UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DISPENSA DI

MATEMATICA DISCRETA

(Versione 22/11/2018)

Stesura a cura di:
Stefano Ivancich

INDICE

Questa dispensa è scritta da studenti senza alcuna intenzione di sostituire i materiali universitari. Essa costituisce uno strumento utile allo studio della materia ma non garantisce una preparazione altrettanto esaustiva e completa quanto il materiale consigliato dall'Università.
Lo scopo di questo documento è quello di riassumere i concetti fondamentali degli appunti presi durante la lezione, riscritti, corretti e completati facendo riferimento alle slide e al libro di testo: "*C. Mariconda e A. Tonolo - Discrete Calculus. Methods for counting, Springer (2016) Capitoli 1-5 e 7*" per poter essere utilizzato come un manuale "pratico e veloce" da consultare. Non sono presenti esempi e spiegazioni dettagliate, per questi si rimanda ai testi citati e alle slide.

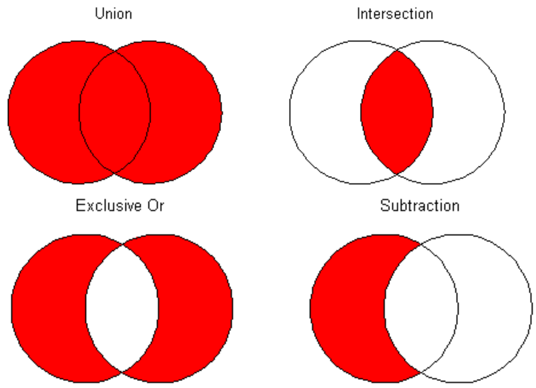
Se trovi errori ti preghiamo di segnalarli qui:
www.stefanoivancich.com
ivancich.stefano.1@gmail.com
Il documento verrà aggiornato al più presto.

1. Imparare a contare

1.1. Insiemi finiti

$\mathcal{P}(X)$ **Insieme delle parti** di X**:** insieme dei sottoinsiemi di X, compresi $\emptyset$ e X stesso. $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$

$A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ or } x \in B\}$;
$A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ and } x \in B\}$;
$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \text{ and } x \notin B\}$;
$A^c = \{x \in X : x \notin A\}$.



$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$;
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;
$(A \triangle B)^c = A^c \triangle B^c$;
$(A \triangle B) \triangle B = A$.

Funzione caratteristica $\chi_A : x \to \{0,1\}$, $\boldsymbol{\chi_A(x)} = \begin{cases} 1 & se\ x \in A \\ 0 & altrimenti \end{cases}$
$\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$;
$\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$;
se $A \cap B = \emptyset$, allora $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$;
$\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$;
$\chi_{A \triangle B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\chi_A(x)\chi_B(x)$;
$\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x)$.

Prodotto cartesiano degli insiemi $A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A_i\}$

Cardinalità $|X|$**:** di un insieme finito X è il numero dei suoi elementi distinti.
Due insiemi finiti hanno la stessa cardinalità se e solo se sono in corrispondenza biunivoca.
Cardinalità di A sottoinsieme di X: $|A| = \sum_{x \in X} \chi_A(x)$
Se A e B sono disgiunti, ovvero $A \cap B = \emptyset$, allora
$|A \cup B| = |A| + |B|$;
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;
$|A \times B| = |A| \times |B|$;
Se X è finito allora $|A^c| = |X| - |A|$.

1.2. Sequenze, Collezioni, Spartizioni, Composizioni e Partizioni

$\boldsymbol{I_n} = insieme\ \{1, \dots, n\}\ con\ I_0 = \emptyset$
Etichettatura: di un insieme finito X di cardinalità n, è una corrispondenza biunivoca $I_n \to X$
Il primo elemento di X lo si etichetta col numero 1, il secondo col 2, …

Oggetti Ordinati:

