

**Министерство образования и науки Российской Федерации  
Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)**

Физтех-школа аэрокосмических технологий  
Кафедра вычислительной механики  
Лаборатория моделирования механических систем и процессов

Выпускная квалификационная работа бакалавра

## **Создание программного комплекса для уточнения орбит космических аппаратов**

**Автор:**  
Студент группы Б03-106бт  
Хрипунов Иван Владимирович

**Научный руководитель:**  
Кузнецов Александр Алексеевич

Долгопрудный, 2025

### **Аннотация**

Создание программного комплекса для уточнения орбит космических аппаратов  
*Хрипунов Иван Владимирович*

Краткое описание задачи и основных результатов, мотивирующее прочитать весь текст.

# Содержание

<b>1 Введение</b>	<b>5</b>
<b>2 Восстановление орбиты</b>	<b>6</b>
2.1 Элементы орбиты . . . . .	6
2.2 Прогноз траектории космического объекта . . . . .	7
2.2.1 Аналитический прогноз . . . . .	8
2.2.2 Численно-аналитический прогноз . . . . .	10
2.2.3 Численный прогноз . . . . .	11
2.3 Виды измерений . . . . .	15
2.3.1 Односторонние измерения дальности . . . . .	15
2.3.2 Двусторонние измерения дальности . . . . .	16
2.3.3 Измерения дальности и радиальной скорости . . . . .	16
2.3.4 Угловые измерения . . . . .	17
2.4 Обработка измерений . . . . .	18
2.4.1 Метод наименьших квадратов . . . . .	19
2.4.2 Фильтр Калмана . . . . .	20
2.5 Проблематика . . . . .	21
2.5.1 Оценка быстродействия . . . . .	21
2.5.2 Высокоточное восстановление орбиты . . . . .	22
<b>3 Ускорение расчета плотности атмосферы</b>	<b>23</b>
3.1 Обзор алгоритма интерполяции . . . . .	23
3.2 Тестирование интерполяции . . . . .	25
<b>4 Параметризация модели движения</b>	<b>35</b>
4.1 Псевдоускорения . . . . .	35
4.2 Псевдоимпульсы . . . . .	36
4.3 Верификация . . . . .	37
<b>5 Выводы</b>	<b>41</b>

## Список обозначений и сокращений

- КО – космический объект
- КА – космический аппарат
- СК – система координат
- МЕЕ (Modified Equinotical Elements) – модифицированные равноденственные элементы
- ОДУ – обыкновенное дифференциальное уравнение
- ГНСС – глобальная навигационная спутниковая система
- SLR (Satellite Laser Ranging) – спутниковая лазерная дальномерия
- DORIS (Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite) – допплеровская орбитография и радиопозиционирование, интегрированные со спутником
- РЛС – радиолокационная станция
- DSST (Draper Semi-analytical Satellite Theory) – численно-аналитическая баллистическая модель
- SSA (Space Situational Awareness) – система контроля околоземного пространства Европейского космического агентства
- НОО – низкая околоземная орбита
- ГСО – геостационарная орбита
- NORAD (North American Aerospace Defense Command) – Североамериканское командование воздушно-космической обороны
- SGP (Simplified General Perturbations) – упрощенная модель возмущений, используемая NORAD
- TLE (Two-Line Elements) – двухстрочные элементы орбиты, используемые в SGP
- EGM2008 (Earth gravitational Model 2008) – модель гравитационного потенциала Земли
- УФ излучение – ультрафиолетовое излучение
- SOLAARS CF (Solar and Atmospheric Adaptive Refraction and Scattering–Controlled Fusion – Солнечное и атмосферное адаптивное преломление и рассеяние) – динамическая модель тени
- TSI (Total Solar Irradiance) – энергетический поток на расстоянии одной астрономической единицы
- МНК – метод наименьших квадратов

# **1 Введение**

**Актуальность**

**Цель**

**Задачи**

**Новизна**

**Практическая значимость**

## 2 Восстановление орбиты

### 2.1 Элементы орбиты

Вектором состояния  $\mathbf{X}$  назовем упорядоченную совокупность переменных, полностью определяющих состояние системы в заданный момент времени. В простейшем случае такой набор состоит из положения  $\mathbf{r}$  и скорости  $\mathbf{v}$  материальной точки. Также в этот набор могут входить площадь поверхности и другие параметры космического объекта, оказывающие влияние на его движение.

Однако, в ходе орбитального движения  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$  меняются за виток значительно, что приводит к снижению точности при численном интегрировании. Поэтому зачастую в ходе решения задачи двух тел в небесной механике используют не радиус-вектор и скорость, а элементы орбиты. Самыми распространеными из них являются кеплеровы элементы и модифицированные равноденственные элементы (МЕЕ). В элементах орбиты быстро меняющаяся переменная, описывающая положение КО на орбите, отделена от медленно меняющихся переменных, определяющих ориентацию и форму орбитальной плоскости.

Кеплеровы элементы:

- наклонение  $i$
- долгота восходящего узла  $\Omega$
- аргументperiцентра  $\omega$
- эксцентриситет  $e$
- большая полуось  $a$
- истинная аномалия  $\nu$

МЕЕ:

- $a = a$
- $h = e \sin(\omega + I\Omega)$
- $k = e \cos(\omega + I\Omega)$
- $p = [\tan \frac{i}{2}]^I \sin(\Omega)$
- $q = [\tan \frac{i}{2}]^I \cos(\Omega)$
- $\lambda = M + \omega + I\Omega$

Кеплеровы элементы удобны для визуальной интерпретации орбиты (рис. 1). Первые 3 переменные задают ориентацию орбитальной плоскости в инерциальной системе координат, эксцентриситет и большая полуось фиксируют форму и размеры эллипса, а истинная аномалия определяет положение КО на орбите. В качестве последней переменной также могут использоваться эксцентрическая аномалия  $E$  и средняя аномалия  $M$ . Удобство использования средней аномалии заключается в том, что она меняется со временем равномерно. Недостаток кеплеровых элементов – вырожденность при  $i = 0$ ,  $i = \pi$  и  $e = 0$ . Как следствие, они плохо подходят для интегрирования.

Чтобы избавиться от вырожденности, вводится другой набор элементов – модифицированные равноденственные элементы. В МЕЕ величина  $I$  может принимать два значения:

$$I = \begin{cases} +1, & \text{если } i < \pi/2, \\ -1, & \text{если } i \geq \pi/2 \end{cases}$$

Также в МЕЕ применяется эксцентрическая долгота  $F$  и истинная долгота  $L$ . Они выражаются через кеплеровы элементы следующим образом:

$$\begin{aligned} F &= E + \omega + I\Omega \\ L &= \nu + \omega + I\Omega \end{aligned}$$

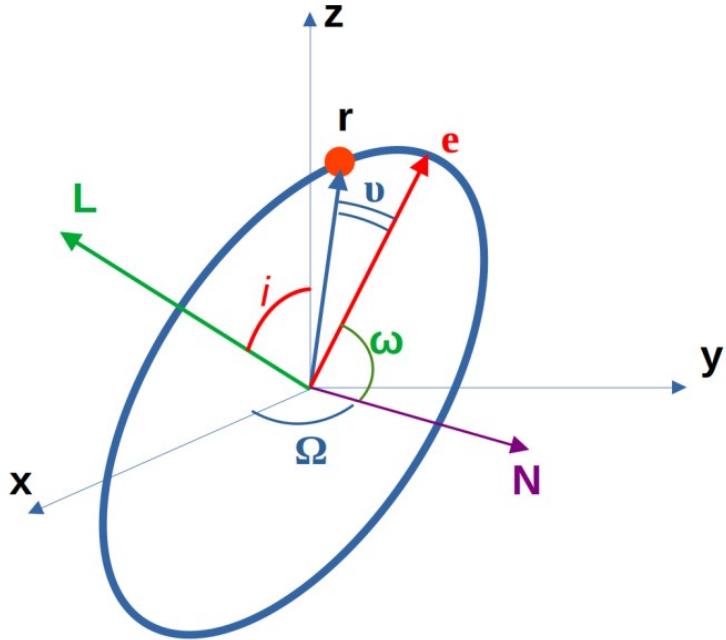


Рис. 1: Кеплеровы элементы орбиты. Центр декартовых координат привязан к центру масс Земли. Ось  $Ox$  направлена в точку весеннего равноденствия, ось  $Oz$  – нормаль к плоскости эклиптики, ось  $Oy$  дополняет до правой тройки.  $\mathbf{N}$  лежит на линии пересечения плоскости эклиптики с плоскостью орбиты.  $\mathbf{L}$  – момент импульса КО, направлен по нормали к орбитальной плоскости.  $\mathbf{e}$  равен по модулю эксцентриситету и направлен наperiцентру.

## 2.2 Прогноз траектории космического объекта

Задача прогнозирования движения – по начальному вектору состояния  $\mathbf{x}_0$  определить траекторию  $\mathbf{x}(t)$  объекта. В основе описания динамики космических аппаратов лежит 2 закон Ньютона, поэтому расчет траектории сводится к решению задачи Коши для ОДУ вида:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{x}|_{t=t_0} = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (1)$$

При расчете траектории применяются несколько существенно разных подходов. Первый из них, аналитический, использует основные факторы, определяющие эволюцию орбиты. Характерной особенностью аналитических вычислений является низкая ресурсоемкость и невысокая точность. Таким образом, аналитика обладает высокой качественной предсказательной способностью на коротких временных интервалах, «схватывающая» главные тренды изменения орбиты.

Численные методы, напротив, позволяют учесть произвольное число сложных возмущающих факторов. Однако прецизионный численный расчет требует значительно больше вычислений. Это связано с ресурсоемкостью расчета правой части ОДУ и, соответственно, с выбором шага интегрирования для обеспечения заданной точности.

Компромиссом являются полуаналитические подходы, в которых используется комбинация численных и аналитических расчетов. Полуаналитические модели учитывают широкий спектр возмущающих воздействий, что позволяет эффективно производить вычисления без потери точности.

Далее приведен краткий обзор основных подходов к прогнозу траектории.

### 2.2.1 Аналитический прогноз

Рассмотрим возмущенную задачу двух тел:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{f}, \quad (2)$$

где  $\mu$  – гравитационный параметр Земли,  $\mathbf{f}$  – возмущающее ускорение, которое может быть разложено по орбитальной СК на радиальную, тангенциальную и нормальную компоненты:

$$\mathbf{f} = R\mathbf{e}_r + T\mathbf{e}_t + N\mathbf{e}_n,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \mathbf{r}/|r| \\ \mathbf{e}_n &= \mathbf{r} \times \mathbf{v}/|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| \\ \mathbf{e}_t &= \mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_r\end{aligned}$$

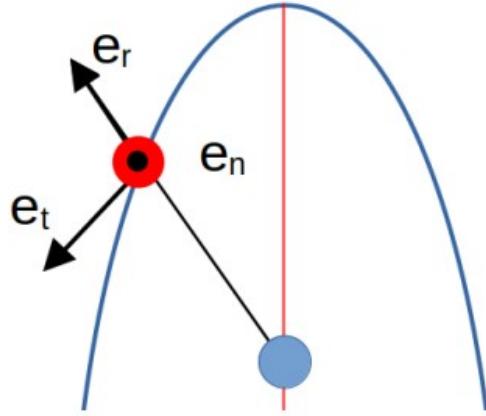


Рис. 2: Орбитальная система

Преобразуем систему ОДУ (2) для перехода к кеплеровым элементам. Если возмущающая сила является потенциальной:  $\mathbf{f} = \nabla R$ , то система примет вид:

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2 e^2} \left( (1-e^2)^{1/2} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\partial R}{\partial \omega} \right) \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{h \sin(i)} \left( \cos(i) \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\partial R}{\partial i} \right) \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{h \sin(i)} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos(i)}{h \sin(i)} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2 e^2} \frac{\partial R}{\partial e} \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}\end{aligned}$$

где  $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$  – среднее движение,  $h = na^2(1-e^2)^{1/2}$ .

Для построения аналитического решения воспользуемся возмущающим потенциалом от второй гармоники:

$$R = -\frac{\mu J_2}{r} \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \frac{3}{2} \left( \sin^2(\phi) - \frac{1}{3} \right), \quad (3)$$

где  $\phi$  – широта точки.

Подставив соотношение  $\sin(\phi) = \sin(i)\sin(\omega + \nu)$ , получим, что  $R$  может быть представлена в виде суммы:

$$\begin{aligned} R &= R_s + R_p \\ R_s &= -\frac{3\mu J_2}{2r} \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left( \frac{\sin^2(i)}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ R_p &= \frac{3\mu J_2}{2r} \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \frac{\sin^2(i) \cos(2(\omega + \nu))}{2} \end{aligned}$$

Видно, что первое слагаемое потенциала вызывает постоянное или так называемое вековое возмущение орбиты. Период таких возмущений значительно превышает орбитальный период. Короткопериодические возмущения, порождаемые слагаемым  $R_p$ , не приводят к изменениям орбиты на значительном промежутке времени.

Усреднив  $R_s$  по периоду, получим:

$$R_{avg} = -\frac{\mu J_2}{2a} \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left( \frac{3}{4} \sin^2(i) - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} \right)$$

Подстановка  $R_{avg}$  в ОДУ дает вековые возмущения кеплеровых элементов орбиты

$$\begin{aligned} \dot{a}_{sec} &= 0 \\ \dot{e}_{sec} &= 0 \\ \dot{i}_{sec} &= 0 \\ \dot{\Omega}_{sec} &= -\frac{3nR_{\oplus}^2 J_2}{2p^2} \cos(i) \\ \dot{\omega}_{sec} &= \frac{3nR_{\oplus}^2 J_2}{4p^2} (4 - 5 \sin^2(i)) \\ \dot{M}_{0sec} &= -\frac{3nR_{\oplus}^2 J_2 \sqrt{1-e^2}}{4p^2} (3 \sin^2(i) - 2) \end{aligned}$$

Аналогичным образом могут быть выделены короткопериодические возмущения. В частности:

$$\delta a = \gamma_3 a \left[ (3z \sin^2(\omega + \nu) - 1) \left( \frac{a}{r} \right)^3 - \frac{3z - 2}{2\eta^3} \right],$$

где  $\gamma_3 = -J_2 \left( \frac{R_{\oplus}}{a} \right)^2$ ,  $\eta = \sqrt{1-e^2}$ ,  $z = \sin^2(i)$ .

Так как большая полуось, эксцентриситет и наклонение не испытывают вековых возмущений, средние значения долготы восходящего узла и аргумента перигея легко интегрируются аналитически:

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \Omega_0 + \Omega_{sec}(t - t_0) \\ \omega(t) &= \omega_0 + \omega_{sec}(t - t_0) \end{aligned}$$

Для получения выражения для  $a$  необходимо провести процедуру усреднения среднего движения

$$a = \bar{a} + \delta a \rightarrow \bar{a} = a_0 - \delta a_0$$

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}^3}}$$

В результате получим:

$$M(t) = M_0 + (\bar{n} + \dot{M}_{0sec})(t - t_0)$$

Более детальное решение задачи аналитического расчета траектории представлено в серии моделей SGP [1]. Модели используют данные в формате TLE, предоставляемые американской службой NORAD. В TLE содержатся не только средние кеплеровы элементы орбиты, но и первая и вторая производные среднего движения. Модели движения SGP аналитически учитывают возмущения от сжатия Земли, сопротивления атмосферы, гравитации Луны и Солнца. Из-за сильного влияния атмосферного торможения ошибка прогноза на низких орbitах составляет порядка 1 километра в день. Для средних и высоких орбит ошибка значительно меньше – несколько сотен метров на недельном интервале [2].

### 2.2.2 Численно-аналитический прогноз

Стимулом к развитию численно-аналитических методов послужил быстрый рост количества объектов в околоземном пространстве и необходимость их непрерывного отслеживания и каталогизации. Для таких задач аналитические методы не удовлетворяют требуемой точности, а численные методы не подходят в силу высокой ресурсоемкости. Численно-аналитические методы, в свою очередь, объединяют точность и быстродействие за счет гибкой настройки модели движения.

В основе численно-аналитических моделей лежит разделение возмущений на вековые и короткопериодические. На начальном этапе происходит усреднение орбитальных элементов, чтобы исключить высокочастотные возмущения орбиты. Эта операция позволяет в дальнейшем интегрировать медленно меняющиеся средние элементы с большим шагом (порядка половины дня). На заключительном этапе прогноза мгновенные значения элементов орбиты вычисляются аналитически по средним элементам.

