

Practica 4

Ivan Vercinsky

Ejemplos de Formulas

$(\neg p)$ No es una formula porque no es de la 2da de la definici3n.

$p \rightarrow q$ No es formula, porque le faltan los parentesis

$\neg(\neg p)$ No es formula, porque $(\neg p)$ no lo era.

$(p \rightarrow \neg q)$ Es formula, ya que $\neg q$ es el caso 2. p, q son formulas y luego la expresi3n es del caso 3

Notaci3n

$(p \wedge q) := \neg(p \rightarrow \neg q)$, con p y q formulas

$(p \vee q) := (\neg p \rightarrow q)$

Ejercicio 1

Demostrar que si $a \in FORM$, entonces tiene la misma cantidad de parentesis que abren y que cierran.

- $l(a) := \#$ de parentesis izquierdos
- $r(a) := \#$ de parentesis derechos

Demos: por Inducci3n Estructural.

- Caso Base
 - $a \in PROP$. Entonces vale porque $l(a) == r(a) == 0$
- Casos Recursivos
 - $a = \neg b$. Entonces
 - vale porque $l(a) == l(b) == r(b) == r(a)$
 - $l(a) == l(b)$ porque la negaci3n no agrega parentesis
 - $r(a) == r(b)$ porque la negaci3n no agrega parentesis
 - $r(b) == l(b)$ por Hipotesis Inductiva
 - $a = (b \rightarrow c)$. Entonces
 - vale porque $l(a) == l(b) + l(c) + 1 == r(b) + r(c) + 1 == r(a)$
 - $l(a) == l(b) + l(c) + 1$ porque la implicaci3n agrega un parentesis a la izquierda
 - $r(a) == r(b) + r(c) + 1$ porque la implicaci3n agrega un parentesis a la derecha
 - Y, adem3s
 - $l(b) + l(c) + 1 == r(b) + r(c) + 1$
 - $l(b) + l(c) == r(b) + r(c)$ por Hipotesis Inductiva

Sem3ntica

Valuaci3n:

$$v : PROP \rightarrow 0, 1$$

Notaci3n:

$$v \models q \leftrightarrow v(q) = 1$$

$$q \in PROP$$

$$v \not\models q \leftrightarrow v(q) = 0$$

$$q \in PROP$$

Def: Valor de Verdad de una formula **a** bajo una valuaci3n **v**

$$\mathbf{a} = PROP \rightarrow v \models \mathbf{a} \leftrightarrow v(\mathbf{a}) = 1$$

$$\mathbf{a} = \neg \mathbf{b} \rightarrow v \models \mathbf{a} \leftrightarrow v \not\models \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} = (\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c}) \rightarrow v \models \mathbf{a} \leftrightarrow v \not\models \mathbf{b} \text{ o } v \models \mathbf{c}$$

Def: La formula de **a** es una tautologia $\leftrightarrow v \models \mathbf{a} \forall v : VAL$

Def: La formula de **a** es una contradicción $\leftrightarrow v \not\models \mathbf{a} \forall v : VAL$

Def: La formula de **a** es una contingencia $\leftrightarrow \exists v_1, v_2 : v_1 \models \mathbf{a} \text{ y } v_2 \not\models \mathbf{a}$

Ejercicio 2

Decidir si las siguientes formulas son tautologias, contradicciones, o contingencias

