Upphitunarverkefni í lotu 3

Við kynnumst mismunaraðferð í einni vídd með mismunandi jaðarskilyrðum. Skoðum tiltölulega einfalt dæmi þar sem nákvæm lausn er þekkt. Við skoðum diffurjöfnuna

$$y''(x) - y(x) = 0$$

á bilinu $[0, 1]$. Skv. stæ1 vitum við að almenna lausn jöfnunnar er

$$y_{\text{almenn}}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

og fastarnir c_1 og c_2 ákvarðast af jaðargildum ef verkefnið er vel uppsett.

1. Við skiptum bilinu $[0, 1]$ í alls $n-1$ hlutbil, öll h að lengd þ.a.

$$x_1 = 0 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$$

og við látum y_i vera nálgun að lausn í x_i. Strjálið jöfnuna í innri punktunum $x_2, \cdots, x_{n-1}$ með hjálp

$$f''(x) \simeq \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$$

Þið eigið að setja fram alls $n-2$ jöfnur fyrir breyturnar $y_2, \cdots, y_{n-1}$.

2. Við notum fyrst Dirichlet jaðarskilyrði, þ.e. skilyrði um y sjálft í endapunktunum, nánar tiltekið

$$y(0) = 1 \qquad y(1) = -1$$

Athugið að gildin y_1 og y_n eru þá þekkt (þarf að bæta þeim við einhvers staðar). Leysið jöfnuhneppið sem fæst fyrir $y_2, \cdots, y_{n-1}$, teiknið lausnina og berið saman við nákvæma lausn

$$y_2 = -0.5820e^x + 1.5820e^{-x}$$

3. Nú notum fyrst Neumann jaðarskilyrði, þ.e. skilyrði um y' í endapunktunum, nánar tiltekið

$$y'(0) = 0 \qquad y'(1) = 1$$

Jöfnurnar úr lið 1 eru enn gildar en nú þarf að búa til tvær aukajöfnur um y_1 og y_n. Notið formúlurnar

$$f'(x) \simeq \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h}$$

og

$$f'(x) \simeq \frac{-3f(x) + 4f(x-h) - f(x-2h)}{-2h}$$

Leysið jöfnuhneppið sem fæst fyrir $y_1, \cdots, y_n$, teiknið lausnina og berið saman við nákvæma lausn

$$y_3 = 0.4255e^{x} + 0.4255e^{-x}$$

4. Endurtaka með Robin jaðarskilyrði (bland af y og y') nánar tiltekið

$$y'(0) = y(0) + 1 \qquad y'(1) = -y(1)$$

Nákvæm lausn er

$$y_4 = -0.5e^{-x}$$