lazzo@dm.unibo.it

serono

Insieme numeri reali

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Su $\mathbb{Q} \in (+, \cdot) \Rightarrow$

elem. neutro su Q in $+ = 0$, in $\cdot = 1$

opposto = inverso rispetto all'addizione (addizione)

" reciproco di a (moltiplicazione)

↓ solo se $a \neq 0$

$\nexists\, x$ t.c. $x^{-1} = 0$

Conseguenze degli assiomi relativi alle operazioni

$a + b = a + c \Rightarrow \underline{(-a) + a} + b = \underline{(-a) + a} + c$

$0 + b = 0 + c \Rightarrow b = c$ (semplificazione)

lo stesso per moltiplicazione (si usa il reciproco)

$a \cdot 0 = 0 = a \cdot \underline{(0 + 0)} = (a \cdot 0) + (a \cdot 0) = a \cdot 0 + 0$

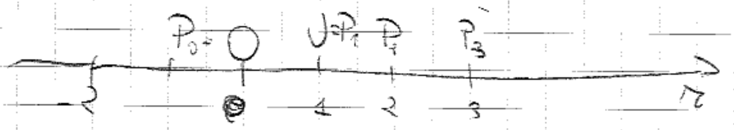
$\underline{(-a)b} = -\underline{(ab)} \Rightarrow (-a)b + ab = ((-a) + a) \cdot b = 0 \cdot b$

$= 0$

Rivedere: relazione d'ordine e relazione d'ordine totale

Rappr. geometrica di $\mathbb{Q}$

$x \in \mathbb{Q} \leftrightarrow P_x \in r$

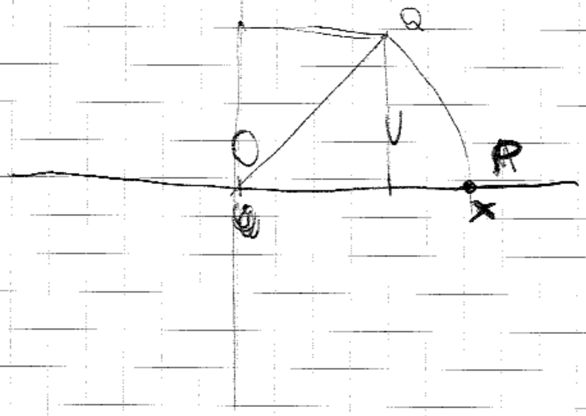


Rivedere: funzioni iniettive, surgettive, ...

$x, y \in \mathbb{Q}$ $\quad x \neq y \overset{?}{\Rightarrow} P_x \neq P_y$ $\quad$ Sì

$\overline{OP_x} = x < \overline{OP_y} \quad x < y$

? $\forall P \in r \;\; \exists x \in \mathbb{Q} \ni P = P_x$ $\quad$ No



$\overline{OQ}^2 = \overline{OU}^2 + \overline{UQ}^2 = 2\overline{OU}^2$

(Teor. di Pitagora)

$\left(\frac{\overline{OQ}}{\overline{OU}}\right)^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{\overline{OP}}{\overline{OU}}\right)^2 = 2$

$\Downarrow$

$x^2 = 2$

Dico che $\nexists\, x \in \mathbb{Q} \ni x^2 = 2$

DIM: supp. $x^2 = 2$ e per assurdo suppongo che $x \in \mathbb{Q}$

$\exists\, m, n \in \mathbb{Z} \ni n \neq 0$ e $x = \frac{m}{n}$

Posso supporre che m e n siano primi tra loro

$x^2 = 2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow \boxed{m^2 = 2n^2} \Rightarrow$

Richiamo

m^2 è un numero pari $\left(m = 2n \text{ pari}, \; m = 2n+1 \text{ dispari} \right)$

$\Rightarrow m$ è pari $\Rightarrow \boxed{m = 2k}$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2 \Rightarrow$ anche n^2 è pari $\Rightarrow$ anche n è pari

$\Rightarrow$ m è pari, n è pari $\Rightarrow$ erano primi tra loro

Abbiamo dimostrato che contraddizione $\nexists\, x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$ $\square$

Pitagorici (irrazionalità di $\sqrt{2}$)

Dim: $0,\overline{9} = 1$

$x = 0,\overline{9} = 0,9999\ldots$

$10x = 9,999\ldots \quad = 9 + 0.999\ldots$

$= 9 + x$

$10x = 9 + x \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

$\square$

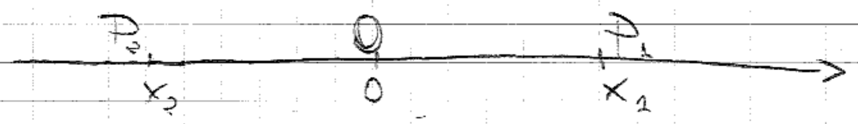
$7/8 = 0,875$

$19/22 = 0,863636\ldots$

$\Rightarrow$
$$\begin{array}{cccc} 0, & 8 & 7 & 5 \\ \shortparallel & \shortparallel & \vee & \\ 0, & 8 & 6 & 3\;6 \end{array}$$

allineamento lessicografico

errore $\frac{1}{10^k}$ per K grande

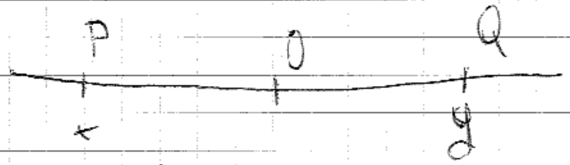


distanza di P da O:

$$\overline{OP_1} = x_1$$

$$\overline{OP_2} \overset{?}{=} -x_2 \Rightarrow \overline{OP} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} =: |x|$$

val. assoluto (modulo) di x



$$\overline{PQ} = \overline{PO} + \overline{OQ} = -x + y = -(x-y) = |x-y|$$

Proprietà del val. assoluto

$$|x| < 2 \iff -2 < x < 2$$

$$|x-2| < 3 \iff -3 < x-2 < 3 \iff -1 < x < 5$$

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$ $\mathbb{R}$ ha una corrispondente biunivoca con la retta orientata.

$f(x) = 2x + 1 \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(0) = 1 \qquad f(\{-3, \sqrt{2}, 2.1\}) = \{-5, 2\sqrt{2}+1, 5.2\}$

$f(1.5) = 4 \qquad f([-2, 4.5]) = \in [-3, 10] \qquad \text{im}(f(\ldots)) = [-3, 10]$

$f(-2.34) = -3.68 \qquad x \in [-2, 4.5] \iff -2 \leq x < 4.5$

$f(\pi) = 2\pi + 1 \qquad f(x) = 2x + 1 \qquad -4 \leq 2x < 9$

$$-3 \leq 2x + 1 < 10$$

$f^{-1}(3.6)$

$?x \quad f(x) = 3.6$

$2x+1 = 3.6 \Rightarrow 2x = 2.6 \Rightarrow x = \underline{1.3}$

$f^{-1}([1,8))$

$f(x) \in [1,8) \Rightarrow 1 \leq f(x) < 8 \Rightarrow 1 \leq 2x+1 < 8$

$\Rightarrow 0 \leq 2x < 7 \Rightarrow 0 \leq x < 7/2$

$\Rightarrow f^{-1}([1,8)) = [0, 7/2)$

Recupero analisi

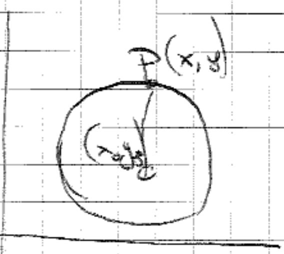
$$\boxed{\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}$$ ← retta

retta: $ax+by+c=0$

circ: $x^2+y^2+ax+by+c$

Circonferenza: luogo geometrico dei punti equidistanti ~~dal un punto~~ centro. Il raggio è la distanza di un punto generico sulla circonferenza dal centro.

$\mathcal{C}$



$\overline{PC} = r$

$\overline{PC}^2 = r^2$

$$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2}$$

Circ. unitaria: $x^2+y^2=1$

$$\boxed{\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$ ← m = coefficiente angolare

Retta passante per due punti

coefficiente angolare: misura della pendenza

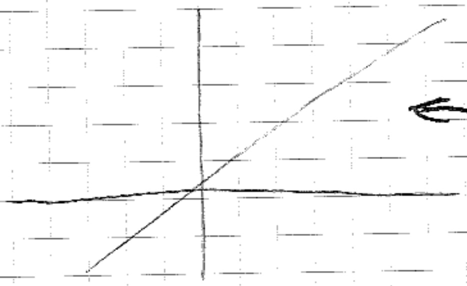
$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

anche questo dev'essere positivo $\Rightarrow y_2 > y_1$

$$m > 0 \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} > 0$$

← dev'essere positivo

per lo stesso motivo $x_2 > x_1$



← $m > 0$

lo stesso per $m < 0$ invertendo i segni

← $m < 0$

$m = 1$ $\qquad$ $m = 3$

SOLUTION

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

maggiore $x = 1$

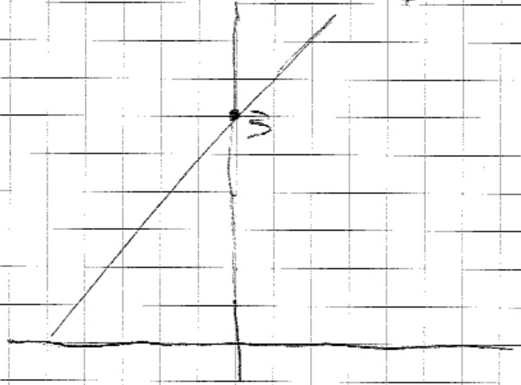
più è alto il coeff. angolare, più è ripida la retta

più è basso il coeff. angolare, più è ripida la retta

$\boxed{\text{più è alto il val. assoluto del coeff. angolare, maggiore è la ripidità della retta}}$

$y = 2x + 3$

$$y = mx + \underline{y_1 - mx_1}$$



$$y = mx + q$$

q = ordinata dell'origine

se q è 0, la retta passa dall'origine

$\boxed{y = mx + q}$ ⇐ forma esplicita

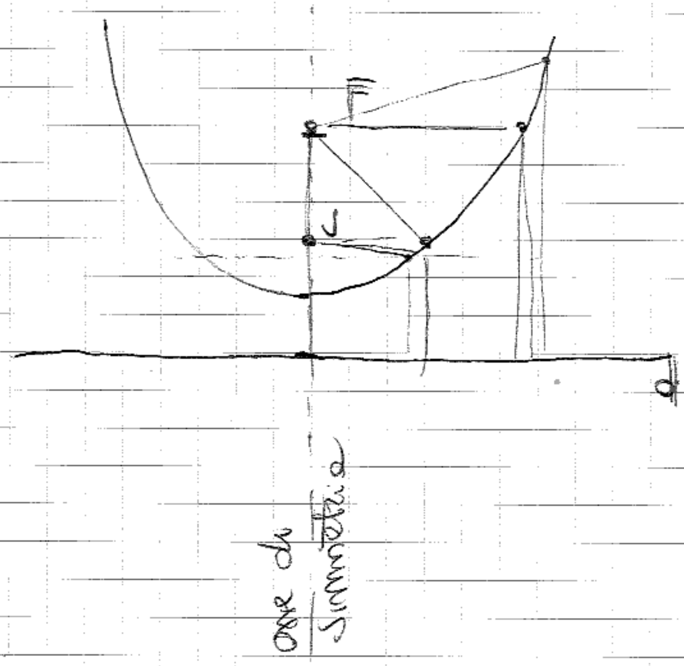
forma generale: $\boxed{ax + by + c = 0}$

$$\begin{cases} a, b, c \in \mathbb{R} \\ a, b \text{ non simultaneamente uguali a } 0 \end{cases}$$

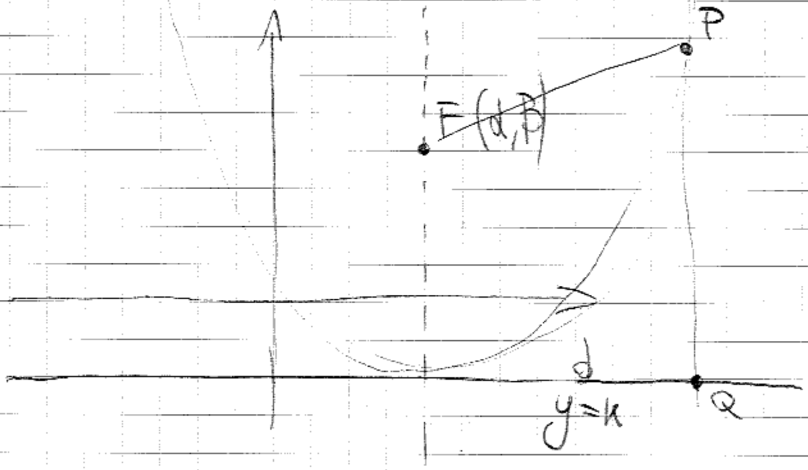
due rette hanno la stessa pendenza se hanno lo stesso coefficiente angolare (parallele)

$r_1 \parallel r_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$ $\qquad$ $r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$

Parabola



V punto medio



la distanza di P da F = distanza di P dalla retta d.