1. $a = (p \rightarrow q)$
 - Como $a = (p \rightarrow q)$ entonces $v \models a \leftrightarrow v \not\models p \vee v \models q$
 - Quiero ver si existen v_1, v_2 tal que $v_1 \models a$ y $v_2 \not\models a$. Luego a es contingencia
 - Sea $v_1 \in VAL$ tal que $v_1(p) = 0$
 - entonces $v_1 \not\models p \rightarrow v_1 \models a$ por definición de $a = (p \rightarrow q)$
 - Sea $v_2 \in VAL$ tal que $v_2(p) = 0 \wedge v_2(q) = 1$
 - entonces $v_2 \not\models p \wedge v_2 \models q \rightarrow v_2 \not\models a$ por definición de $a = (p \rightarrow q)$
 - Probamos que a es contingencia
2. $a = \neg(p \rightarrow q)$
 - Misma idea que el item anterior. Pero invirtiendo las valuaciones
3. $a = (((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$
 - Quiero ver si existen v_1, v_2 tal que $v_1 \models a$ y $v_2 \not\models a$. Luego a es contingencia
 - Sea $b = ((p \wedge q) \rightarrow r)$
 - Sea $c = (p \rightarrow r)$
 - Luego, queda que $a = (b \rightarrow c)$
 - Hay que buscar v_1 tal que $v_1 \not\models b$ Entonces $v_1 \models a$
 - Sea $v_1 : VAL$ tal que $v_1(p) = 1 \wedge v_1(q) = 1 \wedge v_1(r) = 0$
 - entonces $v_1 \models (p \wedge q) \wedge v_1 \not\models r \rightarrow v_1 \not\models b$
 - Por lo anterior encontramos que $v_1 \models a$
 - Ahora, hay que buscar v_2 tal que $v_2 \models b \wedge v_2 \not\models c$ Entonces $v_2 \not\models a$
 - Sea $v_2 : VAL$ tal que $v_2(p) = 1 \wedge v_1(q) = 0 \wedge v_1(r) = 0$
 - entonces $v_2 \not\models (p \wedge q) \rightarrow v_2 \models b$ porque al no valer el antecedente vale la implicación
 - además $v_2 \models p \wedge v_2 \not\models r$ entonces $v_2 \not\models (p \rightarrow r)$ entonces $v_2 \not\models c$
 - Por lo anterior encontramos que $v_2 \not\models a$
 - Probamos que a es contingencia
4. $a = (((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p)$
 - $v_1 \models p$ entonces satisface al ultimo consecuente luego satisface a toda implicación.
 - No parece haber v_2 tal que $v_2 \not\models a$.
 - Probemos que $v \models a \forall v : VAL \rightarrow a$ es tautologia
 - Supongamos que $\exists v_2 : VAL$ tal que $v_2 \not\models a$
 - Entonces $v_2 \models ((p \rightarrow q) \rightarrow p)$ y $v_2 \not\models p$
 - Entonces $(v_2 \not\models (p \rightarrow q) \text{ o } v_2 \models p)$ y $v_2 \not\models p$
 - Entonces $v_2 \models p$ y $v_2 \not\models q$ y $v_2 \not\models p$ ABS!
 - Luego, probamos que $\nexists v_2 : VAL$ tal que $v_2 \not\models a$
 - Luego a es tautologia
5. $a = (((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow q) \rightarrow ((p \vee r) \rightarrow q))$
 - Es tautologia
 - Queda de tarea escribirlo bien

Ejercicio 3

$\beta \in FORM$ contradicción y $\alpha \in FORM$. Defino α_β como la formula que se obtiene al reemplazar todas las variables proposiciones de α por la formula β .

Probar que α_β es una contradicción o una tautologia.

