Matematica discreta domande 2018

8,14,22,31??

1. Utilizzando le funzioni caratteristiche dimostrare che $A\Delta B = A^c \Delta B^c$

$$A\Delta B = A\cup B - A\cap B = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B$$

$$A^c\Delta B^c = A^c\cup B^c - A^c\cap B^c = (1-\chi_A)(1-\chi_B) - 2(1-\chi_A)(1-\chi_B) = \dots = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B$$

2. Le funzioni, le funzioni iniettive, le funzioni suriettive $I_l \to I_m$ sono tante quante le ...-sequenze ... (con dimostrazione).

Ogni funzione $f: I_l \to I_m$ è determinata univocamente da:

$l - sequenze\ \big(f(1), \dots, f(l)\big)\ di\ I_m$

$m - spartizioni\ \big(f^{-1}(1), \dots, f^{-1}(m)\big)\ di\ I_l$ (controimmagini)

Iniettiva: se la sequenza $\big(f(1), \dots, f(l)\big)$ non ha ripetizioni, equivalentemente, se ogni componente di $\big(f^{-1}(1), \dots, f^{-1}(m)\big)$ appare almeno una volta.

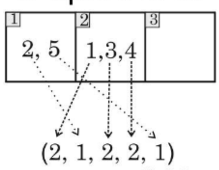
Suriettiva: se ogni elemento di $\big(f(1), \dots, f(l)\big)$ appare almeno 1 volta, equivalentemente, se in $\big(f^{-1}(1), \dots, f^{-1}(m)\big)$ non appare mai l'insieme vuoto.

$$\begin{array}{ccc} I_l & \xrightarrow{f} & I_m \\ 1 & & f(1) \\ 2 & & f(2) \\ 3 & & \vdots \\ \vdots & & \\ l & & f(l) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I_3 & \longrightarrow & I_4 \\ 1 & \longmapsto & 2 \\ 2 & \longmapsto & 2 \\ 3 & \longmapsto & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (2, 2, 4) \\ \\ (\emptyset, \{1,2\}, \emptyset, \{3\}) \end{array}$$

3. Dualismo tra sequenze e spartizioni, e tra collezioni e composizioni: descrivere le corrispondenze biunivoche.

Associando ad ogni **n-spartizione** $(\boldsymbol{C_1}, \dots, \boldsymbol{C_n})$ di I_k la **k-sequenza** $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$ di I_n, dove a_i è l'indice dell'insieme che contiene i, si ottiene una corrispondenza biunivoca tra le n-spartizioni di I_k la k-sequenza di I_n

3-spart di I5



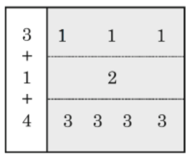
5-seq di I3

Associando ad ogni **n-composizione** $(\boldsymbol{k_1}, \dots \boldsymbol{k_n})$ di k la **k-collezione di $\boldsymbol{I_n}$** formata da k_1 termini =1, ..., k_n termini =n. Si ottiene una corrispondenza biunivoca tra le n-composizioni di k e le k-collezioni di I_n

$$[\underbrace{1, \dots, 1}_{k_1}, \dots, \underbrace{n, \dots, n}_{k_n}]$$

k-coll di I_n

n-compos $(k_1, \dots k_n)$



4. Prodotto condizionato: definizione e calcolo della sua cardinalità (Principio di Moltiplicazione) con dimostrazione.

Prodotto condizionato di molteplicità $(\boldsymbol{m_1}, \dots, \boldsymbol{m_k})$: un insieme X di k-sequenze $(x_1, \dots, x_k)$dove:

- $x_1 \in X_1\ di\ m_1\ elementi$
- Per ogni scelta di $x_1, \dots, x_{k-1}$, la componente $x_k \in X_k(x_1, \dots, x_{k-1})$, che può dipendere da $x_1, \dots, x_{k-1}$. E ha m_k elementi.

Principio di moltiplicazione: il prod. cond. di molteplicità $(m_1, \dots, m_k)$ ha $m_1 \times \dots \times m_k$ elementi.

Dimostrazione per induzione:

Caso base $k=1 \Rightarrow$ il prodotto condizionato di molteplicità (m_1) ha m_1 elementi

$k>1 \Rightarrow$ sia X prodotto cond. di molteplicità $(m_1, \dots, m_k)$ e X_1 l'insieme dove prendo la prima componente degli elementi di X.
Supponiamo $X_1 = \{a_1, \dots, a_{m_1}\}$. Voglio contare gli elementi di X che cominciano con a_1

5. La cardinalità dell'insieme delle parti di un insieme finito (con dimostrazione).

SIA $|X| = n$
ETICHETTO GLI ELEMENTI DI X CON I_n

FASE 1: SCELGO SE INCLUDERE IL 1° ELEMENTO (SI/NO) $= 2$
FASE 2: // // // // 2° // $= 2$
$\vdots$
FASE n: // // // // n° // $= 2$

$= 2^n$

6. Definizione della funzione di probabilità uniforme e sue proprietà.

Probabilità uniforme: $P: \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ funzione che associa ad ogni sottoinsieme di Ω la probabilità $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ casi favorevoli/casi possibili

Proprietà:

- Per ogni elemento $\omega \in \Omega$ si ha $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$
- $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A^c) = 1 - P(A^c)$

7. Dati $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ si dia la definizione di S(n; k), C(n; k) e se ne calcoli il valore (con dimostrazione).

