

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)

Физтех-школа аэрокосмических технологий  
Кафедра вычислительной механики  
Лаборатория моделирования механических систем и процессов

Выпускная квалификационная работа бакалавра

# Создание программного комплекса для уточнения орбит космических аппаратов

**Автор:**

Студент группы Б03-106бт  
Хрипунов Иван Владимирович

**Научный руководитель:**

Кузнецов Александр Алексеевич



Долгопрудный, 2025

## **Аннотация**

Исследование и разработка методов машинного обучения  
*Иванов Иван Иванович*

Краткое описание задачи и основных результатов, мотивирующее  
прочитать весь текст.

## **Abstract**

Research and development of machine learning methods

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Восстановление орбиты</b>	<b>6</b>
2.1	Элементы орбиты . . . . .	6
2.2	Прогноз траектории космического объекта . . . . .	7
2.2.1	Аналитический прогноз . . . . .	8
2.2.2	Численно-аналитический прогноз . . . . .	10
2.2.3	Численный прогноз . . . . .	11
2.3	Виды измерений . . . . .	15
2.3.1	Односторонние измерения дальности . . . . .	15
2.3.2	Двусторонние измерения дальности . . . . .	16
2.3.3	Измерения дальности и радиальной скорости . . . . .	16
2.3.4	Угловые измерения . . . . .	17
2.4	Обработка измерений . . . . .	18
2.4.1	Фильтр Калмана . . . . .	18
2.4.2	Метод наименьших квадратов . . . . .	19
2.4.3	Оптимальная фильтрация измерений . . . . .	19
2.5	Проблематика . . . . .	19
2.5.1	Оценка быстродействия . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Решение проблемы</b>	<b>20</b>
<b>4</b>	<b>Верификация</b>	<b>21</b>
<b>5</b>	<b>Валидация</b>	<b>22</b>
<b>6</b>	<b>Выводы</b>	<b>23</b>

## Список обозначений и сокращений

- КО – космический объект
- КА – космический аппарат
- СК – система координат
- МЕЕ (Modified Equinotical Elements) – модифицированные равноденственные элементы
- ОДУ – обыкновенное дифференциальное уравнение
- ГНСС – глобальная навигационная спутниковая система
- SLR (Satellite Laser Ranging) – спутниковая лазерная дальнометрия
- DORIS (Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite) – доплеровская орбитография и радиопозиционирование, интегрированные со спутником
- РЛС – радиолокационная станция
- DSST (Draper Semi-analytical Satellite Theory) – численно-аналитическая баллистическая модель
- SSA (Space Situational Awareness) – система контроля околоземного пространства Европейского космического агентства
- НОО – низкая околоземная орбита
- ГСО – геостационарная орбита
- NORAD (North American Aerospace Defense Command) – Североамериканское командование воздушно-космической обороны
- SGP (Simplified General Perturbations) – упрощенная модель возмущений, используемая NORAD
- TLE (Two-Line Elements) – двухстрочные элементы орбиты, используемые в SGP
- EGM2008 (Earth gravitational Model 2008) – модель гравитационного потенциала Земли
- УФ излучение – ультрафиолетовое излучение
- SOLAARS CF (Solar and Atmospheric Adaptive Refraction and Scattering–Controlled Fusion – Солнечное и атмосферное адаптивное преломление и рассеяние) – динамическая модель тени
- TSI (Total Solar Irradiance) – энергетический поток на расстоянии одной астрономической единицы

# 1 Введение

Актуальность

Цель

Задачи

Новизна

Практическая значимость

## 2 Восстановление орбиты

### 2.1 Элементы орбиты

Вектором состояния  $X$  назовем упорядоченную совокупность переменных, полностью определяющих состояние системы в заданный момент времени. В простейшем случае такой набор состоит из положения  $\vec{r}$  и скорости  $\vec{v}$  материальной точки. Также в этот набор могут входить площадь поверхности и другие параметры космического объекта, оказывающие влияние на его движение.

Однако, в ходе орбитального движения  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$  меняются за виток значительно, что приводит к снижению точности при численном интегрировании. Поэтому зачастую в ходе решения задачи двух тел в небесной механике используют не радиус-вектор и скорость, а элементы орбиты. Самыми распространенными из них являются кеплеровы элементы и модифицированные равноденственные элементы (МЕЕ). В элементах орбиты быстро меняющаяся переменная, описывающая положение КО на орбите, отделена от медленно меняющихся переменных, определяющих ориентацию и форму орбитальной плоскости.

#### Кеплеровы элементы:

- наклонение  $i$
- долгота восходящего узла  $\Omega$
- аргумент перицентра  $\omega$
- эксцентриситет  $e$
- большая полуось  $a$
- истинная аномалия  $\nu$

#### МЕЕ:

- $a = a$
- $h = e \sin(\omega + I\Omega)$
- $k = e \cos(\omega + I\Omega)$
- $p = [\tan \frac{i}{2}]^I \sin(\Omega)$
- $q = [\tan \frac{i}{2}]^I \cos(\Omega)$
- $\lambda = M + \omega + I\Omega$

Кеплеровы элементы удобны для визуальной интерпретации орбиты (рис. 1). Первые 3 переменные задают ориентацию орбитальной плоскости в инерциальной системе координат, эксцентриситет и большая полуось фиксируют форму и размеры эллипса, а истинная аномалия определяет положение КО на орбите. В качестве последней переменной также могут использоваться эксцентрическая аномалия  $E$  и средняя аномалия  $M$ . Удобство использования средней аномалии заключается в том, что она меняется со временем равномерно. Недостаток кеплеровых элементов – вырожденность при  $i = 0$ ,  $i = \pi$  и  $e = 0$ . Как следствие, они плохо подходят для интегрирования.

