Индивиуальное задание

Этап № 3. Исследование распределений и моментов, связанных с преобразованием случайных величин

Выполнил студент 2 курса
учебной группы НММ-02-22
Мулин Иван

Цели

1. Исследовать распределение созданных выборок.

Задача

Радиус окружности R=10, размер выборки 1000 точек.

Сгенерировать выборку точек, равномерно распределенных внутри круга двумя способами:

- Равномерно распределить точки внутри квадрата, внутрь которого вписана окружность, и отфильтровать точки, лежащие за пределами окружности.
- Генерировать точки путем задания случайного угла и расстояния от центра окружности.

Для созданных выборок сделать следующее:

1. Создать рисунок, иллюстрирующий расположение точек сгенерированной выборки внутри окружности;
2. Найти выборочные средние координат точек и их дисперсию;
3. Построить график плотности распределения расстояния от случайной равномерно распределенной точки в круге до фиксированной точки, лежащей вне окружности (к примеру, с координатами X=20, Y=0).
4. Построить график плотности распределения расстояния между двумя случайными точками, равномерно расположенными внутри круга.

Ход работы

Подключаем библиотеки `numpy` и `matplotlib`.

In [1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import gaussian_kde
```

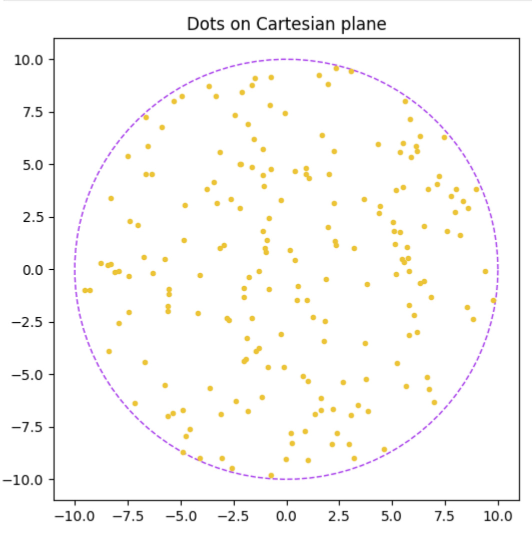
In [2]:
```
Radius = 10
Amount = 200

insiders = np.empty((Amount, 2), dtype=float)
```

Декартовы координаты

In [3]:
```
x = y = 0
c = 0
while (c < Amount):
    x = np.random.uniform(-Radius, Radius)
    y = np.random.uniform(-Radius, Radius)
    if (x**2 + y**2 <= Radius**2):
        insiders[c] = [x, y]
        c += 1
```

In [4]:
```
angleDomain = np.linspace(0, 2*np.pi, 100)
circleX = Radius * np.cos(angleDomain)
circleY = Radius * np.sin(angleDomain)
```

In [5]:
```
plt.figure(dpi=100, figsize=(6, 6))
plt.title("Dots on Cartesian plane")

plt.plot(circleX, circleY, linestyle="dashed", linewidth="1", color="#a434eb")
plt.plot(insiders[:, 0], insiders[:, 1], linestyle="none", marker=".", color="#ebc334")

plt.show()
print()
```



In [6]:
```
meanX, meanY = np.mean(insiders[:, 0]), np.mean(insiders[:, 1])
varX, varY = np.var(insiders[:, 0]), np.var(insiders[:, 1])