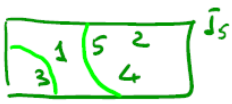
- **k-sequenza** di $\boldsymbol{I_n}$: k-upla ordinata $(a_1, \dots, a_k)$ di elementi non necessariamente distinti di I_n. Ovvero un elemento del prodotto cartesiano I_n^k.
- **n-spartizione** di $\boldsymbol{I_k}$: n-upla ordinata $(C_1, \dots, C_n)$ di sottoinsiemi a due a due disgiunti di I_k, eventualmente anche vuoti, la cui unione $C_1 \cup \dots \cup C_n$ è I_k.
- **n-composizione** di $\boldsymbol{k}$: n-upla ordinata $(k_1, \dots k_n)$ di naturali tali che $k_1 + \cdots + k_n = k$. $(k_1, \dots k_n)$ è una soluzione naturale dell'equazione $x_1 + \cdots + x_n = k$

Oggetti Non ordinati:

- **k-collezione** di I_n: famiglia non ordinata di k elementi di I_n eventualmente ripetuti. $(k_1\ copie\ di\ 1, \dots, k_n copie\ di\ n)$

$$[\underbrace{1, \dots, 1}_{k_1}, \dots, \underbrace{n, \dots, n}_{k_n}]$$

- **n-partizione** di I_k: famiglia non ordinata di n sottoinsiemi non vuoti disgiunti di I_k la cui unione è I_k stesso.

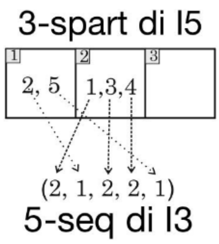


Permutazione della k-sequenza $(a_1, \dots, a_k)$ è una qualunque k-sequenza $(b_1, \dots, b_k)$ di X tale che $[a_1, \dots, a_k] = [b_1, \dots, b_k]$. Cioè si riordina in un altro modo la sequenza iniziale.

Esempi:

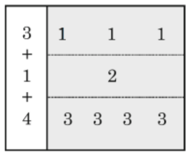
- **Sequenza**: serie ordinata di cose o fatti che si susseguono.
  - Estrazioni di numeri ordinata.
- **Spartizione**: spartire, divisione, distribuzione. Componenti sono insiemi eventualmente vuoti.
  - Suddividere l caramelle distinte a m bambini: m-sparitione di I_l
- **Composizione**: suddivisione in componenti. La somma delle componenti è un numero.
  - Suddividere l caramelle NON distinte a m bambini: m-composizione di l
- **Collezione**: raccolta di oggetti della stessa specie.
  - Estrazione di numeri non ordinata.
- **Partizione**: dividere. Componenti sono insiemi NON vuoti.

Corrispondenze Biunivoche:
Associando ad ogni **n-spartizione** $(\boldsymbol{C_1}, \dots, \boldsymbol{C_n})$ di I_k la **k-sequenza** $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$ di I_n, dove a_i è l'indice dell'insieme che contiene i si ottiene una corrispondenza biunivoca tra le n-spartizioni di I_k la k-sequenza di I_n



Associando ad ogni **n-composizione** $(\boldsymbol{k_1}, \dots \boldsymbol{k_n})$ di k la **k-collezione di** $\boldsymbol{I_n}$ formata da k_1 termini =1, …, k_n termini =n. Si ottiene una corrispondenza biunivoca tra le n-composizioni di k e le k-collezioni di I_n

$[\underbrace{1,\dots,1}_{k_1},\dots,\underbrace{n,\dots,n}_{k_n}]$ k-coll di I_n
n-compos $(k_1,\dots k_n)$



1.3. Principi fondamentali

Prodotto condizionato di molteplicità $(\boldsymbol{m_1}, \dots, \boldsymbol{m_k})$: un insieme X di k-sequenze $(x_1, \dots, x_k)$dove:
- $x_1 \in X_1$ di m_1 $elementi$
- Per ogni scelta di $x_1, \dots, x_{k-1}$ la componente $x_k \in X_k(x_1, \dots, x_{k-1})$ che può dipendere da $x_1, \dots, x_{k-1}$. E ha m_k elementi.

Principio di moltiplicazione: il prod. cond. di molteplicità $(m_1, \dots, m_k)$ ha $m_1 \times \dots \times m_k$ elementi.
Strategia per riconoscere il prod. Cond.:
- Se:
  - gli elementi di A si possono "costruire" con una procedura in k-fasi, dove:
    - Per la 1° fase si hanno m_1 scelte
    - …
    - Per la k° fase si hanno m_k scelte
  - E gli elementi di A determinano gli esiti della k-fasi, ovvero dati gli esiti delle fasi, bisogna essere in grado di risalire agli esiti delle singole.
- Allora A è in corrispondenza biunivoca con un prod. cond. di molteplicità $(m_1, \dots, m_k)$

Se non viene rispettata la seconda condizione, si può provare suddividere in casi (sottoinsiemi disgiunti) la cui unione è l'insieme di tutte le possibilità.

