Лабораторная работа №2

Иващенко О.В. МСУ201

март 2021 г.

1. Введение

Основная идея работы состоит в применении ключевых уравнений линейной фильтрации, в уяснении связи между преобразованиями в частотной и временной областях.

Обозначим $f(t)$ – изучаемый сигнал, $F(iw)$ – Фурье-спектр сигнала, $h(t)$ – импульсную характеристику фильтра, $H(jw)$ – частотная характеристика фильтра.

$$F(i\mathrm{w}) = \int f(t) * e^{-i\omega t}\, dt$$

- *Фурье*-спектр сигнала *f(t)*

$$H(i\mathrm{w}) = \int h(t) * e^{-i\omega t}\, dt$$

- преобразование Фурье связывает импульсную характеристику фильтра с комплексным коэффициентом передачи (частотной характеристикой).

Результат прохождения сигнала *x(t)* через фильтр с импульсной характеристикой *h(t)* вычисляется либо через свёртку:

$$y(t) = \int h(x) * f(x - t)\, dx$$

либо через обратное преобразование Фурье от произведения спектра сигнала с частотной характеристики фильтра:

$$y(t) = \int H(iw) * F(iw) * e^{i\omega t}\, dw$$

В работе изучается простейший фильтр «*скользящее среднее*». Принцип действия такого фильтра можно понять, не привлекая ВООБЩЕ математический аппарат линейной фильтрации!

Во временной области дискретный «скользящий фильтр с окном N» - усредняет значения функции по N ближайшим точкам. Чем больше окно – тем более «сглаженным» получается результат.

$$y[j] = \sum_{i=j-N/2}^{j+N/2} \frac{x[i]}{N}$$

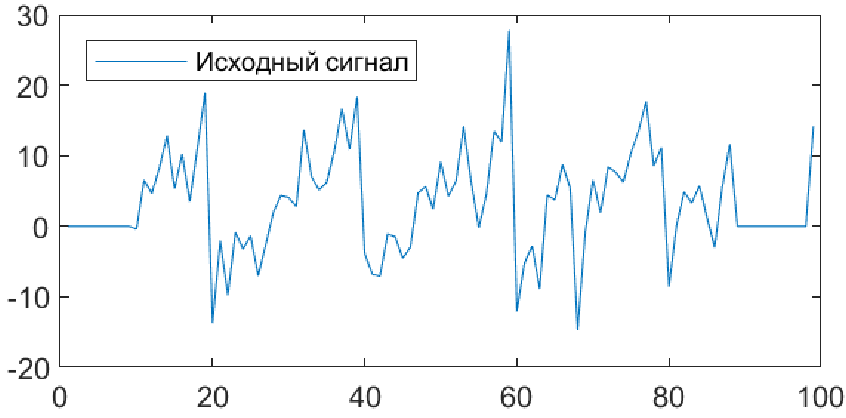
Для понимания линейной фильтрации в частотной области – не получится обойтись без привлечения понятия «*импульсной характеристики*» фильтра, т.е. его реакции на дельта-функцию Дирака в непрерывном случае или «единичный импульс» - в дискретном.

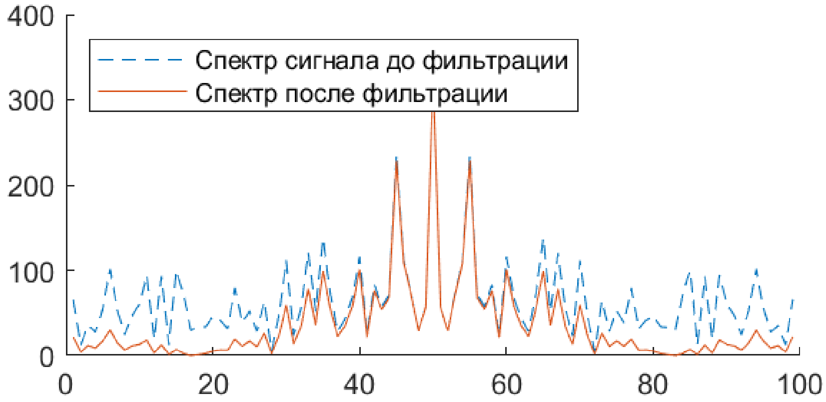
Представим, что исходный сигнал – это импульс *x[i]* = [0,1, 0, 0, 0,..]. Подадим его на фильтр, выполняющий усреднение 3-х ближайших соседних точек. Получим *y[i]*=[1/3, 1/3, 1/3, 0, 0,..] – это и есть «*импульсная характеристика*» дискретного фильтра.