$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!}, & se\ k \le n \\ 0, & altrimenti \end{cases}$: numero di **k-sequenze** senza ripetizioni di I_n ovvero il numero di **n-spartizioni** $(\boldsymbol{C_1}, \dots, \boldsymbol{C_n})$ di I_k con al massimo un elemento in ogni C_i

K- SEQUENZE DI I_n SENZA RIMPIAZZO

FASE 1 : SCELGO IL 1° ELEMENTO = n
FASE 2 : // // 2° // = $n-1$
⋮
FASE k : // // k° // = $n-(k-1)$

$\cdot = \frac{n!}{(n-k)!}$

$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}) = \frac{S(n,k)}{k!} = \binom{n}{k}$**:** numero di **k-collezioni** senza ripetizione di $\boldsymbol{I_n}$, ovvero il numero di sottoinsiemi di k elementi di I_n

Dimostrazione: Considero la mappa che associa ad ogni k-sequenza di I_n senza ripetizioni la corrispondente k-collezione di I_n.
Fissata una k-collezione di I_n senza ripetizione $[a_1, \dots, a_k]$
Per il principio di moltiplicazione vi sono $k!$ k-sequenze di I_n che hanno come immagine $[a_1, \dots, a_k]$. Si tratta delle permutazioni $(a_1, \dots, a_k)$.
Concludo per il principio di divisione.

8. Dati $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, il numero S(n; k) rappresenta le ...-spartizioni di ... formate da ..., mentre il numero C(n; k) rappresenta le ...-composizioni di ... formate da ...

$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{k})$ numero di **n-spartizioni** $(\boldsymbol{C_1}, \dots, \boldsymbol{C_n})$ di I_k con al massimo un elemento in ogni C_i.
$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{k})$ numero di **$\boldsymbol{n}$-composizioni di $\boldsymbol{k}$ con..?????**

9. Formula di Stirling e calcolo approssimato del numero di decimali di 100!.

Sia $n \geq 0$ un numero naturale. Si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} = 1.$$

Il numero delle cifre decimali di un naturale k è uguale a $[\log_{10} k] + 1$.

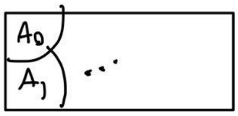
$$\log_{10} 100! \approx \log_{10}(\sqrt{2\pi \times 100}(100/e)^{100}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\log_{10}(2\pi) + 2) + 100 \times \log_{10}(100/e) =$$

$$= \frac{1}{2}\log_{10}(2\pi) + 1 + 200 - 100 \log_{10} e = 157.97\dots$$

10. Dimostrare che $n! = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k * k!$

- $n! = $ ※ PERMUTAZIONI DELLA SEQUENZA $(1, \dots, n)$
- INSIEME DELLE PERMUTAZIONI DI $(1, \dots, n)$



- $A_0 = \{(1, \dots, n)\}$ PERMUTAZIONE BANALE

A_K = INSIEME DELLE PERMUTAZIONI IN CUI:
  - DALLA POSIZIONE $(K+2)$ IN POI MANTENGO GLI STESSI NUMERI
  - IN POSIZIONE $(K+1)$ UN NUMERO $\neq (K+1)$
  - NELLE POSIZIONI $1 \div K$ NESSUN VINCOLO

$$(\underbrace{\dots}_{\text{POSIZ } 1 \div K}, \underbrace{\neq K+1}_{\text{POSIZ } K+1}, \underbrace{K+2}_{\text{POSIZ } K+2}, K+3, \dots, n)$$

IN QUESTO MODO GLI INSIEMI $A_0, \dots, A_n$ SONO A2A2 DISGIUNTI

- $|A_0| = 1$

$|A_K| = $ FASE 1: COSA METTO IN POSIZIONE $K+2, \dots, n = 1$
FASE 2: // // $K+1 = K$
FASE 3: // // $1, \dots, K = K!$
$= K \cdot K!$

- QUINDI SI HA $|A_0| + (|A_1| + \dots + |A_{n-1}|)$
$$= 1 + \sum_{K=1}^{n-1} K \cdot K!$$

11. Dimostrare che $2^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$ e $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ (come conseguenza del Teorema del binomio).

DAL TEOREMA DEL BINOMIO: $\binom{n}{k} = (x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$

- $2^n = (1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$
- $(-1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j$

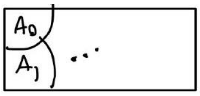
12. Formula di Stifel (formula ricorsiva dei coefficienti binomiali); con dimostrazione.

$\binom{n}{k} = C(n, k) = $ ※ DI SOTTOINSIEMI DI K ELEMENTI DI I_n

$=$ ※ SOTTOINSIEMI CON "1" $= \binom{n-1}{k-1}$ $\{2, \dots, n\}$
$+$
※ SOTTOINSIEMI SENZA "1" $= \binom{n-1}{k}$

13. Dimostrare in modo combinatorico che $2^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$

$2^n = |\mathcal{P}(I_n)|$



$A_0 = \{Y \subseteq I_n : |Y| = 0\} = \emptyset$

$A_1 = \{Y \subseteq I_n : |Y| = 1\} = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$

$\vdots$

$A_n = \{Y \subseteq I_n : |Y| = n\} = \{I_n\}$

$|A_k| = \binom{n}{k}$

QUINDI $2^n = \binom{n}{0} + \ldots + \binom{n}{n}$

14. Il numero C((n; k)) di ..... o equivalentemente di ..... è uguale a .... (con dimostrazione).

$\boldsymbol{C((n,k))} = \begin{cases} C(n-1+k, k), & se\ n+k \geq 1 \\ 1, & se\ n = 0 = k \end{cases}$ numero di $\boldsymbol{k}$**-collezioni di** $\boldsymbol{I_n}$ con eventuali ripetizioni, numero di $\boldsymbol{n}$**-composizioni di** $\boldsymbol{k}$

???