Principio di divisione: ogni elemento $y \in Y$ corrisponde a m elementi di X tramite una $f \to X \to Y$.
Allora $|Y| = \frac{|X|}{m}$
Elementi di X a blocchi hanno le stesse y.
Esempio: quante mani di 2 carte si possono formare tra 52? Si hanno due 2-sequenze (a,b) e (b,a), cioè ad ogni mano corrisponde a due 2-sequenza di I_{52}. Quindi =(52*51)/2

1.4. Spazi Campionari e Probabilità uniforme

Esperimento aleatorio con spazio campionario Ω: è una procedura che determina aleatoriamente la scelta di un elemento di Ω.

- Ω è un insieme
- **Eventi elementari** o **esiti**: elementi di Ω
- **Eventi**: sottoinsiemi di Ω

Probabilità uniforme: $P: \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ funzione che associa ad ogni sottoinsieme di Ω la probabilità $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ casi favorevoli/casi possibili

Proprietà:

- Per ogni elemento $\omega \in \Omega$ si ha $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$
- $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A^c) = 1 - P(A^c)$

2. Contare Sequenze e Collezioni

2.1. Senza Ripetizioni

2.1.1. Sequenze

Fattoriale: $\boldsymbol{n}! = \begin{cases} n * (n-1) * \ldots * 2 * 1 & per\ n \geq 1 \\ 1 & per\ n = 0 \end{cases}$

Formula di Stirling: $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} = 1$

Numero di cifre decimale di k è uguale a $\lfloor \log_{10} k \rfloor$

$\boldsymbol{S(n,k)} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!}, & se\ k \leq n \\ 0, & altrimenti \end{cases}$: numero di **k-sequenze** senza ripetizioni di I_n ovvero il numero di **n-spartizioni** $(\boldsymbol{C_1}, \ldots, \boldsymbol{C_n})$ di I_k con al massimo un elemento in ogni C_i

$S(n,0) = 1, S(n,n) = n!$

$$per\ n \geq 2\ si\ ha\ n! = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} kk!$$

2.1.2. Collezioni

Binomiale n su k: $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & se\ n \geq k \\ 0, & altrimenti \end{cases}$

$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{n-1} = n$

Proprietà:

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ Scegliere k tra n oggetti equivale a scartarne n-k
- $\binom{n}{k} = (x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{k} x^j y^{n-j}$
- $2^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$ Numero dei sottoinsiemi di I_n
- $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ Formula ricorsiva. Sottoinsiemi che contengono 1 U quelli che non lo contengono
- $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$ In quanti modi si può scegliere n elementi tra 2n
- $\binom{n+k+1}{k} = \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{j}$
- $\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k}$

$\boldsymbol{C(n,k)} = \frac{S(n,k)}{k!} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$**:** numero di **k-collezioni** senza ripetizione di $\boldsymbol{I_n}$, ovvero il numero di sottoinsiemi di k elementi di I_n

$C(n,0) = 1, C(n,n) = 1$

2.2. Con eventuali Ripetizioni

2.2.1. Sequenze e Collezioni

$\boldsymbol{S}((\boldsymbol{n},\boldsymbol{k})) = \boldsymbol{n}^{\boldsymbol{k}}$**:** numero di **k-sequenze di I_n** con eventuali ripetizioni, numero di **n-spartizioni di I_k**

$\boldsymbol{C}((\boldsymbol{n},\boldsymbol{k})) = \begin{cases} C(n-1+k,k), & se\ n+k \geq 1 \\ 1, & se\ n=0=k \end{cases}$ numero di $\boldsymbol{k}$**-collezioni di $\boldsymbol{I_n}$** con eventuali ripetizioni, numero di $\boldsymbol{n}$**-composizioni di $\boldsymbol{k}$**

- $C((n,k)) = C((k+1,n-1))$
- $C((n,k)) = C((n,k-1)) + C((n-1,k))\ se\ k \geq 1$ k-coll con almeno un 1 + k-coll senza 1
- $C((n,k)) = C((n-1,0)) + \cdots + C((n-1,k))$

