

# Групповой проект по математическому моделированию

## Содержание

1	Решения	1
	Задача 1 . . . . .	1
	Решение задачи 1 . . . . .	1
	Задача 2 . . . . .	2
	Решение задачи 2 . . . . .	2
	Задача 3 . . . . .	6
	Решение задачи 3 . . . . .	6
	Задача 4 . . . . .	8
	Решение задачи 4 . . . . .	8

## 1 Решения

### Задача 1.

Вслед за лордом Рэлеем найдите период малых колебаний капелек жидкости под действием их поверхностного натяжения, считая, что всё происходит вне гравитационного поля (в космосе).

### Решение.

Житейкий опыт подсказывает, что период малых колебаний капли должен быть связан с коэффициентом  $\sigma$  поверхностного натяжения капли, её плотностью  $\rho$  и размером. Поскольку колебания по условию малые, можно считать, что капля имеет объём сферы и её размер вполне описывается радиусом  $r$ . Итого получаем соотношение

$$P = f(\sigma, \rho, r).$$

Выпишем размерности введённых величин в системе  $L, M, T$ :

$$\begin{aligned}[P] &= T^{-1}, \\ [\sigma] &= MT^{-2}, \\ [\rho] &= ML^{-3}, \\ [r] &= L.\end{aligned}\tag{1}$$

Величины  $\sigma, \rho$  и  $r$  размерно независимы. Действительно, равенство  $\rho^\alpha \sigma^\beta r^\gamma = 1$  выполняется только при  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . Значит, для некоторых  $p_\rho, p_\sigma, p_r$  и  $c_0$  применение П-теоремы даёт тождество

$$\frac{P}{\sigma^{p_\sigma} \rho^{p_\rho} r^{p_r}} = c_0 \quad (2)$$

Так как только  $P$  и  $\sigma$  выражаются через  $T$  (см. (1)), то  $p_\sigma = \frac{1}{2}$ . Далее, только  $\sigma$  и  $\rho$  выражаются через  $M$ , а значит,  $p_\rho = -p_\sigma = -\frac{1}{2}$ . Аналогично находим  $p_r = -\frac{3}{2}$ . Подставляя найденные числа в (2), получаем

$$\frac{P}{\sigma^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}} r^{-\frac{3}{2}}} = c_0 \iff P = c_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho r^3}}.$$

## Задача 2.

В приведённом наборе данных  $V$  представляет собой среднюю скорость ходьбы, а  $P$  — численность популяции. Мы хотим узнать, можно ли предсказать численность популяции  $P$ , наблюдая за тем, как быстро ходят люди. «Подгоните» моделям  $P = a \ln V$  и  $P = aV^b$  к имеющимся данным с помощью критерия наименьших квадратов. Сравните модели с помощью критерия Фишера.

$V$	4.81	4.90	5.05	5.21	5.62	5.88
$P$	341948	49375	260200	867023	1340000	1092759

## Решение.

Сначала подгоним данные к модели  $P(V) = a_1 \ln V$ . Для этого, согласно методу наименьших квадратов, найдём такое  $a_1$ , что минимизируется значение

$$\Delta_1 := \sum_{i=1}^n (P_i - a_1 \ln V_i)^2$$

(в нашем случае всего  $n = 6$  наборов данных).

Для упрощения выкладок рассмотрим векторы  $\mathbf{p} := (P_1, \dots, P_n)^\top \in \mathbb{R}^n$  и  $\mathbf{l} := (\ln V_1, \dots, \ln V_n)^\top \in \mathbb{R}^n$  (в каноническом базисе). Фиксируем в  $\mathbb{R}^n$  стандартное<sup>1</sup> евклидово произведение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Тогда верна цепочка

$$\begin{aligned} \Delta_1 &:= \sum_{i=1}^n (P_i - a_1 \ln V_i)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n P_i^2 - 2a_1 \sum_{i=1}^n P_i \ln V_i + a_1^2 \sum_{i=1}^n \ln^2 V_i = \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Оно даётся формулой  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ , где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ .

$$\begin{aligned}
&= \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{l} \rangle a_1 + \langle \mathbf{l}, \mathbf{l} \rangle a_1^2 = \\
&= \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle - \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{l} \rangle^2}{\langle \mathbf{l}, \mathbf{l} \rangle} + \langle \mathbf{l}, \mathbf{l} \rangle \left( a_1 - \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{l} \rangle}{\langle \mathbf{l}, \mathbf{l} \rangle} \right)^2 \geq \\
&\geq \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle - \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{l} \rangle^2}{\langle \mathbf{l}, \mathbf{l} \rangle} = \\
&= \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{l}, \mathbf{l} \rangle - \langle \mathbf{p}, \mathbf{l} \rangle^2}{\langle \mathbf{l}, \mathbf{l} \rangle} = \min \Delta_1,
\end{aligned}$$

причём наименьшее значение достигается при  $a_{1\min} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{l} \rangle / \langle \mathbf{l}, \mathbf{l} \rangle$ .