$\overline{PF} = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$ $\qquad \overline{PQ} = |y-k|$

~~PQ =~~

$P \in \mathcal{P} \iff \overline{PF} = \overline{PQ} \iff \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = |y-k|$

$\iff (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (y-k)^2 \iff$

$(x-\alpha)^2 + \cancel{y^2} - 2\beta y + \beta^2 = \cancel{y^2} - 2ky + k^2$

$(x-\alpha)^2 + \beta^2 - k^2 = 2\beta y - 2ky$

$2y(\beta - k) = (x-\alpha)^2 + \beta^2 - k^2$

serono

$$y = \frac{1}{2(\beta - k)} (x - \alpha)^2 + \frac{\beta^2 - k^2}{2 \cdot (\beta - k)}$$

$\cancel{y = 1}$ - - -

$$y = a (x - \alpha)^2 + \gamma$$

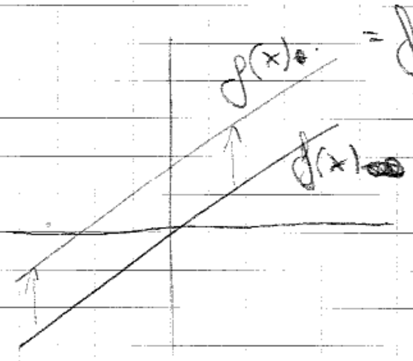
$$y = \underbrace{\boxed{\frac{1}{2(\beta - k)}}}_{a} (x - \alpha)^2 + \underbrace{\boxed{\frac{\beta + k}{2}}}_{\gamma}$$

$$y = \underset{a}{3} x^2 + 2x + 1$$

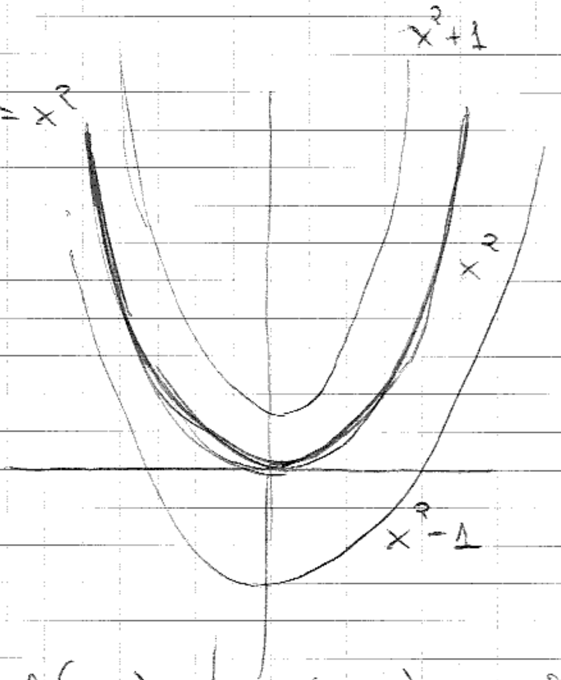
$$(x, y) \in graf(f) \iff x \in dom(f),\ y = f(x)$$
$$\iff x \in dom(f),\ y + c = f(x) + c = g(x)$$
$$\iff (x, y+c) \in graf(g)$$

$g(x) = f(x) + c$

$h(x) = f(x+c)$



Si trasla verticalmente



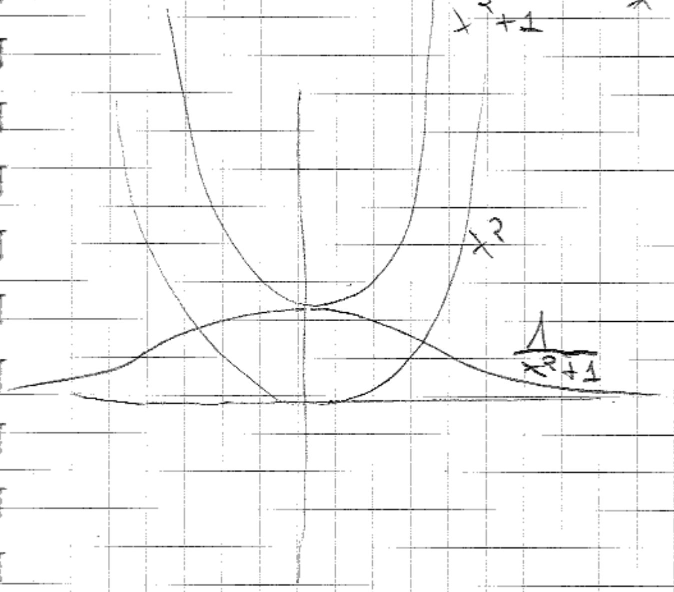
$h(x) = f(x+c)$ | $(x, y) \in graf(f) \iff x \in dom(f),\ y = f(x)$

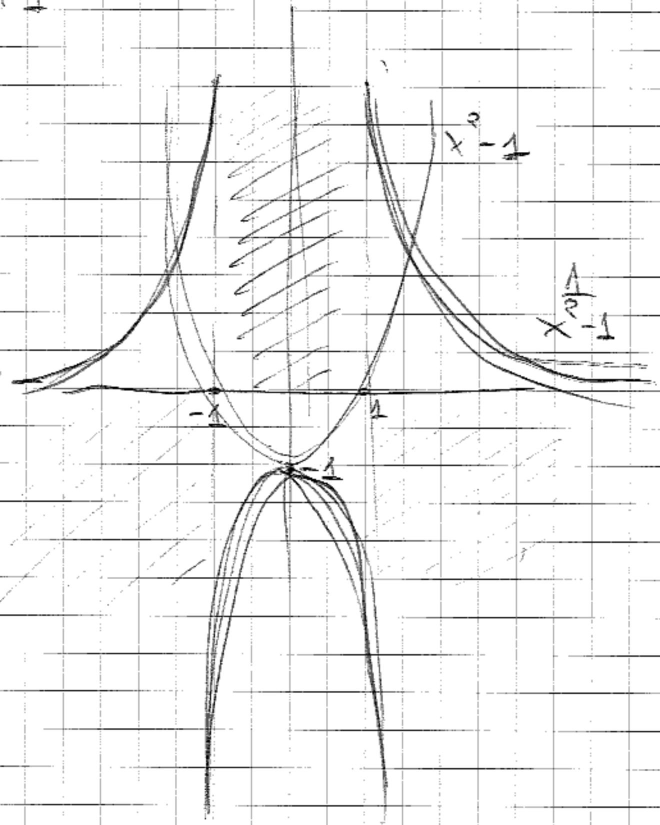
$$\iff x \in dom(f),\ y = f((x-c)+c)$$
$$\iff x - c \in dom(h),\ y = h(x-c)$$
$$\iff (x-c, y) \in graf(h)$$

si trasla orizzontalmente

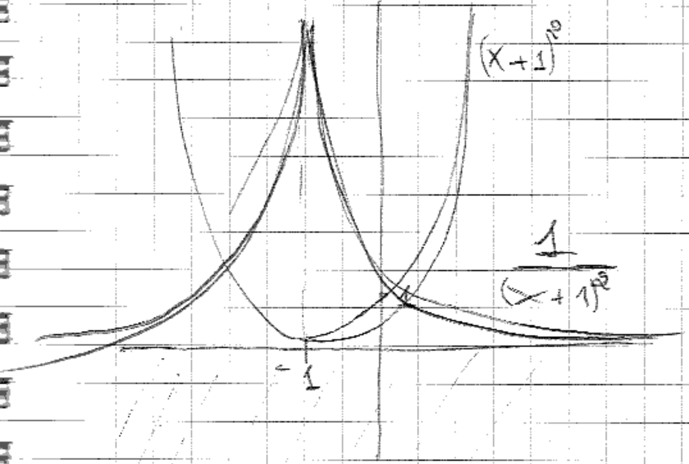
verso sx se c positivo,
verso dx se c negativo

$$x^2 \to x^2+1 \to \frac{1}{x^2+1}$$





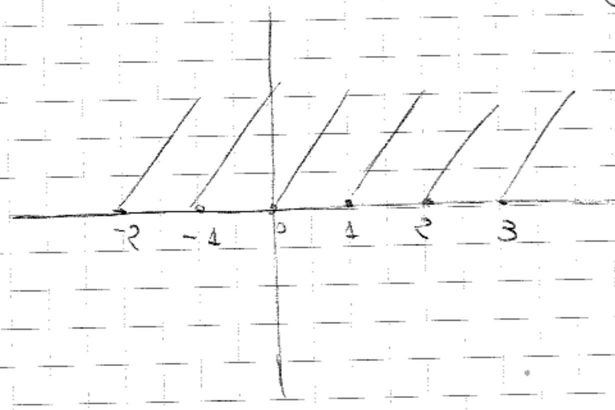
$$x^2 \to (x+1)^2 \to \frac{1}{(x+1)^2}$$



$\lfloor x \rfloor$ = parte intera inferiore

$f(x) = x - \lfloor x \rfloor$

funzione mantissa



Riscalamento

$g(x) = c f(x)$ $\quad$ $h(x) = f(cx)$

~~si comprime verticalmente~~ ~~si dilata verticalmente~~

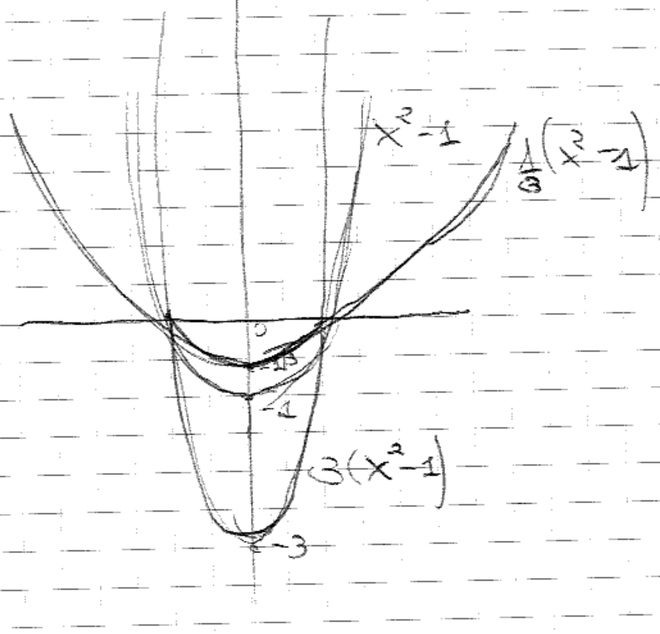
$g(x) \rightarrow$ se $0 < c < 1$ si comprime verticalmente

$c > 1$ si dilata verticalmente

$f(x) = x^2 - 1$

$f_1(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 1)$

$f_2(x) = 3(x^2 - 1)$



~~se~~ $h(x) = f(cx)$

se $0 < c < 1$ si dilata orizzontalmente

se $c > 1$ si comprime orizzontalmente

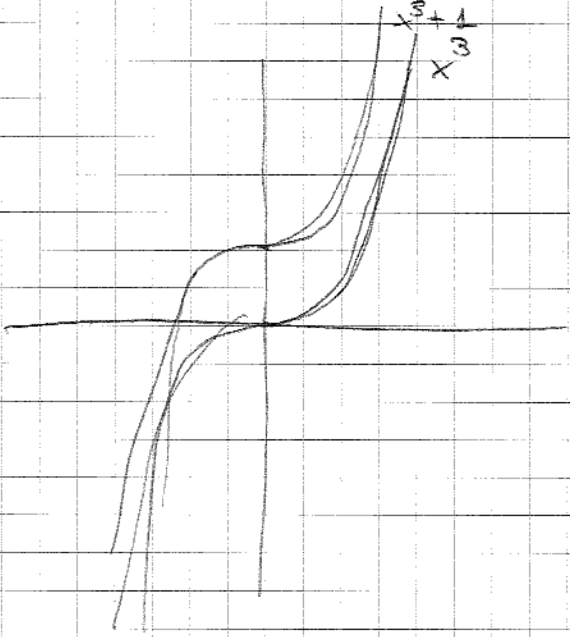
Riflessione rispetto agli assi

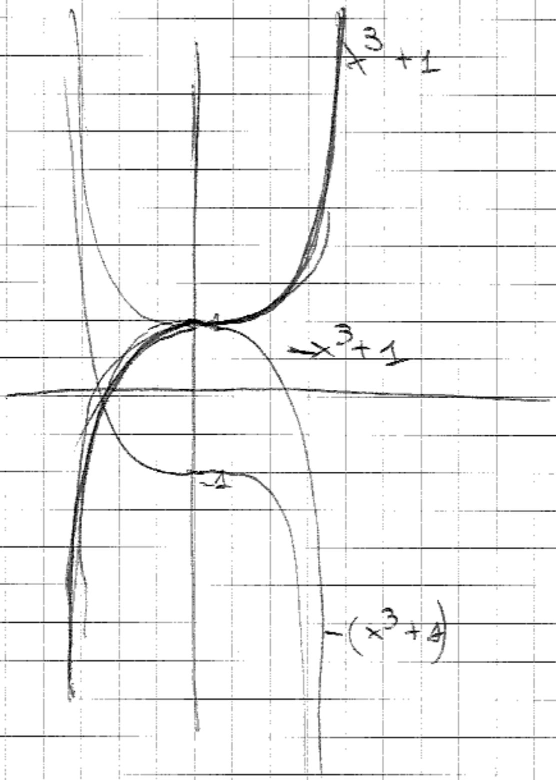
$g(x) = -f(x) \longrightarrow$ si riflette specularmente rispetto all'ascissa

$h(x) = f(-x) \longrightarrow$ si riflette specularmente rispetto all'ordinate

$x^3 \to x^3 + 1 \to -(x^3+1)$

$\to -x^3 + 1$





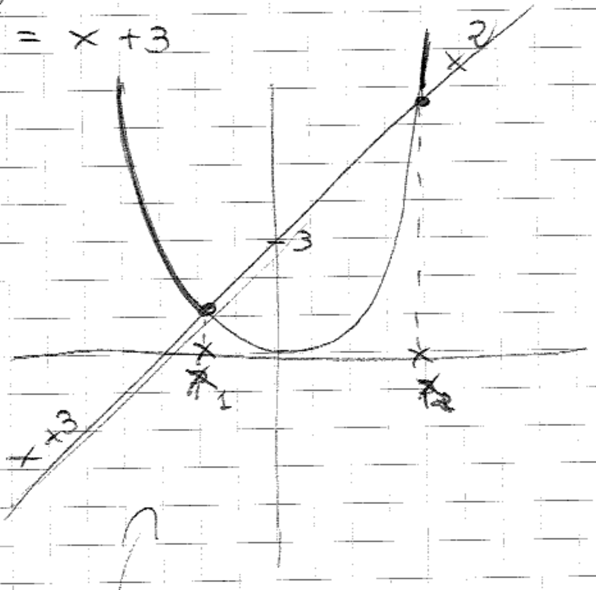
Con val. assoluto

$g(x) = |f(x)|$ — si riflette specularmente per valori negativi

$h(x) = f(|x|)$ — si riflette specularmente rispetto all'asse delle ordinate le parti che sono a dx di tale asse.