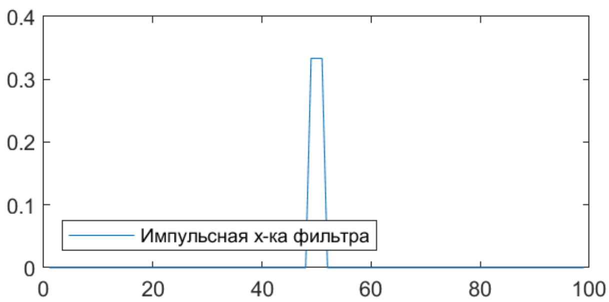
В нижеследующей программе на MATLAB демонстрируется фильтрация исходного сигнала оконными фильтрами «скользящее среднее» с размером окна 3, 7, 9, а также гауссовым фильтром.

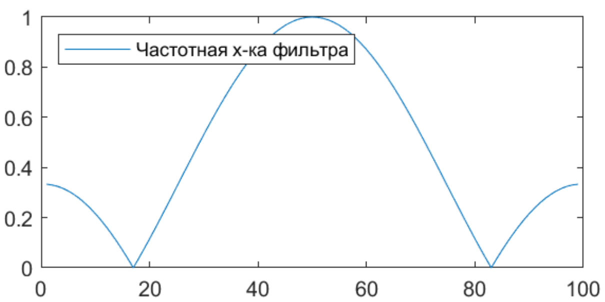
```
% Программа демонстрирует фильтрацию «скользящим средним»

clc;
clear;
N=99;
f = mod([1:N],20)-5 + 5*randn([1,N]); % исходный сигнал
f(1:N/10) = 0;
f(9*N/10:N) = 0;

for window = [3, 7, 9, 11]

    h = zeros(size(f));

    if window == 11 % гауссов фильтр
        sigma = 3, mu = 11
        a = 1/(sigma*sqrt(2*pi)), b = mu, c = sigma
        t = [1:20]
        h(t) = a*exp((-(t-b).^2)/(2*c*c))
    else
        h(1: window) = 1/window;
    end
        h = circshift(h, (N-window)/2); % центрирование

    F = (fft(f));    % спектр исходного сигнала
    H = (fft(h));    % частотная хар-ка фильтра
    f2 = fftshift(ifft(F.*H));  % обратное преобр Фурье

    hc = nonzeros(h)'
    f_ma = conv(f, hc); % свёртка сигнала с импульсной хар-кой
    f_ma = f_ma(1+window/2:end-window/2); % убрать лишнее

    tiledlayout(3,2)
    nexttile;
    plot(f);
    legend({'Исходный сигнал'},'Location','northwest')
    nexttile;
    hold on
    plot(abs(fftshift(F)), '--')
    plot(abs(fftshift(F.*H)))
    legend({'Спектр сигнала до фильтрации', 'Спектр после
фильтрации'},'Location','northwest')
    hold off

    nexttile;
    plot(h)
    legend({'Импульсная х-ка фильтра'},'Location','southwest')
    nexttile;
    plot(abs(fftshift(H)))
    legend({'Частотная х-ка фильтра'},'Location','northwest')

    nexttile;
    hold on
    plot(f_ma, 'o');
    plot(f2, '--');
    legend({'Свёртка', 'Умнож спектров'},'Location','southwest')
    hold off
end
```