2.2.2. Collezioni e Composizioni con Vincoli

Numero di soluzioni naturali di $x_1 + \cdots + x_n = k\ con\ x_i \geq l_i, i = 1, \ldots, n$
È uguale al numero di soluzioni naturali di:

$$\begin{aligned} y_1 + \cdots + y_n &= k - (l_1 + \cdots + l_n) \\ &= \boldsymbol{C}((\boldsymbol{n}, \boldsymbol{k} - (\boldsymbol{l_1} + \cdots + \boldsymbol{l_n}))) \end{aligned}$$

Numero di soluzioni naturali di: $x_1 + \cdots + x_n \leq k = \boldsymbol{C}((\boldsymbol{n}+\mathbf{1}, \boldsymbol{k}))$

Esercizi tipici: “Almeno 3 assi”: Esattamente 3 U esattamente 4

3. Vincoli di Occupancy

3.1. Sequenze e Spartizioni

3.1.1. Con Sequenza di Occupancy

$k = k_1 + \cdots + k_n$

k-sequenza di I_n con (sequenza di) **occupancy $(k_1, \ldots, k_n)$** ogni k-sequenza di I_n con k_1 ripetizioni di 1,..., k_n ripetizioni di n

n-spartizione di I_k con (sequenza di) **occupancy $(k_1, \ldots, k_n)$** ogni n-spartizione $(C_1, \ldots, C_n)$ di I_k con $|C_1| = k_1, \ldots, |C_n| = k_n$.

$\boldsymbol{S(n, k; (k_1, \ldots, k_n))} = \frac{\boldsymbol{k!}}{\boldsymbol{k_1! \ldots k_n!}} = P(a_1, \ldots, a_k)$ permutazioni

Elementi si ripetono $k_1, \ldots, k_n$ volte, sapendo esattamente quali.

3.1.2. Con Collezione di Occupancy

$k = k_1 + \cdots + k_n$

k-sequenza di I_n con (collezione di) **occupancy $[k_1, \ldots, k_n]$** ogni k-sequenza di I_n con sequenza di occupancy una qualunque permutazione di $(k_1, \ldots, k_n)$

n-spartizione di I_k con (collezione di) **occupancy $[k_1, \ldots, k_n]$** ogni n-spartizione di I_k con sequenza di occupancy una qualunque permutazione di $(k_1, \ldots, k_n)$

$\boldsymbol{S(n, k; [k_1, \ldots, k_n]) = S(n, k; (k_1, \ldots, k_n)) * P(k_1, \ldots, k_n)}$

Alcuni elementi si ripetono $k_1, \ldots, k_n$ volte, senza sapere quali esattamente.

3.2. Collezioni e Composizioni

3.2.1. Con Sequenza di Occupancy

k-collezione di I_n con (sequenza di) **occupancy $(k_1, \ldots, k_n)$** la k-collezione di I_n costituita da k_1 ripetizioni di 1,..., k_n ripetizioni di n

n-composizione di k con (sequenza di) **occupancy $(k_1, \ldots, k_n)$** la n-composizione $k = k_1 + \cdots + k_n$

$\boldsymbol{C(n, k; (k_1, \ldots, k_n)) = 1}$

3.2.2. Con Collezione di Occupancy

$k = k_1 + \cdots + k_n$

k-collezione di I_n con (collezione di) **occupancy $[k_1, \ldots, k_n]$** ogni k-collezione di I_n con sequenza di occupancy una qualunque permutazione di $(k_1, \ldots, k_n)$

n-composizione di k con (collezione di) **occupancy $[k_1, \ldots, k_n]$** ogni n-composizione $(m_1, \ldots, m_n)$ di k con $(m_1, \ldots, m_n)$ permutazione di $(k_1, \ldots, k_n)$

$\boldsymbol{C(n, k; [k_1, \ldots, k_n]) = P(k_1, \ldots, k_n)}$ numero di permutazioni di $(k_1, \ldots, k_n)$

Esercizi tipici:

No 2 lettere "A" consecutive:

- Fase1: composizioni, quante lettere mettere in mezzo.
- Fase2: inserisco lettere che sono k-seq con occupancy

4.Inclusione/Esclusione

Permette di calcolare la cardinalità dell'unione o intersezione degli insiemi finiti.