Чтобы избавиться от вырожденности вводится другой набор элементов – модифицированные равноденственные элементы. В МЕЕ величина  $I$  может принимать два значения:

$$I = \begin{cases} +1, & \text{если } i < \pi/2, \\ -1, & \text{если } i \geq \pi/2 \end{cases}$$

Также в МЕЕ применяется эксцентрическая долгота  $F$  и истинная долгота  $L$ . Они выражаются через кеплеровы элементы следующим образом:

$$\begin{aligned} F &= E + \omega + I\Omega \\ L &= \nu + \omega + I\Omega \end{aligned}$$

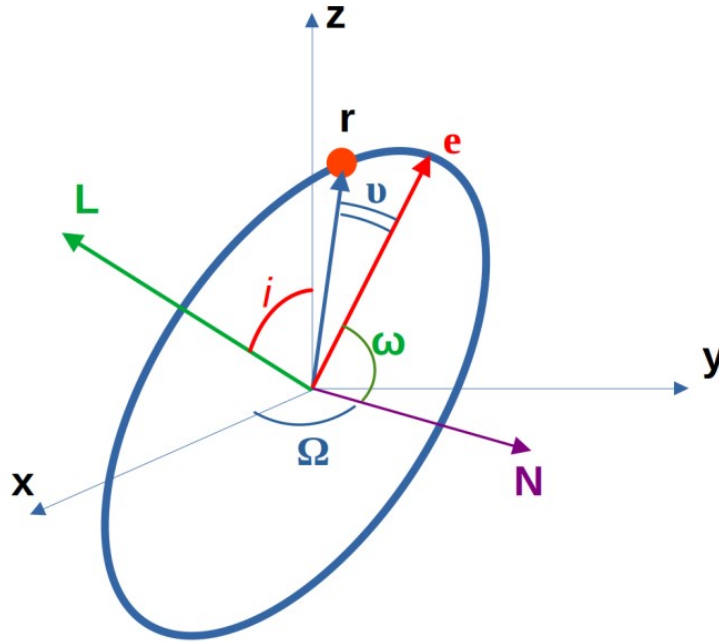


Рис. 1: Кеплеровы элементы орбиты. Центр декартовых координат привязан к центру масс Земли. Ось  $Ox$  направлена в точку весеннего равноденствия, ось  $Oz$  – нормаль к плоскости эклиптики, ось  $Oy$  дополняет до правой тройки.  $\vec{N}$  лежит на линии пересечения плоскости эклиптики с плоскостью орбиты.  $\vec{L}$  – момент импульса КО, направлен по нормали к орбитальной плоскости.  $\vec{e}$  равен по модулю эксцентриситету и направлен на перигецентр.

## 2.2 Прогноз траектории космического объекта

Задача прогнозирования движения – по начальному вектору состояния  $X_0$  определить траекторию  $X(t)$  объекта. В основе описания динамики космических аппаратов лежит 2 закон Ньютона, поэтому расчет траектории сводится к решению задачи Коши для ОДУ вида:

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X, t), \\ X(t = t_0) = X_0 \end{cases} \quad (1)$$

При расчете траектории применяются несколько существенно разных подходов. Первый из них, аналитический, использует основные факторы, определяющие эволюцию орбиты. Характерной особенностью аналитических вычислений является низкая ресурсоемкость и невысокая точность. Таким образом, аналитика обладает высокой качественной предсказательной способностью на коротких временных интервалах, «схватывая» главные тренды изменения орбиты.

Численные методы, напротив, позволяют учесть произвольное число сложных возмущающих факторов. Однако прецизионный численный расчет требует значительно больше вычислений. Это связано с ресурсоемкостью расчета правой части ОДУ и, соответственно, с выбором шага интегрирования для обеспечения заданной точности.

Компромиссом являются полуаналитические подходы, в которых используется комбинация численных и аналитических расчетов. Полуаналитические модели учитывают широкий спектр возмущающих воздействий, что позволяет эффективно производить вычисления без потери точности.

Далее приведен краткий обзор основных подходов к прогнозу траектории.

### 2.2.1 Аналитический прогноз

Рассмотрим возмущенную задачу двух тел:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu\vec{r}}{r^3} + \vec{f}, \quad (2)$$

где  $\mu$  – гравитационный параметр Земли,  $\vec{f}$  – возмущающее ускорение, которое может быть разложено по орбитальной СК на радиальную, тангенциальную и нормальную компоненты:

$$\vec{f} = R\vec{e}_r + T\vec{e}_t + N\vec{e}_n,$$

$$\vec{e}_r = \vec{r}/|r|$$

$$\vec{e}_n = \vec{r} \times \vec{v}/|\vec{r} \times \vec{v}|$$

$$\vec{e}_t = \vec{e}_n \times \vec{e}_r$$

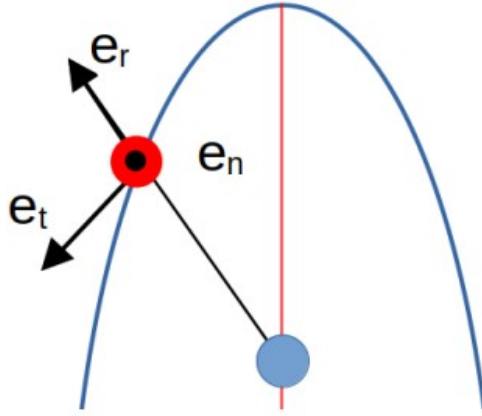


Рис. 2: Орбитальная система

Преобразуем систему ОДУ (2) для перехода к кеплеровым элементам. Если возмущающая сила является потенциальной:  $\vec{f} = \nabla R$ , то система примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e^2} \left( (1-e^2)^{1/2} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\partial R}{\partial \omega} \right) \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{h \sin(i)} \left( \cos(i) \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\partial R}{\partial \omega} \right) \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{h \sin(i)} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos(i)}{h \sin(i)} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e^2} \frac{\partial R}{\partial e} \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} \end{aligned}$$

где  $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$  – среднее движение,  $h = na^2(1-e^2)^2$ .