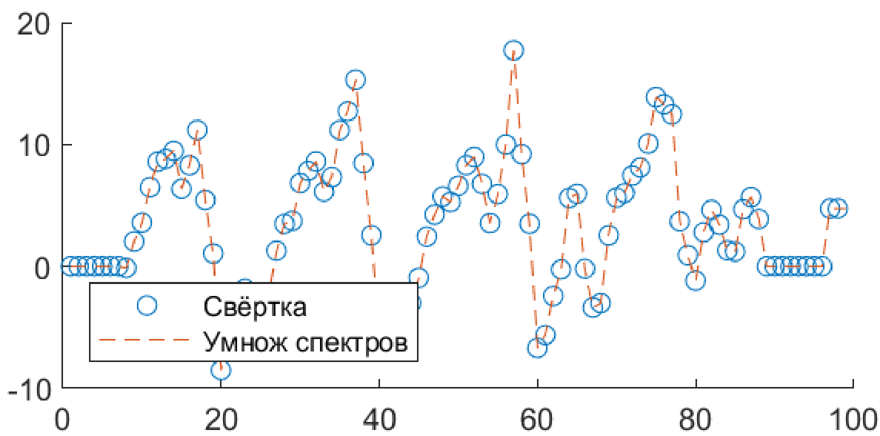
1.1 Результаты: окно = 3



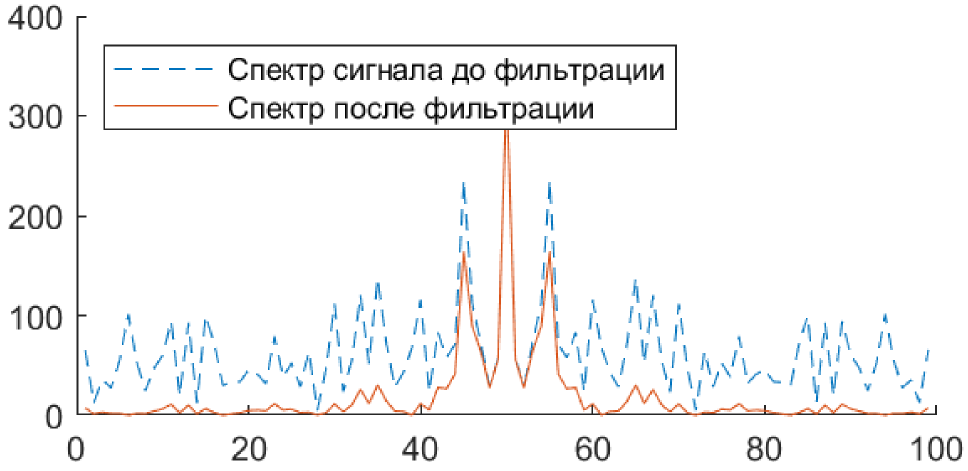


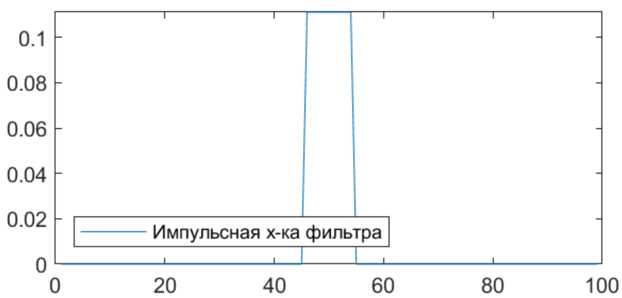


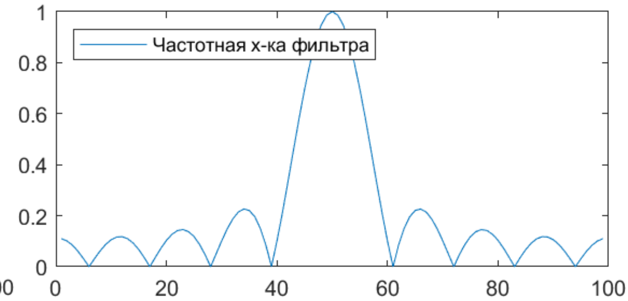


