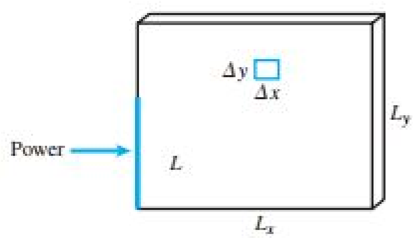
Skilaverkefni 3 í tölulegri greiningu

Heatsinks (varmasvelgur) eru víða notuð til að dreifa varma og kæla ákveðna hluta sem þola ekki mikinn hita. Sem dæmi má nefna kælikerfi bíls eða kælikerfi örgjörva. Dæmigerð hönnun er eins og kemur fram á mynd:

og samanstendur af nokkrum þunnum blöðum. Í þessu verkefni skoðum við hvernig stakt blað bregðst við varma öðru megin frá. Blað er rétthyrningslaga með hliðarlengdum L_x og L_y og (lítið) þykkt δ. Vinstra megin á blaðinu er fast aflinntak L, sjá mynd.



Við viljum finna sístöðu kerfisins, þ.e. reikna varmadreifingu til lengra tíma litið. Hægt er að sýna að í innri punkti blaðsins uppfyllir hitastigið $u(x, y)$ hlutafleiðujöfnuna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2H}{K\delta} u$$

Fastinn K er hitaleiðni efnisins (e. *thermal conductivity*) og fastinn H er leiðnivarmaflutningsstuðull (e. *convective heat transfer coefficient*. Rifjum upp að δ er þykkt blaðsins. Auk þess er jaðarskilyrði sem endurspeglar convection út í loftið þar. Nánar tiltekið gildir

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{H}{K} u$$

sem er þverafleiða í hliðum blaðsins. Þar sem hliðarnir eru samsíða ásunum er eiginlega

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial n} &= -\frac{\partial u}{\partial y} && \text{niðri} \\
\frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{\partial u}{\partial y} && \text{uppi} \\
\frac{\partial u}{\partial n} &= -\frac{\partial u}{\partial x} && \text{vinstra megin} \\
\frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{\partial u}{\partial x} && \text{hægra megin}
\end{aligned}$$

Að lokum er jaðarskilyrði vinstra megin breytt þar sem aflinntak á sér stað og gefur þar frekar

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P}{L\delta K}$$

þar sem P er heildaraflið og L lengd inntaksins (sjá mynd).

Strjálun jaðargildisverkefnisins og fyrsta lausn

Á x-ás skiptum við bilinu $[0, L_x]$ í $m-1$ hlutbil, öll h að lengd, með

$$0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = L_x$$

og sömuleiðis er $[0, L_y]$ skipt í $n-1$ hlutbil, öll k að lengd, með

$$0 = y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = L_y$$

og við látum $u_{i,j}$ vera nálgun að lausn í punktinum (x_i, y_j). Alls eigum við að reikna mn gildi.

1. Strjálið jöfnuna ásamt jaðarskilyrðunum. Sýnið útreikninga og gerið grein fyrir hvaða formúlur eru notaðar hverju sinni. Athugið að jaðarskilyrði eru af Robin gerðinni og að miklu leyti má herma eftir lið 4 í upphitunarverkefninu.

Hér þarf að passa tvö atriði:

- Aflinntakið á sér stað vinstra megin á breytilegu svæði að lengd L. Það eru því tvö möguleg jaðarskilyrði þar.
- Athugið að er ekki ljóst hvernig normalafleiðan er skilgreind í hornapunktum rétthyrningsins. Til að samræma svörin skulum við gerum ráð fyrir að normallinn í hornapunktunum sé samsíða x-ás (aflinntakið er líka í þessari átt). Þetta skiptir þó litlu máli og munurinn er innan við 0.1% þó $m = n = 10$.

2. Umritið jöfnurnar úr lið 1 og búið til jöfnuhneppi fyrir mn breytur $v_1, \cdots, v_{mn}$ sem eru skilgreindar með

$$v_{i+(j-1)m} = u_{i,j}$$

Setjið það upp á formi $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ þ.s. A er $mn \times mn$ fylki.

3. Við gefum okkur eftirfarandi gildi fyrir fastana.

- Stærð blaðsins: $L_x = L_y = 2\,\mathrm{cm}$, $\delta = 0.1\,\mathrm{cm}$
- Aflinntakið: $P = 5\,\mathrm{W}$, allstaðar vinstra megin við blaðið (þar með talið í endapunktum) þ.e. $L = 2\,\mathrm{cm}$.
- Efnið: $K = 1.68\,\mathrm{W/cm}°C$ (passar fyrir ál), $H = 0.005\,\mathrm{W/cm}^2 °C$ (varmasvelgur í lofti)
- Umhverfishitastig $20°C$. Athugið að jöfnurnar gera ráð fyrir að það sé $0°$ og því þarf að stilla hitastigi eftir á.