$\boldsymbol{\mathfrak{S}_k(A_1,\dots,A_n)}$ somma delle cardinalità di tutte le possibili intersezioni di k tra gli insiemi $A_1,\dots,A_n$.

$\mathfrak{S}_1(A_1,\dots,A_n)=|A_1|+\cdots+|A_n|$
$\mathfrak{S}_2(A_1,\dots,A_n)=|A_1\cap A_2|+\cdots+|A_{n-1}\cap A_n|$
$\boldsymbol{\mathfrak{S}_k(A_1,\dots,A_n)=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\left|A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}\right|}$ con $C(n,k)$ addendi
$\mathfrak{S}_n(A_1,\dots,A_n)=|A_1\cap\dots\cap A_n|$

Principio di inclusione/esclusione per l'unione: $|A_1\cup\dots\cup A_n|=\mathfrak{S}_1-\mathfrak{S}_2+\cdots+(-1)^{n-1}\mathfrak{S}_n$

Principio di inclusione/esclusione per l'intersezione:$|{A_1}^c\cap\dots\cap {A_n}^c|=|X|-\mathfrak{S}_1+\mathfrak{S}_2+\cdots+(-1)^n\mathfrak{S}_n$

$\boldsymbol{\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^k}$ Differenti **k-sequenze di $\boldsymbol{I_n}$** nelle quali compaiono almeno una volta tutti gli elementi di I_n, n-spartizioni di I_k in sottoinsiemi non vuoti. Con $n\ge 1$

Scombussolamenti: permutazioni di una sequenza in cui nessun elemento è nel posto di origine.

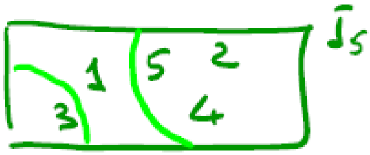
$$\boldsymbol{D_n}=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

Esercizi tipici:

- "Oppure" = Unione, "E" = Intersezione
- "Almeno una delle seguenti condizioni è vera": $|C_1\cup C_2\cup C_3|$
- "Almeno un Asso, almeno una Regina": $X_A=\{mani\ senza\ Assi\}$, $|{X_A}^c\cap {X_R}^c|$
- Composizioni: $x_1+\cdots+x_n=k\ con\ a_i\le x_i\le b_i$ (Oppure usa le Serie Formali)
  - Pongo $y_i=x_i-a_i$
  - Nuova equazione $y_1+\cdots+y_n=k-(a_1+\cdots+a_n)\ con\ y_i\le b_i$
  - $N=\{soluzioni\ della\ nuova\ equazione\ senza\ vincoli\}$
  - $Y_i=\{soluzioni\ in\ cui\ la\ nuova\ equazione\ ha\ y_i\ge b_i-a_i+1\}$
    calcolare solo sulle x che avevano vincoli, le altre no.
  - Calcolare $|{Y_1}^c\cap\dots\cap {Y_n}^c|=|N|-\mathfrak{S}_1\dots$

5.Partizioni

$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{k} \end{Bmatrix} = \begin{cases} 1, \; k = 0 = n \\ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}!} \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{0}}^{\boldsymbol{k}} (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{i}} \binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{i}} (\boldsymbol{k}-\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}, \; n \geq 1 \\ 0, \; altrimenti \end{cases}$ **Numero di k-partizioni** di I_n: famiglia non ordinata di k sottoinsiemi non vuoti disgiunti di I_n la cui unione è I_n stesso.



$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} + k \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}$ Formula ricorsiva per i numeri di Stirling di 2 specie

Con collezione di occupancy: $\begin{Bmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{k} \end{Bmatrix}; [\boldsymbol{n_1}, \dots, \boldsymbol{n_k}] = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}!} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}; [\boldsymbol{n_1}, \dots, \boldsymbol{n_k}])$ con $n_1 + \cdots + n_k = n$

6.Serie formali e Funzioni generatrici

6.1. Serie formali

$\boldsymbol{A(X)} = a_0 + a_1X^1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{a_n X^n}$ Array infinito di coefficienti reali.
Coefficiente di X^n: $a_n = [X^n]A(X)$
Polinomio fino a X^n: $[X^{\leq n}]A(X)$
$[X^{\geq n}]A(X) = A(X) - [X^{\leq n}]A(X)$
$\left[\frac{a}{b}X^n\right]A(X) = [X^n]\frac{b}{a}A(X)$

