# Practica 4

Ivan Vercinsky

## Ejercicio 1

Nos dicen que $v \nvDash p_1$ ni $v \nvDash p_2$ ni $v \nvDash p_3$. Nos preguntan si podemos argumentar si es posible decidir si $v \vDash \alpha$ o $v \nvDash \alpha$

1. $\alpha = \neg p_1$
   - Sabemos que $v \nvDash p_1 \to v \vDash \neg p_1$, por definición de la valuación, $\to v \vDash \alpha$
2. $\alpha = ((p_5 \vee p_3) \to p_1)$
   - Para que $v \vDash \alpha$ tiene que pasar que $v \vDash \neg(p_5 \vee p_3)$ o $v \vDash p_1$
   - $v \nvDash p_1$ ni $v \nvDash p_3$ entonces para que $v \vDash \alpha$ tiene que pasar que $v \nvDash p_5$
   - En cambio, si $v \vDash p_5 \to v \vDash (p_5 \vee p_3) \to v \nvDash \alpha$
3. $\alpha = ((p_1 \vee p_2) \to p_3)$
   - $v \nvDash p_1$ ni $v \nvDash p_2$ entonces $v \nvDash (p_1 \vee p_2) \to v \vDash \neg(p_1 \vee p_2) \to v \vDash \alpha$
4. $\alpha = \neg p_4$
   - Depende de $p_4$. No sabemos que sucede con $v(p_4)$.
   - Si $v \vDash p_4 \to v \nvDash \alpha$
   - Si $v \nvDash p_4 \to v \vDash \alpha$
5. $\alpha = ((p_8 \to p_5) \to (p_8 \wedge p_0))$
   - El consecuente siempre es falso porque $v(p_0) = 0$ por el enunciado.
   - Hay que ver cuando el antecedente es verdadero o falso. Si es falso entonces $v \vDash \alpha$ y sino $v \nvDash \alpha$
   - Luego si $v \vDash p_8$ y $v \nvDash p_5$ entonces $v \vDash \alpha$
   - Para los demás casos $v \nvDash \alpha$

## Ejercicio 2

## Ejercicio 3

Sean $\alpha$, $\beta \in FORM$ Probar las siguientes proposiciónes:

1. $\alpha$ es tautología sii $\neg\alpha$ no es satisfacible
   - $\Rightarrow$
     - Sabemos que $\alpha$ es tautología
     - Entonces $v \vDash \alpha \; \forall v \in VAL$
     - Que es lo mismo que decir
     - $\nexists v \in VAL \,/\, v \nvDash \alpha \leftrightarrow \nexists v \in VAL \,/\, v \vDash \neg\alpha$
     - O sea, $\neg\alpha$ no es satisfacible
   - $\Leftarrow$
     - Sabemos que $\nexists v \in VAL \,/\, v \vDash \neg\alpha \leftrightarrow \nexists v \in VAL \,/\, v \nvDash \alpha$
     - Entonces $v \vDash \alpha \; \forall v \in VAL$
     - Entonces $\alpha$ es tautología
2. $(\alpha \wedge \beta)$ es tautología sii $\alpha$ es tautología y $\beta$ es tautología
   - $\Rightarrow$
     - Sabemos que $(\alpha \wedge \beta)$ es tautología
     - Entonces $v \vDash (\alpha \wedge \beta) \; \forall v \in VAL$
     - Entonces $v \vDash \alpha \; \forall v \in VAL$ y $v \vDash \beta \; \forall v \in VAL$
     - Entonces $\alpha$ es tautología y $\beta$ esta tautología
   - $\Leftarrow$
     - Sabemos $\alpha$ es tautología y $\beta$ esta tautología
     - Entonces $v \vDash \alpha \; \forall v \in VAL$ y $v \vDash \beta \; \forall v \in VAL$
     - Entonces $v \vDash (\alpha \wedge \beta) \; \forall v \in VAL$
     - Sabemos que $(\alpha \wedge \beta)$ es tautología

3. $(\alpha \vee \beta)$ es contradicción sii $\alpha$ es contradicción y $\beta$ es contradicción
   - $\Rightarrow$
     - Sabemos que $(\alpha \vee \beta)$ es contradicción
     - Entonces $v \nvDash (\alpha \vee \beta)\, \forall v \in VAL$
     - Entonces $v \nvDash \alpha\, \forall v \in VAL$ y $v \nvDash \beta\, \forall v \in VAL$
     - Entonces $\alpha$ es contradicción y $\beta$ esta contradicción
   - $\Leftarrow$
     - Sabemos $\alpha$ es contradicción y $\beta$ esta contradicción
     - Entonces $v \nvDash \alpha\, \forall v \in VAL$ y $v \nvDash \beta\, \forall v \in VAL$
     - Entonces $v \nvDash (\alpha \vee \beta)\, \forall v \in VAL$
     - Sabemos que $(\alpha \vee \beta)$ es contradicción
4. $(\alpha \rightarrow \beta)$ es contradicción sii $\alpha$ es tautología y $\beta$ es contradicción
   - $\Rightarrow$
     - Sabemos que $(\alpha \rightarrow \beta)$ es contradicción
     - Entonces $v \vDash \alpha\, \forall v \in VAL$ y $v \nvDash \beta\, \forall v \in VAL$
     - Entonces $\alpha$ es tautología y $\beta$ esta contradicción
   - $\Leftarrow$
     - Sabemos $\alpha$ es tautología y $\beta$ esta contradicción
     - Entonces $v \vDash \alpha\, \forall v \in VAL$ y $v \nvDash \beta\, \forall v \in VAL$
     - Entonces $v \nvDash (\alpha \rightarrow \beta)\, \forall v \in VAL$
     - Sabemos que $(\alpha \rightarrow \beta)$ es contradicción

