Project 1: 求解Poisson方程五点差分格式的快速算法及数值比较实验

考虑如下带Dirichlet边界条件的Poisson方程：

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \\ u = \alpha \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

式中$\Omega = (0,a)\times(0,b)$，$f$是定义在$\Omega$上某一函数，而$\alpha$是定义在$\Omega$边界$\partial\Omega$上的某一函数.

先来导出求解以上Poisson方程的五点差分格式. 将区域Ω在x方向和y方向分别进行$I+1$和$J+1$等分，则x方向和y方向的网格步长分别为

$$h = a/(I+1), \;\; k = b/(J+1),$$

而目标点为$x_i = ih$、$y_j = jk$、$0 < i < I+1, 0 < j < J+1$.

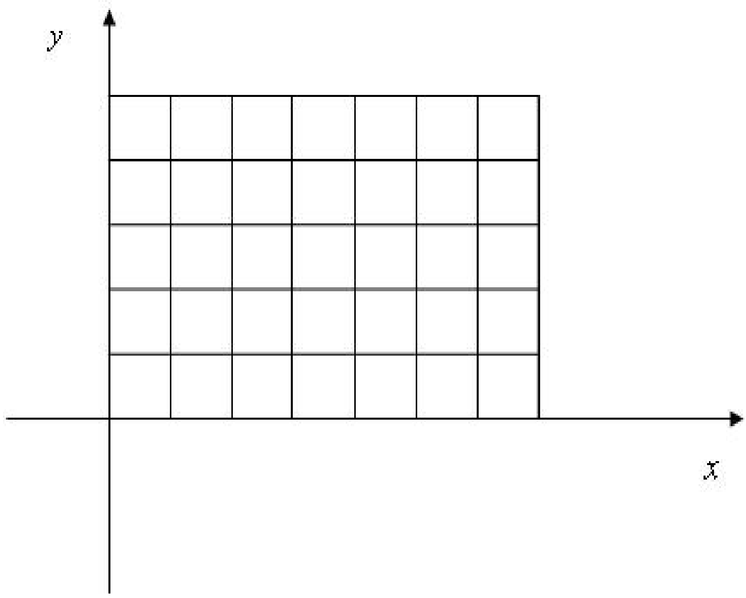

图1. 矩形区域网格剖分.

求解Poisson方程(1)的五点差分格式如下：

$$\begin{cases} -\Delta_h u_{ij} = f_{ij}, \;\; (x_i, y_j) \in \Omega_h, \\ u_{ij} = \alpha_{ij}, \;\; (x_i, y_j) \in \partial\Omega_h. \end{cases} \tag{2}$$

式中
$$\Delta_h u_{ij} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{k^2}.$$

不失一般性，设Poisson方程(1)满足齐次Diriechlet边界条件，即$\alpha \equiv 0$；且设$a = b = 1$. 则求解它的五点差分格式可写成如下矩阵方程：

$$\boldsymbol{AU} + \boldsymbol{UB} = \boldsymbol{F}, \tag{3}$$

式中，

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}_{I\times I}, \quad \boldsymbol{B} = \frac{1}{k^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}_{J\times J},$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,J} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2,J} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{I1} & u_{I2} & \cdots & u_{IJ} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1J} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2J} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{I1} & f_{I2} & \cdots & f_{IJ} \end{bmatrix}.$$

记$\boldsymbol{P} = [\sin(ij\pi h)] \in \mathbb{R}^{I\times I}$和$\boldsymbol{Q} = [\sin(ij\pi k)] \in \mathbb{R}^{J\times J}$. 求解五点差分格式的快速求解算法如下：

求解Poisson方程五点差分格式的快速DST方法.

步1. 给出划分数$I+1, J+1$, 得步长$h = \dfrac{1}{I+1}, k = \dfrac{1}{J+1}$.

形成向量$\boldsymbol{\lambda}$, 其第i位置的元素λ_i为$\frac{4}{h^2}\sin^2\dfrac{i\pi h}{2}, 1 \le i \le I$,

形成向量$\boldsymbol{\mu}$, 其第j位置的元素λ_j为$\frac{4}{k^2}\sin^2\dfrac{j\pi k}{2}, 1 \le j \le J$,

计算矩阵$\boldsymbol{F}$,其第(i,j)位置的元素为$f(ih, jk), 1 \le i \le I, 1 \le j \le J$.

步2. 使用快速DST计算矩阵$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{PFQ}$; 当$I = J$时, 在MATLAB中可写成

V=dst(dst(F)')'.

步3. 计算矩阵$\boldsymbol{W} = [w_{ij}]$,
$$w_{ij} = \frac{4hkv_{ij}}{\lambda_i + \mu_j}.$$

步4. 使用快速DST计算矩阵$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{PWQ}$; 当$I = J$时, 在MATLAB中可写成：

U=dst(dst(W)')'.

试自己给出算例，使用上面的方法实现Poisson方程五点差分格式的快速DST方法，列表给出在不同剖分下的求解时间. 尽量和其它算法比较，验证该方法的高效性.