Demostración por Inducción Estructural en α

- Caso Base
 - $\alpha \in PROP$ entonces $\alpha_\beta := \beta$ entonces es una contradicción por definición de β
- Paso Inductivo
 - $\alpha = \neg\phi$
 - entonces $\alpha_\beta := \neg\phi_\beta$
 - Luego por Hipotesis Inductiva ϕ_β es tautologia o contradicción.
 - Luego $\neg\phi_\beta$ es contradicción o tautologia
 - $\alpha = (\phi \rightarrow \psi)$
 - entonces $\alpha_\beta := (\phi_\beta \rightarrow \psi_\beta)$
 - Luego por Hipotesis Inductiva ϕ_β es tautologia o contradicción y ψ_β es tautologia o contradicción.
 - Si :
 - ◊ entonces $v \models \phi_\beta \forall v : VAL \rightarrow v \models \alpha_\beta \forall v : VAL \rightarrow \alpha_\beta$ es tautologia
 - Si ψ_β es tautologia:
 - ◊ entonces $v \models \psi_\beta \forall v : VAL \rightarrow v \models \alpha_\beta \forall v : VAL \rightarrow \alpha_\beta$ es tautologia
 - Si ϕ_β es tautologia y ψ_β es contradicción:
 - ◊ entonces $v \models \phi_\beta \forall v : VAL$
 - ◊ entonces $v \not\models \psi_\beta \forall v : VAL$
 - ◊ entonces $v \models \phi_\beta \wedge v \not\models \psi_\beta \forall v : VAL$
 - ◊ entonces $v \not\models \alpha_\beta \forall v : VAL \rightarrow \alpha_\beta$ es contradicción

Conectivos Adecuados

Función Boolean: *Formalizar una tabla de verdad*

$$f : \{0, 1\}^N \rightarrow \{0, 1\} \text{ con } n \in N_{\geq 1}$$

Sea la siguiente tabla:

p	q	$(p \wedge q)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Y, sea f una func Booleana tal que:

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(0, 1) = 0$$

$$f(1, 0) = 0$$

$$f(1, 1) = 1$$

Dada f , ¿Existe $a \in FORM$ tal que la tabla de verdad de a coincide con f ? Para el caso de arriba, SI. $a = (p \wedge q)$

Def: Un Conjunto C de Conectivos se dice adecuado si $\forall f \in funcBooleana$, existe $a \in FORM_C$ (una formula que solo usa conectivos del conjunto C) cuya tabla de verdad coincide con f

Proposición

Sea $C = \{\wedge, \vee, \neg\}$ es adecuado

Idea: Para pensar la demostración, hay que probarlo para cualquier f . En ese caso f , puede ser cte 0 (contradicción) en ese caso cualquier α que sea contradicción sirve. O, f puede ser cte 1 entonces cualquier α que sea tautología sirve. Y, el caso no trivial, es cuando f es tiene valores para el cual da 1 y para otros da 0. Entonces, veamos un ejemplo. Buscar una $\alpha \in FORM_C$ para esta f

p	q	r	f
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Mirar las filas donde $f(i) = 1$. Y, las unis con \vee .

Luego $\alpha = (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$

Finalmente, la siguiente demostración concluye que C es adecuado.

Sea una función boolean cualquiera, $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$. Buscamos una fórmula α que se escriba usando los conectivos de C , cuya tabla de verdad se corresponda con la tabla de f . Si f es la función constantemente igual a 0, definimos la fórmula $\alpha = (p_0 \wedge \neg p_0)$. Si no, llamemos

$$E = \{\bar{d} \in \{0, 1\}^n / f(\bar{d}) = 1\}$$

al conjunto de las tuplas $\bar{d} = (d_1, \dots, d_n)$ sobre las culas f vale uno. Dado $s \in 0, 1$, defino

$$p_i^s = \begin{cases} p_i & \text{si } s = 1 \\ \neg p_i & \text{si } s = 0 \end{cases}$$

y, dada $\bar{d} \in E$, defino

$$\alpha_{\bar{d}} = \bigwedge_{i=1}^n p_i^{d_i}$$

Finalmente, la fórmula

$$\alpha = \bigvee_{\bar{d} \in E} \alpha_{\bar{d}}$$

es lo que buscamos.

Equivalencia

Def: Sean $\alpha, \beta \in FORM$ $\alpha \equiv \beta \leftrightarrow (v \models \alpha \leftrightarrow v \models \beta, \forall v : VAL)$

Ejercicio 4

Decidir si los siguientes conjuntos de conectivos son adecuados o no.