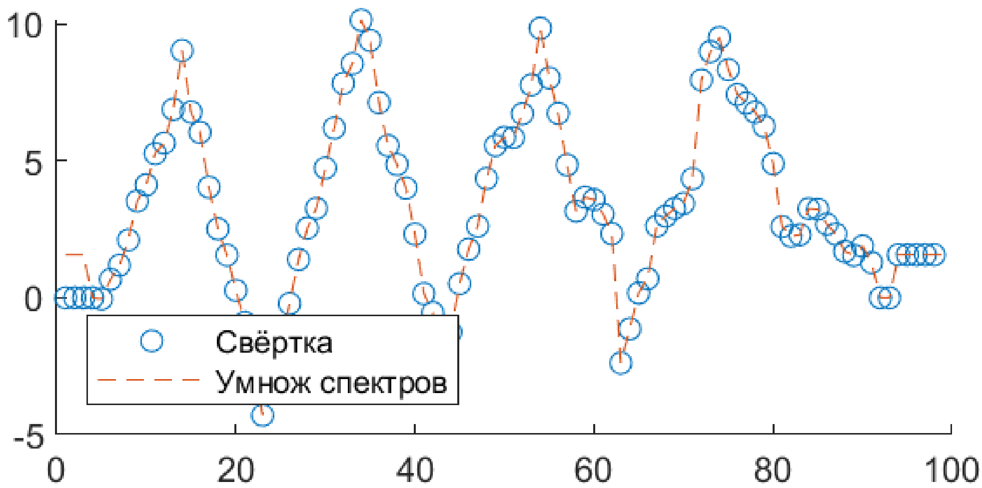


1.2 Результаты: окно = 9

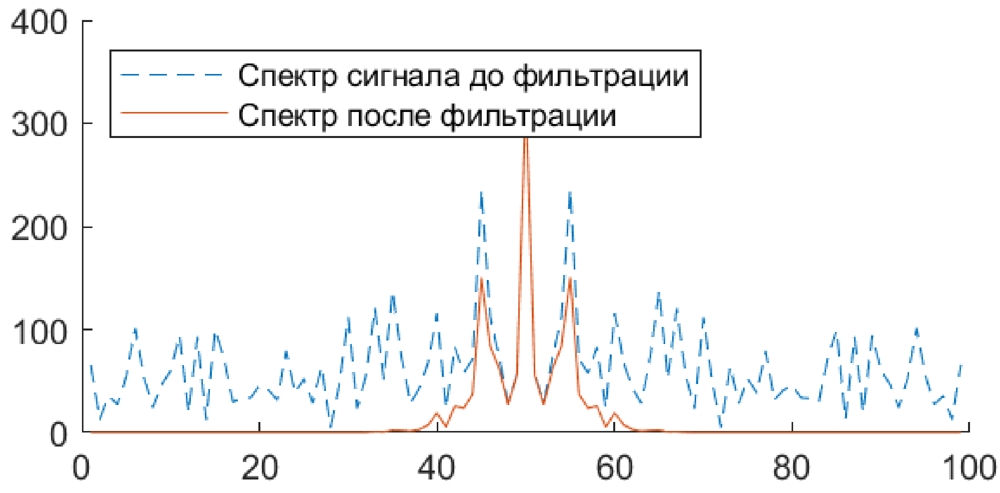


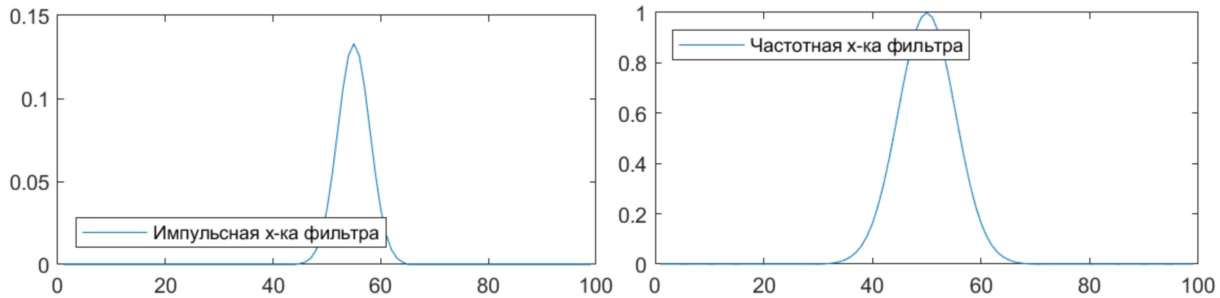


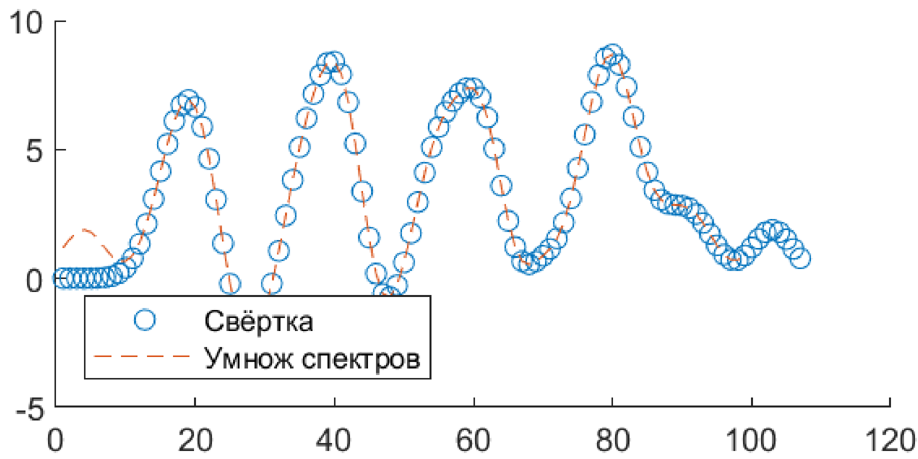




1.3 Результаты: гауссова функция (μ=11, σ=3)







2. Основная часть работы

После такого введения можно было бы и не делать основную часть 😉

Вариант 1 (окно = 10)