print("Mean: %.2f on Y, %.2f on Y" % (meanX, meanY))
print("Variance: %.2f on X, %.2f on Y" % (varX, varY))
```

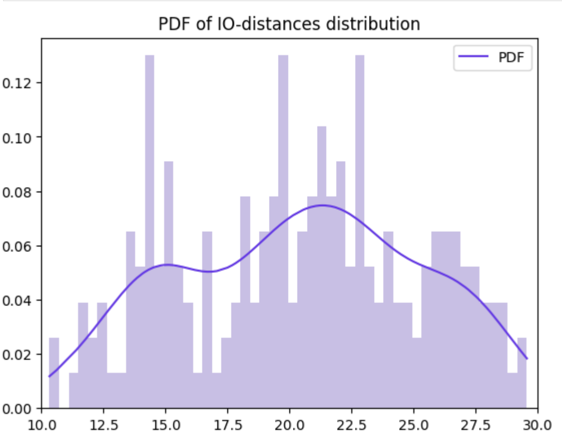
```
Mean: 0.25 on Y, 0.13 on Y
Variance: 23.10 on X, 25.14 on Y
```

In [7]:
```
def metric(x1, y1, x2, y2):
    return ((x2-x1)**2 + (y2-y1)**2) ** 0.5
```

In [8]:
```
FX, FY = (20, 0)
FDistances = np.empty(Amount, dtype=float)
```

In [9]:
```
for l in range( len(insiders) ):
    FDistances[l] = metric(FX, FY, insiders[l][0], insiders[l][1])
FDistances.sort()

FDistancesY = gaussian_kde(FDistances).evaluate(FDistances)

FCentreDistance = metric(0, 0, FX, FY)
minDistance = FCentreDistance - Radius
maxDistance = FCentreDistance + Radius
```

In [10]:
```
plt.figure(dpi=100)
plt.title("PDF of IO-distances distribution")
# IO-distances stands for Inside-Outside-distances meaning
# we measure distance between point inside the circle and a point outside the circle

plt.hist(FDistances, density=True, bins=50, color="#4a2ba6", alpha=0.3)
plt.plot(FDistances, FDistancesY, color="#653be3", label="PDF")

plt.xlim(minDistance, maxDistance)
plt.legend()
plt.show()
print()
```



In [11]:
```
distances = np.empty(int( Amount*(Amount-1)*0.5 ), dtype=float)

index = 0
# This is very slow if Amount >= 500.
for i in range(Amount-1):
    for j in range(i+1, Amount):
        # I could've done it through np.append but I don't care
        index = int( i*Amount - (i+1)*(i+2)*0.5 + j )
        distances[index] = metric(insiders[i][0], insiders[i][1], insiders[j][0], insiders[j][1])
distances.sort()

distancesY = gaussian_kde(distances).evaluate(distances)
```

Объяснение

Пусть d_i^j — расстояние между i-ой и j-й $(0 \leq i, j \leq n-1)$ точками из имеющейся выборки. Тогда к элементам d_i^j в верхнем треугольнике верхнетреугольный матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & d_0^1 & d_0^2 & \cdots & d_0^{n-1} \\ 0 & 0 & d_1^2 & \cdots & d_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{n-2}^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

подберём единственный номер `index`. Занумеруем элементы слева направо сверху вниз. Очевидно, для $d_i^{i+1}(i = 0, 1, \cdots, n-2)$ — первого элемента над главной диагональю получится номер

$$in - \frac{i(i-1)}{2} - i = in - \frac{i(i+1)}{2}$$

(Отсчитываем i строк длиной n, затем вычёркиваем $1 + 2 + \cdots + (i-1) = \frac{i(i-1)}{2}$ нулей, "засчитаных" при обходе этих i строк, после этого продвигаемся по $(i+1)$ строке ещё на i нулей.)

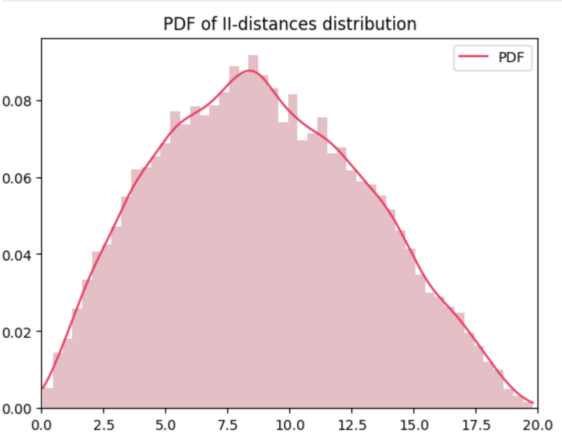
Поскольку $i + 1 \leq j \leq n - 1$, то $0 \leq j - (i+1) \leq n - 1 - (i+1)$ и индекс $j - (i+1)$ пробегает все элементы $(i+1)$-ой строки. Значит, искомый индекс равен

$$in - \frac{i(i+1)}{2} + j - (i+1) = in - \frac{(i+1)(i+2)}{2} + j$$

В коде n= `Amount`, а значит,