Частным случаем численно-аналитических методов является модель DSST [3], разработанная для системы контроля околоземного пространства Европейского космического агентства (SSA). Математическая модель DSST опирается на методы усреднения и вариации параметров.

Усредненные уравнения движения для консервативной возмущающей силы с потенциалом  $R$ :

$$\frac{d\bar{c}_i}{dt} = - \sum_{j=1}^6 \{\bar{c}_i, \bar{c}_j\} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{c}_j} \quad i = 1 \dots 5$$

При наличии неконсервативной силы правая часть дополнительно усредняется по витку:

$$\frac{d\bar{c}_i}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \mathbf{Q} d\lambda \quad i = 1 \dots 5$$

Выражение для быстроменяющейся средней долготы:

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = \frac{d\bar{c}_6}{dt} = \bar{n} - \sum_{j=1}^6 \{\bar{c}_6, \bar{c}_j\} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{c}_j} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \bar{c}_6}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \mathbf{Q} d\lambda$$

Переход к мгновенным элементам:

$$c_i = \bar{c}_i + \sum_{j=1}^N e^j \eta_{i,j} (\bar{a}, \bar{\lambda}) \quad i = 1 \dots 6$$

В последних уравнениях были введены следующие обозначения:

$\bar{c}_{i=1\dots 6}$  : средние равноденственные элементы  $[\bar{h}, \bar{k}, \bar{k}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{\lambda}]$

$\bar{R}$  : усредненный возмущающий потенциал для консервативной силы

$\mathbf{Q}$  : неконсервативная сила

$\bar{n}$  : усредненное среднее движение

$\{\bar{c}_i, \bar{c}_j\}$  : скобки Пуассона

$\eta_{i,j}$  :  $2\pi$ -периодические функции

Точность прогноза по модели DSST отличается для разных классов орбит [4]. Среднеквадратичное отклонение при сравнении с численным расчетом на 7 суток составляет от 10 метров для НОО до 20 метров для ГСО. Для высокоэллиптических орбит среднеквадратичная ошибка может достигать 75 метров.

### 2.2.3 Численный прогноз

В ходе численного прогноза производится интегрирование системы (1). Для этого на каждом шаге требуется вычислять значение правой части  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ . В задачах небесной механики правая часть определяется суммарной силой, действующей на КА. Среди сил, влияющих на баллистическое движение КА основными являются:

- Притяжение Земли
- Сопротивление атмосферы
- Солнечное давление
- Притяжение планет Солнечной системы
- Давление света, отраженного от поверхности Земли (эффект альбедо)

Среди этих сил на НОО основной вклад вносят притяжение Земли и сопротивление атмосферы. С ростом высоты плотность атмосферы экспоненциально падает, и на высотах порядка 800 километров сила атмосферного сопротивления становится сопоставима с силой солнечного давления.

Помимо сил, имеющих природное происхождение, на КА могут действовать силы техногенного характера, в частности, сила тяги двигателей КА.

В специфических случаях высокоточного прогноза траектории необходимо учитывать силы, вызванные тепловым излучением аппарата вследствие неравномерного нагрева (эффект Ярковского [5]), а также силу, созданную антенной-излучателем.

В дальнейшем основные из перечисленных сил будут рассмотрены подробнее.

## Притяжение Земли

Отличие гравитационного потенциала Земли от сферического обусловлено сложной формой геоида и динамикой его изменения. Результирующий потенциал представим в виде разложения в сферических координатах ( $r, \phi, \lambda$ ):

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin \phi) [S_{nm} \sin(m\lambda) + C_{nm} \cos(m\lambda)],$$

где  $P_{nm}$  – присоединенные полиномы Лежандра,  $R$  – экваториальный радиус модели,  $C_{nm}$  и  $S_{nm}$  – коэффициенты модели.

Ускорение от силы притяжения рассчитывается из градиента гравитационного потенциала:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\text{ grav}} = -\nabla U$$

В настоящее время существует множество различных моделей потенциала Земли. Для баллистических расчетов в околосземном пространстве широко используется статическая модель EGM2008 [6]. Максимальный порядок модели составляет 2159, с дополнительными коэффициентами вплоть до 2190 степени. Для повышения динамической точности к модели могут применяться поправки, вызванные твердотельными и океаническими приливами. Данные для построения модели были получены из анализа относительного движения аппаратов миссии GRACE, спутниковой альtimетрии и территориальных гравиметрических измерений.

## Сопротивление атмосферы

Сила аэродинамического сопротивления, действующего на КА, может быть рассчитана по формуле:

$$\mathbf{F}_{\text{атм}} = -\frac{C\rho|v|S}{2}\mathbf{v},$$

где  $C$  – коэффициент аэродинамического сопротивления,  $\rho$  – атмосферная плотность,  $\mathbf{v}$  – скорость движения аппарата относительно атмосферы,  $S$  – площадь поперечного сечения.

Основные вычислительные затраты при расчете силы сопротивления приходятся на модель атмосферы. Атмосферная плотность зависит от многих параметров: координат, солнечной активности, геомагнитной активности, календарного сезона и времени суток.

В результате солнечной активности верхние слои атмосферы облучаются ультрафиолетом, что вызывает увеличение плотности. Атмосфера не прозрачна для ультрафиолета, поэтому измерить исходное УФ излучение с Земли невозможно. Было установлено, что излучение с длиной волн 10.7 сантиметров (2800 МГц), порождается тем же слоем Солнца, что и ультрафиолет. Это позволило косвенно измерять силу УФ излучения через индекс солнечной активности  $F_{10.7}$ , характеризующий спектральную мощность излучения на единицу поверхности. Единица  $F_{10.7}$  соответствует  $10^{-22} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{Гц}}$ . Измерения  $F_{10.7}$  производятся в канадской обсерватории. Величина индекса связана с 11-летним циклом солнечной активности. В пике  $F_{10.7}$  может достигать значений 300 – 350, в то время как в периоды спада солнечной активности его величина составляет порядка 70 – 100 единиц. Во многих моделях применяется не только мгновенное, но и усредненное за 81 день значение индекса. Данный интервал усреднения охватывает

3 периода вращения Солнца. Каждый цикл солнечной активности уикален, поэтому точное предсказание индекса на длительный срок невозможно.

Следующим фактором, влияющим на плотность атмосферы, является магнитная активность. Солнечный ветер, то есть поток ионизированных частиц, вызывает возмущения магнитного поля Земли и нагревает верхние атмосферные слои. Для описания геомагнитной активности используется планетарный квази-логарифмический индекс  $K_p$ . Его значения варьируются от 0 для низкой активности до 9 для магнитных штормов с дробным шагом 1/3.  $K_p$  сопоставлен линейный индекс  $A_p$ , пропорциональный амплитуде возмущений магнитного поля. Единица  $A_p$  соответствует  $10^{-9}$  Тл.  $A_p$  лежит в диапазоне от 0 до 400, но в среднем величина индекса составляет 10 – 20 с редкими всплесками. Индексы геомагнитной активности формируются каждые 3 часа на основе измерений 12 обсерваторий. Динамика  $K_p$  и  $A_p$ , как и  $F_{10.7}$ , зависит от фазы солнечного цикла. Пик возмущений магнитного поля приходится на фазу спада солнечной активности.

Учет положения Солнца также существенен при расчете атмосферной плотности. Освещенные участки атмосферы нагреваются, поэтому плотность в этих областях существенно больше, чем в затененных.

Большинство современных моделей полуэмпирические. В их основе лежит комбинация не только физических законов, но и экспериментальных данных. Классические представители полуэмпирических моделей – ГОСТ 25645.166–2004 [7] и NRLMSISE-00 [8].

Модель ГОСТ 25645.166–2004 создана на основе данных о торможении спутников в атмосфере. Она позволяет вычислять атмосферную плотность для высот от 120 до 1500 километров с учетом изменений плотности ночной атмосферы в течение 11-летнего солнечного цикла, суточных изменений, сезонных изменений, колебаний солнечной активности и изменений в магнитном поле. Данная модель – стандарт для отечественных баллистических расчетов.

При разработке модели NRLMSISE-00 были использованы данные акселерометров на спутниках, радарные измерения температуры экзосферы и измерения концентрации ионов кислорода. Помимо колебаний солнечной и магнитной активности в модели учтены годовые, полугодовые, суточные, полусуточные и третьюсуточные изменения плотности. Структура модели позволяет рассчитывать плотность, гибко настраивая набор учитываемых параметров. Несмотря на то, что выпущена более новая версия – NRLMSIS-21 [9, 10], модель NRLMSISE-00 остается наиболее востребованной в силу баланса точности и ресурсоемкости.

Среди перспективных направлений совершенствования методов вычисления атмосферной плотности можно выделить расчет поправок к существующим моделям с помощью анализа торможения спутников в атмосфере [11]. Искомые поправки получаются из процедуры минимизации в ходе восстановления орбиты для большого числа КА с известными аэродинамическими параметрами.

## Притяжение третьих тел

Для расчета притяжения третьих тел необходимо принять во внимание относительное движение Земли, КА и третьего тела:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{3\text{-тело}} = \mu_3 \left( \frac{\mathbf{r}_{\text{sat}3}}{r_{\text{sat}3}^3} - \frac{\mathbf{r}_3}{r_3^3} \right),$$

где  $\mu_3$  – гравитационный параметр третьего тела,  $\mathbf{r}_{\text{sat}3}$  – вектор КА–тело,  $\mathbf{r}_3$  – вектор Земля–тело.

Заметим, что в формуле учтена только центральная гармоника гравитационного потенциала третьего тела. Такое приближение полностью оправдано при расчете околосземных орбит. При прогнозе межпланетных траекторий притяжение небесных тел солнечной системы может быть более точно представлено через разложение потенциала.

Эфемериды и гравитационные характеристики планет в формате DE405 предоставляются лабораторией JPL в виде наборов полиномов Чебышева для каждого временного интервала [12]. Средняя точность эфемерид составляет 0.01”.

## Солнечное давление

Как и атмосферное сопротивление, сила солнечного давления не консервативна. Выражение для силы следует из формулы давления электромагнитного излучения:

$$\mathbf{F}_{\text{сол}} = -\frac{W}{c} C_R S_{\text{сол}} \frac{\mathbf{r}_{\text{сол}}}{r_{\text{сол}}},$$

где  $W$  – энергетический поток,  $c$  – скорость света,  $C_R$  – отражательная способность поверхности КО,  $S$  – освещенная площадь КО,  $\mathbf{r}_{\text{сол}}$  – радиус вектор Солнца относительно Земли.

Энергия солнечного излучения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, следовательно энергетический поток может быть найден как:

$$W = TSI \frac{AU^2}{r_{\text{сол}}^2},$$

где TSI – энергетический поток на расстоянии одной астрономической единицы AU. Данные TSI формируются на базе спутниковых измерений.

Давление излучения Солнца действует на аппарат только в освещенных участках орбиты, поэтому для вычисления силы солнечного давления необходимо знать границы теневой области.

Наиболее простая модель тени цилиндрическая (рис. 3). Ее недостаток заключается в резком переходе свет–тень и соответствующих нежелательных разрывах при численном интегрировании. Коническая модель тени (рис. 4) позволяет учесть полутеневые участки и избавиться от разрывов. В работе [13] предложен аналитический алгоритм определения границ полутеневых областей в конической модели и методика коррекции шага численного интегрирования в участках перехода свет–тень. Среди аналитических подходов широко применяется метод [14], основанный на геометрическом расчете площади перекрытия Солнца и Земли (рис. 5). Минусом данного подхода является необходимость вычислять перекрытие на каждом шаге. Существует также динамическая модель SOLAARS-CF, включающая рефракцию атмосферы и сплюснутость Земли, но ее применение ограничено высокой ресурсоемкостью.

## Альбедо

Эффект альбедо связан с попаданием на спутник света, отраженного от Земли, и теплового излучения планеты. Значение отражательной способности сильно зависит от рода поверхности, на которую падает излучение. Карта альбедо и тепловая карта для Земли создаются на основе спутниковых измерений, а сила давления излучения, действующая на спутник, рассчитывается для каждой части поверхности Земли отдельно и затем суммируется.

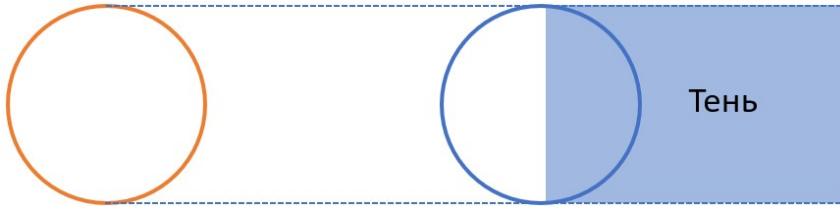


Рис. 3: Цилиндрическая модель тени

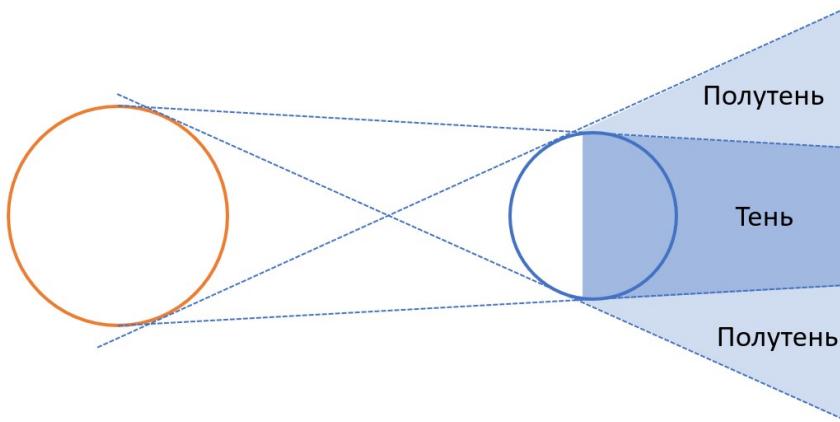


Рис. 4: Коническая модель тени

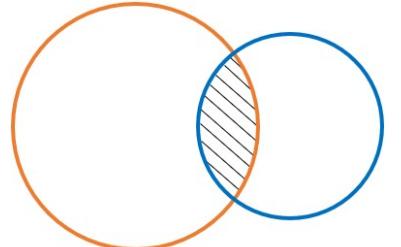


Рис. 5: Модель тени с перекрытием

## 2.3 Виды измерений

Для уточнения орбиты требуются измерения параметров, связанных с положением и движением КО. Конкретный набор измеряемых параметров зависит от типа используемых наблюдательных средств. Далее приведены несколько стандартных наборов измеряемых величин и примеры их технической реализации.

### 2.3.1 Односторонние измерения дальности

Расстояние между спутником и станцией наблюдения является одним из наиболее часто измеряемых параметров. Такая модель измерений получила широкое распространение во многом благодаря глобальным навигационным спутниковым системам. Каждый спутник ГНСС оснащен антенной, которая излучает электромагнитные волны на нескольких частотах. Сигнал каждого спутника модулируется особым образом, чтобы приемник мог определить момент времени  $T_T$  излучения волны по шкале времени спутника и соответствующие этому моменту координаты излучателя. Момент приема сигнала  $T_R$  фиксируется по часам приемника.

Зная разницу между временем отправки и приема сигнала, а также используя свойство прямолинейности распространения света, можно рассчитать величину, называемую псевдодальнстью:

$$\rho = (T_R - T_T)c,$$

где  $c$  – скорость света.

Псевдодальность не совпадает с геометрической в силу несогласованности часов излучателя и приемника, особенностей распространения сигнала в атмосфере и относительного движения излучателя и приемника.

Учет этих факторов необходим при формировании расчетного аналога измерения:

$$\tilde{\rho} = |\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_R| + c(\delta t_T - \delta t_R) + \delta\rho_{tropo} + \delta\rho_{ion} + \epsilon,$$

где помимо геометрической дальности  $|\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_R|$  присутствуют слагаемые, связанные с поправкой часов спутника  $\delta t_T$  и станции  $\delta t_R$ , тропосферная  $\delta\rho_{tropo}$  и ионосферная  $\delta\rho_{ion}$  задержки. Благодаря измерениям на нескольких частотах ионосферная задержка может быть с высокой точностью исключена. В  $\epsilon$  включаются остаточные ошибки, связанные с неучитываемыми нелинейными эффектами.