- $A(X) + B(X) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)X^n$ (Cella n= cella n di A + cella n di B)
- $A(X) * B(X) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} a_n b_{n-i})X^n$ (Come polinomi)
  - $se\ [X^0]A(X) = 0 \Leftrightarrow A(X) = X * B(X)$
- $-A(X) = \sum_{n=0}^{\infty}(-a_n)X^n$ (Inverto il segno delle celle)
- $\lambda A(X) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n)X^n$ (Moltiplico ogni cella per λ)
- $A'(X) = \sum_{n=1}^{\infty}(na_n)X^{n-1}$ (Derivata)
- **Cogrado:** $\boldsymbol{codegA(X)}$ = grado del primo termine non nullo
  - $codeg\big(A(X)B(X)\big) = codegA(X) + codegB(X)$
  - $codegA^m(X) = m * codegA(X)$
  - $codegB^{(m)}(X) = codegA(X) - m$
  - $codegB(X) > i\ se\ e\ solo\ se\ \left[X^{>i}\right]B(X)$

6.2. Funzioni generatrici

Funzione generatrice ordinaria: $\boldsymbol{OGF(a_n)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$
Funzione generatrice esponenziale: $\boldsymbol{EGF(a_n)_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} X^n$
Prodotto di convoluzione: $\left(\boldsymbol{a^{(1)}} \star \ldots \star \boldsymbol{a^{(m)}}\right)_{\boldsymbol{n}} = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} a_{k_1}^{(1)} * \ldots * a_{k_m}^{(m)}$
Prodotto di convoluzione binomiale: $\left(\boldsymbol{a^{(1)}} \diamond \ldots \diamond \boldsymbol{a^{(m)}}\right)_{\boldsymbol{n}} = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \frac{n!}{k_1!\ldots k_m!} a_{k_1}^{(1)} \ldots a_{k_m}^{(m)}$
Operazioni:

- $OGF(a_n)_n + OGF(b_n)_n = OGF(a_n + b_n)_n$
- $EGF(a_n)_n + EGF(b_n)_n = EGF(a_n + b_n)_n$
- Prodotto delle OGF è: $\left(a^{(1)} \star \ldots \star a^{(m)}\right)_n$
- Prodotto delle EGF è: $\left(a^{(1)} \diamond \ldots \diamond a^{(m)}\right)_n$
- Derivata OGF $(OGF(a_n)_n)' = OGF((n+1)a_{n+1})_n$
- Derivata EGF $(EGF(a_n)_n)' = EGF(a_{n+1})_n$

OGF caratteristica: $\boldsymbol{I_E^{OGF}(X)} = \sum_{n\in E} X^n$ (Es. E={0,1,2,27} --> I^{OGF}=1+X+X^2+X^{27})
EGF caratteristica: $\boldsymbol{I_E^{EGF}(X)} = \sum_{n\in E} \frac{X^n}{n!}$ (Es. E={0,1,2,27} --> I^{EGF}=1+X+X^2/2!+X^{27}/27!)

Siano $n\ sottoinsiemi\ E_1, \ldots, E_n \subseteq \mathbb{N}\ e\ k \geq 1$
$\boldsymbol{C\big(n, k; (E_1, \ldots, E_n)\big)} = \left[\boldsymbol{X^k}\right]\boldsymbol{I_{E_1}^{OGF}(X)} * \ldots * \boldsymbol{I_{E_n}^{OGF}(X)}$ numero di **k-collezioni di $\boldsymbol{I_n}$** con $k_1 \in E_1\ ripetizioni\ di\ 1, \ldots, k_n \in E_n\ ripetizioni\ di\ n$
$\boldsymbol{S\big(n, k; (E_1, \ldots, E_n)\big)} = \left[\frac{\boldsymbol{X^k}}{\boldsymbol{k!}}\right]\boldsymbol{I_{E_1}^{EGF}(X)} * \ldots * \boldsymbol{I_{E_n}^{EGF}(X)}$ numero **di k-sequenze di $\boldsymbol{I_n}$** con $k_1 \in E_1\ ripetizioni\ di\ 1, \ldots, k_n \in E_n\ ripetizioni\ di\ n$

6.3. Serie composte e inverse

Famiglia di serie formali: $\{A_i(X): i \in \mathbb{N}\}$

Famiglia Localmente Finita: se $\{i \in \mathbb{N}: [X^n]A_i(X) \neq 0\}$ è $finito$, cioè se esiste un numero finito di serie formali della famiglia col coefficiente di X^n non nullo.