Risoluzione grafica di equazioni e disequazioni

$x^2 = x + 3$

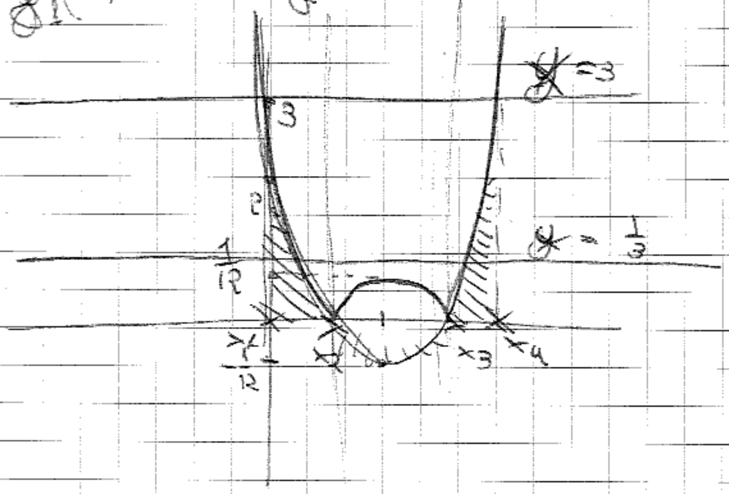


x_1 e x_2 sono soluzioni di $x^2 = x + 3$

$x^2 > x + 3$ — la soluzione di questa equazione è $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$

$$f(x) = |3x^2 - 5x + 2|$$

$$\underbrace{\tfrac{1}{3}}_{g_1(x)} \le f(x) < \underbrace{3}_{g_2(x)}$$



$$(x_1, x_2] \cup [x_3, x_4)$$

$$y = 3x^2 - 5x + 2$$

$$= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x\right) + 2$$

$$= 3\left(\underbrace{x^2 - 2x\frac{5}{6} + \frac{25}{36}}_{= (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} - \frac{25}{36}\right) + 2$$

$$= 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{12} + 2$$

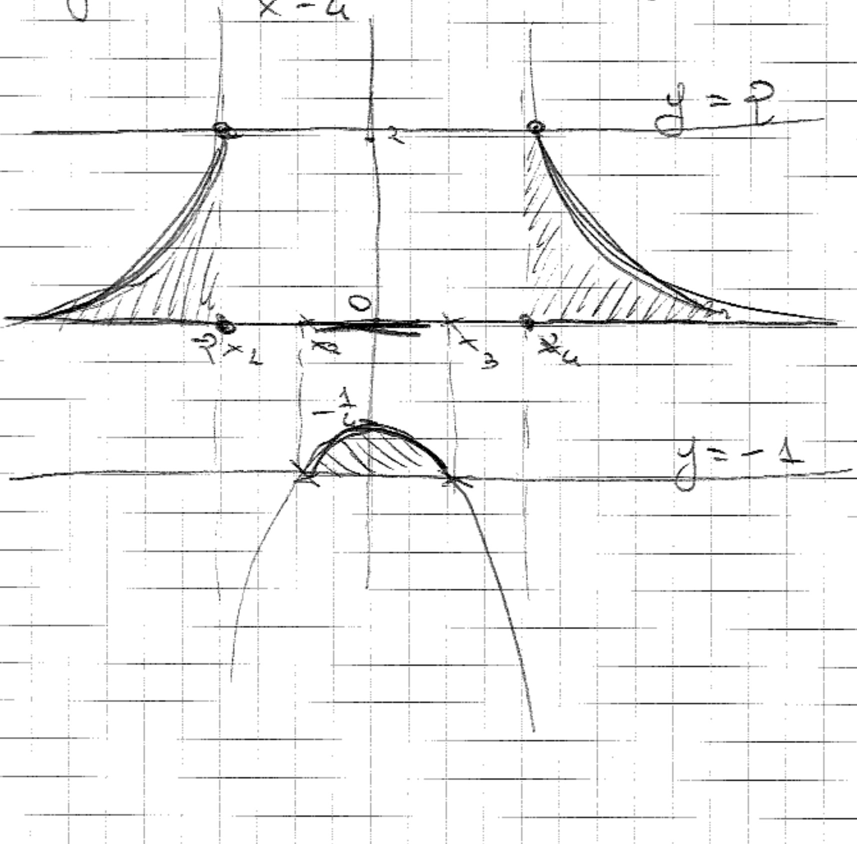
$$= 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{12}$$

$$x_v = 5/6 \qquad a = 3$$

$$y_v = -\frac{1}{12}$$

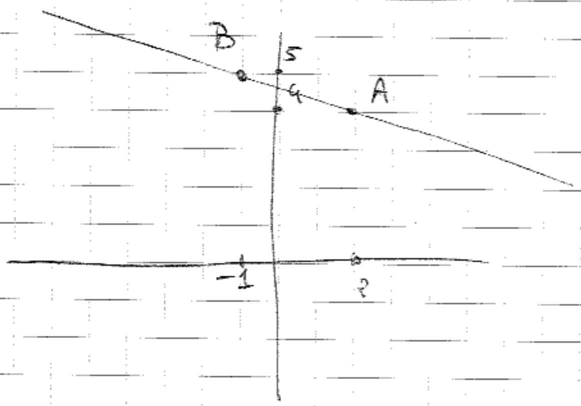
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} \qquad -1 < f(x) \le 2$$

$$(-\infty, x_1], \cup [x_2, x_3) \cup [x_4, +\infty)$$



Recupero

1) Retta passante per $(2,4)$ e $(-1,5)$ $m=?$



$$\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

$$\frac{y-4}{x-2}=\frac{5-4}{-1-2}$$

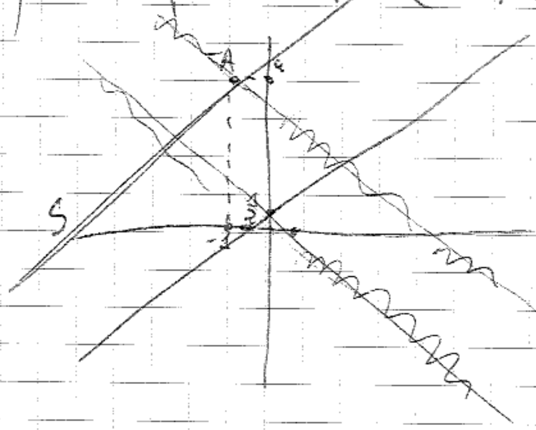
$$\frac{y-4}{x-2}=-\frac{1}{3} \qquad m=-\frac{1}{3}$$

$$y-4=-\frac{1}{3}(x-2)$$

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}+4$$

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$$

2) retta passante per $A(-1,4)$ e $\parallel$ a $3x-2y+1=0$



$$\begin{cases} x=0: & y=\frac{1}{2} \\ y=0: & x=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$r: 3x-2y+1=0$

coeff. ang. di r

$r= 3x-2y+1=0 \Rightarrow$

$2y=3x+1$

$y=\boxed{\frac{3}{2}}x+\frac{1}{2} \qquad m=\frac{3}{2}$

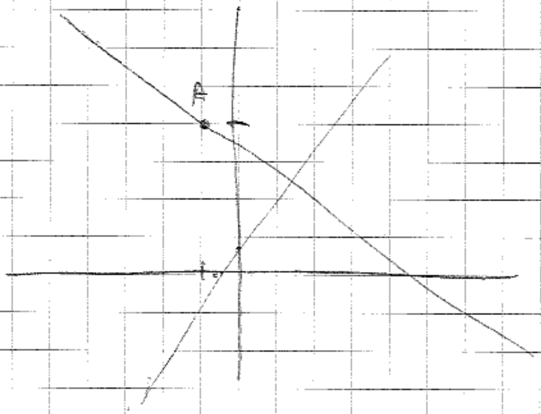
Eq di S?

$$\frac{y-y_A}{x-x_A}=m \Rightarrow \frac{y-4}{x+1}=\frac{3}{2}$$

$$y-4=\frac{3}{2}(x+1)$$

$$y=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}+4 \Rightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}$$

3) Retta passante per $A(-1,4)$, $\perp$ a $3x-2y+1$



$r \perp s \iff m_r \cdot m_s = -1$

sappiamo che $m_r = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow m_s = -\frac{2}{3}$

$$\frac{y-y_A}{x-x_A} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{y-4}{x+1} = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow y-4 = -\frac{2}{3}(x+1)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + 4$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$$

4) $r: y = 3x-2$ $\qquad$ r e s si intersecano dove?

$s: 5x+6y=0$ $\qquad$ $m_r = 3$ $\quad$ $m_s \Rightarrow 6y = -5x \Rightarrow y = -\frac{5}{6}x$

$m_r \neq m_s$ $\qquad$ $r \nparallel s$

$$\begin{cases} y = 3x-2 \\ 5x+6y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x-2 \\ 5x+6(3x-2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x-2 \\ 5x+18x-12=0 \end{cases} \Rightarrow 23x = 12$$

$$x = \frac{12}{23}$$

$$x = \frac{12}{23}$$

$$y = 3\left(\frac{12}{23}\right) - 2 = \frac{36}{23} - 2 = \frac{36-46}{23} = \frac{-10}{23} \Rightarrow y = -\frac{10}{23}$$

si intersecano in $\left(\frac{12}{23}, -\frac{10}{23}\right)$

5) $r: 3x - 5y + k = 0$

$r: 2x - y + 1 = 0$ $\qquad r \perp s$? si

$s: y = ax + 3$ $\qquad m_r = 2 \quad m_s = 4$

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ y = ax - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - ax + 1 = 0 \\ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$$

r e s si intersecano in $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

$3x - 5y + k = 0$

$\Rightarrow 5y = 3x + k \Rightarrow y = \frac{3}{5}x + \frac{k}{5} \Rightarrow y = \frac{3}{5}x + \frac{k}{5}$

$y = \frac{3}{5}x + \frac{k}{5}$ passante per $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

$-1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{k}{5} \Rightarrow -1 = \frac{3}{10} + \frac{k}{5} \Rightarrow \frac{k}{5} = -1 - \frac{3}{10} \Rightarrow$

$k = -5 - \frac{3}{2} \Rightarrow k = \frac{-10-3}{2} \Rightarrow k = -\frac{13}{2}$

6) Eq circonferenza: centro $(2,1)$ $R=3$

$C(x_0, y_0)$ $R>0$

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$

7) centro $(0,0)$ $R=2$

$x^2 + y^2 = 4$

8) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$ (stabilire se è eq. di circ)

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$

$x^2 + 2x + y^2 - 6y = 15 \iff$

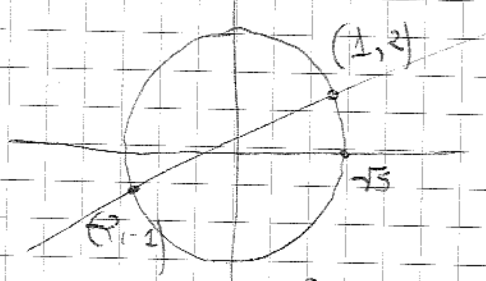
$\iff \underbrace{x^2 + 2x + 1} - 1 + \underbrace{y^2 - 6y + 9} - 9 = 15$

$(x+1)^2 + (y-3)^2 - 10 = 15 \iff$

$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25 \Rightarrow (x-(-1))^2 + (y-3)^2 = 5^2$

9) $x^2 + y^2 = 5$

$y = x + 1$



$(1, 2)$

$(-2, -1)$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (x+1)^2 = 5 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} < \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix}$

Successioni

~~$V(-2,1)$ $y = a(x-\alpha)^2 + \gamma$ $\alpha = x_V$~~
~~$V(0,3)$ $y = a(x+2)^2 + 1$ $\gamma = y_V$~~

Prolungamento $\longrightarrow$ naturale se basta sostituire la variabile continua x a quella di intero n in una successione (es: $\frac{1}{n} \to \frac{1}{x}$)

↳ non sempre un prolungamento è naturale (es: $(-1)^n \to \cos(\pi x)$)

↳ non sempre esiste un prolungamento

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente $\iff \forall n, m \in \mathbb{N},\ n < m \Rightarrow a_n \leq a_m$

$$\Downarrow$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ crescente $\iff \forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$

$\forall n \geq 1: \quad n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \iff a_n > a_{n+1}$

$\Rightarrow \left\{\frac{1}{n}\right\}$ è strettamente decrescente

$a_n = \frac{n-1}{n}$

Tesi: $a_n < a_{n+1} \iff \frac{n-1}{n} < \frac{n+1-1}{n+1}$

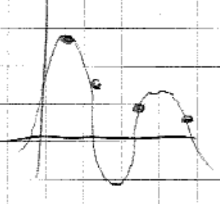
$\iff \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$

$\iff (n-1)(n+1) < n^2 \iff n^2 - 1 < n^2$

$\iff -1 < 0$ VERO!!!

Se la funzione è crescente, anche la successione è crescente ma non è sempre vero il contrario

Es:



Verificare che $a_n = n + (-1)^n / n$

Proprietà vera definitivamente: da un certo punto in poi.

? $n - 5 > 0$ per n suff. grande

$n > 5 \iff n \geq 6$

? $\frac{n^4}{4^n}$ è definitiv. decrescente

$a_{n+1} < a_n \Rightarrow \frac{(n+1)^4}{4^{n+1}} < \frac{n^4}{4^n}$

$\iff \frac{(n+1)^4}{4} < n^4 \iff (n+1)^4 < 4n^4$

$\iff (n+1)^2 < 2n^2 \iff 2n^2 - (n+1)^2 > 0$

$\iff 2n^2 - n^2 - 2n - 1 > 0 \iff n^2 - 2n - 1 > 0$

è vero se $n \geq 3$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+1}}{} = 1 \pm \sqrt{2}$

$x < 1 - \sqrt{2}, \quad x > 1 + \sqrt{2}$

successione infinitesima se $|a_n| < \varepsilon$ da un certo punto in poi (definitivamente)

(ν_ε = valore ~~posso~~ dal quale è vera la successione infinitesima)

$\boxed{a_n = \frac{1}{n}}$ Tesi: a_n infinitesima

Sia $\varepsilon > 0$, $|a_n| < \varepsilon$

$\iff \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\iff \boxed{n > \frac{1}{\varepsilon}}$ $\left(\nu_\varepsilon = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1\right)$

$\boxed{a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}}$ Tesi: a_n infinitesima

Sia $\varepsilon > 0$, $|a_n| < \varepsilon \iff \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| < \varepsilon$

$\iff \frac{|(-1)^n|}{|n^2|} < \varepsilon \iff \frac{1}{n^2} < \varepsilon$

$\iff n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \iff \boxed{n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}}$ $\left(\nu_\varepsilon = \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \right\rfloor + 1\right)$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$: $\nu_\varepsilon = \lfloor \sqrt{2} \rfloor + 1 = 2$

$\varepsilon = \frac{1}{10}$ $\nu_\varepsilon = \lfloor \sqrt{10} \rfloor + 1 = 4$

$\varepsilon = \frac{1}{100}$ $\nu_\varepsilon = \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{100}} \right\rfloor + 1 = 11$

$(-1)^n$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$

$|a_n| < \varepsilon$ $\qquad |(-1)^n| < \varepsilon \iff 1 < \frac{1}{2}$ falso sempre

---

$a_n = \frac{n-1}{n}$ $\qquad \varepsilon = \frac{1}{2}$ $\qquad a_n < \varepsilon$

$$\left|\frac{n-1}{n}\right| < \frac{1}{2} \iff \frac{n-1}{n} < \frac{1}{2}$$

$$\iff 1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} < \frac{1}{n}$$

$$\iff 2 > n \iff n < 2 \qquad (n = 1)$$

Con $\varepsilon = 1/2$, è vero solo per $n = 1$, ergo non è infinitesima.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \iff \{a_n - a\} \text{ infinitesima}$$

Tesi: $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ converge a 1

Def: $\left\{\frac{n-1}{n} - 1\right\}$ è infinitesima

$\iff \left\{1 - \frac{1}{n} - 1\right\}$ è infinitesima

$\iff \left\{-\frac{1}{n}\right\}$ è infinitesima.