- $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\}$
 - Si, pues $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\} \subseteq C$ que ya probamos es adecuado
- $\{\rightarrow, \neg\}$
 - Veamos que con los conectivos de este conjunto podemos armar los conectivos de C y entonces concluir que este conj es adecuado también.
 - Este conj tiene la \neg pero le faltan \wedge y \vee . Veamos que estos se pueden construir a partir de los conectivos de este conj.
 - $(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$ que es una $FORM_C$
 - $(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \rightarrow \beta)$ que es una $FORM_C$
 - Luego como C es adecuado $\rightarrow \{\rightarrow, \neg\}$ también
- $\{\wedge, \neg\}$

- Misma idea, a este conj, le falta el \vee . Veamos que se puede construir a partir de \wedge y \neg
 - $(\alpha \vee \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
 - Luego $\{\wedge, \neg\}$ es adecuado
4. $\{\wedge, \rightarrow\}$
- Este conj no es adecuado. Probemoslo.
 - Primero, veamos que una valuación cualquiera que satisface a cualquier proposición, también, satisface a todas las formulas de este conj.
 - Sea $v \in VAL / v(q) = 1 \forall q \in PROP \rightarrow v \models \alpha \forall \alpha \in FORM_{\{\wedge, \rightarrow\}}$
 - Probemos esto por Inducción Estructural
 - Caso Base
 - $\alpha \in PROP \rightarrow v(\alpha) = 1 \rightarrow v \models \alpha$
 - Pasos Inductivos
 - α es $(\beta \wedge \varphi) \rightarrow$ por HI $v \models \beta$ y $v \models \varphi \rightarrow v \models (\beta \wedge \varphi)$
 - α es $(\beta \rightarrow \varphi) \rightarrow$ por HI $v \models \beta$ y $v \models \varphi \rightarrow v \models (\beta \rightarrow \varphi)$
 - Ahora, *supongamos* que $\exists \alpha \in FORM_{\{\wedge, \rightarrow\}}$ talque $\alpha \equiv \neg p$
 - Sea $v \in VAL / v(\varphi) = 1 \forall \varphi \in PROP$
 - Entonces, por lo anterior $v \models \alpha$ porque $\alpha \in FORM_{\{\wedge, \rightarrow\}}$
 - Pero, entonces como $v \models \alpha \rightarrow v \models \neg p \rightarrow v(p) = 0$ Abs!
 - Es Absurdo suponer que $\neg p \in FORM_{\{\wedge, \rightarrow\}}$
 - Entonces la función booleana que corresponde a $\neg p$ no se puede obtener a partir de $FORM_{\{\wedge, \rightarrow\}}$
 - Entonces $FORM_{\{\wedge, \rightarrow\}}$ no es adecuado. Como queríamos probar

Consecuencia Semántica

Def: Sean $\Gamma \subseteq FORM$ y $v \in VAL$ decimos que $v \models \Gamma$ si $v \models \alpha \forall \alpha \in \Gamma$

Def: Si $\exists v \in VAL$ talque $v \models \Gamma$ entonces se dice que Γ es satisficible

Def: Consecuencia Semántica

Hasta ahora veníamos usando \models para decir que una valuación hace verdadera una fórmula. Ahora, vamos a reutilizar este símbolo para introducir el concepto de *hipotesis*.

Si Γ es un conj de fórmulas, decimos que las hipótesis de Γ implican semánticamente a α (y lo notamos como $\Gamma \models \alpha$) si toda valuación v que satisface las hipótesis de Γ también satisface a la conclusión α .

En otras palabras: decimos que $\Gamma \models \alpha$ si vale que todas las valuaciones que satisfacen a Γ también satisfacen a α .

Más formalmente, $\Gamma \models \alpha$ si $\forall v \in VAL (v \models \Gamma \rightarrow v \models \alpha)$

Def: $Con(\Gamma) = \{\alpha \in FORM / \Gamma \models \alpha\}$ y se llama Conjunto de Consecuencias

Ejercicio 5

Sean Γ_1 y Γ_2 satisficibles. Decidir si los siguientes conjuntos son satisficibles.