Для построения аналитического решения воспользуемся возмущающим потенциалом от второй гармоники:

$$R = -\frac{\mu J_2}{r} \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \frac{3}{2} \left( \sin^2(\phi) - \frac{1}{3} \right), \quad (3)$$

где  $\phi$  – широта точки.

Подставив соотношение  $\sin(\phi) = \sin(i)\sin(\omega + \nu)$ , получим, что  $R$  может быть представлена в виде суммы:

$$\begin{aligned} R &= R_s + R_p \\ R_s &= -\frac{3\mu J_2}{2r} \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left( \frac{\sin^2(i)}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ R_p &= \frac{3\mu J_2}{2r} \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \frac{\sin^2(i) \cos(2(\omega + \nu))}{2} \end{aligned}$$

Видно, что первое слагаемое потенциала вызывает постоянное или так называемое вековое возмущение орбиты. Период таких возмущений значительно превышает орбитальный период. Короткопериодические возмущения, порождаемые слагаемым  $R_p$ , не приводят к изменениям орбиты на значительном промежутке времени.

Усреднив  $R_s$  по периоду, получим:

$$R_{avg} = -\frac{\mu J_2}{2a} \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left( \frac{3}{4} \sin^2(i) - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{(1 - e^2)^{3/2}} \right)$$

Подстановка  $R_{avg}$  в ОДУ дает вековые возмущения кеплеровых элементов орбиты

$$\begin{aligned} \dot{a}_{sec} &= 0 \\ \dot{e}_{sec} &= 0 \\ \dot{i}_{sec} &= 0 \\ \dot{\Omega}_{sec} &= -\frac{3nR_{\oplus}^2 J_2}{2p^2} \cos(i) \\ \dot{\omega}_{sec} &= \frac{3nR_{\oplus}^2 J_2}{4p^2} (4 - 5 \sin^2(i)) \\ \dot{M}_{0sec} &= -\frac{3nR_{\oplus}^2 J_2 \sqrt{1 - e^2}}{4p^2} (3 \sin^2(i) - 2) \end{aligned}$$

Аналогичным образом могут быть выделены короткопериодические возмущения. В частности:

$$\delta a = \gamma_3 a \left[ (3z \sin^2(\omega + \nu) - 1) \left( \frac{a}{r} \right)^3 - \frac{3z - 2}{2\eta^3} \right],$$

где  $\gamma_3 = -J_2 \left( \frac{R_{\oplus}}{a} \right)^2$ ,  $\eta = \sqrt{1 - e^2}$ ,  $z = \sin^2(i)$ .

Так как большая полуось, эксцентриситет и наклонение не испытывают вековых возмущений, долгота восходящего узла и аргумент перигея легко интегрируются аналитически.

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \Omega_0 + \Omega_{sec}(t - t_0) \\ \omega(t) &= \omega_0 + \omega_{sec}(t - t_0) \end{aligned}$$

Для получения выражения для  $a$  необходимо провести процедуру усреднения среднего движения

$$a = \bar{a} + \delta a \rightarrow \bar{a} = a_0 - \delta a_0$$

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}^3}}$$

В результате получим:

$$M(t) = M_0 + (\bar{n} + \dot{M}_{0sec})(t - t_0)$$

Более детальное решение задачи аналитического расчета траектории представлено в серии моделей SGP. Модели используют данные в формате TLE, предоставляемые американской службой NORAD. В TLE содержатся не только средние кеплеровы элементы орбиты, но и первая и вторая производные среднего движения. Модели движения SGP аналитически учитывают возмущения от сжатия Земли, сопротивления атмосферы, гравитации Луны и Солнца. Из-за сильного влияния атмосферного торможения ошибка прогноза на низких орбитах составляет порядка 1 километра в день. Для средних и высоких орбит ошибка значительно меньше – несколько сотен метров на недельном интервале.

### 2.2.2 Численно-аналитический прогноз

Стимулом к развитию численно-аналитических методов послужил быстрый рост количества объектов в околоземном пространстве и необходимость их непрерывного отслеживания и каталогизации. Для таких задач аналитические методы не удовлетворяют требуемой точности, а численные методы не подходят в силу высокой ресурсоемкости. Численно-аналитические методы, в свою очередь, объединяют точность и быстродействие за счет гибкой настройки модели движения.

В основе численно-аналитических моделей лежит разделение возмущений на вековые и короткопериодические. На начальном этапе происходит усреднение орбитальных элементов, чтобы исключить высокочастотные возмущения орбиты. Эта операция позволяет в дальнейшем интегрировать медленно меняющиеся средние элементы с большим шагом (порядка половины дня). На заключительном этапе прогноза мгновенные значения элементов орбиты вычисляются аналитически по средним элементам.

Частным случаем численно аналитических методов является модель DSST, разработанная для системы контроля околоземного пространства Европейского космического агентства (SSA). Математическая модель DSST опирается на методы усреднения и вариации параметров.