15. Dimostrare in modo combinatorico che per $1 \leq k \leq n$ si ha $C((n,k)) = C((n,k-1)) + C((n-1,k))$ se $k \geq 1$

Collezioni con 1 + collezioni senza 1

16. Il numero di k-sequenze di In con occupancy (k1,…, kn) è ...... (con dimostrazione).
E con occupancy [k1,…, kn] è .... (con dimostrazione).

k-sequenza di $\boldsymbol{I_n}$ con (sequenza di) **occupancy** $(\boldsymbol{k_1}, \ldots, \boldsymbol{k_n})$ ogni k-sequenza di I_n con k_1 ripetizioni di 1,..., k_n ripetizioni di n

$\boldsymbol{S(n, k; (k_1, \ldots, k_n))} = \frac{\boldsymbol{k!}}{\boldsymbol{k_1! \ldots k_n!}} = P(a_1, \ldots, a_k)$ permutazioni

Elementi si ripetono $k_1, \ldots, k_n$ volte, sapendo esattamente quali.

FASE 1: SCELGO POSIZIONI DEGLI "1" $= \binom{k}{k_1}$

FASE 2: SCELGO POSIZIONI DEI "2" $= \binom{k-k_1}{k_2}$

$\vdots$

FASE n: // // // "n" $= \binom{k - \ldots - k_{n-1}}{k_n} = 1$

$= \frac{k!}{k_1! \cancel{(k-k_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(k-k_1)!}}{k_2!(k-k_1-k_2)!} \cdot \ldots = \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!}$

k-sequenza di $\boldsymbol{I_n}$ con (collezione di) **occupancy** $[\boldsymbol{k_1}, \ldots, \boldsymbol{k_n}]$ ogni k-sequenza di I_n con sequenza di occupancy una qualunque permutazione di $(k_1, \ldots, k_n)$

$\boldsymbol{S(n, k; [k_1, \ldots, k_n]) = S(n, k; (k_1, \ldots, k_n)) * P(k_1, \ldots, k_n)}$

Alcuni elementi si ripetono $k_1, \ldots, k_n$ volte, senza sapere quali esattamente.

1ª fase: scelgo una permutazione di $(h_1, \ldots, h_n)$ $P(h_1, \ldots, h_n)$

2ª fase: conto le sequenze di In con sequenza di occupancy la permutazione scelta nella fase precedente

17. Il numero di k-collezioni di In con occupancy (k1,…, kn) è ...... (con dimostrazione).
E con occupancy [k1,…, kn] è .... (con dimostrazione).

k-collezione di I_n con (sequenza di) **occupancy $(k_1, \dots, k_n)$** la k-collezione di I_n costituita da k_1 ripetizioni di 1,..., k_n ripetizioni di n

$\boldsymbol{C(n, k; (k_1, \dots, k_n)) = 1}$

k-collezione di I_n con (collezione di) **occupancy $[k_1, \dots, k_n]$** ogni k-collezione di I_n con sequenza di occupancy una qualunque permutazione di $(k_1, \dots, k_n)$

$\boldsymbol{C(n, k; [k_1, \dots, k_n]) = P(k_1, \dots, k_n)}$ numero di permutazioni di $(k_1, \dots, k_n)$

Dimostrazioni immediate dalla definizione

18. Calcolo del numero di k-sequenze di I_n nelle quali compaiono almeno una volta tutti gli elementi di In (con dimostrazione).

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k$$

$A_1 =$ K-SEQ DI I_m CON RIPETIZ. IN CUI NON COMPARE "1"
$\vdots$
$A_m =$ " " " " "m"

DEVO CALCOLARE $|A_1^c \cap \dots \cap A_m^c| = |X| - G_1 + G_2 - \dots + (-1)^{m-1} G_m$

CON:

$|X| = m^k$

$G_1 = |A_1| + \dots + |A_m| = \binom{m}{1} \cdot (m-1)^k$

$\vdots$

$G_m = \;----\; = \binom{m}{m} \cdot (m-m)^k$

$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^k$

19. Calcolo del numero di scombussolamenti della sequenza (1,…,n) (con dimostrazione).

$$\boldsymbol{D_n} = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

$A_i =$ PERMUTAZIONI DI $(1, \dots, m)$ IN CUI i RIMANE NELLA STESSA POSIZIONE

DEVO CALCOLARE $|A_1^c \cap \dots \cap A_m^c| = |X| - G_1 + G_2 - \dots + (-1)^{m-1} G_m$

CON:

$|X| = m!$

$G_1 = |A_1| + \dots + |A_m| = \binom{m}{1} \cdot (m-1)! = \frac{m!}{\cancel{(m-1)!}} \cdot \cancel{(m-1)!} = m!$