1. \emptyset
 - Es trivialmente cierto. Porque no hay ninguna fórmula en el vacío. Entonces cualquier valuación lo satisface
 - $v \models \alpha \forall \alpha \in \emptyset \rightarrow v \models \emptyset$
2. $\{p_9\}$
 - Si, tomo cualquier $v \in VAL$ talque $v(p_9) = 1 \rightarrow v \models p_9 \rightarrow v \models \{p_9\}$
3. $FORM$
 - IDEA: Las contradicciones son parte de este conjunto y no existen valuaciones que las satisfagan. Por definición.
 - No, como $(p \wedge \neg p) \in FORM$ y $\nexists v \in VAL$ talque $v(p \wedge \neg p) = 1$ entonces $FORM$ no es satisficible
4. $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$
 - No, porque si $\Gamma_1 = \{p\}$ y $\Gamma_2 = \{\neg p\}$ que son satisficibles, luego, no puede pasar que $\exists v \in VAL$ talque $v \models p$ y $v \models \neg p$ entonces $v \not\models \Gamma_1 \cup \Gamma_2$
5. $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$
 - Si, porque $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$
 - Entonces si $\exists v \in VAL$ talque $v \models \Gamma_1 \rightarrow v \models \Gamma_1 \cap \Gamma_2$

Ejercicio 6

Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

1. $\{p_1\} \models p_2$
 - Falso
 - Tomo $v \in VAL / v(p_1) = 1$ y $v(p_2) = 0$ y el resto cualquier cosa
 - Entonces $v \models \{p_1\}$ porque $v \models p_1$
 - Pero $v \not\models p_2$
 - Entonces $\{p_1\} \not\models p_2$
2. $\emptyset \models (p_3 \wedge p_7)$
 - Falso
 - Tomo $v \in VAL / v(\varphi) = 0 \forall \varphi \in PROP$
 - $v \models \emptyset$ trivialmente
 - Pero $v \not\models (p_3 \wedge p_7)$
 - Entonces $\emptyset \not\models (p_3 \wedge p_7)$
3. $\emptyset \models (p_5 \vee \neg p_5)$
 - Verdadero
 - Como $(p_5 \vee \neg p_5)$ es una tautologia. Entonces $v \models (p_5 \vee \neg p_5) \forall v \in VAL$
 - Dada $v \in VAL / v \models \emptyset \rightarrow v \models (p_5 \vee \neg p_5)$
 - Luego $\emptyset \models (p_5 \vee \neg p_5)$
4. $Con(\emptyset) = TAUT = \{\alpha \in FORM / \alpha \text{ es tautologia}\}$
 - Verdadero
 - $\alpha \in Con(\emptyset)$
 - $\leftrightarrow \forall v \in VAL (v \models \emptyset \rightarrow v \models \alpha)$
 - $\leftrightarrow \forall v \in VAL v \models \alpha$
 - $\leftrightarrow \alpha$ es tautologia
5. $FORM \models (p_1 \wedge \neg p_1)$
 - Verdadero
 - $Con(FORM) = \emptyset$ porque no hay una valuacion que satisfaga todas las formulas!
 - Luego es trivialmente verdadero
 - $v \models FORM \rightarrow v \models (p_1 \wedge \neg p_1)$ es Verdadero, (Antecedente Falso) $\forall v \in VAL$
6. Si Γ es satisfacible $\rightarrow Con(\Gamma)$ es satisfacible
 - Verdadero
 - Como Γ es satisfacible $\rightarrow \exists v \in VAL / v \models \Gamma$.
 - Veamos que $v \models Con(\Gamma)$
 - Sea $\alpha \in Con(\Gamma)$
 - Por def de Con si $v \models \Gamma \rightarrow v \models \alpha$
 - Por lo tanto $Con(\Gamma)$ es satisfacible.