Усредненные уравнения движения для консервативной возмущающей силы:

$$\frac{d\bar{c}_i}{dt} = - \sum_{j=1}^6 \{\bar{c}_i, \bar{c}_j\} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{c}_j} \quad i = 1 \dots 5$$

При наличии неконсервативной силы правая часть дополнительно усредняется по витку:

$$\frac{d\bar{c}_i}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \bar{c}_i}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{Q} d\lambda \quad i = 1 \dots 5$$

Выражение для быстроменяющейся средней долготы:

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = \frac{d\bar{c}_6}{dt} = \bar{n} - \sum_{j=1}^6 \{\bar{c}_6, \bar{c}_j\} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{c}_j} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \bar{c}_6}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{Q} d\lambda$$

Переход к мгновенным элементам:

$$c_i = \bar{c}_i + \sum_{j=1}^N e^j \eta_{i,j}(\bar{a}, \bar{\lambda}) \quad i = 1 \dots 6$$

В последних уравнениях были введены следующие обозначения:

$\bar{c}_{i=1\dots 6}$  : средние равноденственные элементы  $[\bar{h}, \bar{k}, \bar{k}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{\lambda}]$

$\bar{R}$  : усредненный возмущающий потенциал для консервативной силы

$\vec{Q}$  : неконсервативная сила

$\bar{n}$  : усредненное среднее движение

$\{\bar{c}_i, \bar{c}_j\}$  : скобки Пуассона

$\eta_{i,j}$  :  $2\pi$ -периодические функции

Точность прогноза по модели DSST отличается для разных классов орбит. Средне-квадратичное отклонение при сравнении с численным расчетом на 7 суток составляет от 10 метров для НОО до 20 метров для ГСО. Для высокоэллиптических орбит среднеквадратичная ошибка может достигать 75 метров.

### 2.2.3 Численный прогноз

В ходе численного прогноза производится интегрирование системы (1). Для этого на каждом шаге требуется вычислять значение правой части  $f(X, t)$ . В задачах небесной механики правая часть определяется суммарной силой, действующей на КА. Среди сил, влияющих на баллистическое движение КА основными являются:

- Притяжение Земли
- Сопротивление атмосферы
- Солнечное давление
- Притяжение планет Солнечной системы
- Давление света, отраженного от поверхности Земли (эффект альбедо)

Среди этих сил на НОО основной вклад вносят притяжение Земли и сопротивление атмосферы. С ростом высоты плотность атмосферы экспоненциально падает и на высотах порядка 800 километров сила атмосферного сопротивления становится сопоставима с силой солнечного давления.

Помимо сил, имеющих природное происхождение, на КА могут действовать силы техногенного характера, в частности, сила тяги двигателей КА.

В специфических случаях высокоточного прогноза траектории необходимо учитывать силы, вызванные тепловым излучением аппарата вследствие неравномерного нагрева (эффект Ярковского), а также силу, создаваемую антенной-излучателем.

В дальнейшем основные из перечисленных сил будут рассмотрены подробнее.

**Притяжение Земли.** Отличие гравитационного потенциала Земли от сферического обусловлено сложной формой геоида и динамикой его изменения. Результирующий потенциал представим в виде разложения в сферических координатах  $(r, \phi, \lambda)$ :

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin \phi) [S_n m \sin(m\lambda) + C_n m \cos(m\lambda)]$$

$P_{nm}$  – присоединенные полиномы Лежандра,  $R$  – экваториальный радиус модели,  $C_{nm}$  и  $S_{nm}$  – коэффициенты модели.

Ускорение от силы притяжения рассчитывается из градиента гравитационного потенциала:

$$\ddot{\vec{r}}_{\text{грав}} = -\nabla U$$

В настоящее время существует множество различных моделей потенциала Земли. Для баллистических расчетов в околоземном пространстве широко используется статическая модель EGM2008. Максимальный порядок модели составляет 2159, с дополнительными коэффициентами вплоть до 2190 степени. Для повышения динамической точности к модели могут применяться поправки, вызванные твердотельными и океаническими приливами. Данные для построения модели были получены из анализа относительного движения аппаратов миссии GRACE, спутниковой альтиметрии и территориальных гравиметрических измерений.

**Соппротивление атмосферы** Сила аэродинамического сопротивления, действующего на КА, может быть рассчитана по формуле:

$$\vec{F}_{\text{атм}} = -\frac{C\rho|v|S}{2}\vec{v},$$

где  $C$  – коэффициент аэродинамического сопротивления,  $\rho$  – атмосферная плотность,  $\vec{v}$  – скорость движения аппарата относительно атмосферы,  $S$  – площадь поперечного сечения.

Основные вычислительные затраты при расчете силы сопротивления приходятся на модель атмосферы. Атмосферная плотность зависит от многих параметров: координат, солнечной активности, геомагнитной активности, календарного сезона и времени суток.

В результате солнечной активности верхние слои атмосферы облучаются ультрафиолетом, что вызывает увеличение плотности. Атмосфера не прозрачна для ультрафиолета, поэтому измерить исходное УФ излучение с Земли невозможно. Было установлено, что излучение с длиной волны 10.7 сантиметров (2800 МГц), порождается тем же слоем Солнца, что и ультрафиолет. Это позволило косвенно измерять силу УФ излучения через индекс солнечной активности  $F_{10.7}$ , характеризующий спектральную мощность излучения на единицу поверхности. Единица  $F_{10.7}$  соответствует  $10^{-22} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{Гц}}$ . Измерения  $F_{10.7}$  производятся в канадской обсерватории. Величина индекса связана с 11-летним циклом солнечной активности. В пике  $F_{10.7}$  может достигать значений 300 – 350, в то время как в периоды спада солнечной активности его величина составляет порядка 70 – 100 единиц. Во многих моделях применяется не только мгновенное, но и усредненное за 81 день значение индекса. Данный интервал усреднения охватывает 3 периода вращения Солнца. Каждый цикл солнечной активности уникален, поэтому точное предсказание индекса на длительный срок невозможно.