$a_n = -\frac{1}{n}$ $\qquad |a_n| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \Leftarrow$ è infinitesima

$a_n = n^3$ diverge positivamente

$M > 0 \quad a_n > M$

$\iff n^3 > M \iff \boxed{n > \sqrt[3]{M}}$ $\quad \nu_M = \left[\sqrt[3]{M}\right] + 1$

$a_n = \frac{n+1}{n}$ non diverge positivamente

$= 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + 1 = 2$ (sarà sempre $a_n \leq 2$) quindi non può divergere positivamente

---

Successione regolare: ammette limite

non regolare / indeterminata: non ammette limite

DIM: ipotesi $\{a_n\} \uparrow$ $\qquad$ $\uparrow$ = crescente

Tesi: $a_n \to \sup(a_n) =: \ell$

$(\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$

1° caso: $\ell \in \mathbb{R}$

$a_n \to \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \ni' \forall n \geq \nu:$

$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

Sia $\varepsilon > 0$. ℓ in quanto sup è maggiorante di $\{a_n\}$.

$a_n \leq \ell \ \forall n \Rightarrow a_n < \ell + \varepsilon \ \forall n$

$\ell = \sup a_n \Rightarrow \ell - \varepsilon \ (< \ell)$ non è maggiorante di $\{a_n\}$

$\Rightarrow \exists \nu \in \mathbb{N} \ni' a_\nu > \ell - \varepsilon$

Se $n \geq \nu$: $a_n \geq a_\nu \Rightarrow \forall n \geq \nu: a_n > \ell - \varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall n \geq \nu: \ \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

2^o caso! ~~caso~~ $l = +\infty$

$M > 0$ Tesi: $\exists\, r \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq r$:

$\{a_n\}$ illimit. sup. $\Rightarrow M$ non è maggiorante $a_n > M$

$\Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{N} \ni a_r > M$

$\Rightarrow \{a_n\}\uparrow \Rightarrow \underbrace{n \geq r:\ a_n \geq a_r > M}$

Progressione geometrica

$q = 1$ $\quad a_n = q^n = 1 \quad \forall n$

$\Rightarrow a_n \to 1$

$\square$

$q \neq 1$ $\quad \underbrace{a_{n+1}} = q^{n+1} = q \cdot q^n = \underbrace{q \cdot a_n}$

se $a_n \to l \in \mathbb{R}$: (Teorema unicità del limite)

$a_{n+1} \to l$

$q \cdot a_n \to q \cdot l$ $\quad l = q \cdot l$

$\Rightarrow l \underbrace{(1-q)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow l = 0$

$q > 1$: $\quad \underbrace{a_{n+1}} = q \cdot a_n > \underbrace{a_n} \Rightarrow \{a_n\}\uparrow\uparrow$

$\Downarrow$

$q^n > 1$

$\Rightarrow \{a_n\}$ ammette limite

(se monotona ha limite)

$\Rightarrow$ (vedere il Teorema) $\Rightarrow a_n \to +\infty$

$0 < q < 1$: $\quad a_{n+1} = q \cdot a_n < a_n \Rightarrow \{a_n\}\downarrow\downarrow \Rightarrow \underline{a_n \to 0}$

$q = 0$: $\quad q^n = 0 \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow a_n \to 0$

$-1 < q < 0$: $\quad |a_n| = |q^n| = |q|^n \Rightarrow$ (col val assoluto) $= q^n \quad 0 < q < 1$ (come sopra)

$q \leq -1$: $|a_n| = |q^n| = \underbrace{|q|}_{\geq 1}{}^n$ indeterminato

RSM : Regolarità Successioni Monotone

"Ogni successione monotona è regolare (ammette limite). Se la successione è crescente, $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(a_n)$, se è decrescente si ha che $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf(a_n)$."

<u>Successioni per ricorrenza</u>

Es: $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{a_n} \end{cases}$

Tesi: $1 \leq a_n \leq 2$ $\quad (*)$

Per induzione:

$n=1$ $\quad a_1 = 2$ $\quad (*)$ (vera)

Suppongo $*$ vera per n, lo provo per $n+1$

$1 \leq a_n \leq 2 \Rightarrow$

$\begin{cases} \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{a_n}{2} \leq 1 \\ \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{a_n} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq \underbrace{\boxed{\dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{a_n}}}_{a_{n+1}} \leq 2$

Provo che $\{a_n\}$ monotona decrescente

cioè: $a_{n+1} \le a_n \iff \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \le a_n$

$$\iff \frac{1}{a_n} \le \frac{a_n}{2} \iff \underbrace{2 \le a_n^2}_{(**)}$$

Per induzione:

$$n=1 \quad a_1 = 2 \Rightarrow 2 \le 2^2 \quad \text{(vero)}$$

Suppongo $a_n^2 \ge 2$, provo che $(a_{n+1})^2 \ge 2$

cioè: $\left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}\right)^2 \ge 2$

$$\left(\frac{a_n^2 + 2}{2a_n}\right)^2 \ge 2 \Rightarrow \left(\frac{a_n^4 + 4a_n^2 + 4}{4a_n^2}\right) \ge 2$$

$$\frac{a_n^4 + 4a_n^2 + 4 - 8a_n^2 + 8a_n^2}{4a_n^2} = \frac{a_n^4 - 4a_n^2 + 4}{4a_n^2} + \frac{8a_n^2}{4a_n^2}$$

$$= \underbrace{\frac{(a_n^2 - 2)^2}{4a_n^2}}_{\ge 0} + 2 = (a_{n+1})^2 \ge 2$$

Se suppongo $a_n^2 > 2 \Rightarrow (a_{n+1})^2 > 2$, in effetti $\{a_n\}$ è strettamente decrescente. Per RSM, $\{a_n\}$ converge.

A chi converge? Sia $a := \lim_n a_n$

$$a_{n+1} = \boxed{\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}} \leftarrow \text{tende a } \frac{a}{2} + \frac{1}{a}$$

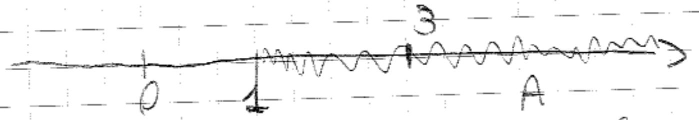
se $a_n \to a$, $\frac{a_n}{2} \to \frac{a}{2}$ se $a_n \to a$, $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$

a_{n+1} tende a a, $a = \frac{a}{2} + \frac{1}{a}$ (teorema unicità del limite)

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{a} \iff a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

Punto di accumulazione

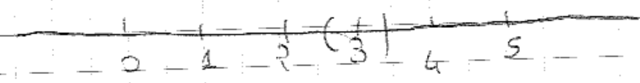
$A = (1, +\infty)$



$x_0 = 3$ punto di accumulazione per A
punto di accumulazione da dx
" " " da sx

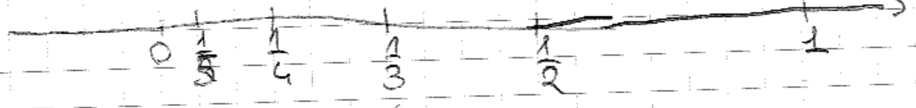
$x_0 = 1$ p.to di accumulazione
p.to di accumulazione da dx
<u>NON</u> è p.to di accumulazione da sx

$x_0 = 0$ <u>non</u> è p.to di accumulazione (la proprietà deve valere per ogni intorno)



Se consideriamo $\mathbb{N}$, non abbiamo p.ti di accumulazione.

$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$



0 p.to di accumulazione (per def. di successione infinitesima)

Successioni test

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n^2} + 3$$

$x_0 = 3$ $\qquad (1, +\infty) =: A$

$x_n > 1 \Rightarrow \underbrace{x_n \in A}$ ✓

$\frac{(-1)^n}{n^2} \neq 0 \Rightarrow \frac{(-1)^n}{n^2} + 3 \neq 3 \Rightarrow \underbrace{x_n \neq x_0}$ ✓

? $x_n \to x_0$

$x_n - x_0 = \frac{(-1)^n}{n^2} + 3 - 3 = \frac{(-1)^n}{n^2}$ è infinitesima

$\Downarrow$

$\underbrace{x_n \to x_0}$

$A = (1, +\infty) \qquad x_0 = 1$

$$x_n = \frac{n+1}{n}$$

(1) $x_n \in A$? $\Rightarrow \frac{n+1}{n} > 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} > 1$ ✓

(2) $x_n \neq x_0$? $\Rightarrow x_n > 1$ (per (1)) ✓

(3) $x_n \to x_0$? $\Rightarrow x_n - x_0 \to 0$?

$\Rightarrow \cancel{1} + \frac{1}{n} - \cancel{1} = \frac{1}{n}$ è infinitesima ✓

Dim. Successioni Test

Ipotesi: $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

x_0 p.to di accumulazione per A

Tesi: $\exists$ una successione Test per x_0 in A

Dim: x_0 p.to di acc. per $A \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ogni intorno di x_0 contiene un elem di A diverso da x_0.

$\Longleftrightarrow \forall \delta > 0, \exists x \in A, x \neq x_0$
$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$\Longleftrightarrow \forall \delta > 0 \; \exists x \in A \setminus \{x_0\} \ni' |x - x_0| < \delta$

scelto per comodità di dimostrazione

$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, scelto $\delta = \frac{1}{n}$,
$\exists x_n \in A \setminus \{x_0\} \ni' |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ (*)

Considero la successione $\{x_n\}$

(a) è verificata ($x_n \in A$) per costruzione
(b) è verificata ($x_n \in A \setminus \{x_0\}$) per costruzione
(c) ?

$x_n \to x_0 \Longleftrightarrow \{x_n - x_0\}$ infinitesima

$\Longleftrightarrow \{|x_n - x_0|\}$ è infinitesima.

per dimostrazioni precedenti

Fisso $\varepsilon > 0$; dato che $\frac{1}{n}$ è infinitesima, definitivamente ho: $\frac{1}{n} < \varepsilon$

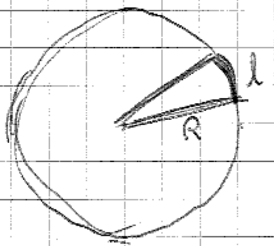
Dato che, per costruzione, $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, deduco che definitivamente ho: $|x_n - x_0| < \varepsilon$

$x_n \to x_0$ (Verificata la (c))

$\square$

Recupero

Misure in radianti dell'angolo:



$$\frac{l}{R}$$

Se la circonferenza è unitaria (raggio 1) i radianti sono $l/1 \Rightarrow l$

Angolo	°	rad
giro	360	2π
piatto	180	π
retto	90	$\pi/2$
	45	$\pi/4$
	60	$\pi/3$
	30	$\pi/6$

$R=1$

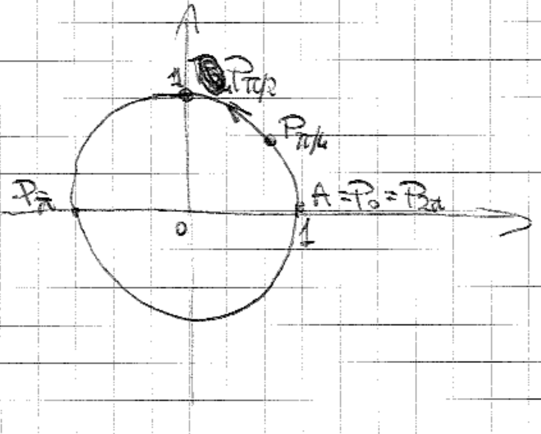
$l = 2\pi R$

$R = 1$

$\Rightarrow l = 2\pi$

$$\alpha_{gradi} : \alpha_{radianti} = 360° : 2\pi$$

$$14° = \alpha_{rad} = \frac{14}{360} \cdot 2\pi \simeq \frac{7}{90}\pi$$

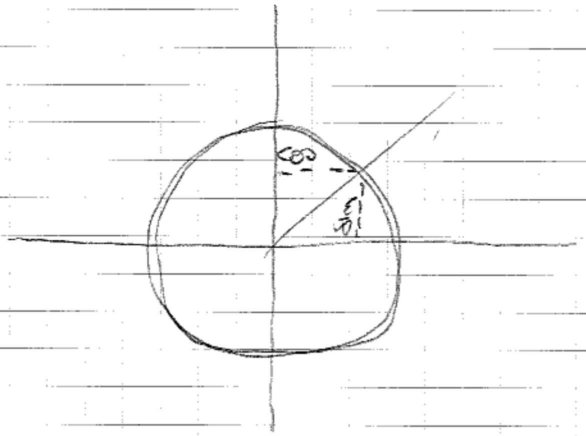


$0 \leq t \leq 2\pi$

$t \rightarrow$ unico punto P sulla circonferenza unitaria tale che la lunghezza dell'arco compreso tra A e P sia uguale a t

FAP-PEAP
FAP-MSCH eP-JR

t	sin	cos
0	0	1
2π	0	1
π	0	-1
$\pi/2$	1	0
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$



$$\begin{cases} \sin(t+2\pi) = \sin t \\ \cos(t+2\pi) = \cos t \end{cases}$$

sin e cos sono funzioni periodiche di periodo 2π

$\sin : t \in \mathbb{R} \mapsto \sin t$

$\cos : t \in \mathbb{R} \mapsto \cos t$

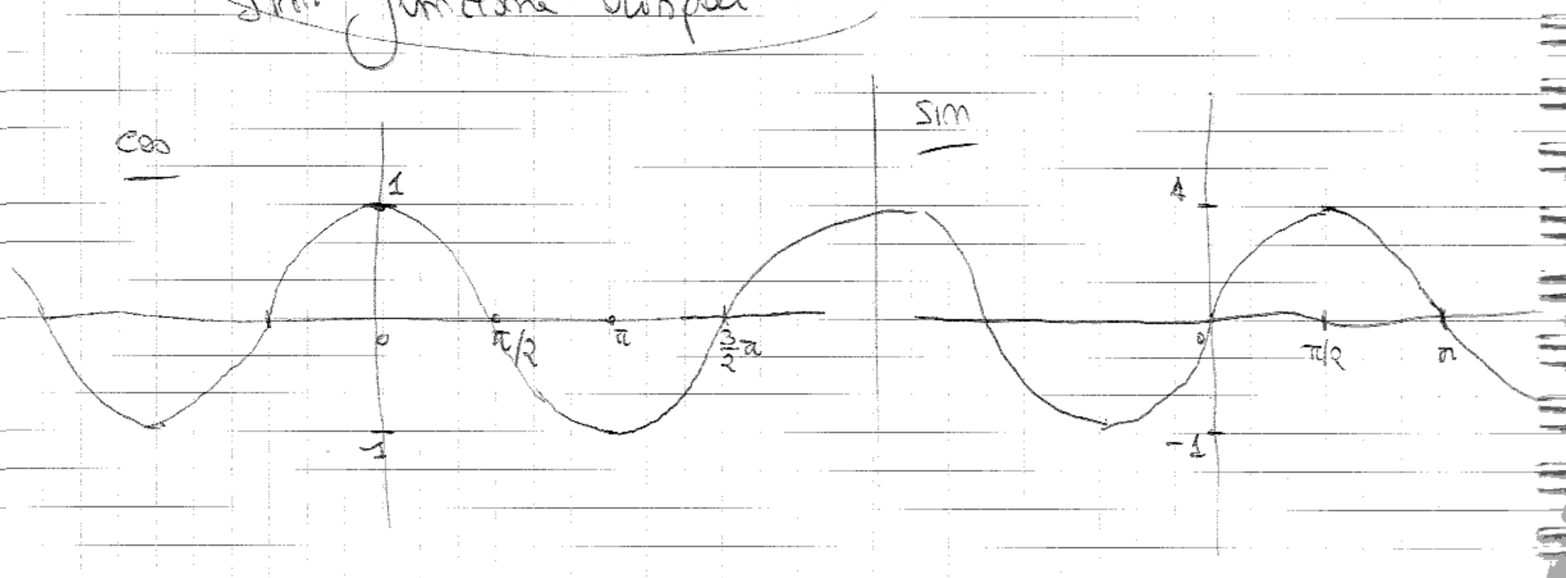
funzione pari : { simmetrica rispetto all'asse delle ordinate
calcolata in $-x$ torna x $(\cos(t) = \cos(-t))$