$\vdots$

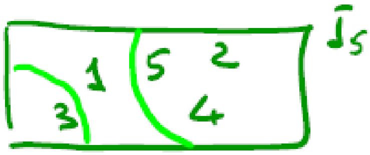
$G_m = \;----\; = \binom{m}{m} \cdot (m-m)! = \frac{m!}{m!} = 1$

$= m! - m! + \frac{m!}{2!} + \dots = m!\left(1 - \frac{1}{1!} + \dots + \frac{(-1)^m}{m!}\right)$

20. Il numero delle k-partizioni di In è ..... (con dimostrazione).

$$\genfrac\{\}{0pt}{}{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \begin{cases} 1, \; k = 0 = n \\ \frac{\mathbf{1}}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-\mathbf{1})^{i}\binom{k}{i}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}, \; n \geq 1 \\ 0, \; altrimenti \end{cases}$$

Numero di k-partizioni di I_n: famiglia non ordinata di k sottoinsiemi non vuoti disgiunti di I_n la cui unione è I_n stesso.



Dimostrazione: Se ordino i sottoinsiemi di una n-partizione di In trovo una n-spartizione di In in sottoinsiemi non vuoti

A partire dalla stessa n-partizione ottengo n! differenti n-spartizioni
sottoinsiemi non vuoti

Per il principio di divisione $\pi(n,k) = \frac{1}{n!}$ # spartizioni di In

21. Formula ricorsiva per i numeri di Stirling di seconda specie (con dimostrazione) e triangolo dei numeri di Stirling.

$$\genfrac\{\}{0pt}{}{n}{k} = \underbrace{\genfrac\{\}{0pt}{}{n-1}{k-1}}_{\text{K-PART IN CUI "1" È DA SOLO}} + \underbrace{k\genfrac\{\}{0pt}{}{n-1}{k}}_{\text{K-PART IN CUI "1" È CON ALTRI}}$$

$n=1$ $\quad \genfrac\{\}{0pt}{}{1}{1}$

$n=2$ $\quad \genfrac\{\}{0pt}{}{2}{1} \quad \genfrac\{\}{0pt}{}{2}{2}$

$n=3$ $\quad \genfrac\{\}{0pt}{}{3}{1} \quad \genfrac\{\}{0pt}{}{3}{2} \quad \genfrac\{\}{0pt}{}{3}{3}$

$\genfrac\{\}{0pt}{}{3}{2} = \genfrac\{\}{0pt}{}{2}{1} + \mathbf{2}\genfrac\{\}{0pt}{}{2}{2}$

I VALORI INTERNI SI POSSONO FACILMENTE OTTENERE CONOSCENDO LA RIGA PRECEDENTE

22. Il numero delle k-partizioni di In con occupancy [n1,…,nk] è .... (con dimostrazione).

Con collezione di occupancy: $\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{k}\end{matrix}; [\boldsymbol{n_1}, \dots, \boldsymbol{n_k}]\right\} = \frac{\mathbf{1}}{k!}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}; [\boldsymbol{n_1}, \dots, \boldsymbol{n_k}])$ con $n_1 + \dots + n_k = n$

DIMOSTRAZIONE:???????????????????????????

Serie formali e Funzioni Generatrici

23. Il cogrado di un prodotto di due serie formali A(X) e B(X) è .... (con dimostrazione).

$$codeg\big(A(X)B(X)\big) = codegA(X) + codegB(X)$$

CODEG $A = \ell$ e CODEG $B = m$

$A = \sum_{k=\ell}^{\infty} a_k X^k \qquad B = \sum_{k=m}^{\infty} b_k X^k$

IL PRIMO TERMINE $\neq 0$ DI $A(X) \cdot B(X)$ È $a_k \cdot b_k \cdot X^{\ell+m}$

QUINDI CODEG$(A(X) \cdot B(X))$ = CODEGA + CODEGB

24. Definizione di prodotto di convoluzione e di prodotto di convoluzione binomiale di due successioni.
Definizione di OGF ed EGF di una successione.
La OGF di un prodotto di ..... di due successioni è ....;
La EGF di un prodotto di ..... di due successioni è..............

Prodotto di convoluzione: $\left(\boldsymbol{a}^{(\mathbf{1})} \star \ldots \star \boldsymbol{a}^{(\boldsymbol{m})}\right)_{\boldsymbol{n}} = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} a_{k_1}^{(1)} * \ldots * a_{k_m}^{(m)}$

Prodotto di convoluzione binomiale: $\left(\boldsymbol{a}^{(\mathbf{1})} \diamond \ldots \diamond \boldsymbol{a}^{(\boldsymbol{m})}\right)_{\boldsymbol{n}} = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \frac{n!}{k_1!\ldots k_m!} a_{k_1}^{(1)} \ldots a_{k_m}^{(m)}$

Funzione generatrice ordinaria: $\boldsymbol{OGF}(\boldsymbol{a_n})_{\boldsymbol{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$

Funzione generatrice esponenziale: $\boldsymbol{EGF}(\boldsymbol{a_n})_{\boldsymbol{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} X^n$

- Prodotto delle OGF è: $OGF\left(a^{(1)} \star \ldots \star a^{(m)}\right)_n = OGF\left(a^{(1)}\right) * \ldots * OGF\left(a^{(m)}\right)$
- Prodotto delle EGF è: $EGF\left(a^{(1)} \diamond \ldots \diamond a^{(m)}\right)_n = EGF\left(a^{(1)}\right) * \ldots * EGF\left(a^{(m)}\right)_n$

25. Definizione di famiglia localmente finita di serie formali;
Per quali serie formali B(X) la famiglia $\{\boldsymbol{B^i}(\boldsymbol{X}): \boldsymbol{i} \in \mathbb{N}\}$ è localmente finita? (con dimostrazione).

