Practica 4

Ivan Vercinsky

Ejemplos de Formulas

$(\neg p)$ No es una formula porque no es de la 2da de la definición.
$p \to q$ No es formula, porque le faltan los parentesis
$\neg(\neg p)$ No es formula, porque $(\neg p)$ no lo era.
$(p \to \neg q)$ Es formula, ya que $\neg q$ es el caso 2. p, q son formulas y luego la expresión es del caso 3

Notación

$(p \wedge q) := \neg(p \to \neg q)$, con p y q formulas
$(p \vee q) := (\neg p \to q)$

Ejercicio 1

Demostrar que si $a \in FORM$, entonces tiene la misma cantidad de parentesis que abren y que cierran.

- $l(a) :=$ # de parentesis izquierdos
- $r(a) :=$ # de parentesis derechos

Demos: por Inducción Estructural.

- Caso Base
  - $a \in PROP$. Entonces vale porque $l(a) == r(a) == 0$
- Casos Recursivos
  - $a = \neg b$. Entonces
    - vale porque $l(a) == l(b) == r(b) == r(a)$
    - $l(a) == l(b)$ porque la negación no agrega parentesis
    - $r(a) == r(b)$ porque la negación no agrega parentesis
    - $r(b) == l(b)$ por Hipotesis Inductiva
  - $a = (b \to c)$. Entonces
    - vale porque $l(a) == l(b) + l(c) + 1 == r(b) + r(c) + 1 == r(a)$
    - $l(a) == l(b) + l(c) + 1$ porque la implicación agrega un parentesis a la izquierda
    - $r(a) == r(b) + r(c) + 1$ porque la implicación agrega un parentesis a la derecha
    - Y, además
    - $l(b) + l(c) + 1 == r(b) + r(c) + 1$
    - $l(b) + l(c) == r(b) + r(c)$ por Hipotesis Inductiva

Semántica

Valuación:

$$v : PROP \to 0, 1$$

Notación:

$$v \models q \leftrightarrow v(q) = 1 \qquad q \in PROP$$
$$v \not\models q \leftrightarrow v(q) = 0 \qquad q \in PROP$$

Def: *Valor de Verdad de una formula* **a** *bajo una valuación* **v**

$$\mathbf{a} = PROP \to v \vDash \mathbf{a} \leftrightarrow v(\mathbf{a}) = 1$$
$$\mathbf{a} = \neg\mathbf{b} \to v \vDash \mathbf{a} \leftrightarrow v \nvDash \mathbf{b}$$
$$\mathbf{a} = (\mathbf{b} \to \mathbf{c}) \to v \vDash \mathbf{a} \leftrightarrow v \nvDash \mathbf{b}\ o\ v \vDash \mathbf{c}$$

Def: *La formula de* $\mathbf{a}$ *es una tautologia* $\leftrightarrow v \models \mathbf{a}\, \forall v : VAL$
Def: *La formula de* $\mathbf{a}$ *es una contradicción* $\leftrightarrow v \not\models \mathbf{a}\, \forall v : VAL$
Def: *La formula de* $\mathbf{a}$ *es una contingencia* $\leftrightarrow \exists v_1, v_2\ :\ v_1 \models \mathbf{a}\ y\ v_2 \not\models \mathbf{a}$

Ejercicio 2

Decidir si las siguientes formulas son tautologias, contradicciones, o contingencias