La famiglia $\{B^i(X): i \in \mathbb{N}\}$ è localmente finita se e solo se: $[X^0]B(X) = 0$

Somma delle infinite serie formali: $\sum_{i=0}^{\infty} A_i(X) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty}[X^n]A_i(X)\right)X^n$
Cioè il coefficiente di X^n è $\sum_{i=0}^{\infty}[X^n]A_i(X)$

Composizione: $A(B(X)) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i B^i(X)$

- Se $A(X)$ è un polinomio (ha numero finito di addendi)
- Oppure $[X^0]B(X) = 0$

Cambio di variabile: $A(X)B(X) = C(X)$

Si può sostituire X con $D(X)$ se:

- $A(X), B(X), C(X)$ sono un polinomio
- Oppure $[X^0]D(X) = 0$

Serie formale inversa: $\boldsymbol{A^{-1}(X)}$ $tale\ che\ A(X)A^{-1}(X) = 1$
$A(X)\ invertibile \iff [X^0]A(X) \neq 0 \iff codeg(A(X)) = 0$
Ogni serie formale non nulla è prodotto di una potenza di X per una serie formale invertibile.
$A(X)B(X) = 0 \iff A(X) = 0\ o\ B(X) = 0$

6.4. Forme chiuse

$f \in C^{\infty}(0)$: se esiste un intorno aperto di 0 sul quale f è definita ed ammette derivate di qualsiasi ordine.
Serie di MacLaurin: $f(X) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}X + .. + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}X^n$ (è una serie non una funzione)
Forma chiusa: f è $una\ forma\ chiusa\ di\ A(X)\ se\ f(X) = A(X)$ (f funz, A(X) serie, f(X) serie McLa)

- Una serie formale può avere più forme chiuse
- Ogni serie formale è la serie di MacLaurin di una funzione
- $(f+g)(X) = A(X) + B(X)$
- $fg(X) = A(X)B(X)$
- $se\ [X^0]B(X) \neq 0\ allora\ \frac{1}{g}(X) = B^{-1}(X)$
- $f'(X) = A'(X)$
- $se\ [X^0]B(X) = g(0) = 0\ allora\ (f \circ g)(X) = A(B(X))$

Determinare forma chiusa di una serie formale A(X): trovare la funzione che abbia A come MacLaurin (ricondursi alle notevoli)

Successione delle somme parziali: $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_n$, $\quad OGF\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)_n = \frac{1}{1-X}OGF(a_n)$
Successione della trasformata binomiale: $\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_i\right)_n$, $\quad EGF\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_i\right)_n = e^X EGF(a_n)$

Forme chiuse notevoli

$$\sum_{n=0}^{\infty} X^n = \frac{1}{1-X}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = e^X$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{X^{2n}}{(2n)!} = \cos X$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin X$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^{2n}}{(2n)!} = \cosh X$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh X$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{X^n}{n} = \log(1+X)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} X^n = (1+X)^a \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{n} X^n = \frac{1}{(1-X)^{m+1}} \qquad m \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} X^n = \frac{X^m}{(1-X)^{m+1}} \qquad m \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{m} X^{n+k} = \frac{X^k}{(1-X)^{m+1}} \qquad m, k \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/m}{n} X^n = (1+X)^{1/m} \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n} = -\log(1-X)$$

Esercizi tipici:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} X^n = X \sum_{n=1}^{\infty} X^{n-1}$$

$$1 + \cdots + X^n = (1 + \cdots + X^n)\frac{1-X}{1-X} = \frac{1-X^{n+1}}{1-X}$$

$$Se\ EGF\ 2\mathbb{N} = \cosh X = \frac{e^X + e^{-x}}{2}$$

$$Se\ EGF\ 2\mathbb{N}+1 = \sinh X = \frac{e^X - e^{-x}}{2}$$