar{c} , og δT i estimatet \bar{T} . Det gir ingen mening å si at to tall er "nær" hverandre hvis du ikke har en målestokk for å måle avstanden mellom disse to tallene. Er den estimerte verdien $\pi_x = 3.1415$ "nær" den eksakte verdien $\pi = 3.1415926535897932\dots$, selv om det fins uendelige mange tall mellom disse to tallene? *Målestokken er variansen (standardavviket) til den estimerte verdien.*

Hvis usikkerheten i estimatet π_x er $\delta\pi_x = \pm 0.001$ så skal π_x og π behandles som samme tall i fysikk, fordi vi ikke har noe empirisk belegg for å si at de er forskjellige.

Hvis usikkerheten i estimatet π_x er $\delta\pi_x = \pm 0.0001$ så skal π_x og π behandles som forskjellige tall i fysikk, fordi vi har empirisk belegg for å si at det er meget usannsynlig at de faktisk er samme tall. Absolutt sikkert er det ikke, men absoluttheter har ingen plass i naturvitenskap. Målet er å vite hvor usikker vår kunnskap er, ikke "absolutt sannhet".

Uvissheten som kommer fra uungåelige statistiske variasjoner (dessverre ofte kalt "feil") kan man få så liten som man har råd til, ved å innhente mer data. Hvor stort avvik skal vi tillate før vi sier at data ikke stemmer med modellen? Det finnes ikke noe facitsvar, men i partikkelfysikk er konvensjonen at hvis avviket er mer enn 5 standardavvik (sannsynligheten for at dette skyldes en tilfeldig fluktusjon er mindre enn 0.0001), så stemmer ikke den eksperimentelle verdien med den teoretiske, og modellen må antagelig modifiseres.

Vanligvis, men av og til skyldes avviket ukjente "systematiske feil" som kommer fra en ufullstendig forståelse av apparaturen. Da kan det hende at et forbedret eksperiment, som faktisk måler det man tror det måler, er det som trengs. Systematiske feil er alle eksperimenters Achilles hel, fordi det ikke finnes noen systematisk måte å identifisere disse feilkildene.

Linjalmetoden

I denne oppgaven er datasettet en liste

$$\{\{\nu_0, n_0\}, \{\nu_1, n_1\}, \{\nu_2, n_2\}, \dots, \{\nu_N, n_N\}\}$$

av $N + 1$ tall-par $\{\nu_k, n_k\}$, hvor ν er en observert resonansfrekvens, og n er et heltall ("resonanstallet") som angir hvor mange bølgelengder λ som får plass i røret ved denne frekvensen (resonansbetingelsen). Fordi $\nu = c/\lambda = (c/2L) \times n$ vil stigningstallet $a = c/2L$ til linjen $\nu(n)$ gi oss et estimat \bar{c} av lydhastigheten.

Det er fort gjort å tilordne feil resonanstall til den laveste resonansfrekvensen du finner, men det er lett å finne alle resonansene over 2-300 Hz. Vi velger derfor å starte med en vilkårlig resonans ν_0 mellom 200 Hz og 300 Hz. Resonanstallet n_0 er ikke kjent, men siden de etterfølgende resonansene har $n_1 = n_0 + 1$, $n_2 = n_0 + 2$, $n_3 = n_0 + 3$, osv., så vil frekvens-differansene $\nu_k - \nu_0$ ikke inneholde det ukjente tallet n_0 :

$$\begin{aligned}\nu_1 - \nu_0 &= (n_0 + 1)a - n_0a = a \\ \nu_2 - \nu_0 &= (n_0 + 2)a - n_0a = 2a \\ \nu_3 - \nu_0 &= (n_0 + 3)a - n_0a = 3a \\ &\dots \dots \\ \nu_k - \nu_0 &= (n_0 + k)a - n_0a = ka.\end{aligned}$$

Med andre ord, ved å ofre ett datapunkt ($k = 0$) har vi identifisert N punkter

$$\nu_k = \nu_0 + ka, \quad k = 1, \dots, N, \quad (18)$$

hvor verdien til alle størrelsene unntatt stigningstallet a er kjent (skjæringstallet $b = \nu_0$ er input, ikke output). Linjen som passer best til disse N punktene (iflg. minstekvadratsum-metoden) gir det beste estimatet $a = \bar{a} + \delta a$.