1. $a = (p \to q)$
   - Como $a = (p \to q)$ entonces $v \models a \leftrightarrow v \not\models p \lor v \models q$
   - Quiero ver si existen v_1, v_2 tal que $v_1 \models a$ y $v_2 \not\models a$. Luego a es contingencia
   - Sea $v_1 \in VAL$ tal que $v_1(p) = 0$
   - entonces $v_1 \not\models p \to v_1 \models a$ por definición de $a = (p \to q)$
   - Sea $v_2 \in VAL$ tal que $v_2(p) = 0 \land v_2(q) = 1$
   - entonces $v_2 \not\models p \land v_2 \models q \to v_2 \not\models a$ por definición de $a = (p \to q)$
   - Probamos que a es contingencia
2. $a = \neg(p \to q)$
   - Misma idea que el item anterior. Pero invirtiendo las valuaciones
3. $a = (((p \land q) \to r) \to (p \to r))$
   - Quiero ver si existen v_1, v_2 tal que $v_1 \models a$ y $v_2 \not\models a$. Luego a es contingencia
   - Sea $b = ((p \land q) \to r)$
   - Sea $c = (p \to r)$
   - Luego, queda que $a = (b \to c)$
   - Hay que buscar v_1 tal que $v_1 \not\models b$ Entonces $v_1 \models a$
     - Sea $v_1 : VAL$ tal que $v_1(p) = 1 \land v_1(q) = 1 \land v_1(r) = 0$
     - entonces $v_1 \models (p \land q) \land v_1 \not\models r \to v_1 \not\models b$
   - Por lo anterior encontramos que $v_1 \models a$
   - Ahora, hay que buscar v_2 tal que $v_2 \models b \land v_2 \not\models c$ Entonces $v_2 \not\models a$
     - Sea $v_2 : VAL$ tal que $v_2(p) = 1 \land v_1(q) = 0 \land v_1(r) = 0$
     - entonces $v_2 \not\models (p \land q) \to v_2 \models b$ porque al no valer el antecedente vale la implicación
     - además $v_2 \models p \land v_2 \not\models r$ entonces $v_2 \not\models (p \to r)$ entonces $v_2 \not\models c$
   - Por lo anterior encontramos que $v_2 \not\models a$
   - Probamos que a es contingencia
4. $a = (((p \to q) \to p) \to p)$
   - $v_1 \models p$ entonces satisface al ultimo consecuente luego satisface a toda implicación.
   - No parece haber v_2 tal que $v_2 \not\models a$.
   - Probemos que $v \models a\, \forall\, v : VAL \to a$ es tautologia
     - Supongamos que $\exists v_2 : VAL$ tal que $v_2 \not\models a$
     - Entonces $v_2 \models ((p \to q) \to p)$ y $v_2 \not\models p$
     - Entonces $(v_2 \not\models (p \to q)$ o $v_2 \models p)$ y $v_2 \not\models p$
     - Entonces $v_2 \models p$ y $v_2 \not\models q$ y $v_2 \not\models p$ ABS!
     - Luego, probamos que $\nexists v_2 : VAL$ tal que $v_2 \not\models a$
     - Luego a es tautologia
5. $a = (((p \to q) \land (r \to q) \to ((p \lor r) \to q))$
   - Es tautologia
   - Queda de tarea escribirlo bien

Ejercicio 3

$\beta \in FORM$ contradicción y $\alpha \in FORM$. Defino α_β como la formula que se obtiene al reemplazar todas las variables proposiciones de α por la formula β.

Probar que α_β es una contradiccón o una tautologia.

Demostración por Inducción Estructural en α

- Caso Base
  - $\alpha \in PROP$ entonces $\alpha_\beta := \beta$ entonces es una contradicción por definición de β
- Paso Inductivo
  - $\alpha = \neg\phi$
    - entonces $\alpha_\beta := \neg\phi_\beta$
    - Luego por Hipotesis Inductiva ϕ_β es tautologia o contradicción.
    - Luego $\neg\phi_\beta$ es contradicción o tautologia
  - $\alpha = (\phi \to \psi)$
    - entonces $\alpha_\beta := (\phi_\beta \to \psi_\beta)$
    - Luego por Hipotesis Inductiva ϕ_β es tautologia o contradicción y ψ_β es tautologia o contradicción.
    - Si :
      - entonces $v \nvDash \phi_\beta \ \forall v : VAL \to v \vDash \alpha_\beta \ \forall v : VAL \to \alpha_\beta$ es tautologia
    - Si ψ_β es tautologia:
      - entonces $v \vDash \psi_\beta \ \forall v : VAL \to v \vDash \alpha_\beta \ \forall v : VAL \to \alpha_\beta$ es tautologia
    - Si ϕ_β es tautologia y ψ_β es contradiccion:
      - entonces $v \vDash \phi_\beta \ \forall v : VAL$
      - entonces $v \nvDash \psi_\beta \ \forall v : VAL$
      - entonces $v \vDash \phi_\beta \land v \nvDash \psi_\beta \ \forall v : VAL$
      - entonces $v \nvDash \alpha_\beta \ \forall v : VAL \to \alpha_\beta$ es contradicción