Для повышения точности позиционирования и уменьшения разброса результатов в ходе решения навигационной задачи могут обрабатываться не только псевдодальности, но и фазовые измерения сигнала. В этом случае точность позиционирования с использованием ГНСС может достигать 10 сантиметров.

### 2.3.2 Двусторонние измерения дальности

В ходе двустороннего измерения дальности фиксируется время, за которое излученный сигнал достигает цели, отражается и возвращается в точку испускания. Вариантом такой измерительной системы является лазерная дальномерия (SLR). В отличии от односторонних измерений дальности в лазерной дальномерии излучатель и приемник находятся в одном месте и подключены к одним часам, что избавляет от необходимости уточнения поправок шкал времени. При этом атмосферные поправки все еще требуются. В качестве измерений усредняется расстояние, пройденное сигналом в прямом и обратном направлениях:

$$\rho_{avg} = \frac{1}{2} [(T_R - T_T) c + \delta\rho_{atm} + \epsilon]$$

Современные станции SLR используют лазеры с длиной волны 532 нм, что соответствует оптическому диапазону. С этим связан недостаток лазерной дальномерии – зависимость от погодных условий.

В качестве примера применения SLR рассмотрим серию аппаратов LAGEOS. Аппараты LAGEOS-I и LAGEOS-II были запущены на среднюю околоземную орбиту в 1976 и 1992 годах соответственно. Цель миссии – изучение геодинамики, в частности, определение формы земной поверхности и уточнение параметров вращения Земли. Каждый аппарат имеет шарообразную форму и оснащен набором углковых отражателей, необходимых для точного отражения лазерного сигнала.

Позиционирование спутников выполняется на основе измерений наблюдательных пунктов Международной службы лазерной дальномерии. Ошибки лазерных измерений составляют менее 1 сантиметра, что позволяет восстанавливать орбиту аппаратов с точностью до нескольких сантиметров.

### 2.3.3 Измерения дальности и радиальной скорости

В некоторых случаях наблюдательные средства позволяют измерить не только некоторый параметр движения, но и скорость его изменения. Так, производная дальности – радиальная скорость, может быть получена из допплеровского сдвига. Эффект Допплера заключается в частотном смещении, которое приобретает сигнал, принимаемый на движущемся объекте (или отраженный от движущегося объекта). Величина смещения зависит от проекции относительной скорости излучателя и приемника на линию распространения сигнала, то есть от радиальной скорости:

$$\Delta f_D = \frac{2v_r f_t}{c},$$

где  $v_r$  – радиальная скорость,  $f_t$  – рабочая частота излучателя,  $c$  – скорость света.

Представителем данного класса систем является DORIS, которая обеспечивает измерение радиальной скорости с точностью до 0.5 мм/с. В состав комплекса DORIS входят наземные маяки и космические аппараты, оборудованные соответствующими допплеровскими приемниками. В частности, Европейское космическое агентство использует DORIS для определения орбиты аппарата Cryosat-2, созданного с целью измерения толщины ледового покрова.

### 2.3.4 Угловые измерения

Для описания угловых измерений рассмотрим несколько дополнительных систем координат.

Форма Земли может быть приближенно представлена в виде опорного эллипсоида. В силу несферичности земной поверхности локальная вертикаль не совпадает с направлением на центр Земли, определяемым сферическими координатами. Поэтому сферическая СК неудобна при проведении измерений и вводится геодезическая СК (рис. 6), привязанная к опорному эллипсоиду. В этой системе широта и долгота определяют направление на зенит.

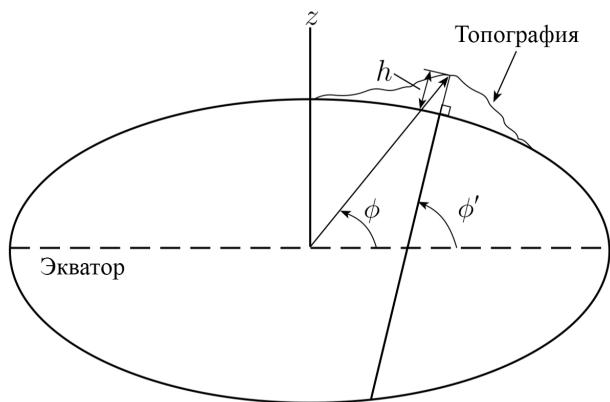


Рис. 6: Геодезическая система координат.  $\phi'$  – геодезическая широта,  $h$  – высота над опорным эллипсоидом

Для координатного описания локальной области на поверхности эллипсоида применяется топоцентрическая СК (рис. 7). Это декартова система, начало которой привязано к некоторой точке на эллипсоиде, а оси сонаправлены касательным координатных линий геодезической СК в данной точке.

Направление в локальной системе координат можно описать с помощью азимута и угла возвышения (рис. 8). Именно эти углы используются для ориентации наблюдательных средств. Затем на начальном этапе обработки измерений набор локальных углов может быть пересчитан в долготу и широту в сферической системе координат.

Техническая реализация угловых измерений зачастую связана с оптическими инструментами. Классическим примером таких инструментов является телескоп. В первом приближении методика получения угловых измерений с помощью телескопа достаточно проста.

Телескоп с закрепленной на объективе фотокамерой направляется на интересующий участок неба. Затем открывается затвор камеры и снимок неба экспонируется в течение заданного промежутка времени. Для компенсации движения звезд на небесной сфере при длинных выдержках крепления телескопа оснащаются приводами. Это позволяет сохранить фиксированную ориентацию относительно звездной системы координат. В то же время проекция траектории космического объекта на небесную сферу

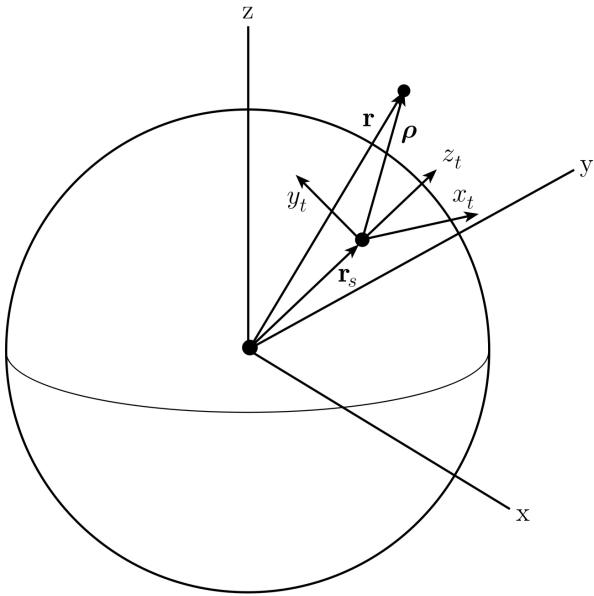


Рис. 7: Тopoцентрическая система координат.  $x, y, z$  – оси исходной СК,  $x_t, y_t, z_t$  – оси локальной СК

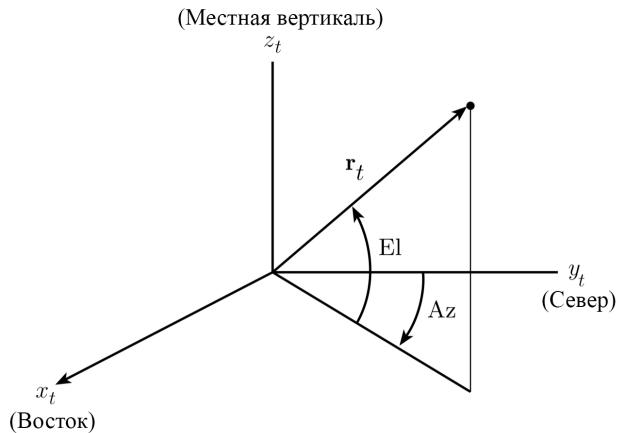


Рис. 8: Локальная система координат.  
Az – азимут, отсчитывается от направления на север  
El – угол возвышения, отсчитывается от плоскости поверхности

представляет собой линию – трек. Зная угловые координаты звезд (например, из звездного каталога), можно определить угловые координаты объекта во время пролета.

В настоящее время для контроля околоземного пространства также повсеместно применяются активные радиолокаторы. Локатор состоит из набора излучателей, испускающих сигнал, и приемников, фиксирующих отраженный от объекта сигнал. Зона обзора для барьерных РЛС двумерная (сектор), а для обзорных РЛС объемная (установленная пирамида). Применение в локаторах активной фазированной антенной решетки позволяет определять не только расстояние и радиальную скорость, но и направление на объект.

## 2.4 Обработка измерений

Существует два качественно разных подхода к обработке поступающих измерений для уточнения параметров орбиты. Первый подход базируется на совместной обработ-

ке измерительной информации. Представителем данного подхода является метод наименьших квадратов (МНК). На начальных этапах освоения космоса именно этот метод использовался для восстановления орбит КА. С увеличением числа объектов в околоземном пространстве рос и объем ресурсов, требующийся для процедуры уточнения орбит. Это привело к появлению менее трудоемких алгоритмов, основанных на линеаризации уравнений динамики системы и рекуррентной обработке измерений. Примером таких алгоритмов служит фильтр Калмана и его модификации.

#### 2.4.1 Метод наименьших квадратов

В методе наименьших квадратов параметры орбиты  $\mathbf{x}$  итеративно подбираются таким образом, чтобы минимизировать взвешенную сумму квадратов невязок измерений  $\{\mathbf{z}_k^O(t_k, \mathbf{x})\}_{k=1}^N$  и их расчетных аналогов  $\{\mathbf{z}_k^C(t_k, \mathbf{x})\}_{k=1}^N$ :

$$S(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N (\mathbf{z}_k^O - \mathbf{z}_k^C)^T W_k (\mathbf{z}_k^O - \mathbf{z}_k^C) \rightarrow \min, \quad (4)$$

где  $N$  – число измерений,  $W_k$  – весовая симметричная матрица,  $t_k$  – момент измерения, а расчетные аналоги строятся из прогноза движения КА на моменты измерений.

Задача оптимизации можно переписать в виде:

$$S(\mathbf{x}) = (\mathbf{z}^O - \mathbf{z}^C)^T W (\mathbf{z}^O - \mathbf{z}^C) \rightarrow \min,$$

где  $\mathbf{z}^C = (z_1^C, \dots, z_N^C)$ ,  $\mathbf{z}^O = (z_1^O, \dots, z_N^O)$ ,  $W = \text{diag}(W_1, \dots, W_N)$ .

Рассмотрим поиск минимума функционала методом Гаусса-Ньютона, также известным как метод дифференциальной коррекции. В данном алгоритме используется предположение о близости начального приближения к оптимальному, что позволяет провести линеаризацию расчетного аналога измерений:

$$\mathbf{z}^C = \mathbf{z}^N(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{z}^N(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{z}^N + A \Delta \mathbf{x},$$

где  $\mathbf{z}^N$  – номинальный вектор измерений, соответствующий состоянию системы на текущей итерации,  $A(\mathbf{x}) = \frac{\partial z^N(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$  – матрица Якоби,  $\Delta \mathbf{x}$  – параметр линеаризации.

На каждой итерации необходимо найти такой шаг  $\Delta \mathbf{x}$ , который обеспечивал бы минимум невязки. Из необходимого условия экстремума:

$$\nabla S(\mathbf{x}) = -2A^T(\mathbf{x})W(\mathbf{z}^O(\mathbf{x}) - \mathbf{z}^C) = 0$$

$$A^T W (\mathbf{z}^O - \mathbf{z}^C) = A^T W (\mathbf{z}^O - \mathbf{z}^N) - A^T W A \Delta \mathbf{x} = 0$$

Обозначая  $\mathbf{z}^O - \mathbf{z}^N = \mathbf{b}$ , получим выражение для шага:

$$\Delta \mathbf{x} = (A^T W A)^{-1} A^T W \mathbf{b} \quad (5)$$

Таким образом, имея начальное приближение  $\mathbf{x}_0$ , можно построить итеративную процедуру:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \Delta \mathbf{x} \quad (6)$$

Выбор начального приближения может быть осуществлен с помощью методов начального определения орбиты, таких как методы Гаусса, Гудинга и Double-R.

Критерий останова – малое изменение среднеквадратичного отклонения по сравнению с предыдущей итерацией.

Матрица Якоби  $A_k$  измерения  $\mathbf{z}_k$  представима в виде произведения:

$$A_k(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{z}_k(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t_k)}{\partial \mathbf{x}} = H_k \Phi_k,$$

где  $\tilde{\mathbf{x}}$  – прогноз состояния системы на момент времени  $t_k$ , а матрица  $H_k$  может быть рассчитана аналитически.

Матрица изохронных производных  $\Phi_k$  вычисляется из интегрирования уравнения в вариациях до момента времени  $t_k$ :

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Phi, \\ \Phi|_{t=t_0} = E, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\mathbf{f}$  – правая часть системы (1),  $E$  – единичная матрица.

МНК требует точную, а, следовательно, вычислительно-затратную модель эволюции системы, но взамен дает высокую точность определения орбиты и согласующих параметров (например, отношения площади КА к массе).

#### 2.4.2 Фильтр Калмана

Фильтр Калмана – рекурсивный фильтр, использующий модель движения системы и измерения датчиков (в том числе и с зашумлением) для оценки вектора состояния системы.

Каждая итерация фильтра включает прогноз на основе текущего состояния и уточнение прогноза с учетом измерения. Исходно фильтр Калмана создавался для линейных систем. Задачи баллистики существенно нелинейны, поэтому для их решения были разработаны расширенный и сигма-точечный фильтр Калмана.

Рассмотрим динамическую систему со следующей моделью:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{w}(t), \\ \mathbf{x}(t_0) \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}}_0, P_0), \end{cases}$$

где  $\mathbf{w}(t)$  – вектор шума модели с матрицей ковариации  $Q$ .

С помощью датчика можно получать измерения параметров системы  $\mathbf{z}_k$  в моменты времени  $t_k$ :

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t_k), t_k) + \mathbf{v}_k,$$

где  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$  – функция чувствительности системы,  $\mathbf{v}_k$  – нормально распределенный шум измерения с нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариации  $R_k$ . Предполагается, что шумы  $w$  и  $v$  не коррелируют.

Задача фильтрации заключается в рекурсивном вычислении оптимальной оценки состояния по набору измерений  $\{\mathbf{z}_k\}_{k=1}^N$ .

#### Расширенный фильтр Калмана

В основе расширенного фильтра Калмана линеаризация в окрестности отфильтрованной оценки состояния системы на каждом шаге. Прогноз вектора состояния до коррекции  $\mathbf{x}_{k|k-1}$  производится по формуле:

$$\mathbf{x}_{k|k-1} = \mathbf{x}_{k-1|k-1} + \Delta t \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1|k-1}, t_{k-1}),$$

где  $\mathbf{x}_{k-1|k-1}$  – вектор состояния на предыдущем шаге.

Затем вычисляется прогноз матрицы ковариации, и оба прогноза корректируются по следующему измерению.

Учитывая процедуру линеаризации, использование высокоточной модели движения в фильтре Калмана нецелесообразно. Упрощенная модель динамики и рекуррентная обработка измерений приводит к низкой ресурсоемкости процесса фильтрации, что особенно важно для бортовых вычислительных систем. Однако недостаток линеаризации выражается в значительном росте ошибок на больших промежутках времени.

## Сигма-точечный фильтр Калмана

Вместо линеаризации эта модификация фильтра Калмана использует сигма-точки, расположенные в окрестности текущей оценки состояния. Эти точки "пробуют" возможные варианты развития системы, а потом объединяются для уточненного прогноза:

$$\mathbf{x}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \mathbf{x}_{i,k-1|k-1}^*,$$

где  $W_i^{(m)}$  – веса сигма-точек,  $\mathbf{x}_{i,k-1|k-1}^*$  – вектора состояния в сигма-точках.

## 2.5 Проблематика

На сегодняшний день на околоземных орbitах находится большее число космических объектов. Среди них есть не только активные аппараты, но и космический мусор, образовавшийся в результате фрагментации корпусов ракет и спутников. Растущая загруженность околоземной среды требует развития эффективных средств контроля космического пространства, в частности, для уточнения орбит КО. В основе восстановления орбиты лежит задача прогнозирования движения. Для построения траектории необходимо вычислять силы, действующие на космический объект.

### 2.5.1 Оценка быстродействия

Краткий обзор вычислительных сложностей приведен в таблице 1.