В нашем случае  $a_{1\min} \approx 408135.750\dots$ ,  $\min \Delta_1 \approx 1186996197086.548\dots$  и

$$\chi_1^2 = \sum_{i=1}^6 \frac{(P_i - a_{1\min} \ln V_i)^2}{P(V_i)} \approx 1753774.374\dots$$

Итак, мы получили зависимость

$$P(V) \approx 408135.750 \ln V. \quad (3)$$

Займёмся теперь подгонкой данных к модели  $P(V) = a_2 V^{b_2}$ . На этот раз требуется оптимизировать величину

$$\Delta_2 := \sum_{i=1}^n (P_i - a_2 V_i^{b_2})^2.$$

Аналогично рассмотрим векторы  $\mathbf{p} = (P_1, \dots, P_n)^\top \in \mathbb{R}^n$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(b_2) := (V_1^{b_2}, \dots, V_n^{b_2})^\top \in \mathbb{R}^n$ ,  $b_2 \in \mathbb{R}$ . При каком-нибудь фиксированном  $b_2$  оценим  $\Delta_2$  снизу по  $a_2$  так же, как и в прошлом случае:

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &:= \sum_{i=1}^n (P_i - a_2 V_i^{b_2})^2 = \\
&= \sum_{i=1}^n P_i^2 - 2a_2 \sum_{i=1}^n P_i V_i^{b_2} + a_2^2 \sum_{i=1}^n V_i^{2b_2} = \\
&= \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle - 2\langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle a_2 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle a_2^2 = \\
&= \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle - \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle^2}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \left( a_2 - \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \right)^2 \geq \\
&\geq \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle - \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle^2}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \\
&= \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle^2}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle},
\end{aligned}$$

где минимум достигается при  $a_{2\min} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle / \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ . Полученную функцию от  $b_2$  уже можно оптимизировать численными методами, но можно поступить и иначе.

Преобразуем последнюю дробь:

$$\begin{aligned}
\frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle^2}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} &= \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \\
&= \frac{\langle \mathbf{p}, \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{p} - \langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \\
&= \frac{\langle \mathbf{p}, \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{p} - \langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \\
&= \left\langle \mathbf{p}, \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{p} - \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v} \right\rangle = \\
&= \left\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} - \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Нетрудно сообразить, что, каково бы ни было  $b_2$ , (для данного набора данных) векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{v}(b_2)$  неколлинеарны. Значит, их можно ортогонализовать. Применяя алгоритм Грама–Шмидта к системе  $(\mathbf{v}, \mathbf{p})$ , получим ортогональную систему  $(\mathbf{v}, \mathbf{s})$ , где

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}(b_2) = \mathbf{p} - \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}$$

— перпендикуляр к  $\mathbf{v}$  (рис. 1).

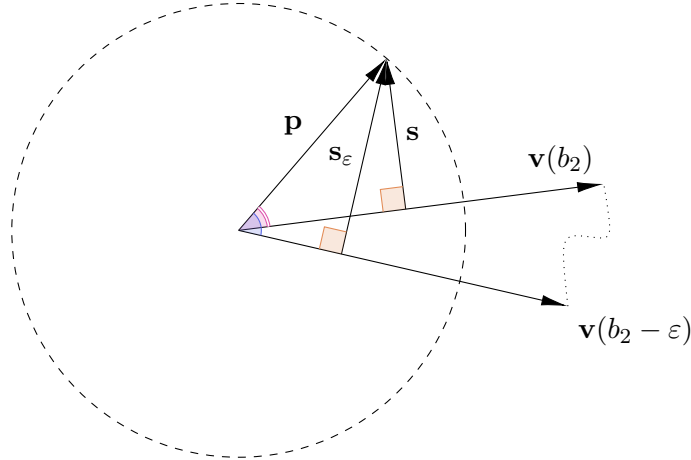


Рис. 1: Векторы  $\mathbf{v}(b_2)$  и  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(b_2)$  меняются с изменением  $b_2$ .