Håndplotting på millimeter-papir og bruk av linjal gir ofte et forbausende godt estimat av (\bar{a}, \bar{b}) . Grunnen er nok at evolusjonen har utstyrt oss med meget god billedbehandling, ikke minst for å gjenkjenne symmetrier. For en rett linje betyr "jevn spredning" av datapunktene at "bildet" skal være mest mulig symmetrisk, med linjen som symmetriakse. Hvis vi er interessert i en ikke-lineær funksjon av de uavhengige (målte) variablene, så vil vi vanligvis forsøke å finne en (ikke-lineær) transformasjon til nye variabler som er lineært avhengige (se siste avsnitt for noen eksempler).

Usikkerhetstrekanter (Pythagoras)

Når den beste linjen er funnet kan vi beregne hvor stor spredning δa (variansen, standardavviket) det er rundt stigningstallet \bar{a} til denne linjen.

Standardavviket er definert slik at dersom du gjentok nøyaktig samme eksperiment mange ganger, så vil du finne $a \in \langle \bar{a} - \delta a, \bar{a} + \delta a \rangle$ i ca. 68.3% av eksperimentene, $a \in \langle \bar{a} - 2\delta a, \bar{a} + 2\delta a \rangle$ i ca. 95.5% av eksperimentene, $a \in \langle \bar{a} - 3\delta a, \bar{a} + 3\delta a \rangle$ i ca. 99.7% av eksperimentene, $a \in \langle \bar{a} - 4\delta a, \bar{a} + 4\delta a \rangle$ i ca. 99.99% av eksperimentene, $a \in \langle \bar{a} - 5\delta a, \bar{a} + 5\delta a \rangle$ i ca. 99.9999% av eksperimentene, etc.

Det beste estimatet av lydhastigheten er $\bar{c} = 2\bar{L}\bar{a}$, men hva er usikkerheten δc ? Mer generelt: *hva er usikkerheten i verdien av en funksjon $f(x_1, x_2, \dots)$ av en eller flere uavhengige stokastiske variable x_1, x_2, \dots som har hver sin usikkerhet $\delta x_1, \delta x_2, \dots$?*

Hver usikre variable x_k bidrar til usikkerheten i f , men mindre enn man naivt skulle tro. Hvis alle målte verdier

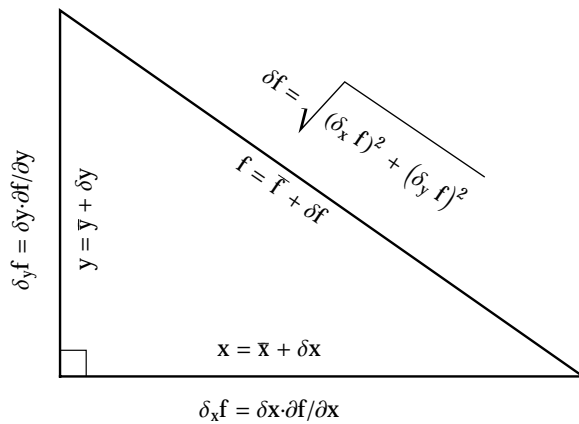


Figure 5. “Usikkerhetstrekanten”: addisjon av usikkerhet.

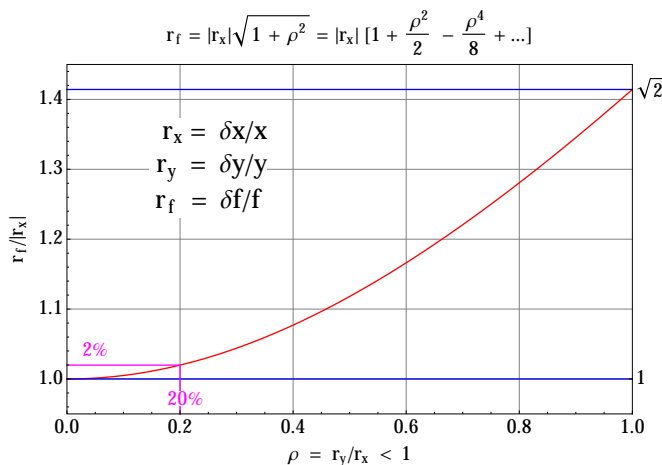


Figure 6. Relativ usikkerhet når $f = x \cdot y$ og $r_y < r_x$. Vi ser at hvis r_y er 20 % av r_x , så bidrar den bare med 2 % til den relative usikkerheten i f . Hvis r_y er 10 % av r_x bidrar den med mindre enn 1/2 %.

er uavhengige, så “trekker de i ortogonale retninger”, og skal derfor ikke adderes lineært, som er den naive forventningen. Det ville gi for stor usikkerhet i f .