Сила		Время расчёта, усл. ед.
Гравитационное притяжение	16*16 гармоник	1
	64*64 гармоник	12.3
	64*64 гармоник (ускорение)	1.3
Сопротивление атмосферы	ГОСТ Р 25645.166-2004	2.2
	NRLMSISE-00	14
	NRLMSIS 2.1	86
Солнечное давление	точечного источника	0.06
	непрерывной тени	0.1

Таблица 1: Сравнение времени вычисления некоторых сил, действующих на КО

Сила гравитационного притяжения вычислялась с использованием модели EGM2008 для разного числа гармоник. За единицу принята трудоемкость подсчета с учетом 16\*16 гармоник.

Среди рассмотренных сил на низкой орбите основной вклад вносят гравитационное притяжение Земли и сопротивление атмосферы. В классических подходах наиболее ресурсоемким этапом является вычисление силы гравитационного притяжения Земли. Ресурсоемкость вычисления данной силы с ростом числа гармоник растет квадратично. Соответствующие затраты для 64\*64 гармоник составили 12 условных единиц. Однако использование интерполяционного подхода [15] позволяет существенно снизить ресурсоемкость расчета гравитационной силы. С учетом интерполяции время расчета силы притяжения равно времени, затрачиваемому на прямой расчет гравитационной силы с учетом 16 гармоник потенциала.

Таким образом, именно расчет силы сопротивления атмосферы становится ключевым с точки зрения ресурсоемкости программы. Вычисление аэродинамического сопротивления атмосферы связано с определением ее плотности. Для повышения эффективности программного комплекса требуется ускорение расчета атмосферной плотности. Алгоритм, позволяющий осуществить это, рассмотрен в следующем разделе.

### 2.5.2 Высокоточное восстановление орбиты

Точность восстановления орбиты КО зависит от динамической модели и измерений. Для систем, использующих измерения высокой точности, например, лазерную дальномерию, качества прямого моделирования сил начинает не хватать на интервалах по времени больше дня. Это связано с тем, что моделирование любой силы, действующей на КО, содержит определенную ошибку. Особенно сильно эта ошибка проявляется при расчете давления солнечного и теплового излучения и эффекта альбедо. Величина этих сил определяется ориентацией КО. Если объект обладает сложной конструктивной геометрией, то вычислить площадь поверхности, на которую падает излучение, и определение модуля силы затруднено.

Для того чтобы преодолеть это, вводится дополнительная параметризация модели движения, реализация которой будет представлена далее.

### 3 Ускорение расчета плотности атмосферы

В настоящей работе исследуется возможность ускорения расчета плотности атмосферы с использованием интерполяционных подходов.

Существует несколько хорошо известных алгоритмов многомерной интерполяции. Полилинейная и поликубическая интерполяция, а также интерполяция до ближайшего характеризуются низкой вычислительной сложностью, но малой точностью. Компромиссом является интерполяция на узлах Чебышева–Лиссажу [16], обеспечивающая быструю многомерную интерполяцию с сохранением высокой точности. Именно этот алгоритм был выбран для интерполяции модели атмосферы.

#### 3.1 Обзор алгоритма интерполяции

Первый этап создания интерполянта на узлах Чебышева–Лиссажу заключается в построении прямоугольной сетки в  $\mathbb{R}^d$ . В частном случае это сетка в околосземном пространстве в координатах  $(r, \phi, \lambda, t)$ .

Затем для ячейки сетки вычисляется набор точек, являющихся обобщением узлов Чебышева–Гаусса–Лобатто на  $d$ -мерное пространство:

$$\begin{cases} \mathbf{z}_i^{(\mathbf{n})} = (z_{i_1}^{n_1}, \dots, z_{i_d}^{n_d}) \\ z_i^n = \cos(i\pi/n) \end{cases}$$

Наборы  $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^d$  состоят либо лишь из четных, либо только из нечетных чисел, при этом каждое число не превышает соответствующее число из  $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ , состоящего из взаимно простых чисел и определяющего конфигурацию интерполянта.

Эти узлы лежат в точках самопересечения кривых Лиссажу:

$$\mathbf{l} = \left( \cos\left(\frac{\pi * p[\mathbf{n}]}{n_1}\right), \dots, \cos\left(\frac{\pi * p[\mathbf{n}]}{n_d}\right) \right),$$

где  $p[\mathbf{n}] = \prod_{j=1}^d n_j$ .

Визуализация узлов и кривых Лиссажу для трехмерного пространства представлена на рис. 9.

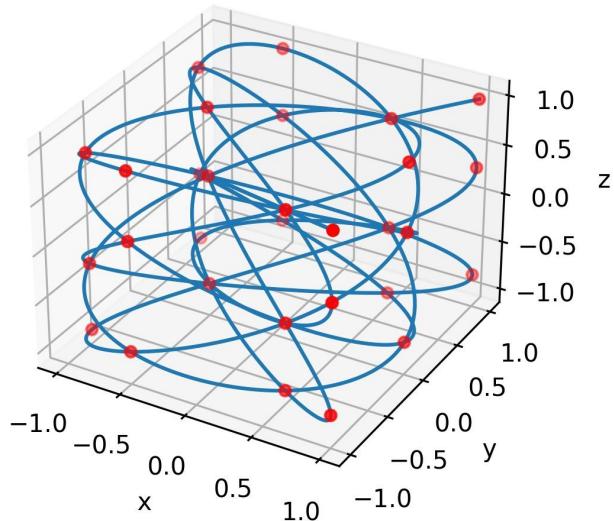


Рис. 9: Узлы Чебышева–Лиссажу в единичном кубе

Теперь необходимо найти  $d$ -мерный полином, удовлетворяющий условию интерполяции.

Полиномы Чебышева имеют следующий вид:

$$T_\gamma(x) = \cos(\gamma \arccos(x))$$

В узлах Чебышева–Лиссажу:

$$T_\gamma(z_i^n) = \cos\left(\gamma \arccos\left(\cos\left(\frac{i\pi}{n}\right)\right)\right) = \cos\left(\gamma \frac{i\pi}{n}\right) \equiv \chi_\gamma^n(i)$$

Определим d-мерные полиномы Чебышева как:

$$T_\gamma = T_{\gamma_1} \cdot \dots \cdot T_{\gamma_d},$$

где  $\gamma \in \mathbb{N}_0^d$ . Они составляют ортогональный базис в d-мерном пространстве полиномов. Аналогично,

$$\chi_\gamma^\mathbf{n}(\mathbf{i}) = \prod_{j=1}^d \cos\left(\gamma_j \frac{i_j \pi}{n_j}\right)$$

В свою очередь  $\chi_\gamma^\mathbf{n}(\mathbf{i})$  составляют базис в пространстве функций  $L^2$ .

Этот факт дает возможность разложить, функцию  $h$ , заданную на узлах, по данному базису, чтобы получить коэффициенты интерполяции:

$$\begin{cases} h \approx \sum_\gamma c_\gamma(h) \chi_\gamma^\mathbf{n} \\ c_\gamma(h) = \frac{1}{\|\chi_\gamma^\mathbf{n}\|^2} (h, \chi_\gamma^\mathbf{n}) \end{cases}$$

Вид базисных функций позволяет последовательно применить дискретное косинус преобразование к каждой размерности для эффективного подсчета коэффициентов.

В результате функция может быть аппроксимирована линейной комбинацией произведений многочленов Чебышева:

$$h \approx \sum_\gamma c_\gamma T_\gamma$$

В частном случае интерполяции 4-мерной функции плотности атмосферы результат интерполяции представим в виде:

$$\ln(\rho) \approx \sum_{i,j,k,l}^{n_1, n_2, n_3, n_4} c_{i,j,k,l} T_i(r) T_j(\phi) T_k(\lambda) T_l(t),$$

где  $T_\alpha$  – полином Чебышева степени  $\alpha$ .

Интерполяция логарифма объясняется тем фактом, что зависимость убывания атмосферной плотности с высотой примерно экспоненциальная.

Точность интерполяции определяется количеством ячеек, на которое было разбито пространство и максимальной степенью полиномов по размерности для каждой ячейки. При построении интерполянта расчет ячеек независим, что дает возможность вычислять коэффициенты в ячейках параллельно на нескольких потоках.

Скорость интерполяции зависит от конфигурации интерполянта. Чем больше степени полиномов в каждой ячейке, тем сильнее увеличивается время подсчета.

### 3.2 Тестирование интерполяции

Проведено тестирование точности различных конфигураций интерполянтов для модели NRLMSISE-00. Диапазон интерполяции по расстоянию был выбран от 350 до 800 километров, интервал по времени составил одни сутки. В ходе тестов была использована космическая погода за 11 января 2014 года. Этот год соответствует высокой солнечной активности, что позволяет протестировать качество интерполяции в сложных условиях.

Сетка для проверки работы алгоритма состояла из более 1 миллиона точек, равномерно распределенных по области интерполяции. Для каждого интерполянта изменилась максимальная ошибка на тестовой сетке, размер и величина ускорения по сравнению с прямым расчетом плотности.

Полный перебор по возможным конфигурациям и количеству ячеек интерполянтов сложен из-за большого количества вариантов, времени, затрачиваемого на построение каждого интерполянта и занимаемой памяти. Поэтому поиск подходящих параметров проводился поэтапно.

Учитывая близкую к линейной зависимость логарифма плотности от высоты, для этой координаты была выбрана наименьшая степень полинома – 2. В рассмотрении остались наборы (2, 3, 5, 7), (2, 3, 7, 5), (2, 5, 3, 7), (2, 5, 7, 3), (2, 7, 3, 5), (2, 7, 5, 3). Интерполянты для полиномов более высоких порядков не строились из-за снижения производительности таких конфигураций и существенного повышения затрат памяти для хранения коэффициентов.

Для каждого набора было зафиксировано количество ячеек по высоте – 65. Количество ячеек по широте, долготе и времени варьировалось от 5 до 50. Эмпирически определялось количество ячеек для достижения точности при заданном разбиении по высоте. Далее для интерполянта с максимальным числом ячеек по широте, долготе и времени варьировалось количество ячеек по высоте и определялась точность, достигаемая с такими параметрами.

На рисунках 10 – 15 представлены зависимости относительной ошибки от количества ячеек по конкретной координате интерполянта. Для времени фиксировалось максимальное количество ячеек по остальным координатам. Для долготы и широты фиксировалось наиболее плотное разбиение по широте и долготе соответственно, а диапазон соответствует вариации количества ячеек по времени.

Из графиков видно, что максимальная точность интерполянтов в тестах составила  $4 \cdot 10^{-4}$ . По срезам можно определить количество ячеек по каждой координате, которого достаточно для достижения предельной точности. Чем больше степень во времени, тем уже диапазон по широте и долготе. Это объясняется тем, что для достижения максимальной точности при заданном количестве ячеек по расстоянию требуется меньше ячеек по времени. На рисунках 16 – 21 изображены карты ошибок для разных конфигураций. Градиент на них направлен вдоль оси, соответствующей координате с наименьшей степенью в ячейке.

Срез по количеству радиальных ячеек отражает тенденцию быстрого спада ошибки в области 10 – 30 и замедления спада далее. В окрестности 65 угол наклона графика мал, следовательно, выбор начального приближения количества ячеек был верным.

На картах 23 и 24 приведено распределение плотности и абсолютной ошибки соответственно для интерполянта на высоте 350 километров. Использовалась конфигурация (2, 7, 5, 3) с количеством ячеек (65, 50, 50, 50). Темные участки, относящиеся к областям с повышенной плотностью, совпадают с участками, на которых интерполяция дает наибольшую абсолютную ошибку. В то же время относительная ошибка меняется по области не существенно. Темное пятно в левой части графика соответствует положению, находящемуся под прямыми солнечными лучами. Темные полосы на рисунке 24 возникают на границе ячеек по широте и долготе.

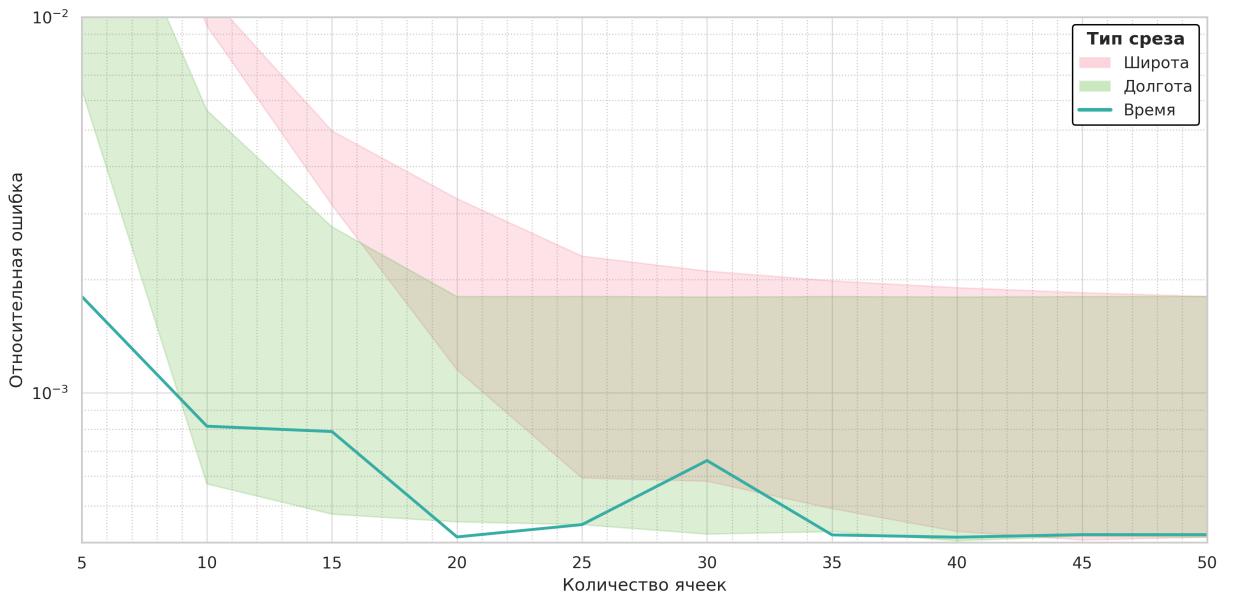


Рис. 10: Зависимость ошибки от количества ячеек интерполянта для конфигурации  $(2, 3, 5, 7)$

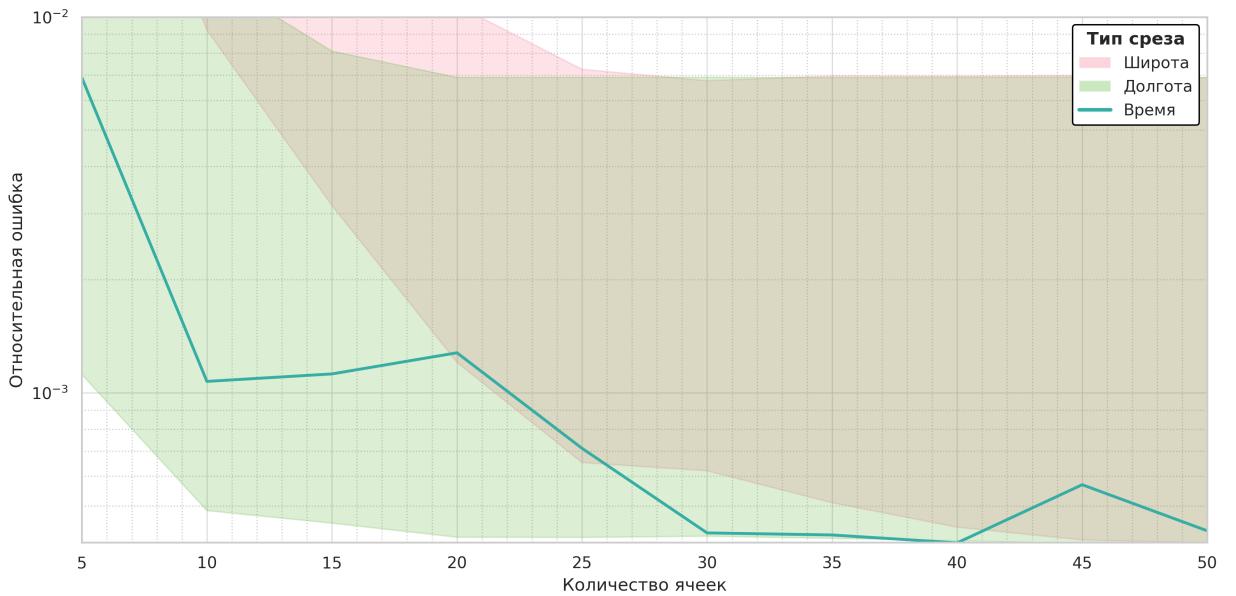


Рис. 11: Зависимость ошибки от количества ячеек интерполянта для конфигурации  $(2, 3, 7, 5)$

На основе данных о поточечном сравнении для каждой конфигурации были подобраны интерполянты, позволяющие достичь малой ошибки при минимальном размере. Характеристики выбранных интерполянтов представлены в таблице 2.