Следующим фактором, влияющим на плотность атмосферы, является магнитная активность. Солнечный ветер, то есть поток ионизированных частиц, вызывает возмущения магнитного поля Земли и нагревает верхние атмосферные слои. Для описания геомагнитной активности используется планетарный квази-логарифмический индекс  $K_p$ . Его значения варьируются от 0 для низкой активности до 9 для магнитных штормов с дробным шагом 1/3.  $K_p$  сопоставлен линейный индекс  $A_p$ , пропорциональный амплитуде возмущений магнитного поля. Единица  $A_p$  соответствует  $10^{-9}$  Тл.  $A_p$  лежит в диапазоне от 0 до 400, но в среднем величина индекса составляет 10 – 20 с редкими всплесками. Индексы геомагнитной активности формируются каждые 3 часа на основе

измерений 12 обсерваторий. Динамика  $K_p$  и  $A_p$ , как и  $F_{10.7}$ , зависит от фазы солнечного цикла. Пик возмущений магнитного поля приходится на фазу спада солнечной активности.

Учет положения Солнца также существенен при расчете атмосферной плотности. Освещенные участки атмосферы нагреваются, поэтому плотность в этих областях существенно больше, чем в затененных.

Большинство современных моделей полуэмпирические. В их основе лежит комбинация не только физических законов, но и экспериментальных данных. Классические представители полуэмпирических моделей – ГОСТ 25645.166–2004 и NRLMSISE-00.

Модель ГОСТ 25645.166–2004 создана на основе данных о торможении спутников в атмосфере. Она позволяет вычислять атмосферную плотность для высот от 120 до 1500 километров с учетом изменений плотности ночной атмосферы в течение 11-летнего солнечного цикла, суточных изменений, сезонных изменений, колебаний солнечной активности и изменений в магнитном поле. Данная модель – стандарт для отечественных баллистических расчетов.

При разработке модели NRLMSISE-00 были использованы данные акселерометров на спутниках, радарные измерения температуры экзосферы и измерения концентрации ионов кислорода. Помимо колебаний солнечной и магнитной активности в модели учтены годовые, полугодовые, суточные, полусуточные и третьсуточные изменения плотности. Структура модели позволяет рассчитывать плотность, гибко настраивая набор учитываемых параметров. Несмотря на то, что выпущена более новая версия – NRLMSIS-21, модель NRLMSISE-00 остается наиболее востребованной в силу баланса точности и ресурсоемкости.

Среди перспективных направлений совершенствования методов вычисления атмосферной плотности можно выделить расчет поправок к существующим моделям с помощью анализа торможения спутников в атмосфере. Искомые поправки можно получить из процедуры минимизации в ходе восстановления орбиты для большого числа КА с известными аэродинамическими параметрами.

**Притяжение третьих тел.** Для расчета притяжения третьих тел необходимо принять во внимание относительное движение Земли, КА и третьего тела:

$$\ddot{\vec{r}}_{3-\text{тело}} = \mu_3 \left( \frac{\vec{r}_{\text{sat}3}}{r_{\text{sat}3}^3} - \frac{\vec{r}_3}{r_3^3} \right),$$

где  $\mu_3$  – гравитационный параметр третьего тела,  $\vec{r}_{\text{sat}3}$  – вектор КА–тело,  $\vec{r}_3$  – вектор Земля–тело.

Заметим, что в формуле учтена только центральная гармоника гравитационного потенциала третьего тела. Такое приближение полностью оправдано при расчете околоземных орбит. При прогнозе межпланетных траекторий притяжение планет солнечной системы может быть более точно представлено через разложение потенциала.

Эфемериды планет в формате DE405 предоставляются лабораторией JPL в виде наборов полиномов Чебышева для каждого временного интервала. Средняя точность эфемерид составляет 0.01”.

**Солнечное давление.** Как и атмосферное сопротивление, сила солнечного давления не консервативна. Выражение для силы следует из формулы давления электромагнитного излучения:

$$\vec{F}_{\text{сол}} = -\frac{W}{c} C_R S_{\text{сол}} \frac{\vec{r}_{\text{сол}}}{r_{\text{сол}}},$$

где  $W$  – энергетический поток,  $c$  – скорость света,  $C_R$  – отражательная способность поверхности КО,  $S$  – освещенная площадь КО,  $\vec{r}_{\text{сол}}$  – радиус вектор Солнца относительно Земли.

Энергия солнечного излучения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, следовательно энергетический поток может быть найден как:

$$W = TSI \frac{AU^2}{r_{\text{сол}}^2},$$

где TSI – энергетический поток на расстоянии одной астрономической единицы AU. Данные TSI формируются на базе спутниковых измерений.

Давление излучения Солнца воздействует на аппарат только в освещенных участках орбиты, поэтому для вычисления силы солнечного давления необходимо знать границы теневой области.

Наиболее простая модель тени цилиндрическая (3). Ее недостаток заключается в резком переходе свет–тень и соответствующих нежелательных разрывах при численном интегрировании. Коническая модель тени (4) позволяет учесть полутеневые участки и избавиться от разрывов. В работе !!!! предложен аналитический алгоритм определения границ полутеневых областей в конической модели и методика коррекции шага численного интегрирования в участках перехода свет–тень. Среди аналитических подходов широко применяется метод, основанный на геометрическом расчете площади перекрытия Солнца и Земли (5). Минусом данного подхода является необходимость вычислять перекрытие на каждом шаге. Существует также динамическая модель SOLAARS CF, включающая рефракцию атмосферы и сплюснутость Земли, но ее применение ограничено высокой ресурсоемкостью.

