Matrisemultiplikasjon for nybyrjarar

Matriser kan vera litt vrient i byrjinga. Men det er ikkje så ille når ein fyrst forstår kva det går i.

Eg skal prøve å gje ein liten og *forhåpentlegvis* forståeleg introduksjon til matriser og multiplikasjon av dei.

Matriser

Kva er ei matrise? Det enklaste er å gje eit eksempel:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Her har me ei 3×4 matrise. Den består altså av 3 rader ("y-aksen") og 4 kolonner ("x-aksen").

Berre for å gjera det litt meir tydelig:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Her er *rad* nummer 2 merka av i blått. Og motsvarande:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

I matrisa over er *kolonne* nummer 3 merka av i raudt.

Når ein referer element inne i matrisa, så nyttar ein fyrst rad og så kolonne. Dette skriv ein som $X_{kolonne}^{(rad)}$. Så f.eks. $X_1^{(2)} = 5$.

For dei som har programmert litt kan ein merke seg at både rad og kolonne byrjar på 1 (og ikkje på 0, slik det er i mange programmeringsspråk). Dette kan variere avhengig av kva miljø du befinn deg i, men Octave er for eksempel 1-basert.

Vektor

Ein vektor er eit spesialtilfelle av matriser. Meir spesifikt er det ei matrise med vilkårlig antall rader og nøyaktig ei kolonne. Den er med andre ord rad-basert. Eit eksempel:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dette kaller ein ein 4-dimensjonal vektor, ein vektor med fire dimensjonar eller eventuelt ei 4×1 matrise.

Kolonnevektor

Som du kanskje kan gjette deg til, så er dette det samme som ein vektor, men den går "andre vegen". Dvs. det er ei matrise med nøyaktig ei rad og vilkårlig antall kolonner. For eksempel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Dette er altså ein kolonnevektor, column based vector eller berre column vector på engelsk.

Transpose

Korleis kan ein gå mellom ein vanlig vektor og ein kolonnevektor? Jo, ein kunne sjølvsagt skrive ein for loop for det, men ein har ein matriseoperasjon for det. Transpose heiter den, og det skrives på følgande måte:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \, X^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Skrivemåten er altså X^T for å snu eller transpose matrisa X. Om ein gjer to transpose så kjem ein tilbake til utgangspunktet, dvs. $\left(X^T\right)^T = X$.

Transpose kan ein gjera på alle typer matriser, ikkje berre vektorer eller kolonnevektorer, eksempelvis:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Her kan du forhåpentlegvis sjå at rader har blitt til kolonner ("snudd 90 grader"). Det som skjer litt meir formelt er at rad- og kolonneplassering for kvart element byttar plass.

Addisjon og subtraksjon

Dette er dei enklaste operasjonane ein kan gjere med matriser. Det krever at begge matrisene har samme dimensjonar, og så er det eigentleg berre å gjera addisjon eller subtraksjon element for element. For eksempel:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2+6) & (3+7) \\ (4+8) & (5+9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 14 \end{bmatrix}$$

Verre var det ikkje. Gankse rett fram. Det er samme logikk for subtraksjon.

Matrise-vektor multiplikasjon

Då er det på tide å byrje å gange saman nokon tall. Og summere i samme sleng. Dette kallar ein matrisemultiplikasjon. Rekkefølgen på operandane spelar ei rolle. Det vil seie at $A \times B \neq B \times A$, der A og B er matriser.

Vi byrjar med den enklaste forma. Matrise-vektor multiplikasjon og setter:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Kva vert $A \times B$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = ?$$

Behold. Ein matrise-vektor multiplikasjon. Men veldig vanskelig er det ikkje.

Svar-matrisa, altså resultatet av multipliseringa, har antall rader lik A og antall kolonner lik B. Så no har ein altså følgande form:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix}$$

Om eg så seier at "?" skal vera summen av produktet for kvar rad, kan du gjette kva det vert? Vel, det vert altså som følgande for rad 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1*7)+(2*8)+(3*9) \\ ? \end{bmatrix}$$

Og tilsvarande for rad nummer to:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1*7)+(2*8)+(3*9) \\ (4*7)+(5*8)+(6*9) \end{bmatrix}$$

Så det som skjer her er at ein berre ganger inn kolonna i B med elementa i kvar rad i A, og så summerer dei opp.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+16+27 \\ 28+40+54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 122 \end{bmatrix}$$

Det var ikkje veldig vanskelig, var det vel? Vel. Litt vanskelig var det kanskje. Ville det ikkje vore litt enklare å skrive B som $\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$? Slik at ein hadde fått følgande:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1*7)+(2*8)+(3*9) \\ (4*7)+(5*8)+(6*9) \end{bmatrix} \text{NB: Hypotetisk!}$$

Då er det litt enklare å sjå for seg korleis ganginga og summeringa kjem til å verta gjort, er det ikkje? Då berre ganger ein inn rad mot rad i operandane. Du er neppe åleine om å kunne ynskje deg dette. Og dette kan ein få til med transpose. Då er det berre å ta transpose på den andre operanden:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} (1*7)+(2*8)+(3*9) \\ (4*7)+(5*8)+(6*9) \end{bmatrix}$$

Det er unektelig litt enklare å kunne jobbe med A og B som har likt antall kolonner og berre sjå for seg at rad for rad i A vert ganga inn med rad for rad i B. Dette oppnår ein altså med å bruke $A \times B^T$. Ganske kult[1], eller kva?

Matrise-matrise multiplikasjon

Så no kan du forhåpentlegvis matrise-vektor multiplikasjon. Kva med matrise-matrise multiplikasjon? Altså:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = ?$$

Som før har ein at svar-matrisa har likt antall rader som fyrste operand, og likt antall kolonner som andre operand.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

Frå før veit me at me har som følgande

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

og

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & ? \\ 122 & ? \end{bmatrix}$$

[1]Kult nok iallefall.

Kan du klare å gjette deg til kva spørsmålteikna vert? Ikkje? Ta deg ein luftepause på fem minutt.

Det vert altså som følgande

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & (1*10)+(2*11)+(3*12) \\ 122 & ? \end{bmatrix}$$

Og tilsvarande får ein

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & (1*10)+(2*11)+(3*12) \\ 122 & (4*10)+(5*11)+(6*12) \end{bmatrix}$$

Som igjen vert

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 68 \\ 122 & 167 \end{bmatrix}$$

Om ein igjen ynskjer å arbeide med ei transposed utgåve av dette, så får ein

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 50 & 68 \\ 122 & 167 \end{bmatrix}$$

Og her kan det vera verdt å leggje merke til at svar-matrisa veks med ei kolonne for kvar rad som vert lagt til i den andre operanden som vert snudd eller transposed.

Så dette var eit forsøk på å gje ein uformell, intuitiv kjensle med korleis ein gjer matrise-matrise multiplikasjon. Særlig vil eg anbefale å tenke på at begge operander kan ha like mange kolonner, men at ein då lyt gjere transpose på den andre operanden før ein ganger dei saman.

Lukke til med multipliseringa.

– *Ivar Refsdal.* refsdal.ivar@gmail.com