Hvis det bare er en variabel finner vi usikkerheten i $f(x)$ ved å derivere, $\delta f = |df/dx|\delta x$. Hvis det er to eller flere variable bidrar hver gjennom de partiell-deriverte, men disse skal “adderres i kvadratur”. For to variable kan vi bruke Pythagoras på “usikkerhetstrekanten” vist i Fig. 5 som en huskeregel. Usikkerheten δf (variasjonen rundt forventningsverdien $\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y})$) er gitt av hypotenusen, som er mindre enn summen av katetene:

$$\delta f = \sqrt{(\delta_x f)^2 + (\delta_y f)^2} < \delta_x f + \delta_y f. \quad (19)$$

(For flere variable bruker du den opplagte generaliseringen av denne formelen.)

Eksempel:

$$f(x, y) = xy \implies \frac{\delta f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{y}\right)^2}. \quad (20)$$

Vi ser at det er den *relative usikkerheten* $r_x = \delta x/x$, etc. som er relevant. Siden de opptrer kvadrert i formelen vil en relativ usikkerhet som er vesentlig mindre enn en annen bidra med svært lite til den relative usikkerheten i f . Vi kan da droppe en av variablene, og ligningen forenkles til en mye brukt form, $\delta f \approx y \delta x$. Fig. 6 viser hvor fort bidraget fra variabelen med minst relativ usikkerhet, her $r_y = \delta y/y$, “dør” i forhold til $r_x > r_y$.

For å rettferdiggjøre at du kan bruke $\delta c \approx 2L\delta a$ til å beregne usikkerheten i lydhastigheten i denne oppgaven, må du verifisere at den relative usikkerheten i a er mye større enn den relative usikkerheten i L .

Ikke-lineære modeller

Den analytiske prosessen vi har brukt her for å estimere lydhastigheten i en gass er prototypisk: metoden er den samme for å analysere alle lineære (proporsjonale) sammenhenger i Naturen, $f(x) = ax + b$. Dette er mer generelt enn det ser ut, fordi vi kan bytte ut en ikke-lineær relasjon med en lineær en, for eksempel:

- $f(x) = a/x + b$: definer $z = 1/x$ for å studere $g(z) = az + b$.
- $f(x) = c \exp(ax + b)$: ta logaritmen på begge sider for å studere $g(x) = \ln f(x) = ax + \tilde{b}$, der den nye konstanten er $\tilde{b} = b + \ln c$.
- $f(x) = c \ln(ax + b)$: eksponensier begge sider for å studere $g(x) = \exp f(x)/c = ax + b$.
- $f(x) = (ax + b)^c$: ta roten av begge sider for å studere $g(x) = \sqrt[c]{f(x)} = ax + b$.

Hvis det er usikkerheten δx til en variabel x som er kjent (vanligvis bestemt ved hjelp av “linjalmetoden”) må du bruke “Pythagoras-metoden”, selv om det bare er en uavhengig variabel x , for å finne usikkerheten i enhver størrelse som er en funksjon av x . For eksempel:

$$f(x) = ax + b \implies \delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \delta x = a \delta x, \quad (21)$$

$$f(x) = a/x + b \implies \delta z = \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \delta x = \frac{\delta x}{x^2} \quad (22)$$

$$\implies \delta g = \left| \frac{\partial g}{\partial z} \right| \delta z = \frac{a}{x^2} \delta x, \quad (23)$$

Hvis det er usikkerheten δz til en transformert variabel $z = z(x)$ som er kjent (vanligvis bestemt ved hjelp av “linjalmetoden” anvendt på en linearisert relasjon $g(z) = az + b$), må du bruke “Pythagoras-metoden” på $g(z)$, ikke $g(x)$: $\delta g = a \delta z$. (Usikkerheten i x er da $\delta x = |dz/dx|\delta z$. F.x., hvis $z = 1/x$ så er $\delta z = \delta x/x^2$ og $\delta x = \delta z/z^2$.)