Famiglia Localmente Finita: se $\{i \in \mathbb{N}: [X^n]A_i(X) \neq 0\}$ è $finito$, cioè se esiste un numero finito di serie formali della famiglia col coefficiente di X^n non nullo.

La famiglia $\{B^i(X): i \in \mathbb{N}\}$ è localmente finita se e solo se: $[X^0]B(X) = 0$

- SE $[X^0]B(X) \neq 0 \longrightarrow$ CODEG$(B^i(X)) = 0$

  ALLORA $\{B^i(X): i \in \mathbb{N}\}$ NON È LOCALMENTE FINITA

- SE $[X^0]B(X) = 0 \longrightarrow$ CODEG$(B^i(X)) = i \cdot$ CODEG$(B(X)) \geq i \quad \forall i \in \mathbb{N}$

  E $\lim_{i \to +\infty}$ CODEG$(B^i(X)) = +\infty$ È VERA

  ALLORA $\{B^i(X): i \in \mathbb{N}\}$ È LOCALMENTE FINITA

QUINDI $\{B^i(X): i \in \mathbb{N}\}$ È LOCALMENTE FINITA SE E SOLO SE $[X^0]B(X) = 0$

26. Verificare che ogni serie formale è prodotto di una potenza di X e di una serie formale invertibile.
Dimostrare che il prodotto di due serie formali A(X), B(X) è la serie formale nulla se e solo se A(X) = 0 o B(X) = 0.

Ogni serie formale non nulla è prodotto di una potenza di X per una serie formale invertibile.

CODEG$(A(X)) = m$

$A(X) = X^m \cdot C(X)$ CON CODEG$(C(X)) = 0$

VERA PERCHÉ UNA SERIE FORM. è INVERTIB. SSE COGRAD=0

$A(X)B(X) = 0 \iff A(X) = 0 \; o \; B(X) = 0$

SUPPONGO $A(X) \neq 0$ e $A(X) = X^m \cdot \underbrace{C(X)}_{\text{INVERTIBILE}}$

$A(X) \cdot B(X) = X^m \cdot C(X) \cdot B(X)$

$A(X) \cdot B(X) \cdot C^{-1}(X) = X^m \cdot B(X) = 0$ SSE $B(X) = 0$

27. Definizione di serie formale di Mclaurin di una funzione in $C^\infty(0)$.
Definizione di forma chiusa di una serie formale.

Serie di MacLaurin: $f(X) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}X + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}X^n$ (è una serie non una funzione)
Forma chiusa: f è $una\ forma\ chiusa\ di\ A(X)\ se\ f(X) = A(X)$ (f funz, A(X) serie, f(X) serie McLa)

Probabilità

28. Assiomi delle funzioni di probabilità.
Continuità delle funzioni di probabilità su successioni crescenti e decrescenti di eventi (con dimostrazione).

Ω un insieme arbitrario
Funzione di probabilità: $\boldsymbol{P}: \boldsymbol{\mathcal{P}(\Omega)} \longrightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$
Assiomi:
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- Se $A_1, \ldots, A_n, \ldots \subseteq \Omega$ è una famiglia numerabile di sottoinsiemi a 2 a 2 disgiunti, allora

$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Continuità delle funzioni di probabilità:
- $P(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \lim_{i\to\infty} P(E_i)$ con $E_1 \subseteq \cdots \subseteq E_i$ quantità numerabile di sottoinsiemi di Ω

DIMOSTRAZIONE

SOTTRAZIONE, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

- PONGO $F_1 = E_1$ $\quad F_2 = E_1 \setminus E_2$ $\quad F_3 = E_2 \setminus E_3$ ...
- QUINDI $F_i \cap F_j = \emptyset \quad \forall i, j$ $\qquad \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$
- $P(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = P(\bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(F_i) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} P(F_i) = \lim_{n\to+\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} F_i) = \lim_{n\to+\infty} P(E_n)$

- $P(\bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i) = \lim_{i\to\infty} P(E_i)$ con $E_1 \supseteq \cdots \supseteq E_i$ quantità numerabile di sottoinsiemi di Ω

DIMOSTRAZIONE

$$P(\bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i^c) = 1 - \lim_{n\to+\infty} P(E_n^c) = 1 - \lim_{n\to+\infty} (1 - P(E_n)) = \cancel{1-1} + \lim_{n\to+\infty} P(E_n)$$

29. Se P è una funzione di probabilità su uno spazio campionario Ω ed F è un evento con P(F) ≠ 0, allora la funzione $P(\Omega) \to [0, 1]$ che associa ad ogni evento E, il numero P(E|F) è una funzione di probabilità (con dimostrazione).