$\sin(-t) = \sin(t)$

...

cos: funzione pari

sin: funzione dispari



$$(\sin t)^2 + (\cos t)^2 = 1$$

$\cos^2 t = (\cos t)^2$

$\sin^2 t = (\sin t)^2$

Formule di addizione

$$\cos(t+s) = \cos t \cdot \cos s - \sin t \cdot \sin s$$

$$\sin(t+s) = \sin t \cdot \cos s + \cos t \cdot \sin s$$

Formule di duplicazione

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$$

$$= 1 - 2\sin^2 t$$

$$= 2\cos^2 t - 1$$

$$\sin(2t) = 2\sin t \cdot \cos t$$

Formule di bisezione

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$$

$$\frac{\pi}{8} = \frac{\pi/4}{2} \qquad \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = ? \rightarrow \frac{1 - \cos(\pi/4)}{2} = \frac{1 - 1/\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1 - 1/\sqrt{2}}{2}}$$

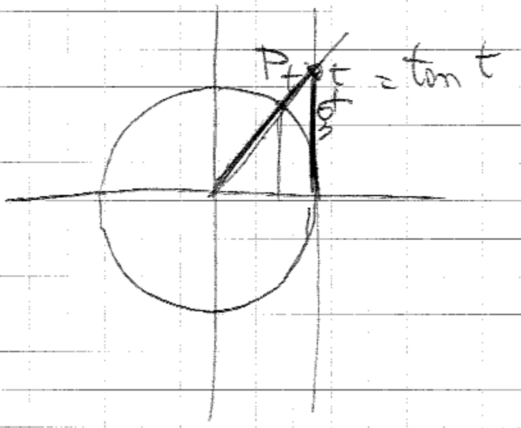
tangente

$\tan : t \in \cancel{\mathbb{R}} \longmapsto \tan t := \frac{\sin t}{\cos t}$

$\{t \in \mathbb{R} \mid \cos t = 0\}$

$\Longleftrightarrow$

$\{t \in \mathbb{R} \mid t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$



$\tan(-t) = -\tan(t)$

tan t è una funzione periodica di periodo π

$\tan 0 = 0$

$\tan \pi = 0$

$\tan \pi/4 = 1$

$\tan \pi/6 = \frac{\sin \pi/6}{\cos \pi/6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

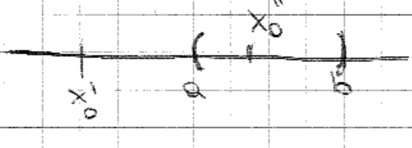
$\tan \pi/3 = \sqrt{3}$

Punto di accumulazione su $\pm\infty$

A illimitato superiormente $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall M>0, \exists x \in A, x>M$

$M = n \in \mathbb{N}$ $\quad \exists x_n \in A$ s' $x_n > n$

$\{x_n\} \Rightarrow x_n \to +\infty$



x_0' p.to di acc.? no

x_0'' " " " si (sia da dx che da sx)

se $x_0 = a$, p.to di acc. da dx

se $x_0 = b$, p.to di acc. da sx

gli estremi di un intervallo sono sempre punti di accumulazione

$[a, +\infty) \cup \{+\infty\} =: [a, +\infty]$

$[a, +\infty]$

$$\begin{cases} x_0 = a, & \text{p.to di accumulazione solo da dx} \\ x_0 > a & \text{p.to di accumulazione sia da dx che da sx} \end{cases}$$

Proprietà vere vicino a un punto

$P(x): \; 3 - x^2 > 0$ $\qquad A = \mathbb{R}$

$\iff$ $\qquad x_0 = 0$

$x^2 - 3 < 0$

$\iff -\sqrt{3} < x < +\sqrt{3} \iff x \in \underbrace{(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})}_{\text{intorno di } 0} \; (\delta = \sqrt{3})$

$P(x): \; (1 - |x|)\, x^4 > 0$ $\qquad A = \mathbb{R}$

$x_0 = 0$

$1 - |x| > 0 \iff |x| < 1$

$\iff -1 < x < 1$

$x^4 > 0 \iff \forall x \neq 0$

		-1		0		1	
$1-\lvert x\rvert$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
x^4	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$(1-\lvert x\rvert)x^4$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

$P(x): \; (1-|x|)\, x^4 > 0$

$P(x)$ verificata su $x \in (-1, 0) \cup (0, 1) = (-1, 1) \setminus \{0\}$

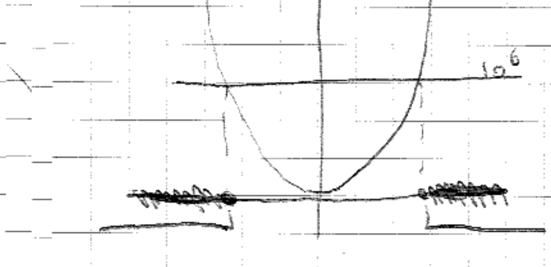
$P(x)$ verificata sull'intorno di 0 $(\delta = 1)$

$P(x): \; \frac{1}{x^2} < 10^{-6} \iff \frac{1}{x^2} < \frac{1}{10^6}$

$\iff x^2 > 10^6$

$\iff x < 10^3, \; x > 10^3$

$\iff \underbrace{x \in (-\infty, -10^3)}_{\text{intorno di } -\infty} \vee \underbrace{x \in (10^3, +\infty)}_{\text{intorno di } +\infty}$



$A = \mathbb{N}$, $x_0 = +\infty$, la $P(x)$ è vera definitivamente

~~xxxxx~~

$x_n \to \ell \in \mathbb{R} \iff \{x_n - \ell\}$ è infinitesima

$\iff \forall \varepsilon > 0$ definitiv. $|x_n - \ell| < \varepsilon \iff$

$\iff \varepsilon > 0$ definitiv. $\ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon$

$\iff \forall \varepsilon > 0$, definitiv. $x_n \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$

$\Downarrow$

$\forall$ intorno I di ℓ, definitivamente $x_n \in I$ $(*)$

$\sim$

$x_n \to +\infty \iff \forall M > 0$, definitiv. $x_n > M$

$\iff \forall M > 0$, definitiv. $x_n \in \underbrace{(M, +\infty)}_{\text{intorno di } +\infty}$

$\iff \forall$ intorno I di $+\infty$, definitiv. $x_n \in I$ $(**)$

Dato $*$ e $**$, $\{x_n\} \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se per ogni intorno I di ℓ si ha $x_n \in I$ definitivamente.

A

$A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

x_0 p.to di accumulazione per A

Sono equivalenti:

① $P(x)$ è vera in A vicino a x_0

② Per ogni successione test $\{x_n\}$ per x_0 in A, la proprietà $P(x_n)$ è vera definitivamente

Dim: $(1) \overset{\text{implica}}{\Longrightarrow} (2)$

$① \Longleftrightarrow \exists\, I$ intorno di x_0 $\ni' \forall x \in (I \setminus \{x_0\}) \cap A$: $P(x)$ vera

Sia $\{x_n\}$ una succ. test per x_0 in A

$\Rightarrow \underbrace{x_n \in A}_{(a)}, \underbrace{x_n \neq x_0}_{(b)}, \underbrace{x_n \to x_0}_{(c)}$

$\Rightarrow \begin{cases} (1)\ x_n \in A \setminus \{x_0\} & \Leftarrow \text{ da (a) e (b)} \\ (2)\ \text{da (c)} \overset{\text{oss}}{\Longrightarrow} \text{definit. ho } x_n \in I \end{cases}$

(1) è vera per ogni x_n, (2) vera definit. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ definitivamente $x_n \in (A \setminus \{x_0\}) \cap I$

$\Rightarrow$ definitivamente $P(x_n)$ è vera (per la (1))

Dim: $(2) \overset{\text{implica}}{\Longrightarrow} (1)$

Per assurdo: $\forall I$ intorno di x_0, $\overbrace{\exists\, x \in I \cap A \setminus \{x_0\} \ni' P(x) \text{ non vera}}^{(*)}$

Supponiamo $x_0 \in \mathbb{R}$; $I_n = (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$ $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$

e trovo $x_n \in I_n \cap A \setminus \{x_0\} \ni' P(x_n)$ non è vera.

$\{x_n\}$ $\qquad x_n \in A \setminus \{x_0\}$

$$x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$$

Ragionando come per dim. succ. Test, si deduce che

$x_n \xrightarrow[(**)]{} x_0$, ma $\underbrace{x_n \in A, x_n \neq x_0}_{(*)}$, e $\underbrace{x_n \to x_0}_{(**)}$, implica una successione Test.

$P(x_n)$ definitivamente vero ⇐ assurdo □

$f(x) = c \qquad c \in \mathbb{R}$
$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\text{Tesi: } \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = c \quad \forall x_0 \in \overline{\mathbb{R}}}$$

Dim: Sia $\{x_n\}$ succ. test per x_0

Calcolo $f(x_n) = c \Rightarrow \{f(x_n)\}$ è la succ costante di valore c

$\Rightarrow f(x_n) \to c$. Presa una qualsiasi succ. test per x_0, il lim della $f(x)$ è c.

$f(x) = \frac{1}{x} \qquad x \in \mathbb{R}^*$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Sia $\{x_n\} \in \mathbb{R}^*$ succ. Test per $+\infty$, cioè $x_n \to +\infty$

Valuto $f(x_n) = \frac{1}{x_n} \qquad \boxed{\text{Tesi: } \frac{1}{x_n} \to 0}$

Fisso $\varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} > 0$

Per ipotesi, $x_n \to +\infty \Rightarrow$ definitiv. $x_n > \frac{1}{\varepsilon} > 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} < \varepsilon$

~~Inoltre: $x_n \to +\infty$, definit~~ definit $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$.

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x_n} = 0$

$\boxed{f(x) = \frac{1}{x}}$ $\quad x \in \mathbb{R}^*$

$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$x = 0$ p.to di accumulaz.

Teor: $\nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

$\boxed{x_n = \frac{(-1)^n}{n}}$ ←  ← infinitesimo

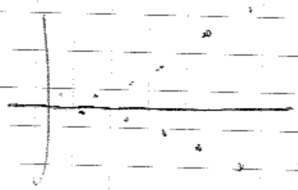
$x_n \neq 0$

$x_n \to 0$

x_n succ. test per $x_0 = 0$ in $\mathbb{R}^*$

Valuto $f(x_n) = \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{n}{(-1)^n} = \boxed{(-1)^n \cdot n}$ ← non converge, ma diverge

↓

 ← non è regolare

$\Updownarrow$

$x_n = \frac{1}{n}$ succ. test per $x_0 = 0$ (infinitesimo)

$y_n = -\frac{1}{n}$ " " "

Valuto: $f(x_n) = n \to +\infty$

$f(y_n) = -n \to -\infty$

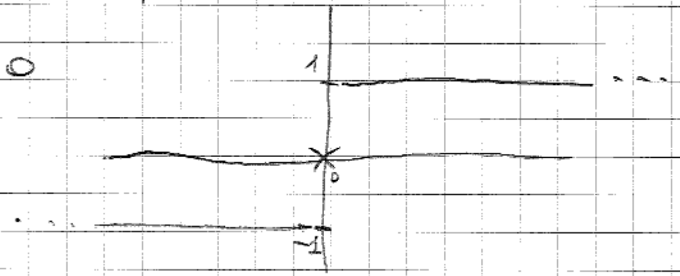
i limiti sono diversi, ergo $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ non esiste

Limite destro e limite sinistro

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}$$

$A = \mathbb{R}^*$

$x_0 = 0$



$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sign}(x) = 1$

$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sign}(x) = -1$

sono diversi, la funzione non ammette limite $\nexists \lim_{x \to 0} \operatorname{sign}(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{R} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$ funzione di <u>DIRICHLET</u>

$x_0 \in \mathbb{Q}$ Tes: $\nexists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

$x_n = x_0 + \frac{1}{n}$, $y_n = x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}$

si trovano a dx di x_0, sono infinitesime $\left(\frac{1}{n}, \frac{\sqrt{2}}{n}\right)$

$x_n \in \mathbb{Q} \to f(x_n) = 1$

$y_n \in \mathbb{R}$ (perché $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow f(y_n) = 0$

due limiti diversi

Teorema di convergenza dominata

$f, h \to \ell$ per $x \to x_0$

$f(x) \le g(x) \le h(x)$ vicino a x_0

Tesi: $g(x) \to \ell$ $x \to x_0$

Sia $\{x_n\}$ succ. test per x_0 $(\in A)$

$f \to \ell \Rightarrow f(x_n) \to \ell$ $(*)$

$h \to \ell \Rightarrow h(x_n) \to \ell$ $(**)$

Sia $\varepsilon > 0$

$(*)$ definit. $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x_n) < \ell + \varepsilon$ /

$(**)$ definit. $|h(x_n) - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon < h(x_n) < \ell + \varepsilon$ //

Da $f(x) \le g(x) \le h(x)$ vicino a x_0,
definit. $f(x_n) \le g(x_n) \le h(x_n)$

$$\ell - \varepsilon < f(x_n) \le g(x_n) \le h(x_n) < \ell + \varepsilon$$

$\Rightarrow$ definitivamente $\ell - \varepsilon < g(x_n) < \ell + \varepsilon$

$$\Downarrow$$

$g(x_n) \to \ell \Rightarrow g(x) \to \ell$ per $x \to x_0$

Limiti e operazioni algebriche

Tesi:
$$f(x) + g(x) \to l_1 + l_2$$

Ipotesi:
$$x \to x_0 \qquad f \to l_1 \in \mathbb{R}$$
$$g \to l_2 \in \mathbb{R}$$

Dim:

Sia $\{x_n\}$ succ. test per x_0 in A

Sia $\boxed{\varepsilon > 0} \Rightarrow \varepsilon/2 > 0$ def. lim.