Conectivos Adecuados

Función Boolean: *Formalizar una tabla de verdad*

$$f : \{0,1\}^N \to \{0,1\} \text{ con } n \in N_{\geqslant 1}$$

Sea la siguiente tabla:

p	q	$(p \land q)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Y, sea f una func Booleana tal que:

$$f(0,0) = 0$$
$$f(0,1) = 0$$
$$f(1,0) = 0$$
$$f(1,1) = 1$$

Dada f, *¿Existe $a \in FORM$ tal que la tabla de verdad de a coincide con f?* Para el caso de arriba, SI. $a = (p \land q)$

Def: *Un Conjunto C de Conectivos se dice adecuado si $\forall f \in funcBooleana$, existe $a \in FORM_C$ (una formula que solo usa conectivos del conjunto C) cuya tabla de verdad coincide con f*

Proposición

Sea $C = \{\wedge, \vee, \neg\}$ es adecuado
Idea: Para pensar la demostración, hay que probarlo para cualquier f. En ese caso f, puede ser cte 0 (contradicción) en ese caso cualquier α que sea contradicción sirve. O, f puede ser cte 1 entonces cualquier α que sea tautologia sirve. Y, el caso no trivial, es cuando f es tiene valores para el cual da 1 y para otros da 0. Entonces, veamos un ejemplo. Buscar una $\alpha \in FORM_C$ para esta f

p	q	r	f
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Mirar las filas donde $f(i) = 1$. Y, las unis con $\vee$.
Luego $\alpha = (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$

Finalmente, la siguiente demostración concluye que C es adecuado.
Sea una función boolean cualquiera, $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Buscamos una fórmula α que se escriba usando los conectivos de C, cuya tabla de verdad se corresponda con la tabla de f. Si f es la función constantemente igual a 0, definimos la fórmula $\alpha = (p_0 \wedge \neg p_0)$. Si no, llamemos

$$E = \{\overline{d} \in \{0,1\}^n \;/\; f(\overline{d}) = 1\}$$

al conjunto de las tuplas $\overline{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ sobre las culas f vale uno. Dado $s \in 0, 1$, defino

$$p_i^s = \begin{cases} p_i & \text{si } s = 1 \\ \neg p_i & \text{si } s = 0 \end{cases}$$

y, dada $\overline{d} \in E$, defino

$$\alpha_{\overline{d}} = \bigwedge_{i=1}^{n} p_i^{d_i}$$

Finalmente, la fórmula

$$\alpha = \bigvee_{\overline{d} \in E} \alpha_{\overline{d}}$$

es lo que buscamos.

Equivalencia

Def: *Sean* α*,* $\beta \in FORM$ $\alpha \equiv \beta \leftrightarrow (v \vDash \alpha \leftrightarrow v \vDash \beta, \; \forall v : VAL)$

Ejercicio 4

Decidir si los siguientes conjuntos de conectivos son adecuados o no.