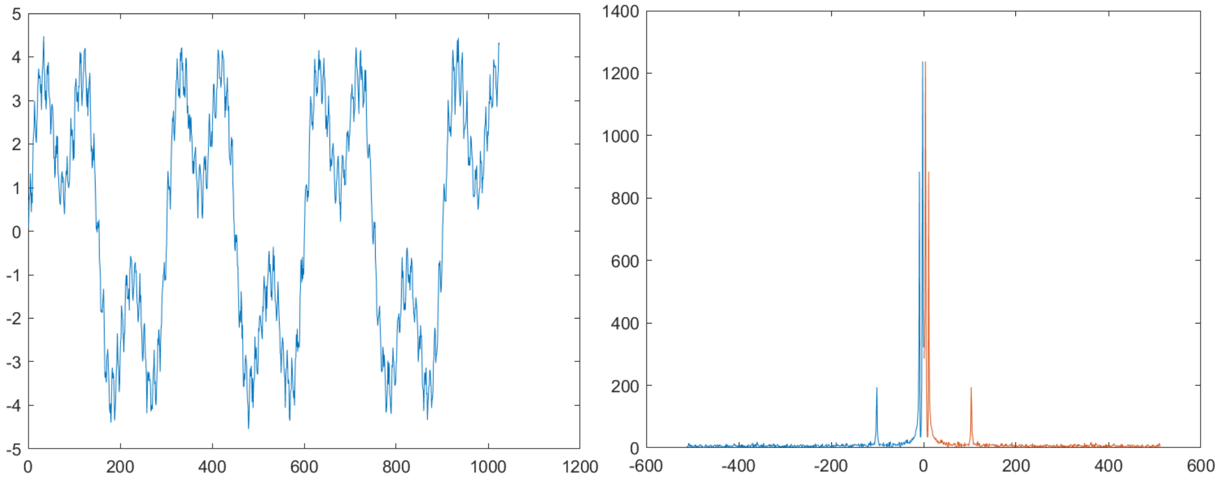


Рис 1. Исходный сигнал и его спектр

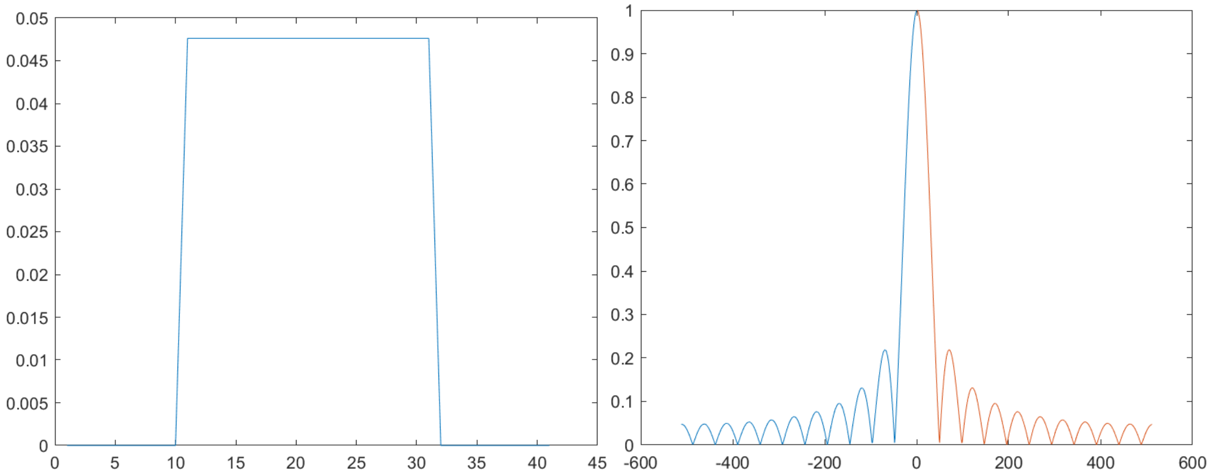


Рис 2. Оконная функция (ширина = 10) и её спектр

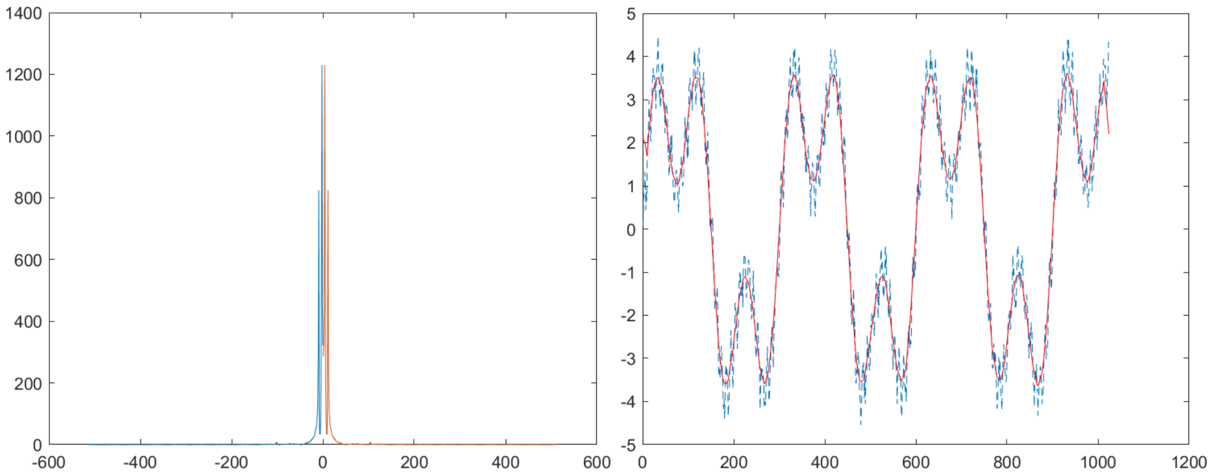


Рис 3. Спектр отфильтрованного сигнала и соответствующая ему функция

Вариант 2 (окно 20)