DEL II: LINEÆR REGRESJON AV MODELLER TIL DATA

Den raskeste og mest robuste metoden for å tilpasse en modell til målte data er å uttrykke den som en lineær sammenheng, plotte måledataene på en slik måte at de faller omkring en rett linje, og så tilpasse en rett linje.

Fig. 7 viser hvordan man raskt kan gjøre dette for hånd når man har en modell som sier at $\hat{y} = ax^2$.

Det som er vanligst å gjøre er derimot å plotte kontrollparametrene (tid, frekvens, strømstyrke) på x-aksen og de målte verdiene på y-aksen. Det er fint å gjøre for å vise hva man egentlig har målt. Husk at det er datapunktene som skal markeres, ikke en strek mellom disse! Hvis du har estimater for usikkerheten så vis disse på grafen. Det neste man gjerne gjør er å finne en tilpasningsmodell som er lett tilgjengelig i programvaren. I Matlab bruker man ofte `polyfit`. Den tilpasser et polynom av ønsket grad til dataene.

Siden vi tror dataene bør følge $y = ax^2$, så velger vi et polynom av grad to. Problemet er at da får man med seg to ekstra tilpasningsparametre, siden `polyfit(x,y,2)` bruker modellen $y = ax^2 + bx + c$. Resultatet av dette er vist i Fig.8 sammen med resultatet av modellene $y = ax^2 + bx$ og $y = ax^2$. Resultatet for tilpasningskoeffisienten a (som skal være lik 1) som vi er interessert i, er $a = 1.00 \pm 0.02$ for modellen $y = ax^2$, $a = 0.92 \pm 0.09$ for modellen $y = ax^2 + bx$ og 0.5 ± 0.4 for modellen $y = ax^2 + bx + c$ (som du måtte brukt hvis du bruker

`polyfit`).

Lineær tilpasning i Matlab

Den trygge måten å gjøre tilpasninger til nøyaktig den modellen du ønsker er å bruke backslash-operatoren "`\`". For vår modell beregnes a med `a=x.^2\y;`. Hvis

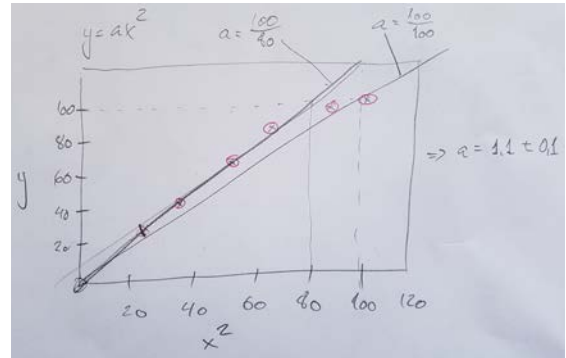


Figure 7. Rask plotting (2-5 minutter) , tilpasning og feilestimering for hånd. Målte data, y , plottet mot "modell"-parameter, x^2 . Heltrukne linjer er to forskjellige tilpasninger etter øyemål. Det endelige resultatet for helningen er middelverdien \pm halve forskjellen mellom helningen til de to linjene.

du bare vil gjøre tilpasning og finne estimat for standardavviket til tilpasningskoeffisientene, så kan du bruke skriptet `linregr` som er vist i neste avsnitt.

Matlab-skript

```
function [ b, stdb ] = linregr( X,Y )
b = X\Y;          % Least squares solution to the equation Y=X*b
E = Y - X*b;      % Errors in each point
MSE = (E'*E)/(length(Y)-size(X,2));      % Mean squared errors
Covar = MSE.*inv(X'*X);      % Covariance matrix
stdb = diag(sqrt(Covar));    % Standard error of fitting coefficients
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Eksempel p bruk
% Forskjellige mter gjre tilpasning til data.
% Kjr programmet mange ganger og se hvordan resultatene varierer

% Lager syntetiske data med sty
x=(5:10)';
std_noise=4;
noise=std_noise*randn(size(x));
y=x.^2+noise;

% Alltid plott datapunktene, ikke linjen mellom datapunktene!!!!
% Hvis du har et estimat for usikkerheten til mlepunktene br du
% plotte med errorbar
```