```
index = int( i*Amount - (i+1)*(i+2)*0.5 + j )
```

In [12]:
```
plt.figure(dpi=100)
plt.title("PDF of II-distances distribution")
# II-distances stands for Inside-Inside-distances meaning
# we measure distance between points inside the circle


plt.hist(distances, density=True, bins=50, color="#a62b44", alpha=0.3)
plt.plot(distances, distancesY, color="#e83c5f", label="PDF")

plt.xlim(0, 2 * Radius)
plt.legend()
plt.show()
print()
```



Полярные координаты

Задание в этом случае ничем не отличается от предыдущего, за одним исключением: получая полярный радиус в отрезке [0, Radius], мы *гарантируем* появление точек в созданной окружности.

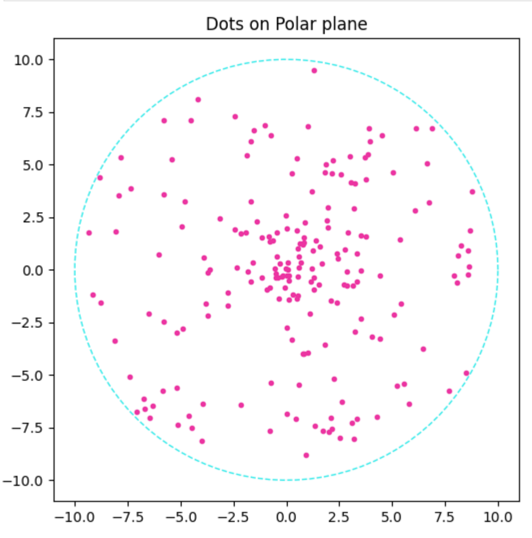
In [13]:
```
PI2 = 2*np.pi
```

In [14]:
```
r = a = 0

for c in range(Amount):
    r = np.random.uniform(0, Radius)
    a = np.random.uniform(0, PI2)
    insiders[c] = [r*np.cos(a), r*np.sin(a)]
```

Дальнейшие действия полностью повторяют проведённую ранее работу без каких-либо технических изменений.

In [15]:
```
angleDomain = np.linspace(0, PI2, 100)
circleX = Radius * np.cos(angleDomain)
circleY = Radius * np.sin(angleDomain)
```

In [16]:
```
plt.figure(dpi=100, figsize=(6, 6))
plt.title("Dots on Polar plane")

plt.plot(circleX, circleY, linestyle="dashed", linewidth="1", color="#34ebeb")
plt.plot(insiders[:, 0], insiders[:, 1], linestyle="none", marker=".", color="#eb34a1")

plt.show()
print()
```



In [17]:
```
meanX, meanY = np.mean(insiders[:, 0]), np.mean(insiders[:, 1])
varX, varY = np.var(insiders[:, 0]), np.var(insiders[:, 1])