$f \to l_1 \Rightarrow f(x_n) \to l_1 \Rightarrow |f(x_n) - l_1| < \varepsilon/2$

$g \to l_2 \Rightarrow g(x_n) \to l_2 \Rightarrow$ def. lim. $|g(x_n) - l_2| < \varepsilon/2$

$$|(f+g)(x_n) - (l_1 + l_2)| = |f(x_n) + g(x_n) - l_1 - l_2| =$$

$$|\underbrace{(f(x_n) - l_1)} + \underbrace{(g(x_n) - l_2)}|$$

Proprietà triangolare del val. assoluto: $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ |x+y| \leq |x| + |y|$

$$|(f(x_n) - l_1) + (g(x_n) - l_2)| \leq |f(x_n) - l_1| + |g(x_n) - l_2|$$

def. lim. $< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

$$f + g \to l_1 + l_2 \qquad \square$$

Ipotesi: $x \to x_0$ $\quad f \to l_1$, $g \to l_2$ $\in \mathbb{R}$

Tesi: $f \cdot g \to l_1 \cdot l_2$

Dim: Sia $\{x_n\}$ una succ test per x_0 in A
Sia $\varepsilon > 0$

$\{g(x_n)\}$ è limitata $\Rightarrow \exists_{M>0} \ni' g(x_n) \leq M \ \forall_n$

$g \to l_2 \Rightarrow g(x_n) \to l_2$ $\quad |g(x_n) - l_2| \overset{\text{def.lim.}}{<} \varepsilon/(M + |l_1|)$

$f \to l_1 \Rightarrow f(x_n) \to l_1 \Rightarrow |f(x_n) - l_1| \overset{\text{def.lim.}}{<} \varepsilon/(M + |l_1|)$

$|(fg)(x_n) - l_1 l_2| = |f(x_n) g(x_n) - l_1 l_2| =$

$|\underline{f(x_n) g(x_n) - l_1 g(x_n)} + \underline{l_1 g(x_n) - l_1 l_2}| \leq$

$\leq |(f(x_n) - l_1) g(x_n)| + |l_1 (g(x_n) - l_2)| =$

$= |f(x_n) - l_1| \cdot |g(x_n)| + |l_1| \cdot |g(x_n) - l_2|$

$\overset{\text{def.lim.}}{<} \dfrac{\varepsilon}{M + |l_1|} \cdot M + |l_1| \cdot \dfrac{\varepsilon}{M + |l_1|} = \dfrac{\varepsilon}{\cancel{M + |l_1|}} \cancel{(M + |l_1|)} = \varepsilon$ $\square$

Operazioni con funzioni divergenti

serono

(1) Ipotesi:

- $x \to x_0$: $f \to 0$
- $f(x) > 0$ vicino a x_0

Tesi: $1/f$ diverge positivamente

Dim: Sia $\{x_n\}$ succ test per x_0 in A

Tesi: $(1/f)(x_n)$ div. positivamente

Sia $M > 0 \Rightarrow 1/M > 0$

$f \to 0$ per $x \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to 0 \Rightarrow \underbrace{\text{def. int. } |f(x)| < \frac{1}{M}}_{(1)}$

$f(x) > 0$ vicino a $x_0 \Rightarrow$ (pag. 14 cap preliminari)

$\underbrace{\text{Def. int. } f(x_n) > 0}_{(2)} \xRightarrow{\text{da (1) e (2)}} 0 < f(x_n) < \frac{1}{M}$ def. int.

$\Rightarrow \frac{1}{f(x_n)} > M \Rightarrow$ diverge (per def di f divergente)

□

(3) Ipotesi: $f \to 0$ per $x \to x_0$, f cambia segno in ogni intorno di x_0

Tesi: $1/f$ non ha limite per $x \to x_0$

Dim: Per assurdo supp. $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

$l \in (0, +\infty] \xRightarrow{\text{teorema perm segno}} \frac{1}{f} > 0$ vicino a $x_0 \Rightarrow f > 0$ vicino a x_0 (assurdo!)

$l \in [-\infty, 0) \Rightarrow \frac{1}{f} < 0$ vicino a $x_0 \Rightarrow f < 0$ vicino a x_0 (assurdo)

$l = 0 \Rightarrow \frac{1}{f} \to 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{f}\right| \to 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{|f|} \to 0, \ \frac{1}{|f|} > 0}$

quindi da dim (1) $\frac{1}{\left(\frac{1}{|f|}\right)}$ div positivamente $\Rightarrow |f|$ div. positivamente (ma la tesi era che $f \to 0$) assurdo

□

Limiti e operazioni algebriche

Ipotesi: • f limitata vicino a x_0

• $g \to 0 \quad x \to x_0$

Tesi: $fg \to 0 \quad x \to x_0$

Dim: Sia $\{x_n\}$ succ test per x_0 in A
sia $\varepsilon > 0$

pag 14 cap preliminari

f limitata vicino a $x_0 \Rightarrow \{f(x_n)\}$ limitata definit.

$\Rightarrow \exists M > 0 \ni |f(x_n)| \leq M \quad \forall n$

$\varepsilon/M > 0 \qquad |g(x_n)| < \varepsilon/M$ definit $(g \to 0)$

$\Rightarrow |(fg)(x_n)| = |f(x_n)|\,|g(x_n)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ □

Funzioni continue

~~$f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$~~ $\quad (c \in \mathbb{R})$

Tesi: f è continua in $x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Tesi: $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

So che: (già visto) $\exists \underbrace{\lim_{x \to x_0} f(x) = c \qquad f(x_0) = c}_{\text{continuità}}$

$$\Downarrow$$

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

serono

funt. identica

$f(x) = x \qquad x_0 \in \mathbb{R}$

$f(x_0) = x_0$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0 \qquad \square$

$f(x) = |x| \qquad A = \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R} \qquad$ Tesi: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0|$

Sia $\{x_n\}$ succ test per x_0 in A

Tesi: $|x_n| \to |x_0|$

$||x| - |y|| \leq |x-y|$

$0 \leq \underbrace{||x_n| - |x_0||}_{\text{infinitesima}} \leq \underbrace{|x_n - x_0|}_{\text{infinitesima}}$

convergenza dominata

infinitesima

$|x_n| \to |x_0|$

$\square$

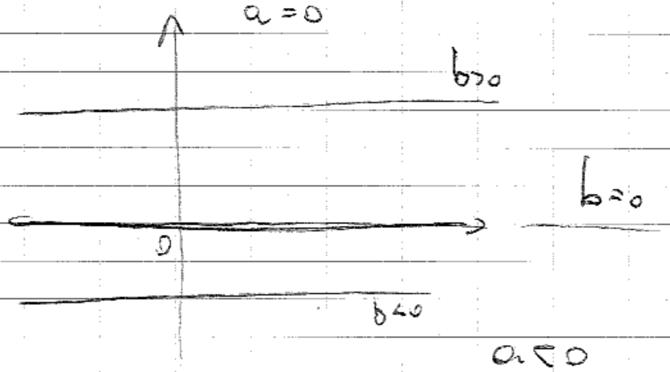
$f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad A = \mathbb{R}^*$

$x_0 \in \mathbb{R}^*$ $\qquad f(x_0) = \frac{1}{x_0}$

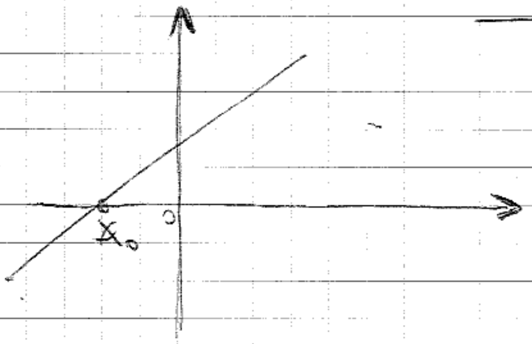
$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$ (~~[illegible]~~ Regola del limite reciproco)

Recupero

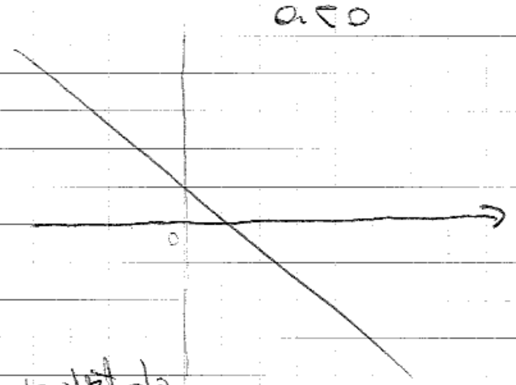
$f(x) = ax + b$



a>0



a<0



$f(x) = 0 = x_0$

$f(x) > 0$ ~~[illegible]~~ $\in [x_0, +\infty)$ intervallo [illegible]

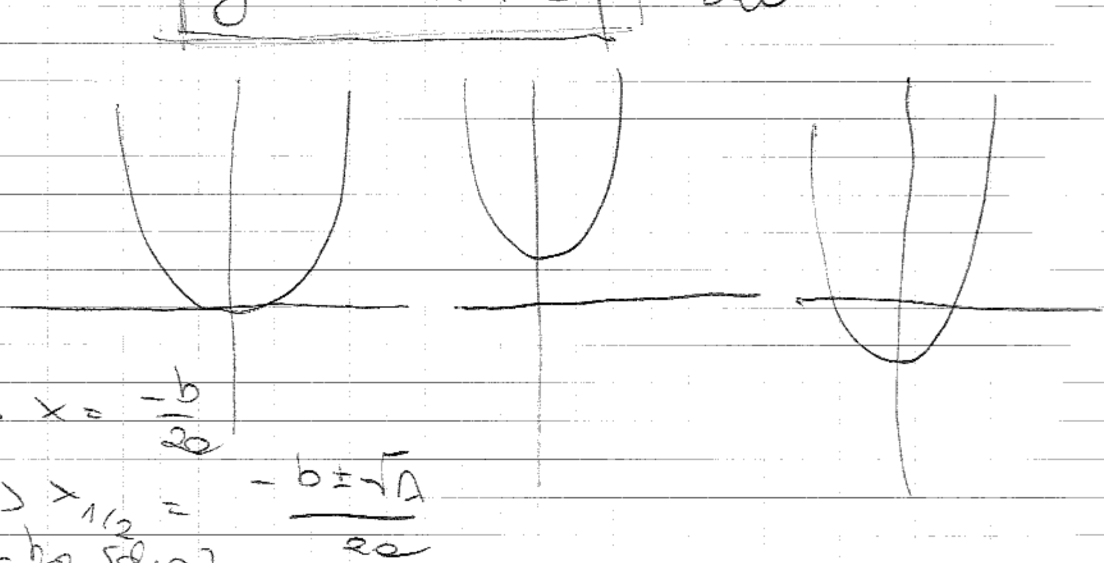
$f(x) < 0 = (x_0, -\infty)$

$ax_0 + b = 0$

$ax_0 = -b$

$x_0 = -\frac{b}{a}$

$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$ parabola



$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$

$\Delta > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta < 0$ non ho soluz.

$x^2 - 5x + 6 > 0 \qquad a = 1, \quad b = -5, \quad c = 6$

$a > 0 \mapsto$ concavità verso l'alto

$\Delta = 25 - 4 \cdot 6 = 1$

$\Delta > 0, \quad x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \dfrac{5 \pm 1}{2} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$

$f(x) = 6x^3 + 24x^2 + 18x = 0$

$\Leftrightarrow 6x(x^2 + 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow$

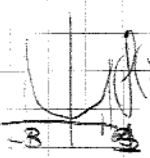
$\Leftrightarrow \boxed{x = 0} \lor \underbrace{x^2 + 4x + 3 = 0} \qquad S = \{0, -1, -3\}$

$\Delta = 16 - 12 = 4$

$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm 2}{2} \begin{matrix} -3 \\ -1 \end{matrix}$

$f(x) < 0$

	-3		-1		0	
$6x$	$-$		$-$		$-$ 0	$+$
x^2+4x+3	$+$ 0	$-$	0 $+$			$+$
$f(x)$	$-$ 0	$+$	0	$-$	0	$+$



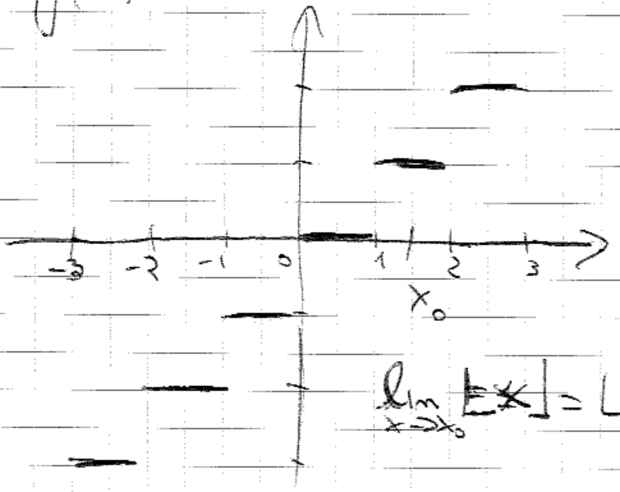
$f(x) < 0$ per $(-\infty, -3) \cup (-1, 0)$

$f(x) > 0$ per $(-3, -1) \cup (0, +\infty)$

$f(x) \geq 0$ per $[-3, -1] \cup [0, +\infty)$

funzioni continue

$f(x) = \lfloor x \rfloor$



$\lim_{x \to x_0} \lfloor x \rfloor = \lfloor x_0 \rfloor$

f è continua in ogni $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

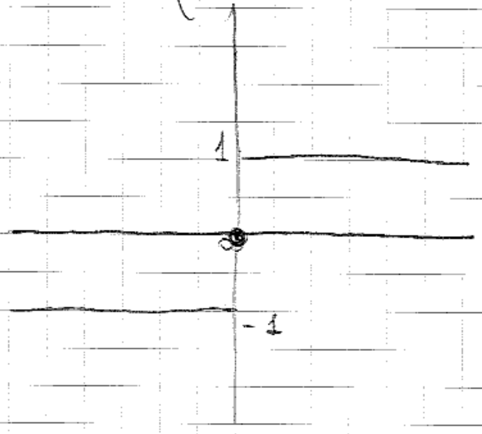
In $[0,1)$: $f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 0 = 0$