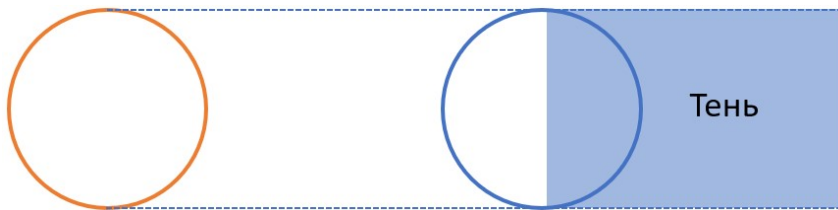


Рис. 3: Цилиндрическая модель тени

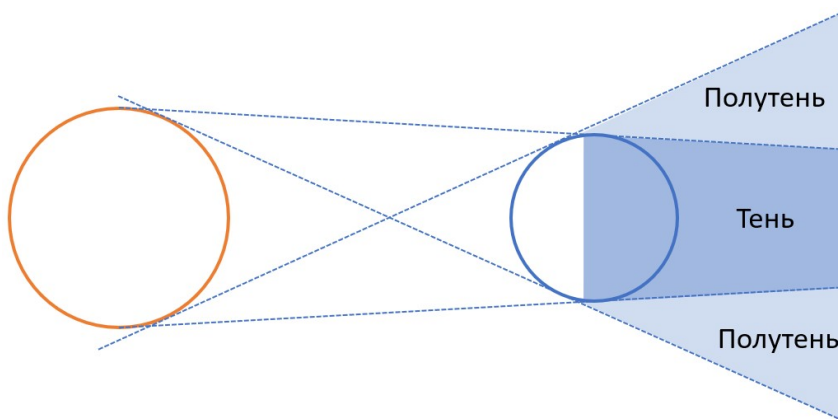


Рис. 4: Коническая модель тени

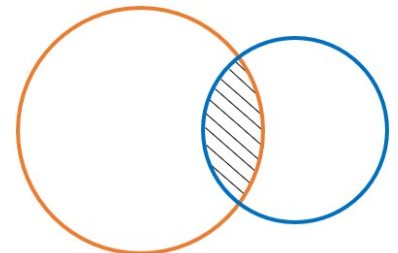


Рис. 5: Модель тени с перекрытием

**Альбедо.** Эффект альбедо связан с попаданием на спутник света, отраженного от Земли, и теплового излучения планеты. Значение отражательной способности сильно

зависит от рода поверхности, на которую падает излучение. Карта альbedo и тепловая карта для Земли создаются на основе спутниковых измерений, а сила давления излучения, действующая на спутник, рассчитывается для каждой части поверхности Земли отдельно и затем суммируется.

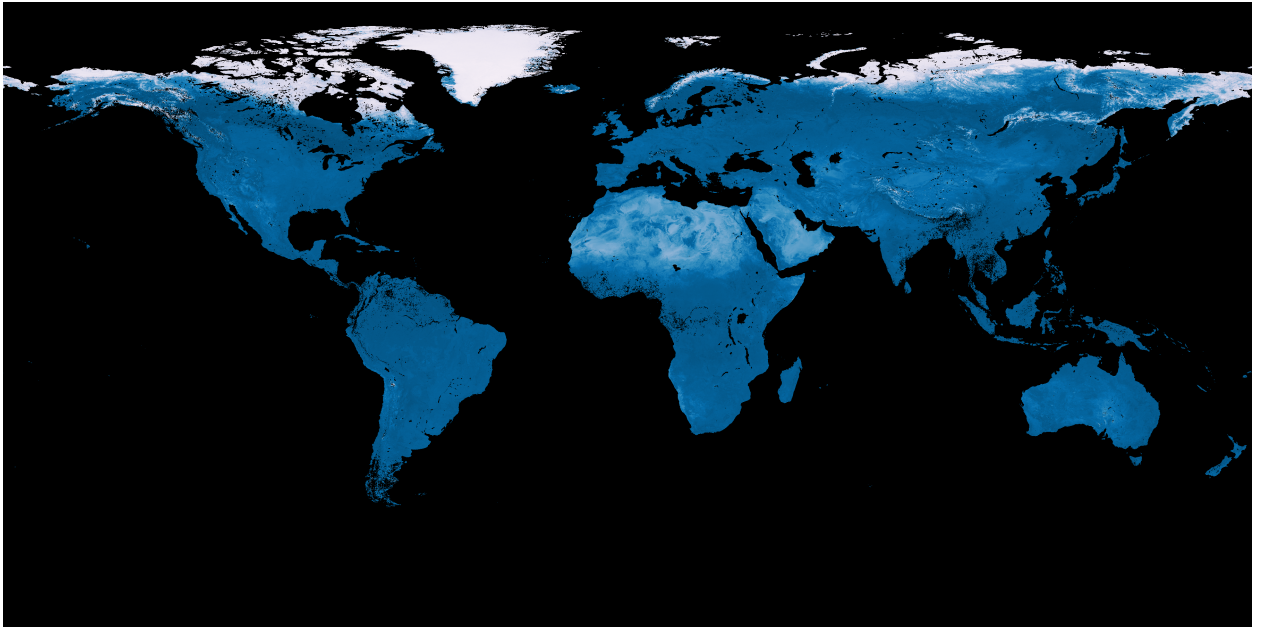


Рис. 6: Карта альbedo, май 2025 г.

## 2.3 Виды измерений

Для уточнения орбиты требуются измерения параметров, связанных с положением и движением КО. Конкретный набор измеряемых параметров зависит от типа используемых наблюдательных средств. Далее приведены несколько стандартных наборов измеряемых величин и примеры их технической реализации.