Тестирование прогноза с использованием интерполянтов проводилось следующим образом. Большая часть космических объектов имеет отношение площади к массе  $0.001 - 0.1$ , поэтому в тестах этот параметр был зафиксирован на величине 0.1. Исходя из дополнительных расчетов, зависимость ошибки прогноза от данного параметра близка к линейной. Поэтому ошибку для объектов с большим соотношением площади к массе (например, у пленок) можно легко получить. Рассмотрено более 5000 тысяч околосземных орбит с высотами от 350 до 800 километров. Гравитация учитывалась по

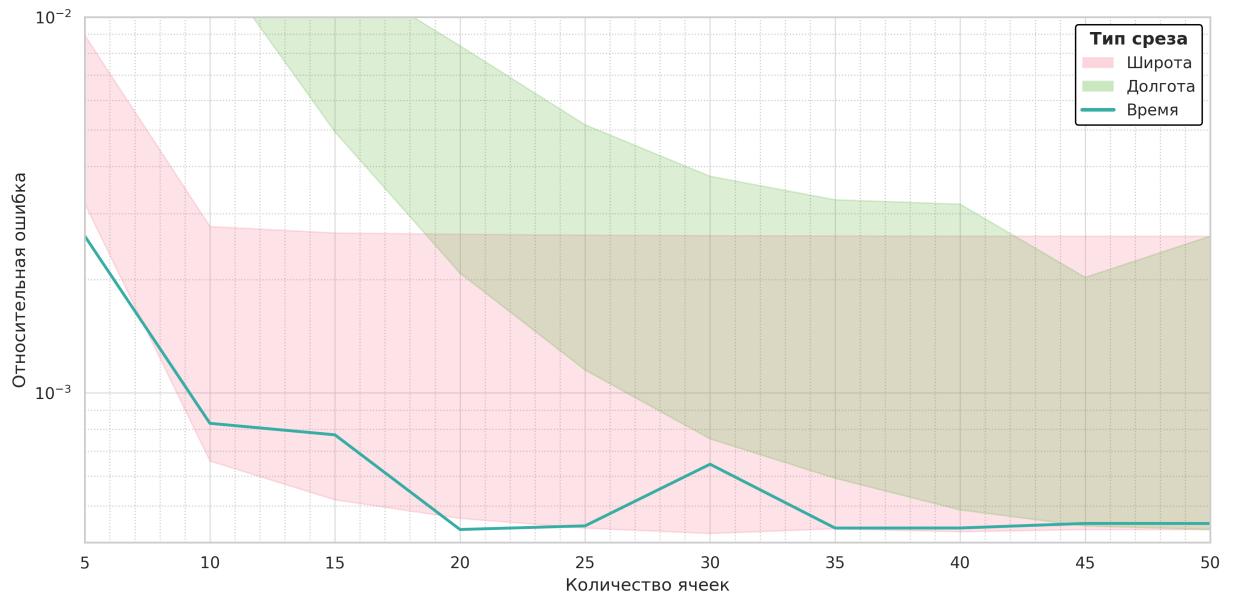


Рис. 12: Зависимость ошибки от количества ячеек интерполянта для конфигурации  $(2, 5, 3, 7)$

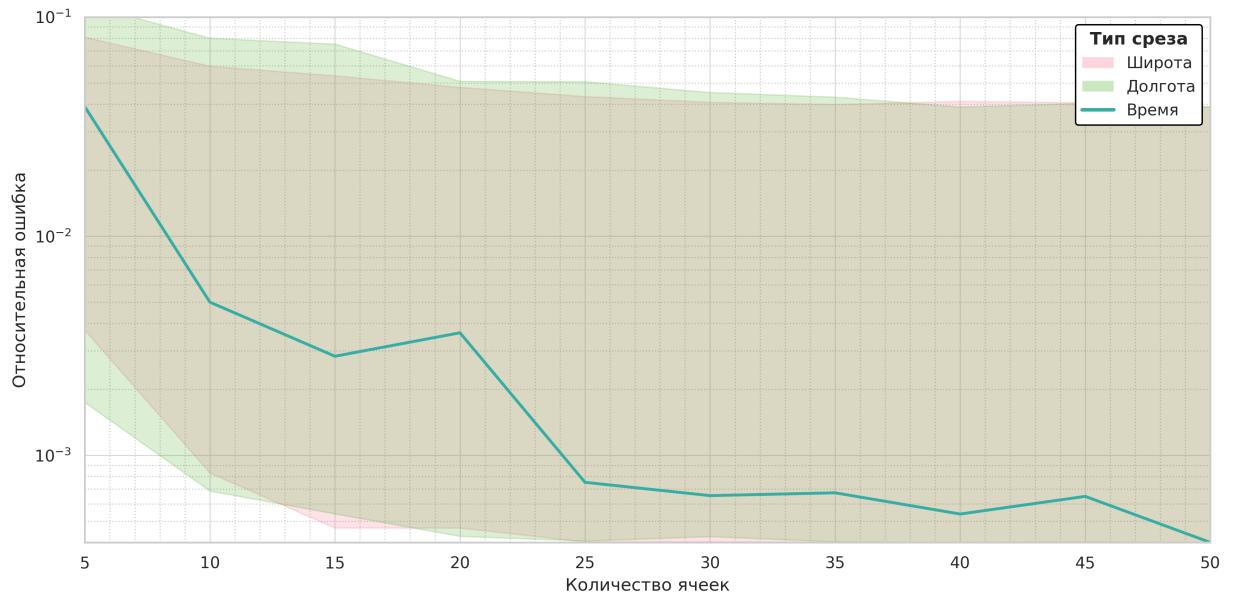


Рис. 13: Зависимость ошибки от количества ячеек интерполянта для конфигурации  $(2, 5, 7, 3)$

модели EGM2008 с 64 гармониками. Вычисления проводились с помощью явного метода Рунге–Кутты 7-го порядка, а период интегрирования составил 1 день. Сначала траектория вычислялась напрямую, затем с интерполяцией плотности атмосферы. Для ошибку принята разность между двумя прогнозами. Для наглядности на рисунках 25a – 25f приведена максимальная ошибка по высотам орбит с интервалом 50–100 км.

На исследованных интерполянтах ошибки в пределах 10 метра удается достичь на высотах от 400 километров. Такую точность можно считать достаточной при построении НОО.

Как отмечалось ранее, ускорение интерполянта главным образом зависит от скорости вычисления линейной комбинации произведений полиномов Чебышева в ячейке.

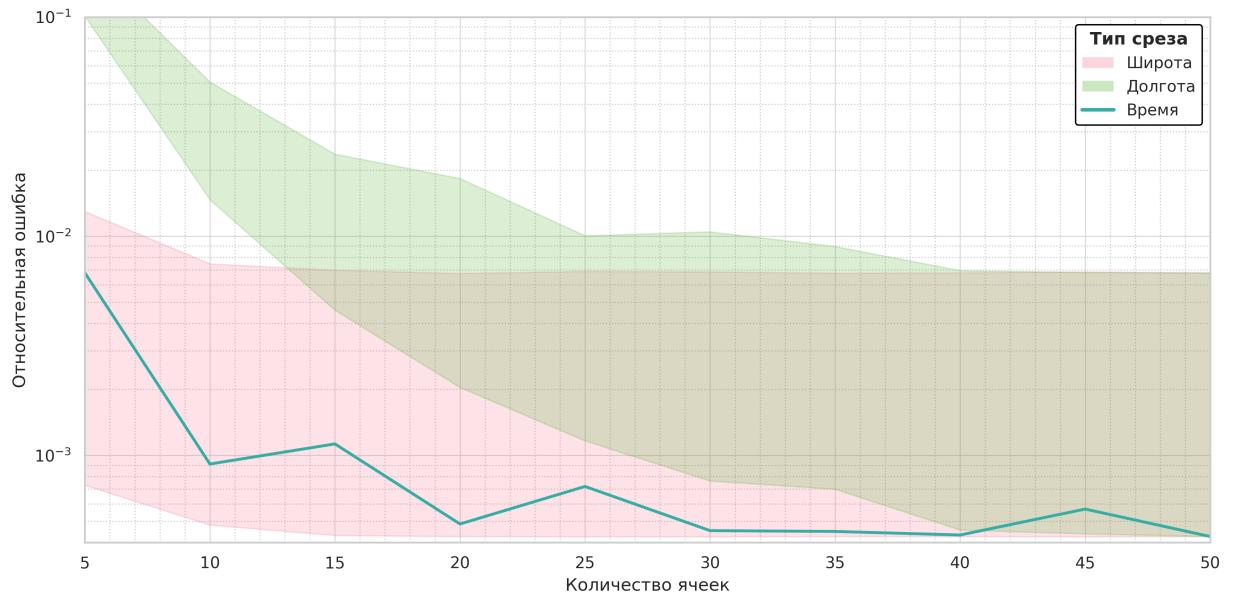


Рис. 14: Зависимость ошибки от количества ячеек интерполянта для конфигурации  $(2, 7, 3, 5)$

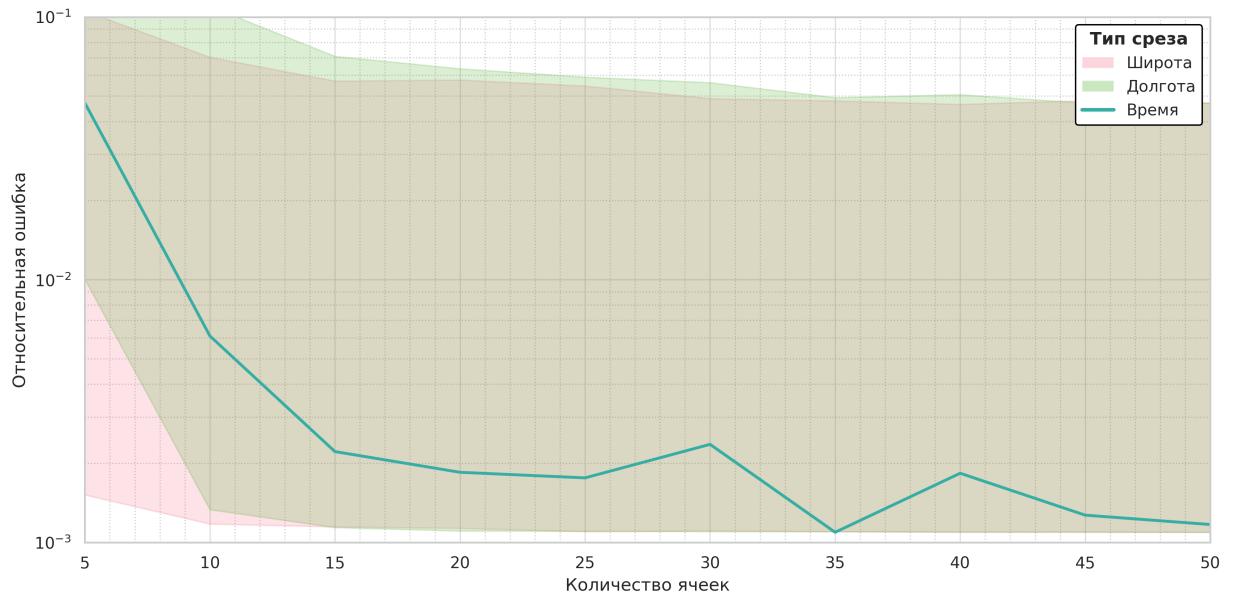


Рис. 15: Зависимость ошибки от количества ячеек интерполянта для конфигурации  $(2, 7, 5, 3)$

Эта скорость определяется максимальным порядком каждого полинома. Поэтому каждая рассмотренная конфигурация дает примерно одно и то же ускорение. Небольшие различия могут быть вызваны объемом интерполянта. Коэффициенты интерполяции во время исполнения программы хранятся в оперативной памяти. Эффективность работы памяти, т. е. скорость доступа к ее участку, уменьшается на больших данных. В то же время такое замедление не критично, так как качественно не меняет степень ускорения.

Скорость вычисления плотности атмосферы с интерполянтом выросла в среднем в 17 раз. Минимальное ускорение достигалось на больших интерполянтах и равнялось 9. Для выбранных интерполянтов ускорение варьировалось от 13 до 14. Таким обра-

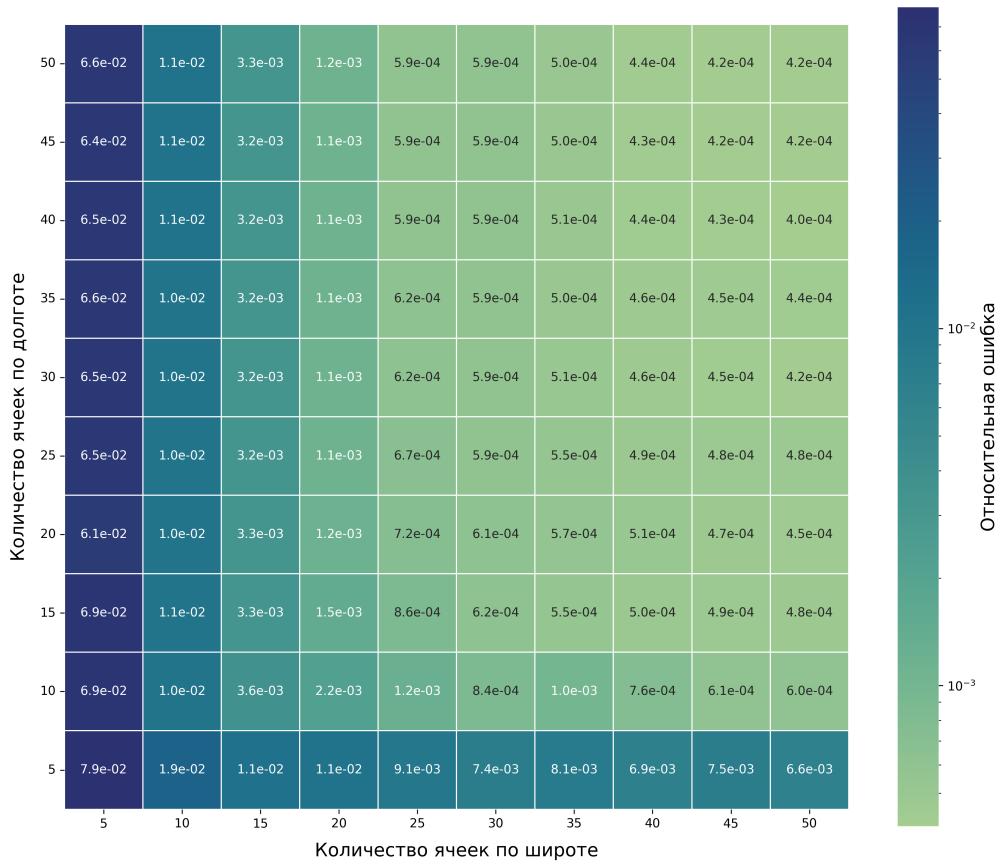


Рис. 16: Карта ошибок для конфигурации (2, 3, 5, 7)

зом, был достигнут уровень ресурсоемкости вычисления гравитационного потенциала с интерполяцией.

На крайней стадии оценивалась возможность совместного применения интерполянтов плотности и атмосферы. Сводные результаты приведены в таблице !!!