VERIFICO I 3 ASSIOMI

1) $0 \le P(E|F) \le 1$?

$$\to 0 \le \frac{P(EF)}{P(F)} \le 1$$

$P(EF) \le P(F)$ ESSENDO $EF \subseteq F$. SI

2) $P(\Omega|F) = 1$?

$$\to \frac{P(\Omega \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1 \quad \text{SI}$$

3) SE $A_1, \ldots \subseteq \Omega$ è UNA FAMIGLIA NUMERABILE DI SOTTOINSIEMI A 2 A 2 DISGIUNTI

ALLORA $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \,|\, F\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|F)$?

$$= \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap F\right)}{P(F)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap F)\right)}{P(F)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap F)}{P(F)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i \cap F)}{P(F)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|F)$$

30. Formula della partizione, formula di Bayes e formula del prodotto (con dimostrazione).

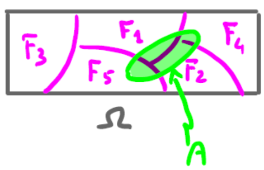
Formula del prodotto:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_m) = P(A_1 | A_2 \ldots A_m) \cdot P(A_2 | A_3 \ldots A_m) \cdot \ldots \cdot P(A_{m-1} | A_m) \cdot P(A_m)$$

$$= \frac{P(A_1 (A_2 \ldots A_m))}{\cancel{P(A_2 \ldots A_m)}} \cdot \frac{\cancel{P(A_2 (A_3 \ldots A_m))}}{\cancel{P(A_3 \ldots A_m)}} \cdot \ldots \cdot \frac{P(\cancel{A_{m-1} A_m})}{\cancel{P(A_m)}} \cdot \cancel{P(A_m)}$$

Formula della partizione: $\boldsymbol{P(A) = P(A|F_1)P(F_1) + \cdots + P(A|F_n)P(F_n)}$

$con\ [F_1, \ldots, F_n]\ partizione\ di\ \Omega, A \in \mathcal{P}(\Omega)$



Formula di Bayes: $\boldsymbol{P(F_j|A)} = \frac{\boldsymbol{P(AF_j)}}{P(A)} = \frac{\boldsymbol{P(A|F_j)P(F_j)}}{\boldsymbol{P(A|F_1)P(F_1) + \cdots + P(A|F_n)P(F_n)}}$ (Inverte la condizionata)

31. Dimostrare che ogni funzione di distribuzione è crescente e il suo comportamento asintotico a -inf e +inf è ...

La funzione di distribuzione F_x di una v.a. x verifica le seguenti proprietà:

1) F_x è crescente;

$F_x : \mathbb{R} \to [0,1]$, $r \to P(x \le r)$

$r_1 \le r_2$, $x \le r_1 \subseteq x \le r_2 \Rightarrow \underset{F_x(r_1)}{P(x \le r_1)} \le \underset{F_x(r_2)}{P(x \le r_2)}$

2) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

Essendo F_x crescente e limitata esistono finiti   condizione necessaria

$\lim_{x \to -\infty} F_x(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} F_x(x)$. Considero la successione   per questo soprattutto

$-1, -2, -3, -4, \dots = (-n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\lim_{x \to -\infty} F_x(x) = \lim_{n \to +\infty} F_x(-n)$

per continuità di funzione di probabilità

$\lim_{n \to +\infty} F_x(-n) = \lim_{n \to +\infty} P(x \le -n) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (x \le -n)\right) \overset{*}{=} 0$

$x \le -1 \supseteq x \le -2 \supseteq x \le -3 \supseteq \dots$

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (x \le -n) = ?$ Sia $\omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (x \le -n)$ $x(\omega) \le -n$ $\forall n \in \mathbb{N}$: assurdo

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (x \le -n) = \emptyset \Rightarrow *$

— · —

perché so esiste il limite

$$\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = \lim_{n\to+\infty} F_X(n) = \lim_{n\to+\infty} P(X\le n) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X\le n)\right) \overset{*}{=} P(\Omega) = 1$$

$$X\le 1 \subseteq X\le 2 \subseteq X\le 3 \subseteq \dots$$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X\le n) = \Omega$, infatti $\forall \omega\in\Omega$, $\exists \bar{n}\in\mathbb{N}$ t.c. $\Rightarrow *$

$$X(\omega)\le \bar{n} \Rightarrow \omega\in X\le\bar{n}$$

3) F_X è continua a destra: $\forall (b_n)_n \downarrow b$ si ha $\lim_{n\to+\infty} F(b_n) = F(b)$

Essendo F_X crescente e limitata. Vediamo che $\forall b\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to b^+} F_X(x) = F_X(b)$$

converge a b in modo decrescente

$$\lim_{x\to b^+} F_X(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(F_X\left(b+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} P(X\le b+1/n) =$$

$$X\le b+\frac{1}{1} \supseteq X\le b+\frac{1}{2} \supseteq X\le b+\frac{1}{3} \supseteq \dots$$

$$= P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(X\le b+\frac{1}{n}\right)\right) \overset{*}{=} P(X\le b) = F_X(b)$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(X\le b+\frac{1}{n}\right) = X\le b$$

$\supseteq$ ovvia

"$\subseteq$": sia $\omega\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(X\le b+\frac{1}{n}\right)$; se $\omega\notin X\le b$, allora

$X(\omega) > b \quad \exists\,\bar{n}$ t.c. $b+\frac{1}{\bar{n}} < X(\omega)$

Allora $\omega\notin X\le b+\frac{1}{\bar{n}}$; assurdo $\Rightarrow *$

32. Dimostrare che una variabile di Poisson di parametro np approssima una variabile binomiale di parametri (n; p) per p << n nel calcolo della densità su valori piccoli.