### 2.3.1 Односторонние измерения дальности

Расстояние между спутником и станцией наблюдения является одним из наиболее часто измеряемых параметров. Такая модель измерений получила широкое распространение во многом благодаря глобальным навигационным спутниковым системам. Каждый спутник ГНСС оснащен антенной, которая излучает электромагнитные волны на нескольких частотах. Сигнал каждого спутника модулируется особым образом, чтобы приемник мог определить момент времени  $T_T$  излучения волны по шкале времени спутника и соответствующие этому моменту координаты излучателя. Момент приема сигнала  $T_R$  фиксируется по часам приемника.

Зная разницу между временем отправки и приема сигнала, а также используя свойство прямолинейности распространения света, можно рассчитать величину, называемую псевдодальностью:

$$\rho = (T_R - T_T)c,$$

где  $c$  – скорость света.

Псевдодальность не совпадает с геометрической в силу несогласованности часов излучателя и приемника, особенностей распространения сигнала в атмосфере и относительного движения излучателя и приемника.

Учет этих факторов необходим при формировании расчетного аналога измерения:

$$\tilde{\rho} = |\vec{r}_T - \vec{r}_R| + c(\delta t_T - \delta t_R) + \delta \rho_{tropo} + \delta \rho_{ion} + \epsilon,$$

где помимо геометрической дальности  $|\vec{r}_T - \vec{r}_R|$  присутствуют слагаемые, связанные с поправкой часов спутника  $\delta t_T$  и станции  $\delta t_R$ , тропосферная  $\delta \rho_{tropo}$  и ионосферная  $\delta \rho_{ion}$  задержки. Благодаря измерениям на нескольких частотах ионосферная задержка может быть с высокой точностью исключена. В  $\epsilon$  включаются остаточные ошибки, связанные с неучитываемыми нелинейными эффектами.

Для повышения точности позиционирования и уменьшения разброса результатов в ходе решения навигационной задачи могут обрабатываться не только псевдодальности, но и фазовые измерения сигнала. В этом случае точность позиционирования с использованием ГНСС может достигать 10 сантиметров.

### 2.3.2 Двусторонние измерения дальности

В ходе двустороннего измерения дальности фиксируется время, за которое излученный сигнал достигает цели, отражается и возвращается в точку испускания. Вариантом такой измерительной системы является лазерная дальнометрия (SLR). В отличие от односторонних измерений дальности в лазерной дальнометрии излучатель и приемник находятся в одном месте и подключены к одним часам, что избавляет от необходимости уточнения поправок шкал времени. При этом атмосферные поправки все еще требуются. В качестве измерений усредняется расстояние, пройденное сигналом в прямом и обратном направлениях:

$$\rho_{avg} = \frac{1}{2} [(T_R - T_T) c + \delta \rho_{atm} + \epsilon]$$

Современные станции SLR используют лазеры с длиной волны 532 нм, что соответствует оптическому диапазону. С этим связан недостаток лазерной дальнометрии – зависимость от погодных условий.

В качестве примера применения SLR рассмотрим серию аппаратов LAGEOS (LAsEr GEODynamics Satellite). Аппараты LAGEOS-I и LAGEOS-II были запущены на среднюю околоземную орбиту в 1976 и 1992 годах соответственно. Цель миссии – изучение геодинамики, в частности, определение формы земной поверхности и уточнение параметров вращения Земли. Каждый аппарат имеет шарообразную форму и оснащен набором угловых отражателей, необходимых для точного отражения лазерного сигнала.

Позиционирование спутников выполняется на основе измерений наблюдательных пунктов Международной службы лазерной дальнометрии. Ошибки лазерных измерений составляют менее 1 сантиметра, что позволяет восстанавливать орбиту аппаратов с точностью до нескольких сантиметров.

### 2.3.3 Измерения дальности и радиальной скорости

В некоторых случаях наблюдательные средства позволяют измерить не только некоторый параметр движения, но и скорость его изменения. Так, производная дальности – радиальная скорость, может быть получена из доплеровского сдвига. Эффект Доплера заключается в частотном смещении, которое приобретает сигнал, принимаемый на движущемся объекте (или отраженный от движущегося объекта). Величина смещения зависит от проекции относительной скорости излучателя и приемника на линию распространения сигнала, то есть от радиальной скорости:

$$\Delta f_D = \frac{2v_r f_t}{c},$$



где  $v_r$  – радиальная скорость,  $f_t$  – рабочая частота излучателя,  $c$  – скорость света.

Представителем данного класса систем является DORIS, которая обеспечивает измерение радиальной скорости с точностью до 0.5 мм/с. В состав комплекса DORIS входят наземные маяки и космические аппараты, оборудованные соответствующими доплеровскими приемниками. В частности, Европейское космическое агентство использует DORIS для определения орбиты аппарата Cryosat-2, созданного с целью измерения толщины ледового покрова.

### 2.3.4 Угловые измерения

Для описания угловых измерений рассмотрим несколько дополнительных систем координат.

Форма Земли может быть приближенно представлена в виде опорного эллипсоида. В силу несферичности земной поверхности локальная вертикаль не совпадает с направлением на центр Земли, определяемым сферическими координатами. Поэтому сферическая СК неудобна при проведении измерений и вводится геодезическая СК (рис. 7), привязанная к опорному эллипсоиду. В этой системе широта и долгота определяют направление на зенит.

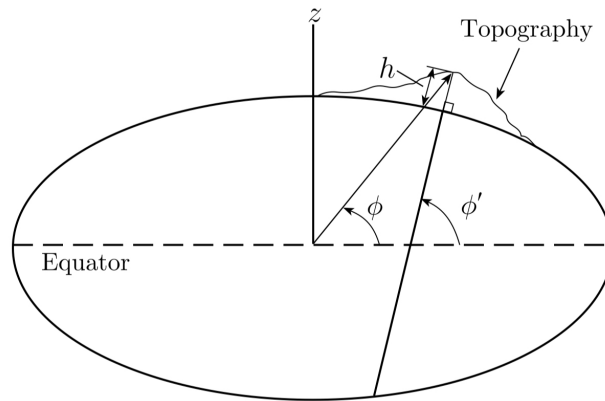


Рис. 7: Геодезическая система координат.  $\phi$  – геодезическая широта,  $h$  – высота над опорным эллипсоидом

Для координатного описания локальной области на поверхности эллипсоида применяется топоцентрическая СК (рис. 8). Это декартова система, начало которой привязано к некоторой точке на эллипсоиде, а оси сонаправлены касательным координатных линий топоцентрической СК в данной точке.