без атмосферы – с атмосферой – с интрополяцией потенциала – с полной интрополяцией

Конфигурация	Количество ячеек	Относительная ошибка, %	Максимальная ошибка прогноза, м	Размер, ГБ
(2, 3, 5, 7)	(65, 50, 25, 20)	0.045	12.2	0.97
(2, 3, 5, 7)	(65, 45, 35, 20)	0.041	12.3	1.22
(2, 3, 7, 5)	(65, 45, 15, 35)	0.044	11.8	0.91
(2, 5, 3, 7)	(65, 25, 50, 20)	0.044	12.3	0.97
(2, 5, 7, 3)	(65, 25, 20, 50)	0.042	12.6	0.97
(2, 7, 3, 5)	(65, 15, 45, 40)	0.044	12.2	1.05

Таблица 2: Результаты тестирования выбранных интерполянтов

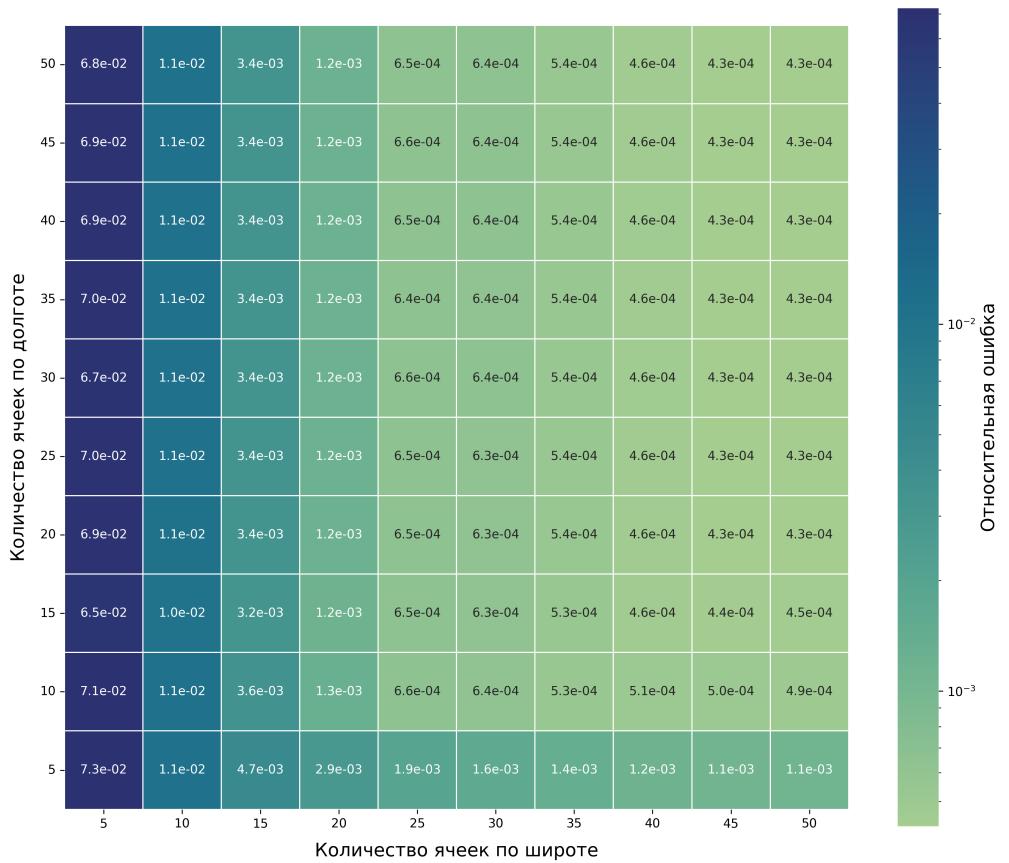


Рис. 17: Карта ошибок для конфигурации (2, 3, 7, 5)

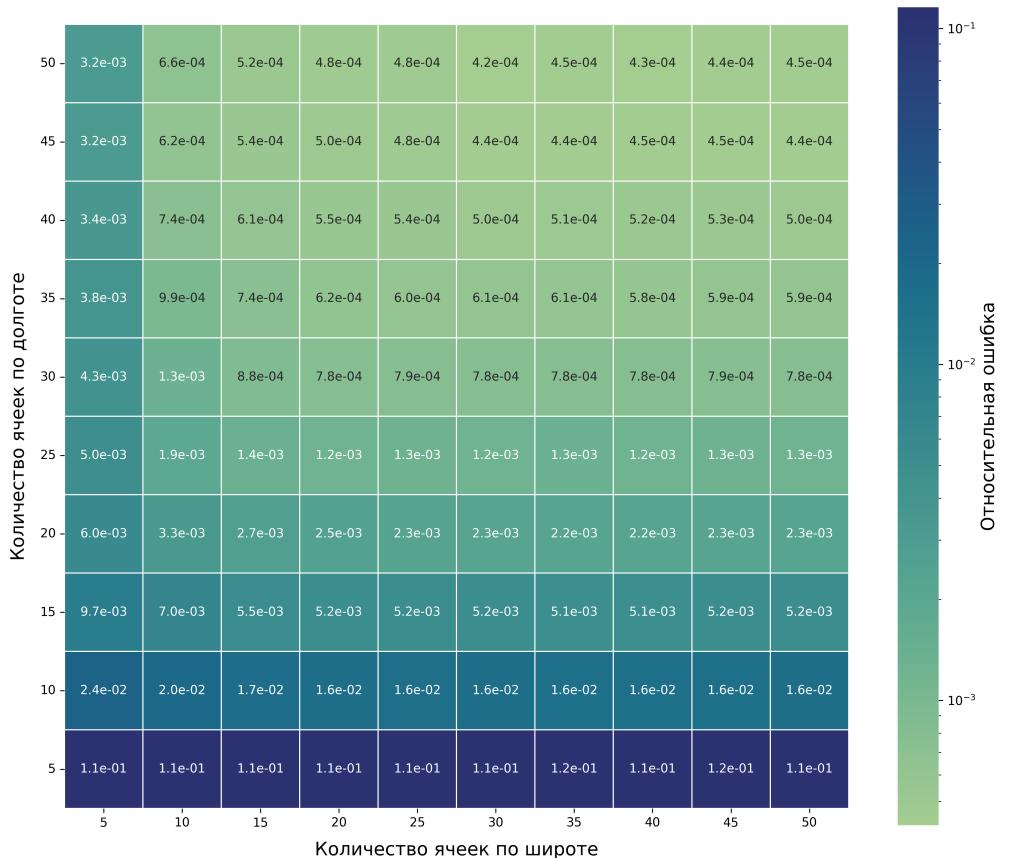


Рис. 18: Карта ошибок для конфигурации (2, 5, 3, 7)

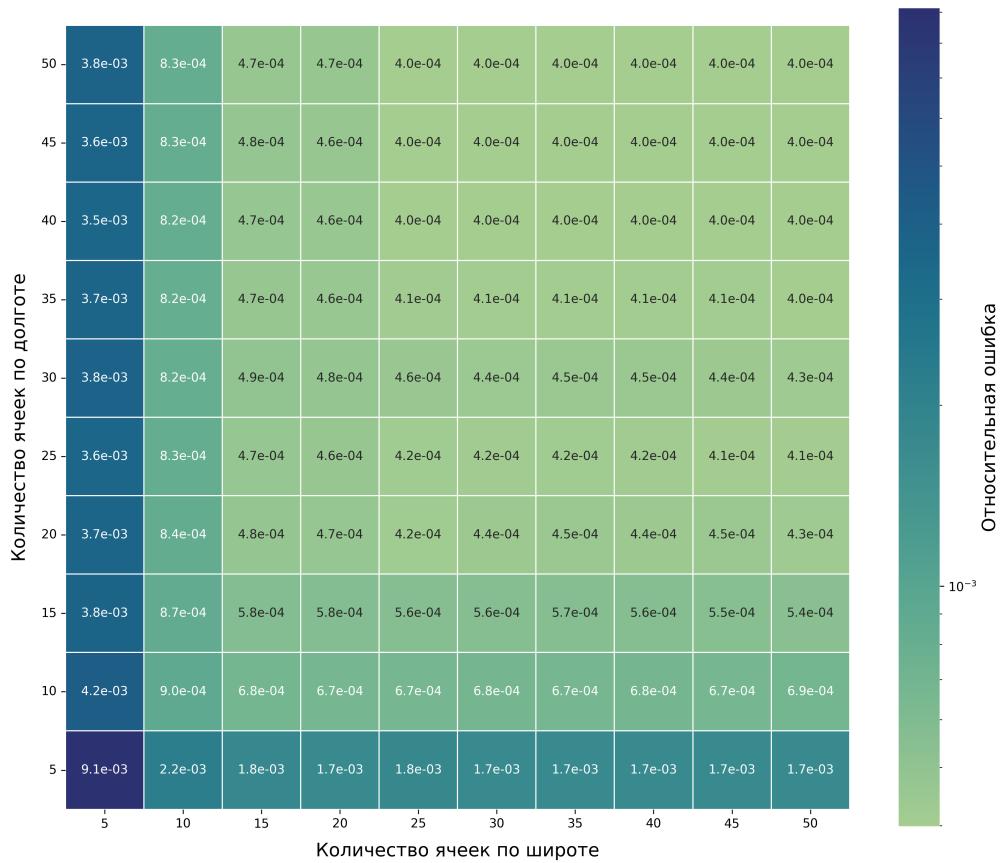


Рис. 19: Карта ошибок для конфигурации (2, 5, 7, 3)

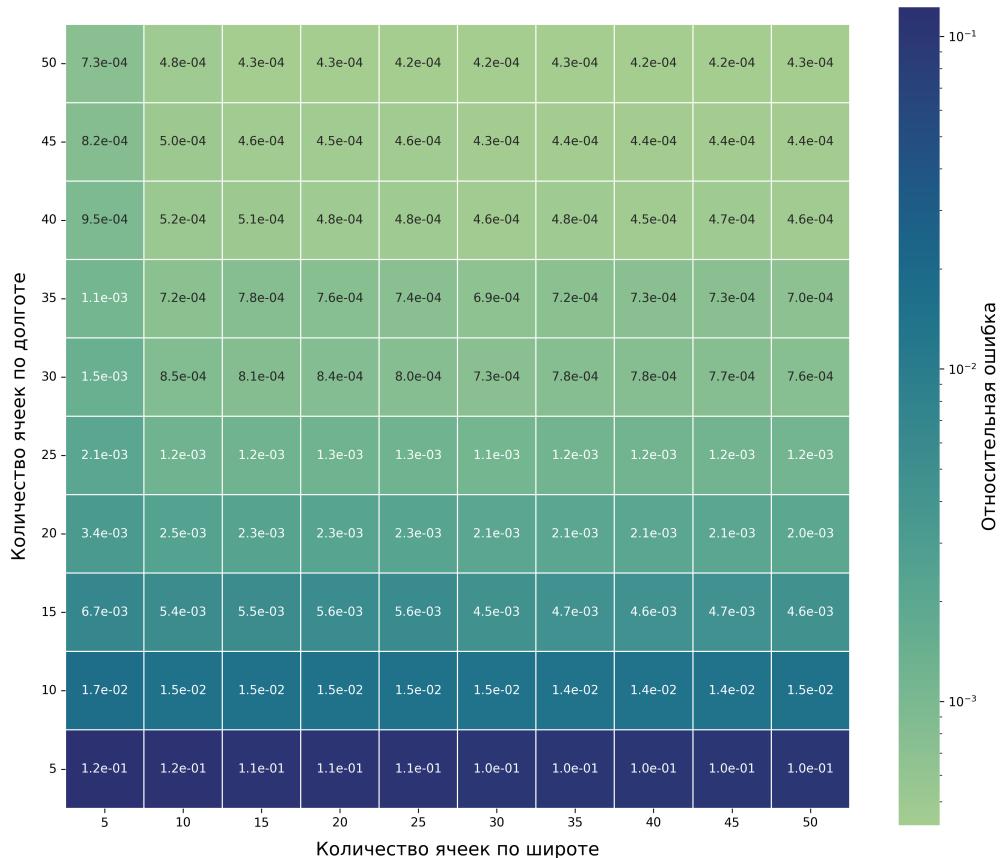


Рис. 20: Карта ошибок для конфигурации (2, 7, 3, 5)

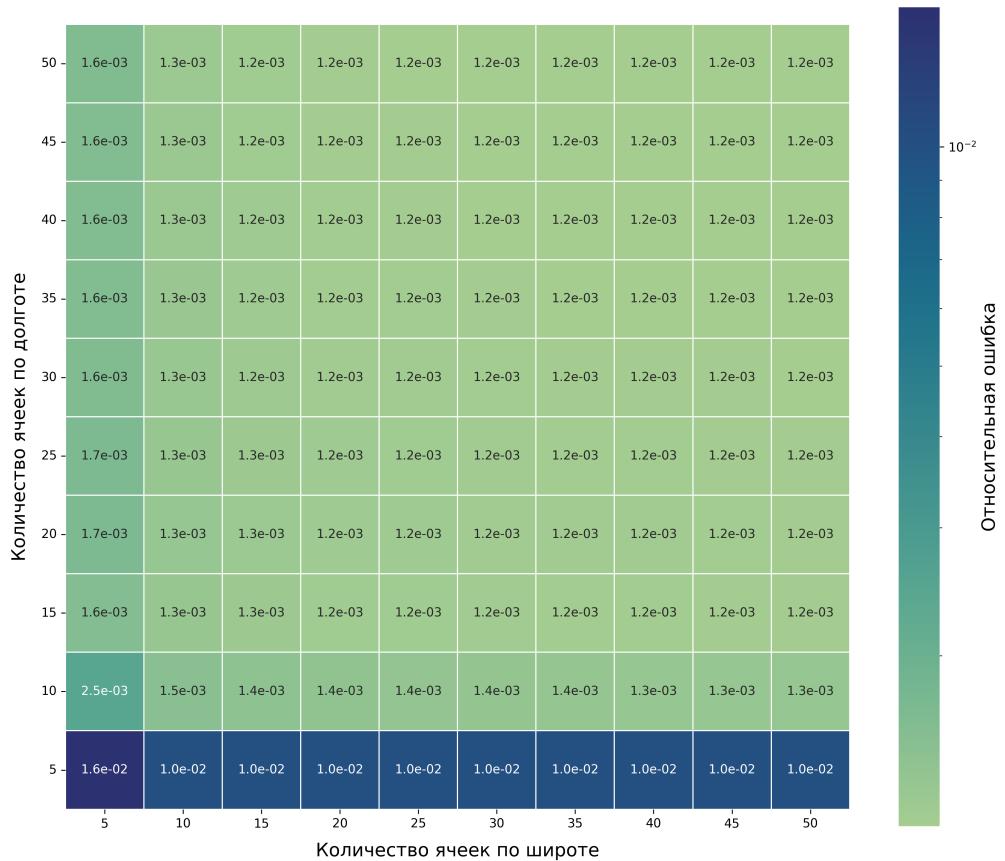


Рис. 21: Карта ошибок для конфигурации (2, 7, 5, 3)

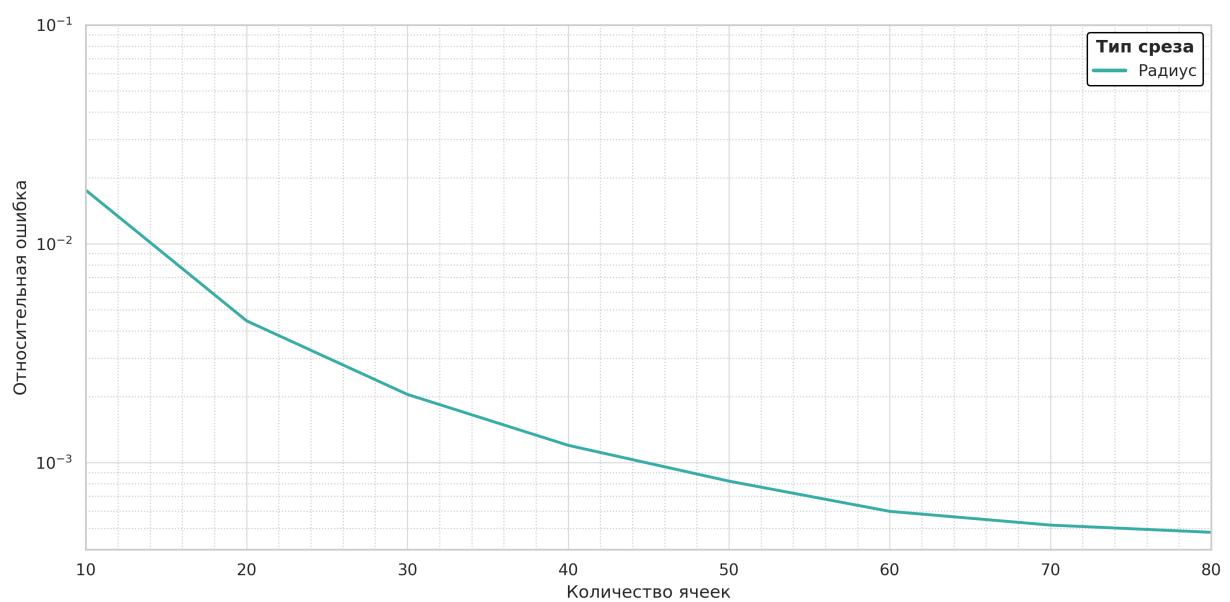


Рис. 22: Зависимость ошибки от количества ячеек интерполянта по радиусу для конфигурации (2, 3, 5, 7)