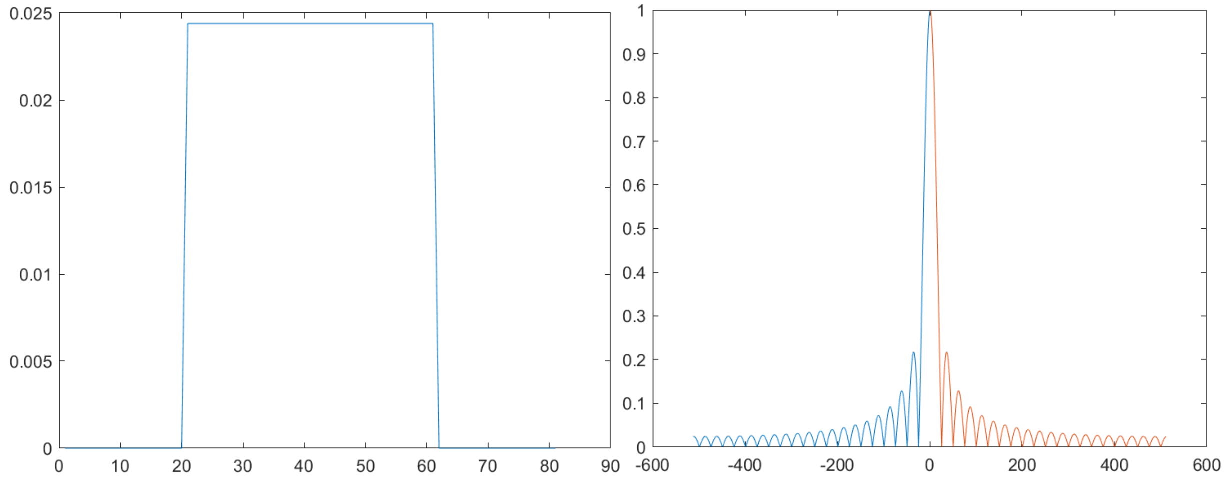


Рис 4. Оконная функция (ширина = 10) и её спектр

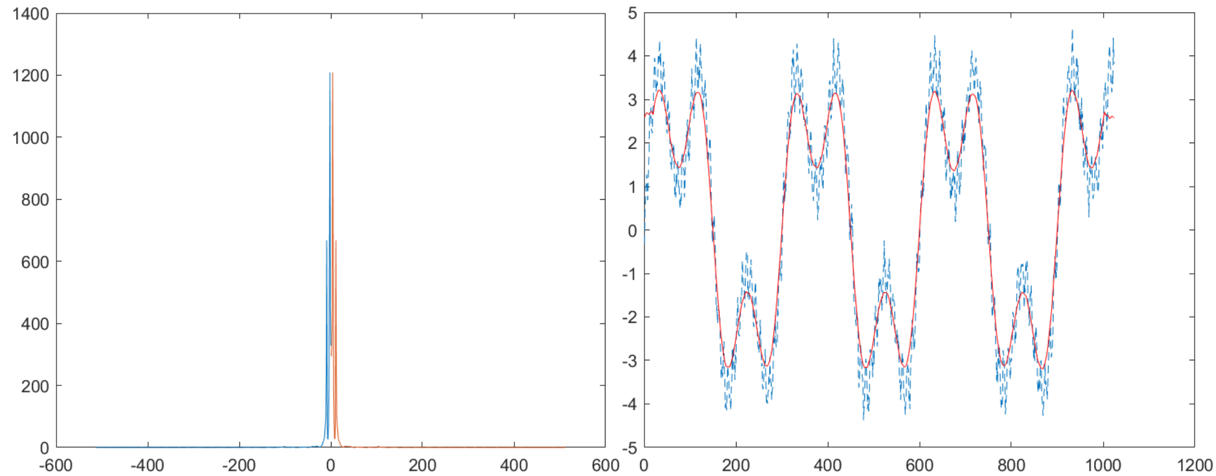


Рис 5. Спектр отфильтрованного сигнала и соответствующая ему функция

Вывод: применение более широкого «окна» приводит большему «сглаживанию» сигнала.