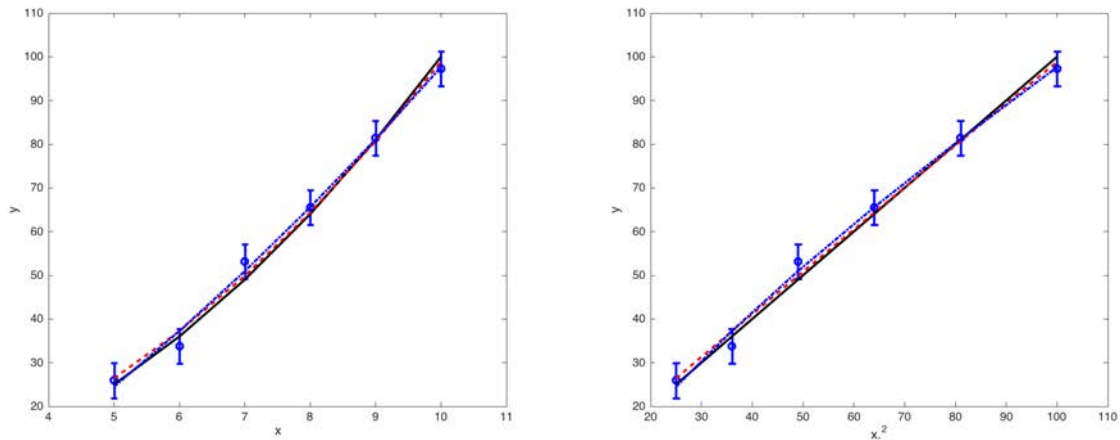


Figure 8. Målte data, y , plottet direkte mot “kontroll-parameteren” x (til venstre), og plottet mot “modell-parameteren” x^2 (til høyre). Svarte linjer: modellen $y = ax^2$, røde linjer: $y = ax^2 + bx$, blå linjer: $y = ax^2 + bx + c$.

```
figure(1)
subplot(1,2,1), errorbar(x,y,std_noise.*ones(size(x)),'ob','LineWidth',2)
xlabel('x'), ylabel('y')
subplot(1,2,2), errorbar(x.^2,y,std_noise.*ones(size(x)),'ob','LineWidth',2)
xlabel('x.^2'), ylabel('y')

% 3 modeller y = X * b
% 1)
X1 = x.^2;
[b1, stb1]=linregr(X1,y);
subplot(1,2,1), hold on, plot(x,X1*b1,'-k','LineWidth',2), hold off
subplot(1,2,2), hold on, plot(X1,X1*b1,'-k','LineWidth',2), hold off
% 2)
X2 = [x x.^2];
[b2, stb2]=linregr(X2,y);
subplot(1,2,1), hold on, plot(x,X2*b2,'--r','LineWidth',2), hold off
subplot(1,2,2), hold on, plot(X1,X2*b2,'--r','LineWidth',2), hold off
% 1)
X3 = [ones(size(x)) x x.^2];
[b3, stb3]=linregr(X3,y);
subplot(1,2,1), hold on, plot(x,X3*b3,'-.b','LineWidth',2), hold off
subplot(1,2,2), hold on, plot(X1,X3*b3,'-.b','LineWidth',2), hold off
```