1. $\{\wedge, \vee, \to, \neg\}$
   - Si, pues $\{\wedge, \vee, \to, \neg\} \subseteq C$ que ya probamos es adecuado
2. $\{\to, \neg\}$
   - Veamos que con los conectivos de este conjunto podemos armar los conectivos de C y entonces concluir que este conj es adecuado también.
   - Este conj tiene la $\neg$ pero le faltan $\wedge$ y $\vee$. Veamos que estos se pueden construir a partir de los conectivos de este conj.
   - $(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg(\alpha \to \neg\beta)$ que es una $FORM_C$
   - $(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \to \beta)$ que es una $FORM_C$
   - Luego como C es adecuado $\to \{\to, \neg\}$ también
3. $\{\wedge, \neg\}$

- Misma idea, a este conj, le falta el $\vee$. Veamos que se puede construir a partir de $\wedge$ y $\neg$
- $(\alpha \vee \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
- Luego $\{\wedge, \neg\}$ es adecuado

4. $\{\wedge, \rightarrow\}$
   - Este conj no es adecuado. Probemoslo.
   - Primero, veamos que una valuacion cualquiera que satisface a cualquier proposición, también, satisface a todas las formulas de este conj.
   - Sea $v \in VAL \;/\; v(q) = 1 \;\forall q \in PROP \rightarrow v \vDash \alpha \;\forall\alpha \in FORM_{\{\wedge,\rightarrow\}}$
   - Probemos esto por Inducción Estructural
     - Caso Base
       - $\alpha \in PROP \rightarrow v(\alpha) = 1 \rightarrow v \vDash \alpha$
     - Pasos Inductivos
       - α es $(\beta \wedge \varphi) \rightarrow$ por HI $v \vDash \beta$ y $v \vDash \varphi \rightarrow v \vDash (\beta \wedge \varphi)$
       - α es $(\beta \rightarrow \varphi) \rightarrow$ por HI $v \vDash \beta$ y $v \vDash \varphi \rightarrow v \vDash (\beta \rightarrow \varphi)$
   - Ahora, *supongamos* que $\exists\alpha \in FORM_{\{\wedge,\rightarrow\}}$ talque $\alpha \equiv \neg p$
   - Sea $v \in VAL \;/\; v(\varphi) = 1 \;\forall\varphi \in PROP$
   - Entonces, por lo anterior $v \vDash \alpha$ porque $\alpha \in FORM_{\{\wedge,\rightarrow\}}$
   - Pero, entonces como $v \vDash \alpha \rightarrow v \vDash \neg p \rightarrow v(p) = 0$ Abs!
   - Es Absurdo suponer que $\neg p \in FORM_{\{\wedge,\rightarrow\}}$
   - Entonces la funcion booleana que corresponde a $\neg p$ no se puede obtener a partir de $FORM_{\{\wedge,\rightarrow\}}$
   - Entonces $FORM_{\{\wedge,\rightarrow\}}$ no es adecuado. Como queriamos probar

Consecuencia Semántica

Def: *Sean* $\Gamma \subseteq FORM$ *y* $v \in VAL$ *decimos que* $v \vDash \Gamma$ *si* $v \vDash \alpha \;\forall\alpha \in \Gamma$
Def: *Si* $\exists\; v \in VAL$ *talque* $v \vDash \Gamma$ *entonces se dice que* Γ *es satisfacible*

Def: Consecuencia Semántica
Hasta ahora veniamos usando $\vDash$ para decir que una valuación hace verdadera una formula. Ahora, vamos a reutilizar este simbolo para introducir el concepto de *hipotesis*.
Si Γ es un conj de fórmulas, decimos que las hipotesis de Γ implican semánticamente a α (y lo notamos como $\Gamma \vDash \alpha$) si toda valuación v que satisface las hipotesis de Γ también satisface a la conclusión α.
En otras palabras: decimos que $\Gamma \vDash \alpha$ si vale que todas las valuaciones que satisfacen a Γ también satisfacen a α.
Más formalmente, $\Gamma \vDash \alpha$ *si* $\forall v \in VAL \;(v \vDash \Gamma \rightarrow v \vDash \alpha)$

Def: $Con(\Gamma) = \{\alpha \in FORM \;/\; \Gamma \vDash \alpha\}$ y se llama Conjunto de Consecuencias

Ejercicio 5

Sean Γ_1 y Γ_2 satisfacibles. Decidir si los siguientes conjuntos son satisfacibles.