print("Mean: %.2f on Y, %.2f on Y" % (meanX, meanY))
print("Variance: %.2f on X, %.2f on Y" % (varX, varY))
```

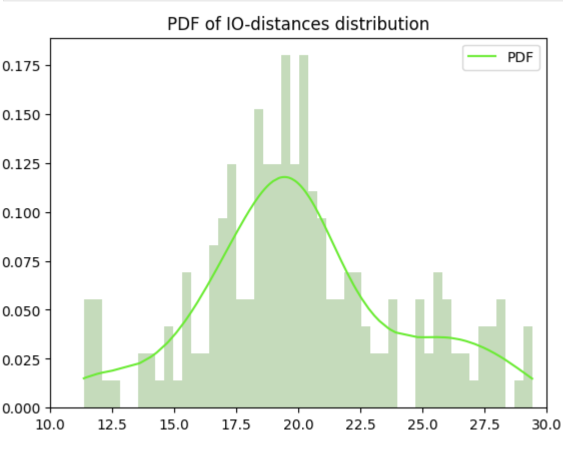
```
Mean: 0.34 on Y, -0.19 on Y
Variance: 16.37 on X, 16.61 on Y
```

In [18]:
```
def metric(x1, y1, x2, y2):
    return ((x2-x1)**2 + (y2-y1)**2) ** 0.5
```

In [19]:
```
FX, FY = (20, 0)
FDistances = np.empty(Amount, dtype=float)
```

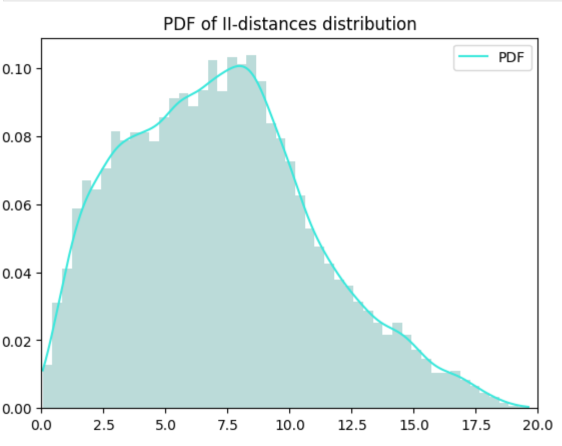
In [20]:
```
for l in range( len(insiders) ):
    FDistances[l] = metric(FX, FY, insiders[l][0], insiders[l][1])
FDistances.sort()

FDistancesY = gaussian_kde(FDistances).evaluate(FDistances)

FCentreDistance = metric(0, 0, FX, FY)
minDistance = FCentreDistance - Radius
maxDistance = FCentreDistance + Radius
```

In [21]:
```
plt.figure(dpi=100)
plt.title("PDF of IO-distances distribution")
# IO-distances stands for Inside-Outside-distances meaning
# we measure distance between point inside the circle and a point outside the circle

plt.hist(FDistances, density=True, bins=50, color="#3f8a20", alpha=0.3)
plt.plot(FDistances, FDistancesY, color="#6beb34", label="PDF")

plt.xlim(minDistance, maxDistance)
plt.legend()
plt.show()
print()
```



In [22]:
```
distances = np.empty(int( Amount*(Amount-1)*0.5 ), dtype=float)

index = 0
# This is very slow if Amount >= 500.
for i in range(Amount-1):
    for j in range(i+1, Amount):
        # I could've done it through np.append but I don't care
        index = int( i*Amount - (i+1)*(i+2)*0.5 + j )
        distances[index] = metric(insiders[i][0], insiders[i][1], insiders[j][0], insiders[j][1])
distances.sort()

distancesY = gaussian_kde(distances).evaluate(distances)
```

In [23]:
```
plt.figure(dpi=100)
plt.title("PDF of II-distances distribution")
# II-distances stands for Inside-Inside-distances meaning
# we measure distance between points inside the circle


plt.hist(distances, density=True, bins=50, color="#208a83", alpha=0.3)
plt.plot(distances, distancesY, color="#3ae8dc", label="PDF")

plt.xlim(0, 2 * Radius)
plt.legend()
plt.show()
print()
```



Результаты

В ходе выполнения третьего этапа индивидуального задания была создана выборка точек, равномерно распределённых по кругу фиксированного радиуса. Задание положения точек через полярные координаты в условиях данной задачи оказалось более удобным. После этого были построены графики плотностей вероятностей для созданных пар.