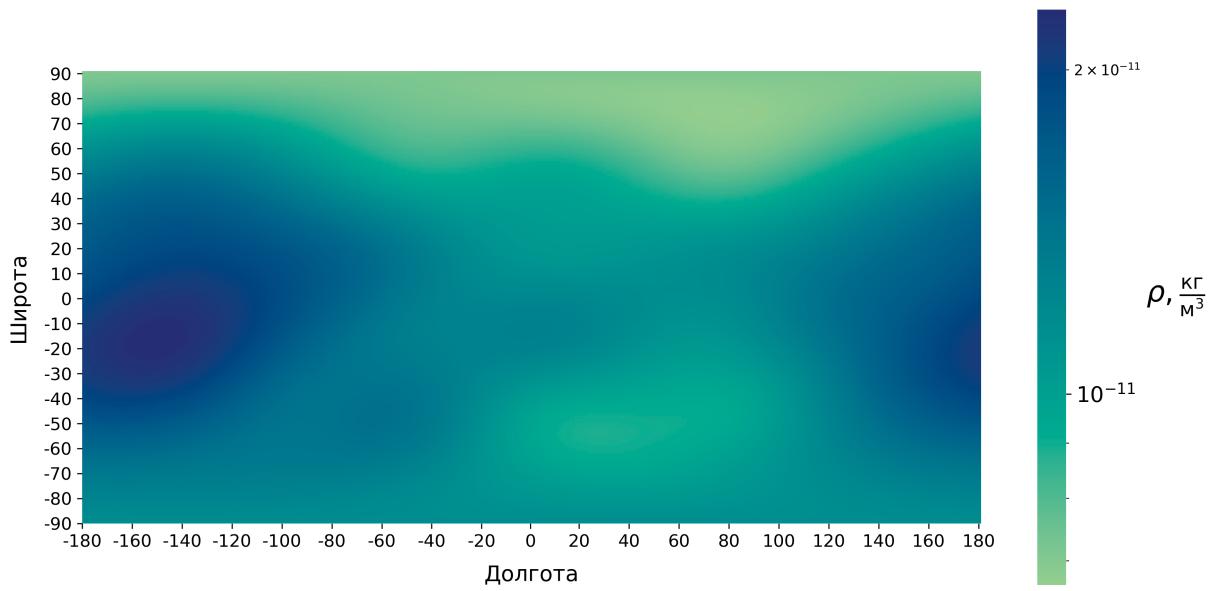


Рис. 23: Распределение плотности  $\rho(\phi, \lambda)$  для конфигурации (2, 7, 5, 3)

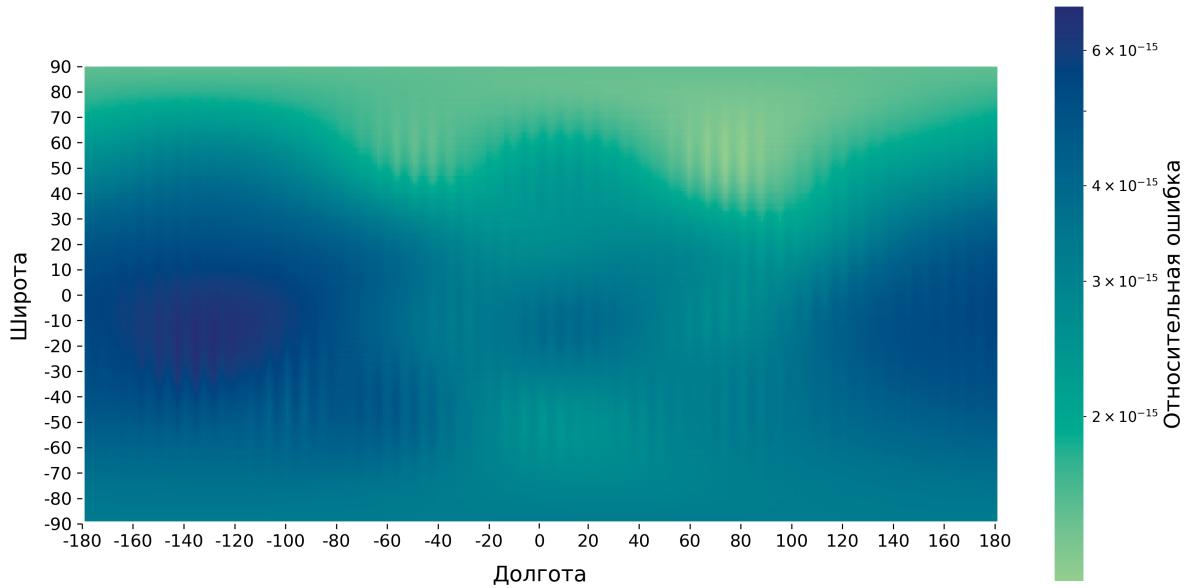


Рис. 24: Распределение абсолютной ошибки вычисления плотности для конфигурации (2, 7, 5, 3)

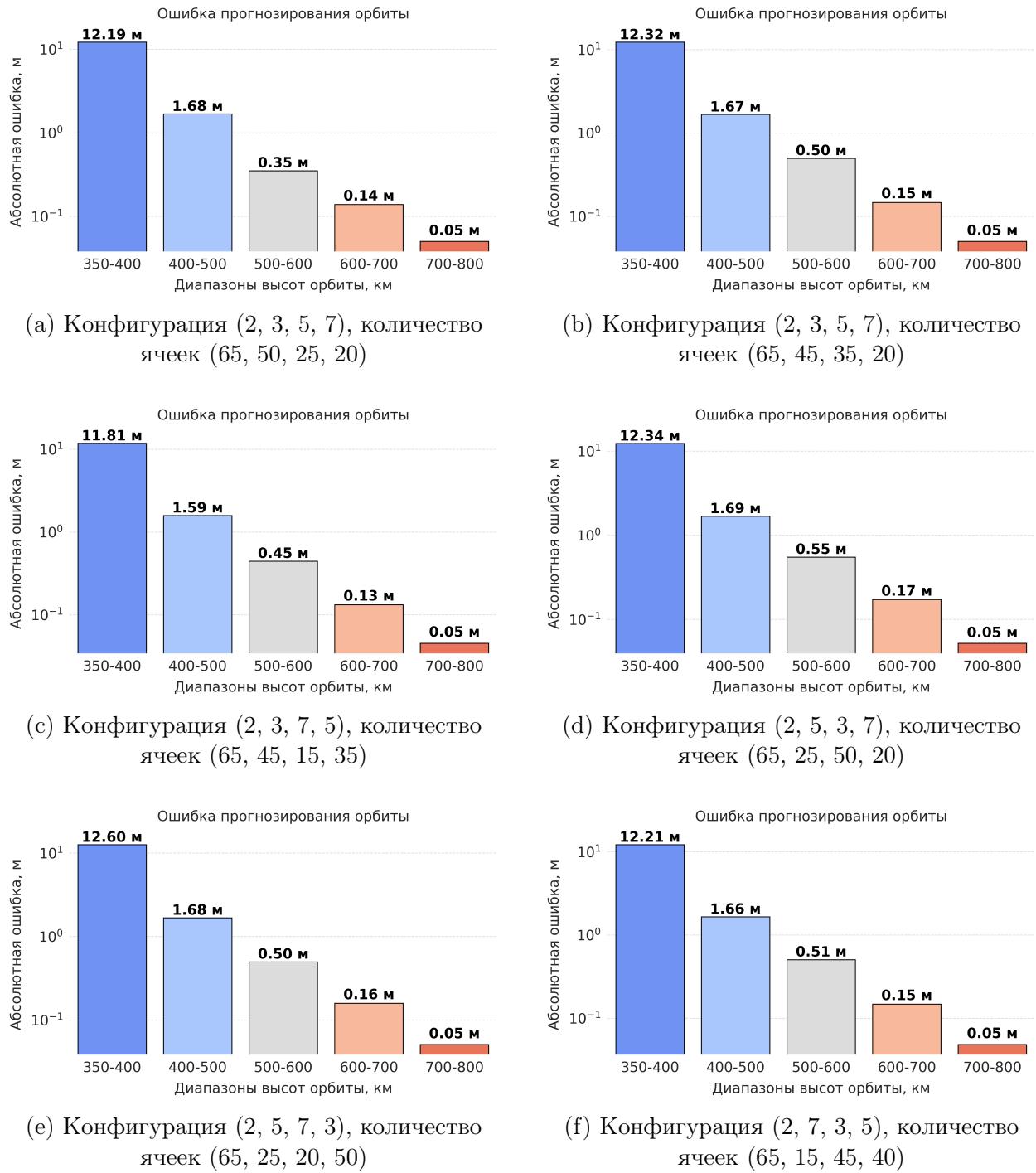


Рис. 25: Зависимость ошибки прогнозирования от высоты

## 4 Параметризация модели движения

Параметризованная модель движения представима в следующем виде:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}_1(a_1, \dots, a_n, t),$$

где к исходной системе уравнений орбитальной динамики добавлена некоторая функция, зависящая от  $n$  параметров.

Неизвестные величины  $a_1, \dots, a_n$  должны определяться в ходе процедуры минимизации при восстановлении орбиты.

В настоящей работе исследуются две параметризации – псевдоускорения и псевдоимпульсы.

### 4.1 Псевдоускорения

Псевдоускорение – это дополнительная сила которая действует на КО на некотором участке траектории. Как правило, мерный интервал разбивается на несколько участков, и на каждом из них дополнительная сила постоянна. В некоторых случаях ускорения выбирают не кусочно-постоянными, а кусочно-линейными для непрерывности производной силы. Направление ускорений может быть разложено по компонентам орбитальной системы координат на радиальную, тангенциальную и нормальную составляющие.

Концептуальная схема применения псевдоускорений изображена на рис. 26.

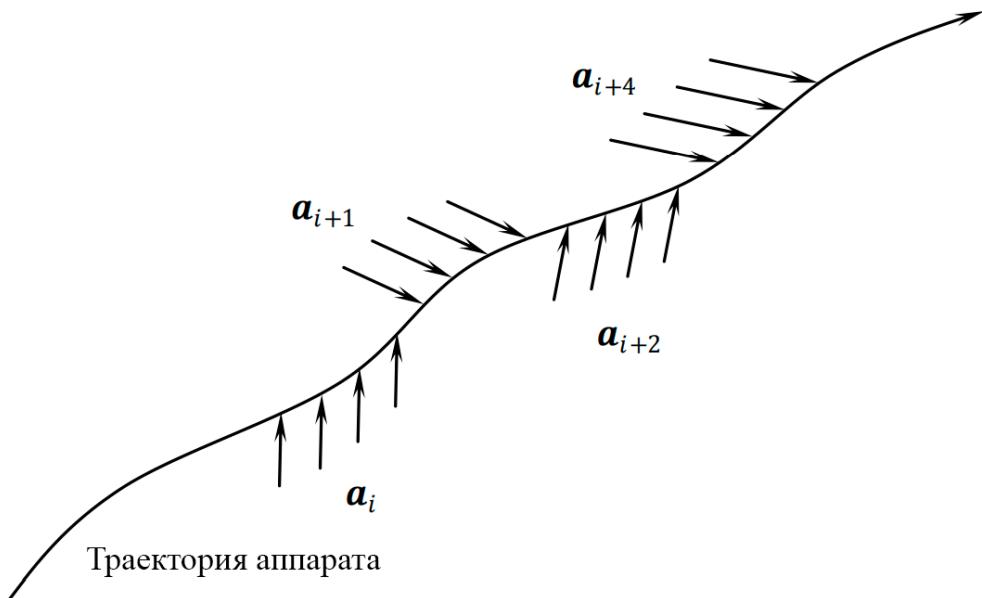


Рис. 26: Схема применения псевдоускорений

Уравнение движение с учетом псевдоимпульсов:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^3 a_{i,j} \cdot \xi_i(t) \cdot \mathbf{e}_j(t),$$

где  $a_{i,j}$  – величина импульса вдоль направления  $\mathbf{e}_j$ .

$$\xi_i(t) = \begin{cases} 0, & t < t_i \\ 1, & t_i < t < t_{i+1} \\ 0, & t_{i+1} \leq t \end{cases}$$

Столбец матрицы изохронных производных, соответствующий параметру псевдоимпульса, может быть вычислен в процессе интегрирования уравнения в вариациях аналогично столбцу производных по площади аэродинамического сопротивления или солнечного давления.

## 4.2 Псевдоимпульсы

Псевдоимпульсы – мгновенные изменения скорости в определенные моменты времени. Эти изменения выражаются в разрыве I рода скорости, что приводит к появлению  $\delta$ -функции в ускорении. При этом траектория остается непрерывной.

Схематичный вид псевдоимпульсов приведен на рис. 27

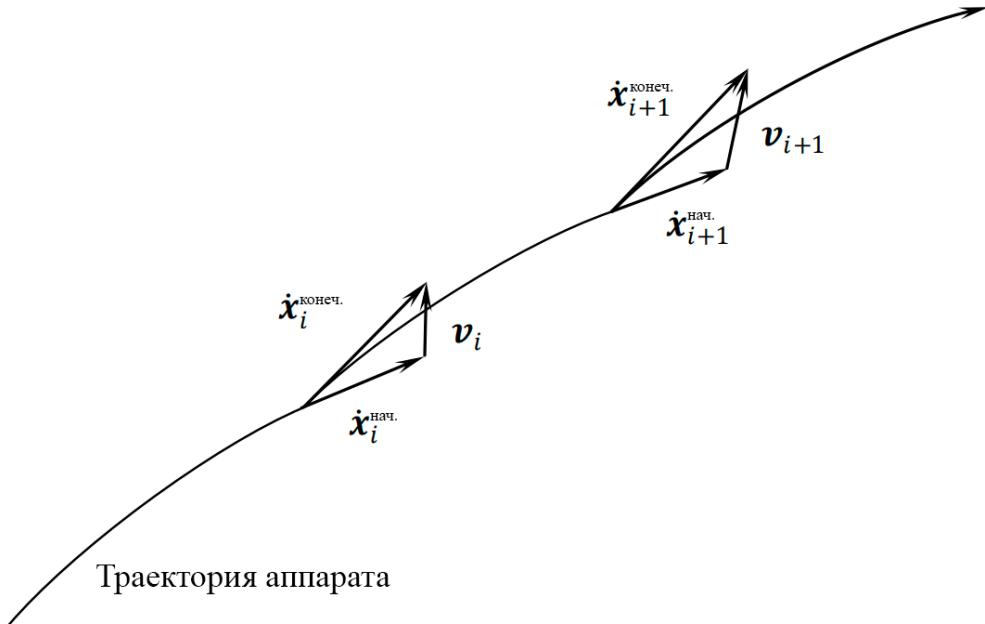


Рис. 27: Схема применения псевдоимпульсов

Динамика движения при наличии псевдоимпульсов описывается выражением:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^3 v_{i,j} \cdot \delta(t - t_i) \cdot \mathbf{e}_j(t_i),$$

где  $v_{i,j}$  – величина импульса вдоль направления  $\mathbf{e}_j$ .

Получим выражение для столбца в матрице изохронных производных, соответствующего одному импульсу. Введем функцию  $U(t)$  как блок размерами 6 на 6 матрицы изохронных производных  $\Phi$ , отвечающий за матрицу Якоби мгновенных элементов орбиты  $\mathbf{\Theta}(t)$  по начальным элементам  $\mathbf{\Theta}_0$ :

$$U(t) = \frac{\partial \mathbf{\Theta}(t)}{\partial \mathbf{\Theta}_0}$$

Пусть в момент времени  $t_0$  был совершен псевдоимпульс. Представим матрицу Якоби мгновенных элементов орбиты по элементам в момент импульса через  $U(t)$ :

$$\frac{\partial \mathbf{\Theta}(t)}{\partial \mathbf{\Theta}(t_0)} = \frac{\partial \mathbf{\Theta}(t)}{\partial \mathbf{\Theta}_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Theta}_0}{\partial \mathbf{\Theta}(t_0)} = U(t) \cdot U(t_0)^{-1}$$

Используя полученные уравнения, можно получить искомый столбец при  $t > t_0$ :

$$\frac{\partial \mathbf{\Theta}(t)}{\partial \mathbf{\Theta}(t_0)} = \frac{\partial \mathbf{\Theta}(t)}{\partial \mathbf{\Theta}(t_0)} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Theta}(\mathbf{t}_0)}{\partial \mathbf{v}_{t_0}} = U(t) \cdot U(t_0)^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Theta}(\mathbf{t}_0)}{\partial \mathbf{v}_{t_0}}$$

При  $t < t_0$  данный столбец равен соответствующему столбцу единичной матрицы, так как импульс еще не был совершен.