1. $\emptyset$
   - Es trivialmente cierto. Porque no hay ninguna formula en el vacio. Entonces cualquier valuación lo satisface
   - $v \vDash \alpha \;\forall\alpha \in \emptyset \rightarrow v \vDash \emptyset$
2. $\{p_9\}$
   - Si, tomo cualquier $v \in VAL$ talque $v(p_9) = 1 \rightarrow v \vDash p_9 \rightarrow v \vDash \{p_9\}$
3. $FORM$
   - IDEA: Las contradicciónes son parte de este conjunto y no existen valuaciones que las satisfagan. Por definición.
   - No, como $(p \wedge \neg p) \in FORM$ y $\nexists v \in VAL$ talque $v(p \wedge \neg p) = 1$ entonces $FORM$ no es satisfacible
4. $\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$
   - No, porque si $\Gamma_1 = \{p\}$ y $\Gamma_2 = \{\neg p\}$ que son satisfacibles, luego, no puede pasar que $\exists v \in VAL$ talque $v \vDash p$ y $v \vDash \neg p$ entonces $v \nvDash \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$
5. $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2$
   - Si, porque $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$
   - Entonces si $\exists v \in VAL$ talque $v \vDash \Gamma_1 \rightarrow v \vDash \Gamma_1 \bigcap \Gamma_2$

Ejercicio 6

Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

1. $\{p_1\} \models p_2$
   - Falso
   - Tomo $v \in VAL$ / $v(p_1) = 1$ y $v(p_2) = 0$ y el resto cualquier cosa
   - Entonces $v \models \{p_1\}$ porque $v \models p_1$
   - Pero $v \not\models p_2$
   - Entonces $\{p_1\} \not\models p_2$
2. $\emptyset \models (p_3 \wedge p_7)$
   - Falso
   - Tomo $v \in VAL$ / $v(\varphi) = 0\, \forall \varphi \in PROP$
   - $v \models \emptyset$ trivialmente
   - Pero $v \not\models (p_3 \wedge p_7)$
   - Entonces $\emptyset \not\models (p_3 \wedge p_7)$
3. $\emptyset \models (p_5 \vee \neg p_5)$
   - Verdadero
   - Como $(p_5 \vee \neg p_5)$ es una tautologia. Entonces $v \models (p_5 \vee \neg p_5)\, \forall v \in VAL$
   - Dada $v \in VAL$ / $v \models \emptyset \rightarrow v \models (p_5 \vee \neg p_5)$
   - Luego $\emptyset \models (p_5 \vee \neg p_5)$
4. $Con(\emptyset) = TAUT = \{\alpha \in FORM \;/\; \alpha\, es\, tautologia\}$
   - Verdadero
   - $\alpha \in Con(\emptyset)$
   - $\leftrightarrow\; \forall v \in VAL\, (v \models \emptyset \rightarrow v \models \alpha)$
   - $\leftrightarrow\; \forall v \in VAL\, v \models \alpha$
   - $\leftrightarrow \alpha$ es tautologia
5. $FORM \models (p_1 \wedge \neg p_1)$
   - Verdadero
   - $Con(FORM) = \emptyset$ porque no hay una valuacion que satisfaga todas las formulas!
   - Luego es trivialmente verdadero
   - $v \models FORM \rightarrow v \models (p_1 \wedge \neg p_1)$ es Verdadero, (Antecedente Falso) $\forall v \in VAL$
6. Si Γ es satisfacible $\rightarrow Con(\Gamma)$ es satisfacible
   - Verdadero
   - Como Γ es satisfacible $\rightarrow \exists v \in VAL \;/\; v \models \Gamma$.
   - Veamos que $v \models Con(\Gamma)$
   - Sea $\alpha \in Con(\Gamma)$
   - Por def de Con si $v \models \Gamma \rightarrow v \models \alpha$
   - Por lo tanto $Con(\Gamma)$ es satisfacible.