# Ejercicio 4

Sean $\alpha$, $\beta \in FORM$ Probar las siguientes proposiciónes:

1. Si $(\alpha \wedge \beta)$ es contingencia, entonces $\alpha$ es contingencia o $\beta$ es contingencia
   - Sabemos que $(\alpha \wedge \beta)$ es contingencia, entonces $v_1, v_2 \in VAL$ / $v_1 \vDash (\alpha \wedge \beta)$ y $v_2 \nvDash (\alpha \wedge \beta)$
   - Luego $v_1 \vDash \alpha$ y $v_1 \vDash \beta$
   - Además con $v_2$ pueden pasar 2 cosas. O, bien, $v_2 \vDash \alpha$ y $v_2 \nvDash \beta$ o $v_2 \nvDash \alpha$ y $v_2 \vDash \beta$
   - Luego por $v_2$ se puede concluir que $\alpha$ y $\beta$ son contingencias
2. Dadas dos valuaciones $v$ y $v'$, probar que si $v(p_i) = v'(p_i)$ para toda $p_i \in Var(\alpha)$ entonces $v \vDash \alpha \leftrightarrow v' \vDash \alpha$
   - Lo probamos por inducción en $\alpha$
   - Caso Base
     - $\alpha \in PROP$ entonces $Var(\alpha) = p$
     - Sabemos que $v(p) = v'(p)$ por definición.
     - Luego como $\alpha = p$
     - entonces si $v \vDash \alpha \leftrightarrow v(p) = 1 \leftrightarrow v`(p) = 1 \leftrightarrow v' \vDash \alpha$
     - entonces si $v \nvDash \alpha \leftrightarrow v(p) = 0 \leftrightarrow v`(p) = 0 \leftrightarrow v' \nvDash \alpha$
   - Pasos Inductivos
     - $\alpha$ es $\neg\beta$
       - Entonces $Var(\alpha) = Var(\beta)$ ya que la negación no agrega variables
       - Sabemos por definicion que $v(p_i) = v'(p_i)$ para toda $p_i \in Var(\beta)$
       - Entonces
       - $v \vDash \alpha \leftrightarrow v \nvDash \beta$ por Definición
       - $v \nvDash \beta \leftrightarrow v' \nvDash \beta$ por Hipotesis Inductiva
       - $v' \nvDash \beta \leftrightarrow v' \vDash \alpha$ por Definición
     - $\alpha$ es $(\beta \rightarrow \phi)$
       - Entonces $Var(\alpha) = Var(\beta) \bigcup Var(\phi)$ ya que la implicación agrega 2 variables
       - Sabemos por definición que $v(p_i) = v'(p_i)$ para toda $p_i \in Var(\beta) \bigcup Var(\phi)$
       - Entonces
       - $v \nvDash \alpha \leftrightarrow v \vDash \beta$ y $v \nvDash \phi$ por Definición
       - $v \vDash \beta \leftrightarrow v' \vDash \beta$ por Hipotesis Inductiva
       - $v \nvDash \phi \leftrightarrow v' \nvDash \phi$ por Hipotesis Inductiva
       - $v' \vDash \beta$ y $v' \nvDash \phi \leftrightarrow v' \vDash \alpha$ por Definición
       - Luego, es fácil ver que para el resto de los casos se comprueba la hipotesis. Hay que ir usando la definición de satisfacibilidad de la implicación e ir probando los casos para que $\beta$ y $\phi$ satisfagan $\alpha$ o no

3. **Si** $Var(\alpha) \bigcap Var(\beta) = \emptyset$ **entonces** $(\alpha \rightarrow \beta)$ **es tautología** $\leftrightarrow$ $\alpha$ **es contradicción o** $\beta$ **es tautología**
   - Consultar
   - $\Rightarrow$ entiendo que sale sin usar que no comparten variables. Ya que usas la def de $v \vDash p \rightarrow q$
   - $\Leftarrow$ entiendo que hay que usar que no comparten variables para poder hablar decir que dos forms != pueden ser contradiccion o tautologia sin caer en el absurdo ya que no comparten variables
4. $\alpha$ **y** $\beta$ **contingencias y no comparten variables** $\rightarrow$ $(\alpha \wedge \beta)$ **contingencia**
   - Como no comparten variables entonces no se puede implicar que si $v \vDash \alpha \rightarrow v \vDash \beta$
   - En particular, no puede pasar que $\alpha = \neg\beta$ porque comparten todas las variables