Leysið jöfnuhneppi úr lið 2 miðað við þessa fasta með $m = n = 10$ þrep í hvorri átt. Teiknið þrívídda mynd sem sýnir hitastigið á blaðinu t.d. með mesh skipun í Matlab.

Tjékk. Hæsta hitastig á að vera $164.9626°C$, bæði í $(0, 0)$ og $(0, L_y)$. Ef þið fáið örlítið lægra eða hærra má endurskoða hvaða normall þið notið í hornapunktum (sjá í lið 1).

Skekkjumat

Markmið hér er að finna hæfileg gildi á m og n til að tryggja besta nákvæmni án þess að forritið sé of lengi að keyra. Þessi gildi á m og n verða síðan notuð út verkefnið.

4. Leysið jöfnuhneppið úr lið 2 með $m = n = 100$ og geymið svarið - það verður notað sem mælikvarði. Athugið að keyrslutíminn gæti verið nokkrar sekúndur þ.a. þessi gildi á m og n eru ónothæf.

Leysið síðan jöfnuhneppi fyrir $m, n \in \{10, 20, \cdots, 90\}$, alls 9^2 sinnum. Í hvert skipti reiknið þið frávik lausnarinnar frá mælikvarðanum $m = n = 100$ og takið saman í 9×9 fylki. Það gæti reynst snúið að bera saman vigra sem hafa ólíkar lengdir, en látum nægja að skoða gildi í $(0, 0)$.

Hvort hefur meira áhrif, að hækka m eða hækka n? Af hverju? Veljið síðan bestu gildi á m og n þannig að

- Keyrslutíminn verði undir $0.5\,\mathrm{s}$ (helst vel undir)
- Skekkjan verði undir $0.01°\mathrm{C}$

Útskýrið valið.

Breytileg staða aflinntaks

Við stækkum blaðið þ.a. $L_x = L_y = 4\,\mathrm{cm}$. Aflinntakið er nú eftir helmingnum af vinstra hlíðinni, sbr. myndin í inngangnum. Þ.e.a.s. við höldum $L = 2$ og sömuleiðis alla hina fastana. Þetta gæti verið líkan fyrir $2\,\mathrm{cm}$ örgjörva sem gefur af sér hita en $4 \times 4\,\mathrm{cm}^2$ varmasvelgur er notaður.

5. Leysið jöfnuhneppi miðað við þessi breytt jaðarskilyrði vinstra megin. Teiknið þrívídda mynd og takið fram hæsta hitastigið. Notið gjarnan gildi á m og n úr lið 4.

6. Örgjörvinn þarf ekki endilega að vera á bilinu $y \in [0, 2]$. Teiknið hitastigsdreifingu fyrir mismunandi stillingar. Hver er besta stillingin ef markmiðið er að lágmarka hámarkshitastig?

7. Notum stillinguna sem við fundum í lið 6. Hversu stórt má aflinntakið vera ef hitastigið má hvergi vera hærra en $100°$ C? Notið helmingunaraðferð til að finna svar með 2 aukastöfum.

Breytilegt efni

8. Við látum hitaleiðni K vera breytilega á bilinu 1 til $5\,\mathrm{W/cm}°C$. Fyrir hvert gildi á K má reikna hversu hátt aflinntak má vera ef hámarkshitastig má hvergi vera hærra en 100° C. Teiknið það sem fall af K á bilinu $[1, 5]$ og túlkið. Endilega notið heppilegasta stillingu sbr. lið 6.

9. Við notum aftur $K = 1.68\,\mathrm{W/cm}°C$. Klippið lítinn rétthyrning af blaðinu í horninu efst og til hægri. Breytið jaðarskilyrðunum til að endurspegla þetta nýtt form, og endurtakið síðan liði 6 og 7. Túlkið niðurstöðurnar.

Frjálst

Framkvæmið tilraun eða tilraunar að eigin vali. Hér eru nokkrar hugmyndir:

- Rannsaka áhrif fastans H sem lýsir hversu hratt hitinn dreifist í umhverfið, t.d. fyrir vatn er $H = 0.1\,\mathrm{W/cm}^2\,°\mathrm{C}$.
- Breytileg lengd L_x
- Aflinntak ekki fast, heldur háð staðsetningu (t.d. mest í miðjunni)
- Aflinntak á 2 hlíðum t.d. bæði vinstra megin og niðri.