Заметим, что рассмотренные столбцы могут быть вычислены с минимальными дополнительными ресурсами, так как используется уже имеющееся после прогноза решение уравнения в вариациях.

### 4.3 Верификация

Тестирование программного комплекса проводилась на КА LAGEOS-2. Измерения орбиты данного аппарата выполняются с помощью лазерной дальномерии. Высокоточные эфемериды LAGEOS-2 публикуются рядом агентств, в том числе итальянским и немецким исследовательскими центрами. Эти орбиты были выбраны в качестве референсных.

Сравнение эфемерид агентств показано на рисунке 28. Средняя норма разницы по положению составляет 3 сантиметра, а стандартное отклонение – 2 сантиметра. Пики на графике – псевдоимпульсы, применяемые итальянским агентством. В дальнейшем сравнение будет проводиться именно с ним.



Рис. 28: Разница между итальянским и немецким агентствами на мертвом интервале

Характеристики аппарата и общие сведения об орбите отражены в таблицах 3 и 4.

Параметры аппарата	
Форма	Сфера
Диаметр	60 см
Вес	405.38 кг

Таблица 3: Параметры аппарата  
LAGEOS-2

Параметры орбиты	
Перигей	5620 км
Наклонение	52.64°
Эксцентриситет	0.0135
Период	223 мин.

Таблица 4: Параметры орбиты  
LAGEOS-2

Для тестирования была реализована модель движения близкая к модели агентства. Ключевые характеристики модели представлены в таблице 5. Помимо геопотенциала

с приливными поправками учитывалось притяжение третьих тел, солнечное давление, эффект альбедо и релятивистские поправки. Также были применены рассмотренные выше псевдоускорения и псевдоимпульсы.

Параметры модели движения	
Геопотенциал	GGM02C, 70 гармоник. Твердотельные и океанические поправки по IERS
Притяжение третьих тел	Планеты: Солнце, Меркурий, Венера, Луна, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун. Эфемериды: JPL DE403
Солнечное давление	Модель тени с перекрытием
Эффект альбедо	Модель Кноке
Эмпирика	7 псевдоускорений, 7 псевдоимпульсов. Равномерно распределены на мерном интервале
Релятивистские эффекты	по IERS

Таблица 5: Параметры модели движения LAGEOS-2

Прогноз траектории выполнялся методом Эверхарта 15 порядка, длина шага составила 400 секунд. Уточнение орбиты проводилось на мерном интервале длиной 7 суток методом Гаусса-Ньютона. Параметры уточнения орбиты отражены в таблице 6.

Параметры уточнения орбиты	
Интегрирование	Метод Эверхарта 15 порядка с шагом 400 секунд
Оптимизация	Метод Гаусса-Ньютона
Тип измерений	Положение, скорость
Целевая функция	Сумма квадратов невязок
Мерный интервал	7 суток (30.05.2021 – 06.06.2021)

Таблица 6: Параметры уточнения орбиты

Проведена серия численных экспериментов, в которых модель сил поэтапно дополнялась. Это позволило увидеть динамику снижения ошибки на мерном интервале при учете различных факторов. Результаты экспериментов представлены в таблице 7.

Из результатов следует, что основные возмущающие факторы – это нецентральность поля Земли, притяжение третьих тел и солнечное давление. Учет этих сил позволяет получить среднюю ошибку на мерном интервале меньше метра. Вклад приливных

Набор сил	Ошибка на мерном интервале, м		
	Максимальная	Средняя	Стандартное отклонение
Потенциал с J2	432	161	183
70 гармоник	327	96	115
+ притяжение третьих тел	7.4	2.3	2.7
+ солнечное давление	2.8	0.9	1.0
+ приливные поправки	0.76	0.26	0.29
+ эффект альбедо	0.48	0.13	0.15
+ 7 псевдоускорений	0.29	0.10	0.11
+ 7 псевдоимпульсов	0.26	0.05	0.06

Таблица 7: Зависимость точности восстановления орбиты от учета различных наборов возмущающих факторов

поправок и эффекта альбедо значительно меньше. Таким образом, полная модель сил без параметризации дает среднюю ошибку 13 см.

Получить дециметровую точность помогает использование псевдоускорений. Данный подход существенно уменьшает максимальную ошибку и сводит среднюю невязку и стандартное отклонение к 10 и 11 сантиметрам соответственно. Для восстановления орбиты с субдекиметровой точностью можно повышать количество псевдоускорений или добавить псевдоимпульсы. С комбинацией из 7 ускорений и 7 псевдоимпульсов средняя ошибка на мерном интервале падает до 5 см. Такое значение ошибок близко к разнице между двумя агентствами, поэтому уточнение орбиты можно считать успешным.

Графики невязок на мерном интервале показаны на рисунках 29, 30, 31.

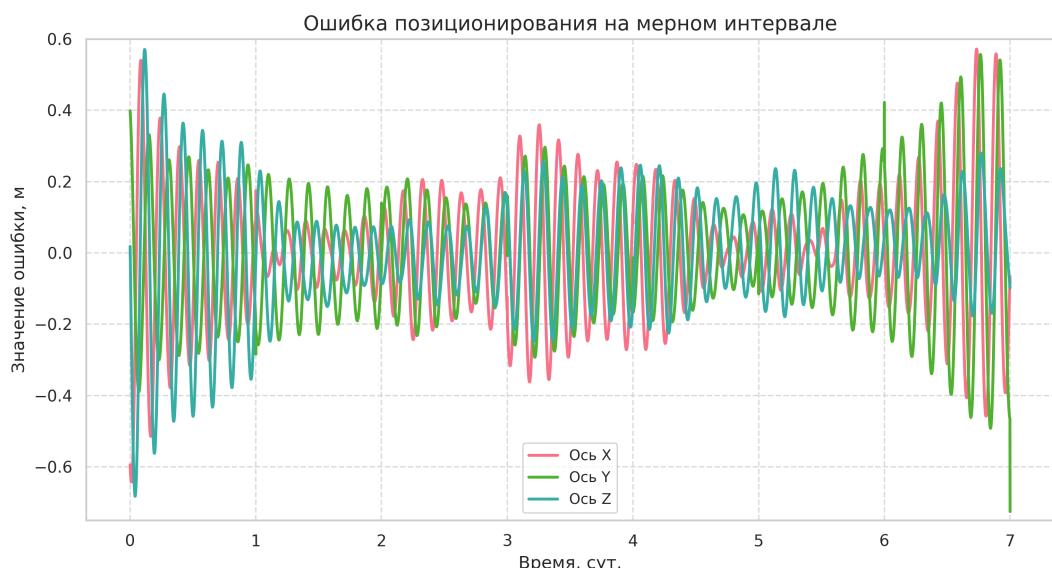


Рис. 29: График невязок на мерном интервале при использовании модели сил без параметризации

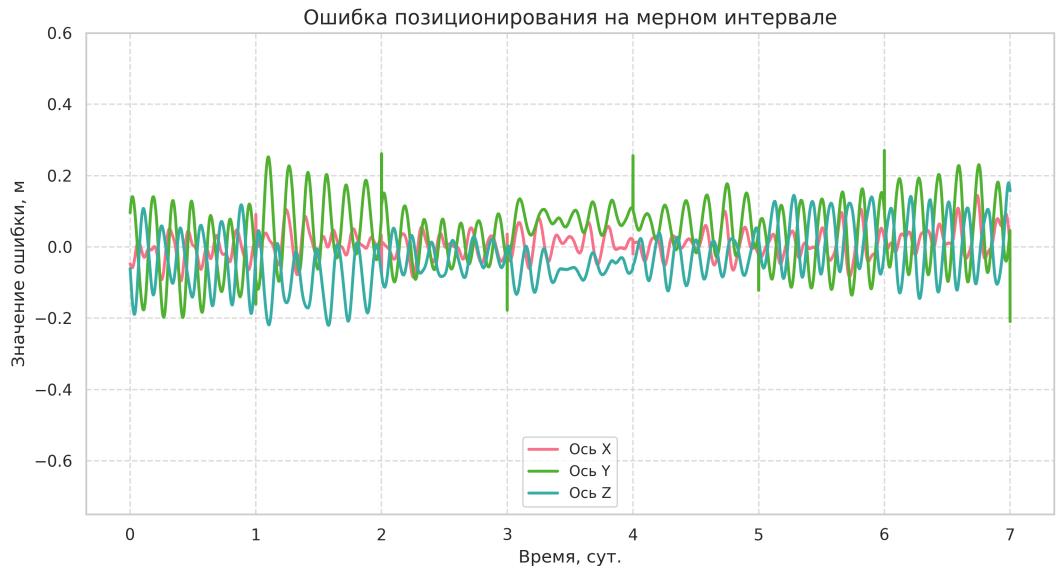


Рис. 30: График невязок на мерном интервале при использовании модели сил с псевдоускорениями

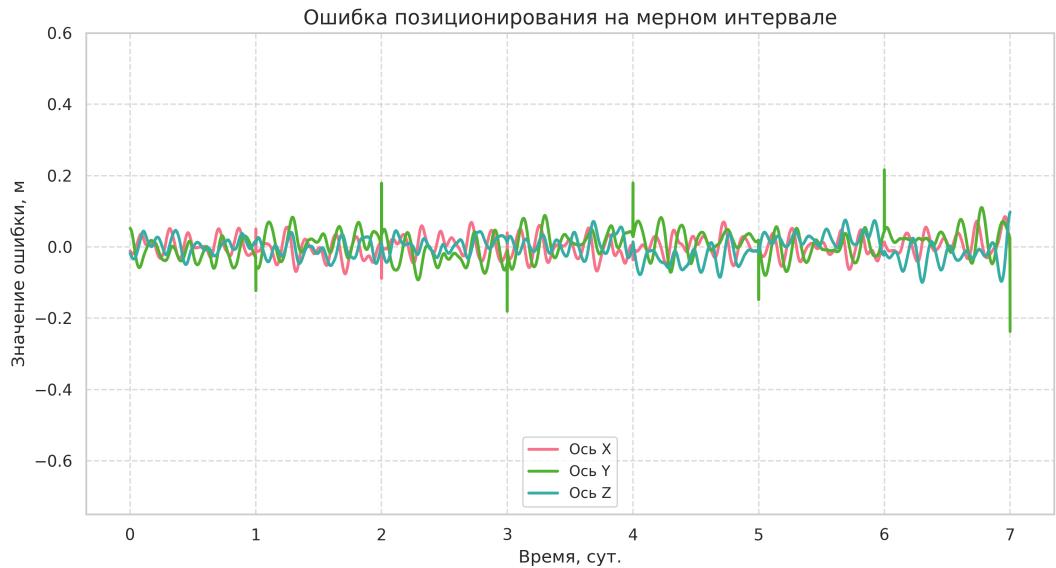


Рис. 31: График невязок на мерном интервале при использовании модели сил с псевдоускорениями и псевдоимпульсами

На рисунке 29 хорошо видна специфика работы метода наименьших квадратов. Метод оптимизирует решение таким образом, что в центральной области невязка получается минимальной, а по краям симметрично растет. Это свидетельствует о правильной работе алгоритма восстановления орбиты.

Верификация пройдена.

## **5 Выводы**

## Список литературы

- [1] *Hoots, Felix R.* Models for Propagation of NORAD Element Sets: Report 3 / Felix R. Hoots, Ronald L. Roehrich: Spacetrack, 1980. — Package Compiled by T.S. Kelso, 31 December 1988.
- [2] *Vallado, D.* SGP4 Orbit Determination / D. Vallado, Crawford P. // AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit. — 2008.
- [3] Semianalytic Satellite Theory: Tech. Rep. NPS-MA-95-010 / Donald A. Danielson, Leo W. Early, Christopher Patrick Sagovac, Beny Neta. — Monterey, CA, USA: Department of Mathematics, Naval Postgraduate School, 1995. — March.
- [4] Application of Semi-analytical Satellite Theory orbit propagator to orbit determination for space object catalog maintenance / S. J. Setty, P. J. Cefola, O. Montenbruck, H. Fiedler // *Advances in Space Research*. — 2016. — Vol. 57, no. 10. — Pp. 2218–2233.
- [5] *Farinella, P.* Thermal force effects on slowly rotating, spherical artificial satellites—I. Solar heating / P. Farinella, D. Vokrouhlický // *Planetary and Space Science*. — 1996. — Vol. 44, no. 12. — Pp. 1551–1561.
- [6] The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008) / N. K. Pavlis, S. A. Holmes, S. C. Kenyon, J. K. Factor // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. — 2012. — Vol. 117, no. B4. — P. B04406.
- [7] ГОСТ Р 25645.166-2004. Атмосфера Земли верхняя. Модель плотности для баллистического обеспечения полетов искусственных спутников Земли. — 2004.
- [8] NRLMSISE-00 empirical model of the atmosphere: Statistical comparisons and scientific issues / J. M. Picone, A. E. Hedin, D. P. Drob, A. C. Aikin // *Journal of Geophysical Research: Space Physics*. — 2002. — Vol. 107, no. A12. — Pp. SIA 15–1–SIA 15–16.
- [9] NRLMSIS 2.0: A Whole-Atmosphere Empirical Model of Temperature and Neutral Species Densities / J. T. Emmert, D. P. Drob, J. M. Picone et al. // *Earth and Space Science*. — 2021. — Vol. 8, no. 3. — P. e2020EA001321.
- [10] NRLMSIS 2.1: An Empirical Model of Nitric Oxide Incorporated Into MSIS / J. T. Emmert, D. P. Drob, J. M. Picone et al. // *Journal of Geophysical Research: Space Physics*. — 2022. — Vol. 127, no. 10. — P. e2022JA030896.
- [11] Atmospheric Density Correction Using Two Line Element Sets as the Observation Data / P. J. Cefola, R. J. Proulx, A. I. Nazarenko, V. S. Yurasov // AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. — Vol. 116 of *Advances in the Astronautical Sciences*. — San Diego, CA: AAS Publications Office, 2003. — Pp. 1–15. — Big Sky Resort, Big Sky, Montana, August 3–7, 2003.
- [12] *Standish, E. M.* JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405: JPL Interoffice Memorandum 312.F-98-048 / E. M. Standish. — Pasadena, CA: Jet Propulsion Laboratory, 1998. — March. — NASA/JPL.
- [13] О новом методе выбора шага численного интегрирования орбит с полутеневыми участками / А. А. Кузнецов, И. А. Сорокин, И. В. Хрипунов и др. // *Труды МФТИ*. — 2024. — Т. 16, № 1. — С. 18–33.

- [14] Study of satellite shadow function model considering the overlapping parts of Earth shadow and Moon shadow and its application to GPS satellite orbit determination / R. Zhang, H. Yang, L. Xu, L. Wang // *Advances in Space Research*. — 2019. — Vol. 63, no. 9. — Pp. 2912–2929.
- [15] Об интерполяции гравитационного поля Земли / А. А. Кузнецов, И. И. Фукин, К. М. Вафин и др. // *Труды МФТИ*. — 2023. — Т. 15, № 4. — С. 121–131.
- [16] Dencker, P. Multivariate polynomial interpolation on Lissajous–Chebyshev nodes / P. Dencker, W. Erb // *Journal of Approximation Theory*. — 2017. — Vol. 219. — Pp. 15–45.
- [17] Vallado, David A. Fundamentals of astrodynamics and applications / David A Vallado, Wayne D Macclain. — Microcosm Press, 2013.
- [18] Tapley, Byron D. Statistical Orbit Determination / Byron D Tapley, Bob Schutz, George H Born. — San Diego, CA: Academic Press, 2002.
- [19] Назаренко, А. И. Задачи стохастической космодинамики: Математические методы и алгоритмы решения / А. И. Назаренко. — М.: ЛЕНАНД, 2018. — Р. 352.