In $[1,2)$: $f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 1 = 1$

$f(1) = 1$ $\quad$ f è continua da dx in $x = 1$ (non da sx)

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

f segn(x) prolungata



$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq f(0) = 0$

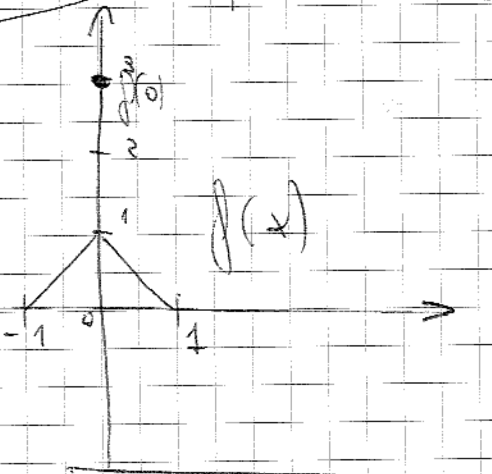
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq f(0)$

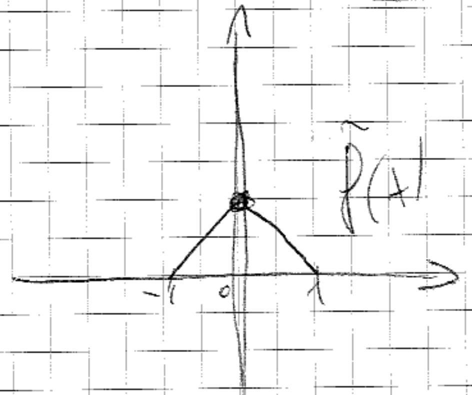
$\lim_{x \to 0}$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \in [-1,0) \\ 3 & x = 0 \\ 1-x & x \in (0,1] \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(1-x) = 1 \end{array}\right\} \exists \lim_{x\to 0} f(x) = 1 \in \mathbb{R}$$

$f(0) = 3$ $\neq$ ← punto di discontinuità eliminabile





f monotone crescente in (a,b)

$x \in (a,b)$

$a \quad x_0 \quad b$

$x < x_0$: $f(x) \leq f(x_0)$

$$\Rightarrow \sup_{x<x_0} f(x) \leq f(x_0) \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) \leq f(x_0)$$

$$x > x_0 \quad f(x_0) \leq f(x) \Rightarrow f(x_0) \leq \inf_{x>x_0} (f(x))$$

$$\Rightarrow f(x_0) \leq \lim_{x\to x_0^+} f(x) \in \mathbb{R}$$

$$f\uparrow \text{ in } (a,b) \Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) \in \mathbb{R}, \ \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

Se i 2 limiti sono uguali, f è continua in x_0; se i limiti sono diversi, dato che sono $\in \mathbb{R}$, siamo nel caso 1c, e quindi x_0 è discontinuità a salto.

Funzioni continue da funzioni continue

- f continua in x_0 $\left(\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\right)$ $\in \mathbb{R}$
- g continua in x_0 "

$\Rightarrow (f+g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f+g)(x_0)$

$f+g$ convergente, $\Rightarrow \underbrace{\lim_{x \to x_0} f(x)}_{f(x_0)} + \underbrace{\lim_{x \to x_0} g(x)}_{g(x_0)}$ Regola della somma

$\Rightarrow f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0) \Rightarrow f+g$ è continua in x_0

$f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^2+1}$ Stabilire se continua

$x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni

$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$

f è continua in $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$ perché continua

$\lim_{x \to -2/3} f(x) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = \ldots$

$f(x) = \dfrac{\overbrace{x^3 - 2\lfloor x \rfloor + 1}^{\in \mathbb{R}}}{\underbrace{x^2+1}_{\in \mathbb{R}\ (\neq 0)}}$ Stabilire se è continua

$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$

$f_2(x) = x^2 + 1$ è continua

$f_1(x) = \underbrace{x^3}_{\text{cont. in } \mathbb{R}} - \underbrace{2\lfloor x \rfloor}_{\text{continua in } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}} + \underbrace{1}_{\text{cont. in } \mathbb{R}} \Rightarrow f_1(x)$ è continua in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$x_0 \in \mathbb{Z}$

$f_1(x_0) = \underbrace{x_0^3 - \cancel{} 2x_0 + 1}$ non è continua da r_+ (perché $\lim_{x \to x_0} \neq$ da $f(x_0)$)

$\lim_{x \to x_0^-} f_1(x) = \lim_{x \to x_0^-} \left(x^3 - 2\lfloor x \rfloor + 1\right) = \underbrace{x_0^3 - 2(x_0 - 1) + 1} = \underbrace{x_0^3 - 2x_0 + 3}$

$f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ $\begin{array}{l} \to \text{cont. in } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ \to \text{cont. in } \mathbb{R} \end{array}$

f è cont. in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$\lim_{x \to 5/3} f(x) = f(5/3)$ $[5/3 \in \mathbb{Z}] = \dots$

Esercizio

$f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^3 - 2x + 3}}{x^2 - 1}$

$f_1(x) = \sqrt[3]{\underbrace{x^3 - 2x + 3}_{\in \mathbb{R}}}$ $\quad \mathrm{dom}\left(\sqrt[3]{}\right) = \mathbb{R}$

$\mathrm{dom}(f_1) = \mathbb{R}$ è continua

$f_2(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}$, continua in $\mathbb{R}$

? $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ $\quad \mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = \dots = \dfrac{\sqrt[3]{5}}{3}$

$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 - 2x + 3}}{x^2 - 1} = ?$

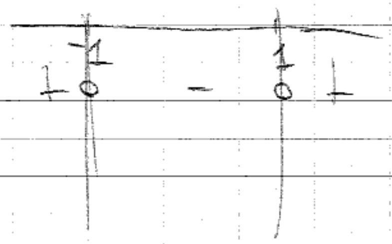
$\lim_{x\to 1} \sqrt[3]{x^3-2x+3} = [\in \mathbb{R}] = \sqrt[3]{1-2+3} = \sqrt[3]{2}$

$\lim_{x\to 1} x^2-1 = 1-1 = 0$ forma di indecisione

$l_1 \quad l_2$

$f-g \to l_1 - l_2$

x^2-1



$\lim_{x\to 1} f(x)$ non esiste

$\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x^2-1}\right) = +\infty$

$\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{\sqrt[3]{x^3-2x+3}}{x^2-1}\right) = \sqrt[3]{\dots} \cdot \frac{1}{x^2-1} = +\infty$

$x^{m/n} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

se n dispari e $m < 0$, $\sqrt[n]{\frac{1}{x^m}}$ $\neq 0$

Funzione esponenziale

$a > 1$

Tesi: $q \in \mathbb{Q} \longmapsto a^q \in \mathbb{R}$ è strett. crescente

1° passo: provo che $q > 0 \Rightarrow a^q > 1$

$q > 0 \Rightarrow q = \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbb{N}^*$

$m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \mathbb{N}, m \geq 1 \Rightarrow x \longmapsto x^m$ è strett. crescente in $(0, +\infty)$

$a > 1 \ (>0) \in (0, +\infty), \quad a^m > 1^m \Rightarrow a^m > 1$

$n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$

$x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ è strett. crescente in $(0, +\infty)$

$a^m > 1 \Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{a^m}}_{q \hat{=} \frac{m}{n}} > \sqrt[n]{1} \Rightarrow a^q > 1$

2° passo:

$q \in \mathbb{Q} \longmapsto a^q$ è $\uparrow\uparrow$

$q_1, q_2 \in \mathbb{Q}, \quad q_1 < q_2$

$a^{q_2} = a^{(q_2 - q_1) + q_1} = a^{(q_2 - q_1 > 0)} \cdot a^{q_1} =$

$q_2 - q_1 > 0 \overset{\text{Passo 1}}{\Longrightarrow} a^{q_2 - q_1} > 1 \Longrightarrow a^{q_2} = \ldots = a^{q_2 - q_1} \cdot a^{q_1} > a^{q_1}$

$a < 1$

$a^q = \left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\right)^q = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^q}, \quad 0 < a < 1, \quad \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow q \longmapsto a^q$ è $\downarrow\downarrow$

$\square$

$x^{\pi} = e^{\pi \log x}$

Ricupero MAT.

$\exists Q$ polinomio $\ni' P(x) = (x - x_0)\, Q(x)$

$P(x) = x^3 - 7x + 8$

$P(1) = 1 + 7 - 8 = 0 \overset{P(1)=0}{\Longrightarrow} \exists Q$ polin. di grado 2 $\ni P(x) = (x-1)Q(x)$

$Q(x) = ax^2 + bx + c$

$\underbrace{x^3 + 7x - 8}_{P(x)} = \underbrace{(x - 1)}_{x - x_0} \underbrace{(x^2 + x + 8)}_{Q(x)}$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 7x - 8 & x - 1 \\ \hline
x^3 - x^2 & x^2 + x + 8 \\ \hline
// \; x^2 + 7x - 8 & \\
x^2 - x & \\ \hline
8x - 8 & \\
8x - 8 & \\ \hline
// &
\end{array}
$$

$x^2 + x + 8 = 0$? $\Delta < 0$ MAI

		1	
$x - 1$	$-$	0	$+$
$x^2 + x + 8$	$+$		$+$
$x^3 + 7x - 8$	$-$	0	$+$

Ruffini

$x^3 - 7x + 8$

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & \multicolumn{3}{c|}{\text{coeff. di } P} & \\
 & 1 & 0 & 7 & -8 \\
\text{radice} & & & & \\
1 & & 1 & 1 & 8 \\ \hline
 & 1 & 1 & 8 & 0 \;\text{resto} \\
 & \multicolumn{3}{c}{\text{Coeff. di } Q} &
\end{array}
$$

$Q(x) = x^2 + x + 8$

$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

$f(1) = 1 - 4 + 1 + 6 \neq 0$

$f(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$

$x_0 = -1$

	1	-4	1	6
-1		-1	5	-6
	1	-5	6	0

	-1		2		3	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2-5x+6	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
	$-$		$+$	$-$		$+$

$\Delta = 1$

$f(x) = (x+1)\underbrace{(x^2 - 5x + 6)}$

$\Delta = 1$

$x_{1/2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$

$(-\infty, -1) \cup (2, 3)$ per < 0

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 6$

$f(1) = 1 - 4 + 3 + 2 - 6 \neq 0$

$f(-1) = 1 + 4 + 3 + 2 - 6 = 0$

	1	-4	3	2	-6
-1		-1	5	-8	6
	1	-5	8	-6	0

$f(x) = (x-1)(x^3 - 5x^2 + 8x - 6)$

$f(1)$ $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 \neq 0$

$f(2) = 8 - 20 + 16 - 6 \neq 0$

$f(3) = 27 - 45 + 24 - 6 = 0$

	1	-5	8	-6
3		3	-6	6
	1	-2	2	0

$f(x) = (x-3)(x^2 - 2x + 2)$

$f(x) = (x+1)(x-3)\boxed{(x^2-2x+2)}$

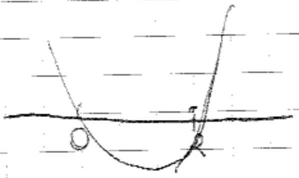
$\Delta < 0$

		-1		3	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
x^2-2x+2	$+$		$+$		$+$
	$+$		$-$		$+$

$$\boxed{\frac{x^2-2x}{x^2-4x+3} < 0}$$

$f(x)$

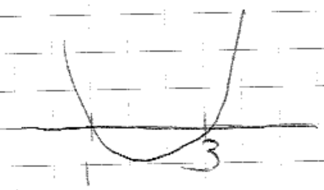
$x^2-2x=0 \quad x(x-2)=0$



$\begin{cases} x=0, \\ x=2 \end{cases}$

$x^2-4x+3=0 \quad \Delta = 16-12=4$

$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} < \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$



		0		1		2		3	
x^2-2x	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-4x+3	$+$		$+$	$\times$	$-$		$-$	$\times$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$	$+$

< 0 per $(0,1) \cup (2,3)$

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$

zeri di f: $f(x) = 0$? $\to x <^{0}$

$f(x) > 0 \quad (-\infty, 0) \cup (1,2) \cup (3, +\infty)$

$$g(x) = \log\left(\frac{x^2-2x}{x^2-4x+3}\right)$$

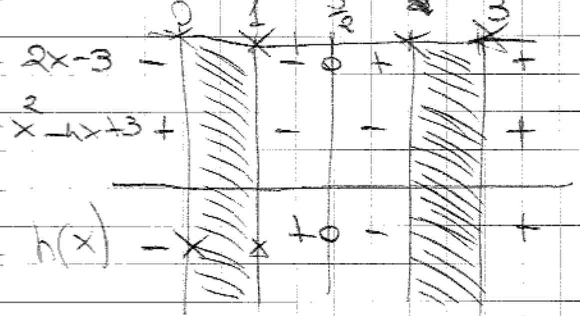
$$\mathrm{dom}(g) = \{\, x \in \mathrm{dom}(g) \mid g(x) > 0 \,\} = (-\infty,0) \cup (1,2) \cup (3,+\infty)$$

$$\frac{x^2-2x}{x^2-4x+3} \geq 1 \quad (\text{per il log}) \iff \frac{x^2-2x}{x^2+4x+3} - 1 \geq 0$$