$$P(\mathrm{BIN}(n,p)=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \lambda=np = \binom{n}{k}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}\cdot\cancel{(n-k)!}}{k!\,\cancel{(n-k)!}}\cdot\frac{\lambda^k}{\cancel{n^k}}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}_{\simeq 1}}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \text{SE } n \text{ GRANDE } p \text{ e } k \text{ PICCOLI} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

33. Valore atteso di una funzione di una variabile aleatoria.
E[aX + b] = … (con dimostrazione).

$$\boldsymbol{E[g\circ X]=E[g(X)]=\sum_{x\in Im(X)} g(x)p_X(x)\ \ con\ g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$g(x_i)=y_j$ CON $i,j\geq 1$

RAGGRUPPANDO TUTTI GLI $g(x_i)$ CHE HANNO LO STESSO VALORE

SI HA: $$\sum_i g(x_i)P(x_i)=\sum_j\sum_{i:g(x_i)=y_j} g(x_i)P(x_i)=\sum_j y_j\sum_{i:g(x_i)=y_j}P(x_i)$$

$$=\sum_j y_j P\{g(X)=y_j\}=E[g(X)]$$

$E[aX+b]=aE[X]+b \quad con\ a,b\in\mathbb{R}$

PONGO $g(X)=aX+b$

$$E[g(X)]=\sum_{x\in ImX} g(x)p_X(x)=\sum_{x\in ImX}(ax+b)p_X(x)=a\sum_{x\in ImX}xp_X(x)+b\underbrace{\sum_{x\in ImX}p_X(x)}_{=1}=aE[X]+b$$

34. Valore atteso di una variabile aleatoria di Bernoulli e di una variabile binomiale (con dimostrazione).

$$E[\mathrm{Be}(p)]=\sum_{x\in ImX}xp_X(x)=0\cdot p_X(0)+1\cdot p_X(1)=p$$

$$E[\mathrm{BIN}(n,p)]=E[\underbrace{\mathrm{Be}(p)+\ldots+\mathrm{Be}(p)}_{n}]=np$$

35. Valore atteso di una variabile di Poisson (con dimostrazione).

$$E[Po(\lambda)] = \sum_{x\in ImX} x\, p_X(x) = \sum_{x\in\mathbb{N}} x\, \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{+\infty} x\, \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot\sum_{x=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot\sum_{x=0}^{+\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda} = \lambda$$

36. Variabile aleatoria geometrica e calcolo del suo valore atteso.

V.a. **Geometrica di parametro p**: $Ge(p)$

- $Im(X) = \mathbb{N}_{\geq 1}$
- $\boldsymbol{p_X(i) = (1-p)^{i-1}p}$

$$E[Ge(p)] = \sum_{x\in ImX} x\, p_X(x) = \sum_{x\in\mathbb{N}_{\geq 1}} x\, p_X(x) = 1 + p_X(1) + 2p_X(2) + \dots$$

$$P(Ge(p)\geq 1) = P(Ge(p)=1) + P(Ge(p)=2) + P(Ge(p)=3) + \dots$$

$$P(Ge(p)\geq 2) = P(Ge(p)=2) + P(Ge(p)=3) + \dots$$

$$P(Ge(p)\geq 3) = P(Ge(p)=3) + \dots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$E[Ge(p)] = \sum_{x\in\mathbb{N}_{\geq 1}} P(Ge(p)\geq x) = \sum_{x\in\mathbb{N}_{\geq 1}} (1-p)^{x-1} = \sum_{x\in\mathbb{N}_{\geq 0}} (1-p)^x = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

37. Varianza di una variabile aleatoria e formula alternativa (con dimostrazione).
Var(aX + b) =… (con dimostrazione).

$\boldsymbol{Var(X) = E[(X - E[X])^2]} = E[X^2] - E[X]^2$

PONGO $E[X] = m$

$$VAR[X] = E[(X-E[X])^2] = E[(X-m)^2] = E(X^2 - 2mX + m^2) = E[X^2 + (-2mX + m^2)]$$

$$= E[X^2] + E[-2mX + m^2] = E[X^2] - 2m\,E[X] + m^2 = E[X^2] - 2E[X]^2 + E[X]^2 = E[X^2] - E[X]^2$$

$\boldsymbol{Var(aX + b) = a^2 Var(X)}$

$$VAR[aX+b] = E[(aX+b)^2] - E[aX+b]^2 = E[a^2X^2 + 2abX + b^2] - (aE[X]+b)^2$$

$$= a^2 E[X^2] + \cancel{2ab\,E[X]} + \cancel{b^2} - a^2E[X]^2 - \cancel{b^2} - \cancel{2ab\,E[X]}$$

$$= a^2(E[X^2] - E[X]^2) = a^2\, VAR(X)$$

38. La somma di due Poisson di parametri λ, μ è... (con dimostrazione).

$Po(\lambda) + Po(\mu) = Po(\lambda + \mu)$ con $Po(\lambda)$ e $Po(\mu)$ indipendenti

$$\mathrm{Im}(Po(\lambda) + Po(\mu)) = \mathbb{N}$$

$$P(Po(\lambda)+Po(\mu)=k) = \bigcup_{i=0}^{k}\left((Po(\lambda)=i) \cap (Po(\mu)=k-i)\right) = \sum_{i=0}^{k} P\left((Po(\lambda)=i) \cap (Po(\mu)=k-i)\right)$$