**Analog trykkbølgesimulator for å visualisere en plan lydbølge
(longitudinell kompresjonsbølge)**

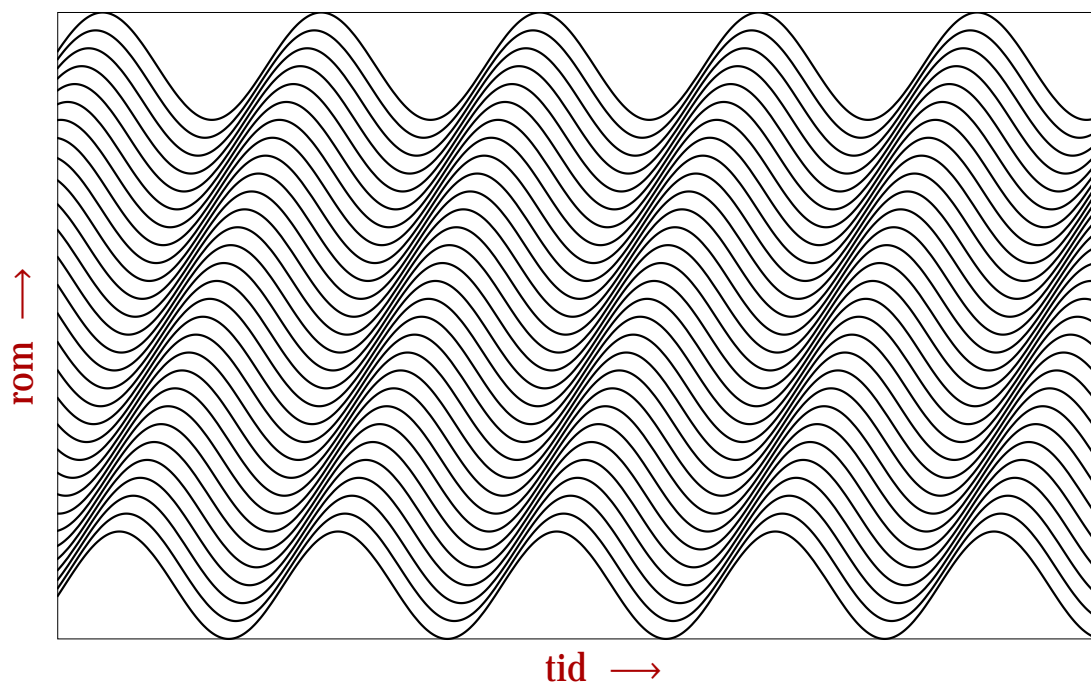


Figure 9. Analog trykkbølgesimulator #1: visualisering av plane lydbølger. Lim sammen to stive ark med en glipe mellom arkene på maksimalt en millimeter. Ved å dra glipen ("røret") i tidsretningen vil du se en propagerende trykkbølge som fortetter og fortynner "gassen" av sorte prikker.

Analog trykkbølgesimulator for å visualisere stående lydbølger (longitudinelle kompresjonsbølger)

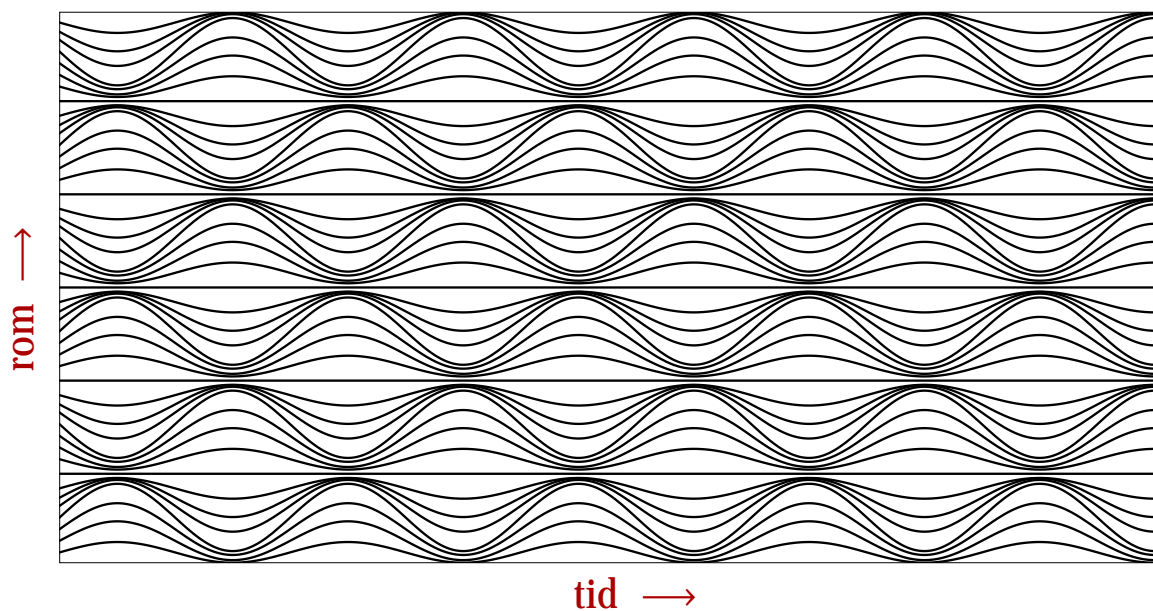


Figure 10. Analog trykkbølgesimulator #2: visualisering av stående lydbølger. Lim sammen to stive ark med en glippe mellom arkene på maksimalt en millimeter. Ved å dra glipen (“røret”) i tidsretningen vil du se en stående trykkbølge som fortetter og fortynner “gassen” av sorte prikker.