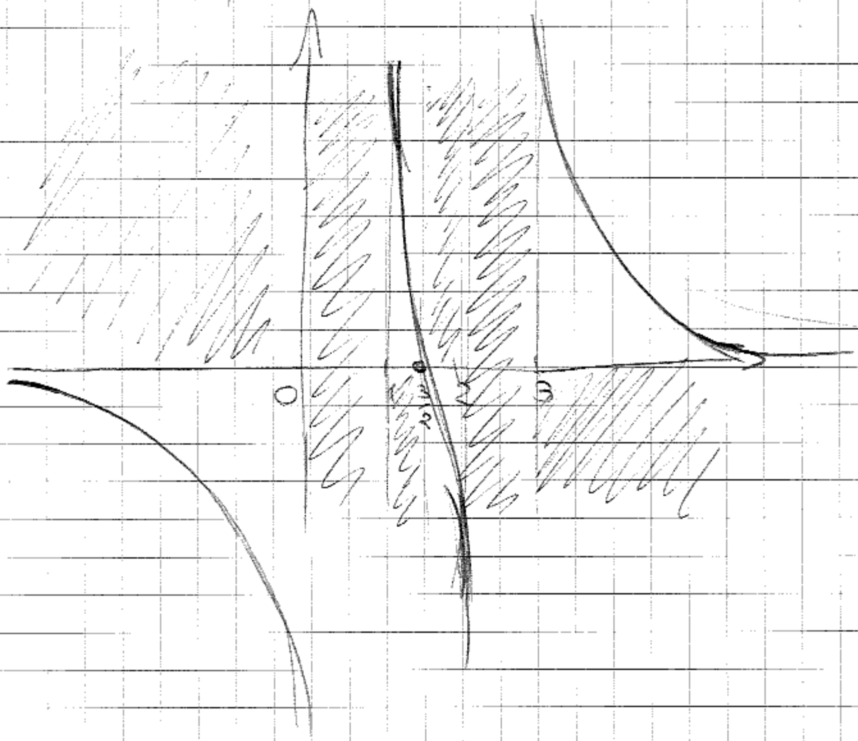
$$x = \tfrac{3}{2}$$

$$\frac{x^2-2x-(x^2-4x+3)}{x^2-4x+3} \geq 0 \iff \boxed{\frac{2x-3}{x^2-4x+3}} \geq 0 = h(x)$$

$$x \to 1, \; 3$$

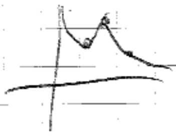


$$x \in \left(1, \tfrac{3}{2}\right] \cup (3,+\infty)$$



$$2+\frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x+1} \iff \ldots \iff \frac{2(x^2-1)+\cancel{x}+1-\cancel{x}+1}{x^2-1}$$

$$\frac{2x^2-2+2}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \iff \frac{2x^2}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

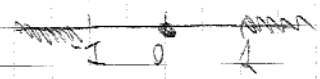


		-1		0		1	
$2x^2$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	$\times$	$+$
$x+1$	$-$	$\times$	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$+$	$\times$	$-$	0	$-$	$\times$	$+$

$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \cup \{0\}$

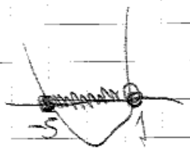
$$g(x) = \sqrt[4]{\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}}$$

$\mathrm{dom}(g) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \cup \{0\}$

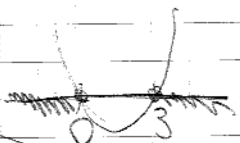


$$\begin{cases} x^2+6x+5 \leq 0 & ① \\ x^2-3x \geq 0 & ② \\ x+2 > 0 & ③ \end{cases}$$

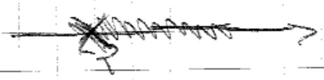
$x^2+6x+5=0 \quad \Delta = 16 \quad x_{1/2} < \begin{matrix} -5 \\ -1 \end{matrix}$



$x^2-3x \geq 0 \Rightarrow x(x-3) \geq 0 \quad x_{1/2} < \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix}$

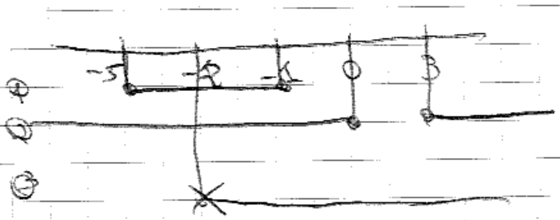


$x+2>0$



$(-2, -1]$

	-5	-2	-1	0	3
①					
②					
③					



$$f(x) = \frac{\log(4-x^2)}{\sqrt[3]{x+1}} \cdot \arcsin(3x^2-4)$$

$$\begin{cases} 4-x^2>0 & (1)\\ \sqrt[3]{x+1} \neq 0 & (2)\\ -1 \leq 3x^2-4 \leq 1 & (3)\end{cases}$$

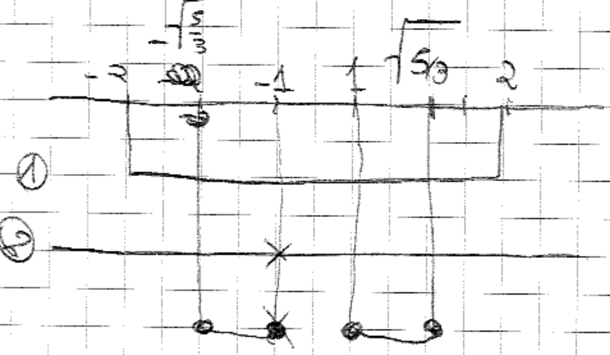
(1) $4-x^2>0 \Rightarrow x^2-4<0 \quad (-2,2)$

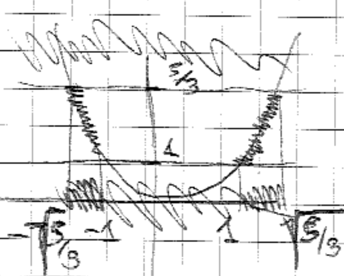
(2) $\sqrt[3]{x+1} \neq 0 \Rightarrow x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

(3) $-1 \leq 3x^2-4 \leq 1$

$3 \leq 3x^2 \leq 5$

$1 \leq x^2 \leq 5/3$





$$\left[-\sqrt{\tfrac{5}{3}}, 1\right) \cup \left[1, \sqrt{\tfrac{5}{3}}\right]$$

$$\underbrace{|x^2-3x|}_{=\pm 2} = 2 \iff x^2-3x = \pm 2 \quad \begin{cases} x^2-3x-2=0 \\ x^2-3x+2=0 \end{cases}$$

Sol: $\left\{ \frac{3 \mp \sqrt{17}}{2}, 1, 2 \right\}$

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \leq 4 \qquad -4 \leq \left|\frac{x+1}{x-1}\right| \leq 4$$

$$\begin{cases} ① \ \dfrac{x+1}{x-1} \leq 4 \\ ② \ \dfrac{x+1}{x-1} \geq 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$① \ \frac{x+1}{x-1} - 4 \leq 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{-3x+5}{x-1}$$

		1		$\frac{5}{3}$	
$-3x+5$	$+$		$+$	0	$-$
$x-1$	$-$	$\times$	$+$		$+$
$\sim$	$-$	$\times$	$+$	0	$-$

②

		$\frac{3}{5}$		1	
$5x-3$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	$\times$	$+$
$\sim$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$

$$Sol: \left(-\infty, \frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$$

serono

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} =$$

$dom\ f(x) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \cup (-1, 1) = \mathbb{R} - \{1, -1\}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} \qquad x_{1/2} < \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

$$= \lim \frac{(x-2)}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

Teorema del rapporto,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x + 4}{(x-1)^2} \to \text{Tende a } 0 = \lim_{x \to 1} \underset{\downarrow\ 8}{x^2 + 3x + 4} \cdot \underset{\downarrow\ 0}{\frac{1}{(x-1)^2}} \text{ quindi } \to +\infty$$

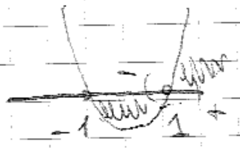
$dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$= +\infty$

$(x-1)^2$ $\quad$ $+ \quad 1 \quad +$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+3x+4}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \underbrace{(x^2+3x+4)}_{\to 8} \cdot \frac{1}{x^2-1}$$

x^2-1 $-$ | 1 | $+$

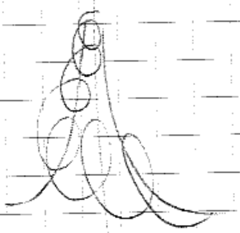


$\boxed{\text{non esiste}}$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

$f(x) = \dfrac{3x^2-2x+1}{x^2+1}$ $dom(f) = \mathbb{R}$



Asint. vert: $\exists\, x_0 \in \mathbb{R} \ni f \to \pm\infty$ per $x \to x_0$

$x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ $f(x_0) \in \mathbb{R}$

f continua in $\mathbb{R}$

Una f continua in tutto un intervallo, i punti interni all'intervallo non possono asintoti.

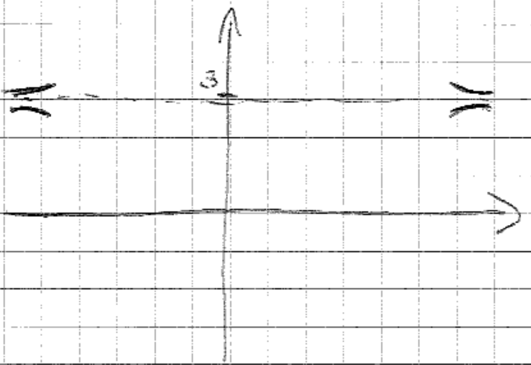
No asint. verticali

Asint. orizz.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\cancel{x^2}\left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{3x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$= 3$

$y = 3$ asint. orizz.



$$f(x) = \frac{x+3x^2}{(x-1)^2} \qquad dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

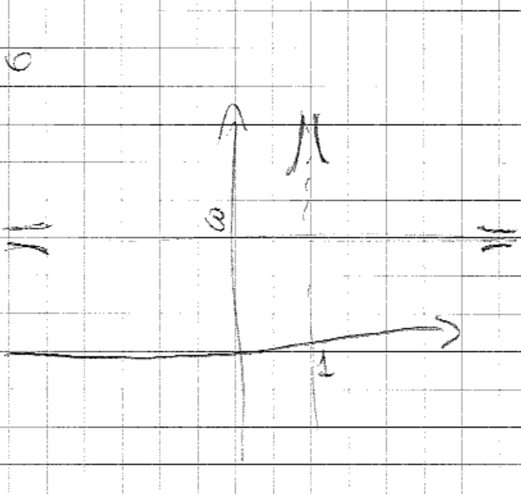
Asint. vert.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{x+3x^2 \to 4}{(x-1)^2 \to 0^+} = +\infty \qquad \frac{1}{0^+} = +\infty$$

1

$+ \; 0 \; +$

$\pm\infty \quad \frac{4}{+\infty} \to 0$



$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$$

$$f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x}$$

$dom(f) = \mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Asint. vert.

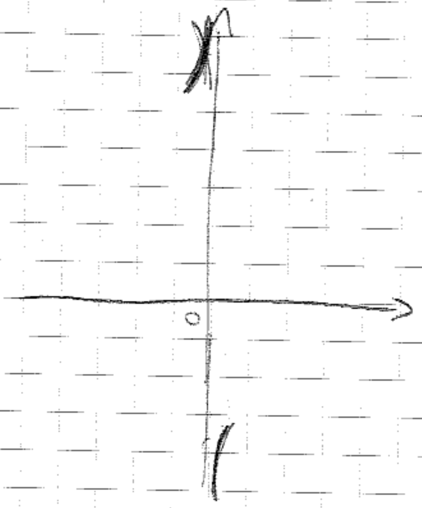
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \underbrace{x^2+2x-1}_{\to -1} \cdot \frac{1}{x}$$

$- \quad 0 \quad +$

$$\lim_{x\to 0^+} \cancel{f(x)}\ \frac{1}{x} = +\infty$$

$x=0$ asint. vert. da dx / sx

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



Asint. oriz.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

non ho asint. oriz.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+1}{2(x+1)^2}$$

Andamento all'infinito

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 2}{x^2 + 1}$$

$dom(f) = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ No asint. oriz.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^3 - x + 2}{x(x^2+1)} = 1 =: m \in \mathbb{R}^*$ andamento lineare

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \frac{x^3 - x + 2}{x^2 + 1} - x = \frac{\cancel{x^3} - x + 2 - \cancel{x^3} - x}{x^2+1} = \frac{-2x+2}{x^2+1} = 0$

$0 =: q$ $\boxed{y = x}$ asint. obliquo a $+\infty$

$\lim_{x \to \cancel{\infty}} \left(\frac{1}{x^4} + 2\right)^3 = 2^3 = 8$

$\lim_{x \to 2^-} \sin\left(\frac{\lfloor x \rfloor + 3}{x^2 + 1}\right) = \sin\left(\frac{4}{5}\right)$

$\lim_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{x+3}{x^2 - 1}\right) = \cos(0) = 1$

$$f(x) = e^x + e^{\frac{1}{x}}$$

$$\operatorname{dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^x + \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = 1 + \infty = +\infty$$

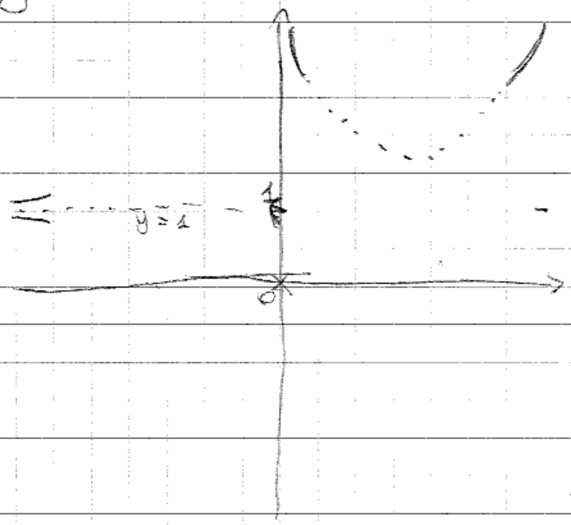
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{y \to +\infty} e^y = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 + 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



No asint. orizz.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} e^0 = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

~~As. obliquo~~

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ldots \frac{e^x + e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{--} \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{+\infty} + \underbrace{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}}_{0} = +\infty$$

?

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{e^{\frac{1}{x}}}^{=1}}{\underbrace{x}_{+\infty}} = 0$$

f ha andamento superlineare per $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = e^{x} + e^{\frac{1}{x}} = 0 + 1 = 1$$

serono

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \quad - \quad y = 1 \text{ asint. orz per } x \to -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

■

Funzioni asintotiche equivalenti ("limiti notevoli")

$\forall x \in \mathbb{R} : |\sin x| \leq |x|$

$\sin x \leq x \leq \tan x \qquad \forall x \in [0, \pi/2]$

$\tan x \leq x \leq \sin x \qquad \forall x \in [-\pi/2, 0]$

$x \in (0, \pi/2)$

$\sin x \leq x \leq \tan x \iff \sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \iff 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$

$\iff \underset{\cos(0) = 1}{\cos x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \underset{1}{1} \quad ! \quad \forall x \in (0, \pi/2)$

$\lim_{x\to0^+} \ldots =$ convergenza dominata : $\exists \lim_{x\to0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

È uguale da sx. Quindi esiste il limite bilaterale, ed è uguale ad 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

$y = \arcsin(x)$ $\quad x \to 0$

$x = \sin(y)$ $\quad \Downarrow$

$\quad y \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2/2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2/2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2/4} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

Formula di bisezione

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$

$y = \frac{x}{2} \Rightarrow y \to 0$

$$\lim_{y\to 0} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 = 1$$

$\frac{2x\cancel{x}^2}{3\cancel{x}}$ $\quad \frac{2x^2}{3}$