Направление в локальной системе координат можно описать с помощью азимута и угла возвышения (рис. 9). Именно эти углы используются для ориентации наблюдательных средств. Затем на начальном этапе обработки измерений набор локальных углов может быть пересчитан в долготу и широту в сферической системе координат.

Техническая реализация угловых измерений зачастую связана с оптическими инструментами. Классическим примером таких инструментов является телескоп. В первом приближении методика получения угловых измерений с помощью телескопа достаточно проста.

Телескоп с закрепленной на объективе фотокамерой направляется на интересующий участок неба. Затем открывается затвор камеры и снимок неба экспонируется в течение заданного промежутка времени. Для компенсации движения звезд на небесной сфере при длинных выдержках крепления телескопа оснащаются приводами. Это позволяет сохранить фиксированную ориентацию относительно звездной системы координат. В то же время проекция траектории космического объекта на небесную сферу

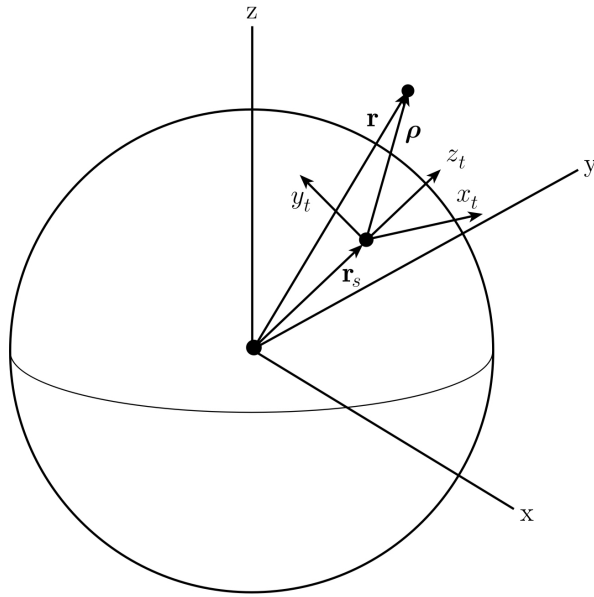


Рис. 8: Топоцентрическая система координат.  $x, y, z$  – оси исходной СК,  $x_t, y_t, z_t$  – оси локальной СК

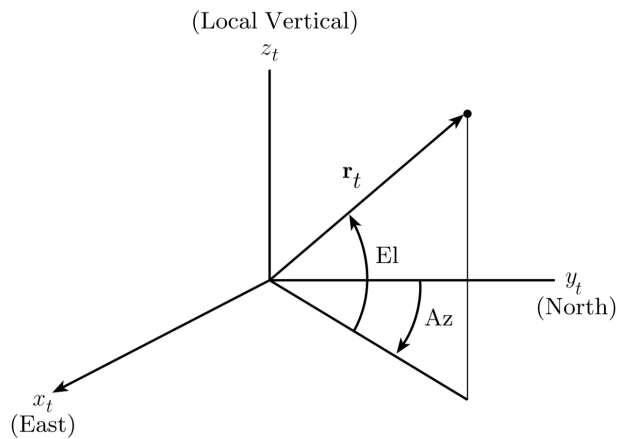


Рис. 9: Локальная система координат.

$Az$  – азимут, отсчитывается от направления на север

$El$  – угол возвышения, отсчитывается от плоскости поверхности

представляет собой линию – трек. Зная угловые координаты звезд (например, из звездного каталога), можно определить угловые координаты объекта во время пролета.

В настоящее время для контроля околоземного пространства также повсеместно применяются активные радиолокаторы. Локатор состоит из набора излучателей, испускающих сигнал и приемников, фиксирующих отраженный от объекта сигнал. Зона обзора для барьерных РЛС двумерная (сектор), а для обзорных РЛС объемная (усеченная пирамида). Применение в локаторах активной фазированной антенной решетки позволяет определять не только расстояние и радиальную скорость, но и направление на объект.

## 2.4 Обработка измерений

### 2.4.1 Фильтр Калмана

#### Расширенный фильтр Калмана

## **Сигма-точечный фильтр Калмана**

### **2.4.2 Метод наименьших квадратов**

### **2.4.3 Оптимальная фильтрация измерений**

## **2.5 Проблематика**

### **2.5.1 Оценка быстродействия**

### 3 Решение проблемы

## 4 Верификация

## 5 Валидация

## 6 Выводы

## Список литературы

- [1] *Mott-Smith, H.* The theory of collectors in gaseous discharges / *H. Mott-Smith, I. Langmuir* // *Phys. Rev.* — 1926. — Vol. 28.
- [2] *Морз, Р.* Бесстолкновительный PIC-метод / *Р. Морз* // Вычислительные методы в физике плазмы / Ed. by Б. Олдера, С. Фернбаха, М. Ротенберга. — М.: Мир, 1974.
- [3] *Киселёв, А. А.* Численное моделирование захвата ионов бесстолкновительной плазмы электрическим полем поглощающей сферы / *А. А. Киселёв, Долгонос М. С., Красовский В. Л.* // Девятая ежегодная конференция «Физика плазмы в Солнечной системе». — 2014.