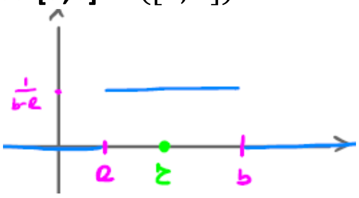
$$= \sum_{i=0}^{k} P(Po(\lambda)=i)\,P(Po(\mu)=k-i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\mu} =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda^i \mu^{k-i}\right) e^{-(\lambda+\mu)} = \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!} e^{-\lambda+\mu}$$

39. Definizione della variabile aleatoria uniformemente distribuita su un intervallo.
Calcolo del valore atteso e della varianza (con dimostrazione).

Variabile aleatoria uniformemente distribuita su [a,b]: $U([a,b])$

- $\boldsymbol{f_{U([a,b])}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}}$
- $\boldsymbol{F_X(r) = \frac{r-a}{b-a}}$
- $E[U([a,b])] = \frac{1}{2}(a+b)$
- $Var(U([a,b])) = \frac{(a-b)^2}{12}$



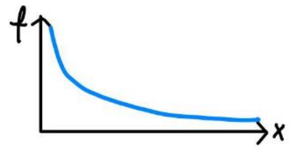
$$E[U([a,b])] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X \, dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} \, dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \dots = \frac{1}{2}(a+b)$$

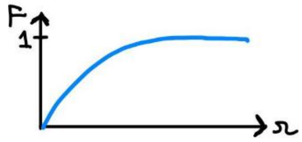
$$VAR(U([a,b])) = E[U([a,b])^2] - E[U([a,b])]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X \, dx - \left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2$$

$$= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} \, dx - \left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2 = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b - \left(\frac{1}{2}(a+b)\right)^2 = \dots = \frac{(a-b)^2}{12}$$

40. Funzione di distribuzione e funzione di densità di una variabile aleatoria esponenziale. Calcolo del valore atteso e della varianza (con dimostrazione).

Variabile aleatoria esponenziale: $Exp(\lambda)$





- $f_{Exp(\lambda)}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$
- $F_{Exp(\lambda)}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$
- $P(X > t + s | X > s) = P(X > t), \quad con\ t, s > 0$ Non ha memoria
- $E[Exp(\lambda)] = \frac{1}{\lambda}$
- $Var(Exp(\lambda)) = \frac{1}{\lambda^2}$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X \, dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} \, dx =$$

PER PARTI CON $\lambda e^{-\lambda x} = (-e^{-\lambda x})'$

$$= \Big[x \cdot (-e^{-\lambda x})\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \cdot (-e^{-\lambda x}) \, dx = 0 + \Big[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(X) = E[X^2] - \underbrace{E[X]^2}_{= \frac{1}{\lambda^2}} =$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X \, dx = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} \, dx = \dots = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

41. Calcolo dell'integrale di Gauss e la variabile aleatoria normale standard. Calcolo del suo valore atteso e della sua varianza (con dimostrazione).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \text{PONGO } \begin{matrix} u = \frac{x}{\sqrt{2}} \\ du = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du}_{\text{INTEGRALE DI GAUSS}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \overbrace{e^{-y^2}}^{\text{NON DIPENDE DA X, PORTO FUORI}} dx \right) dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \overbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)}^{\text{NON DIPENDE DA y, PORTO FUORI}} dy = \overbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)}^{\text{SONO LA STESSA COSA}} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

COORDINATE POLARI
- ρ, θ
- $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$
- $\mathbb{R}^2 = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$
- $\rho\, d\rho\, d\theta$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho\, d\theta \right) d\rho = \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \cdot \rho \cdot 2\pi \cdot d\rho =$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right) = \pi$$

QUINDI $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$

Variabile aleatoria Normale Standard: Z

- $f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
- $E[Z] = 0$
- $Var(Z) = 1$

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_Z(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \text{FUNZIONE DISPARI} = 0$$

$$Var(Z) = E[Z^2] - \overbrace{E[Z]}^{=0}{}^2 = E[Z^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_Z(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

PER PARTI

$$= \left(x e^{-x^2/2} = (-e^{-x^2/2})' \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[x(-e^{-x^2/2}) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-x^2/2} dx = 1$$

42. Definizione della variabile normale di parametri $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma^2})$.
Calcolo della sua funzione di densità, del suo valore atteso e della sua varianza (con dimostrazione).

Variabile aleatoria Normale N di parametri $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma^2})$:

- $f_{N(\mu,\sigma^2)}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma}$
- $\mathrm{F}_{N(\mu,\sigma^2)}(\mathrm{a}) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$
- $E[Z] = \mu$
- $Var(Z) = \sigma^2$

$$E[\mu + \sigma Z] = \mu$$

$$VAR(\mu + \sigma Z) = \sigma^2 VAR(Z) = \sigma^2$$

FUNZ. COMPOSTA

$$f_{N(\mu,\sigma^2)}(X) = \frac{d}{dx} F_{N(\mu,\sigma^2)}(X) = \frac{d}{dx} \Phi\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= f_Z\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$