Для того чтобы минимизировать значение  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{s} \rangle$ , требуется увеличить угол  $\angle(\mathbf{p}, \mathbf{s})$  и уменьшить  $\|\mathbf{s}\|$ , а для этого (см. рис. 1) необходимо и достаточно уменьшить

$$\angle(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \arccos \left\{ \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}} \right\}.$$

Значит,  $\Delta_2$  минимизируется при том же  $b_2$ , при котором максимизируется значение

$$\left( \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{v}(b_2) \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{v}(b_2), \mathbf{v}(b_2) \rangle}} \right)^2 = \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{v}(b_2) \rangle^2}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{v}(b_2), \mathbf{v}(b_2) \rangle}.$$

В ходе численного решения были последовательно найдены числа

$$b_{2\min} \approx 6.888 \dots, a_{2\min} \approx 6.651 \dots, \min \Delta_2 \approx 424800366918.064 \dots$$

и

$$\chi_2^2 = \sum_{i=1}^6 \frac{(P_i - a_{2\min} V_i^{b_{2\min}})^2}{P(V_i)} \approx 703550.381 \dots$$

Значит, искомая зависимость имеет вид

$$P(V) \approx 6.651 V^{6.888}. \quad (4)$$

Сравним полученные модели (3) и (4):

$$\frac{\chi_2^2}{\chi_1^2} \approx 40\%.$$

Найденные зависимости изображены на рисунке 2:

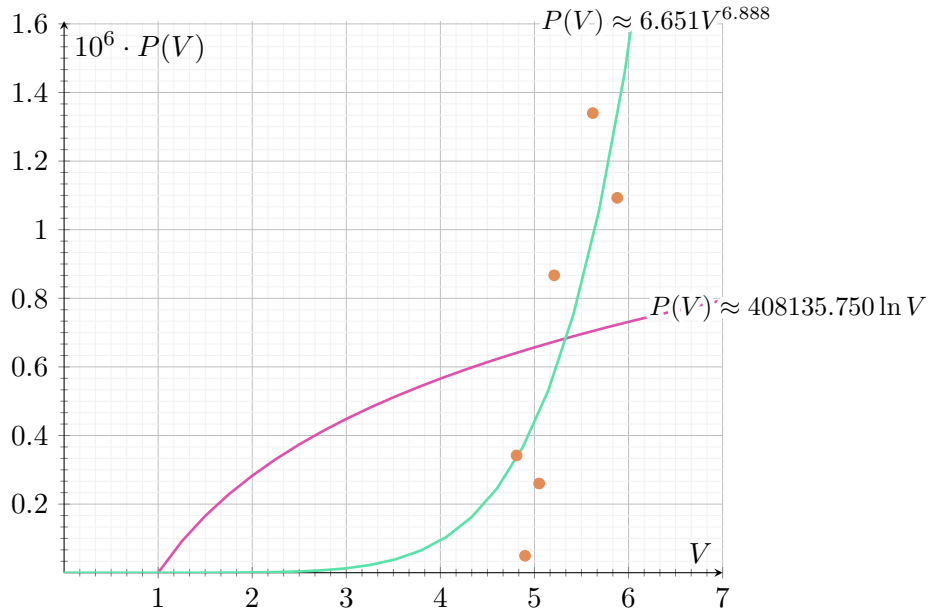


Рис. 2: Сравнение полученных моделей

### Задача 3.

Изучается распределение температуры  $u = u(x, t)$  в тонком бесконечном металлическом стержне, боковая поверхность которого теплоизолирована. Внутри стержня нет источника тепла. Коэффициент температуропроводности стержня  $\alpha^2 = \frac{1}{20}$ . Начальное распределение температуры в стержне имеет вид

$$\varphi(x) = (1 - x)(\theta(x) - \theta(x - 1)),$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

— ступенчатая функция Хевисайда.

1. Решите задачу с помощью преобразования Фурье и постройте 3D-график полученного решения.
2. Постройте анимацию пространственно-временного распределения температуры в стержне при  $0 \leq t \leq 5$ .

### Решение.

Начально-краевая задача для  $u = u(x, t)$  имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (5)$$

(Первое уравнение системы, очевидно, является уравнением теплопроводности стержня.)

Обозначим соответственно через  $U = U_y(t) := \mathcal{F}[u](y, t)$  и  $\Phi(y) := \mathcal{F}[\varphi](y)$  преобразования Фурье по первому аргументу функций  $u$  и  $\varphi$ . С учётом того, что для всяких чисел  $k \in \mathbb{N}$  и  $\mu, \nu \in \mathbb{C}$  и любых абсолютно интегрируемых на  $\mathbb{R}$  функций  $f, g$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right](y, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}[u](y, t) = \frac{dU}{dt} = \dot{U}, \\ \mathcal{F}\left[\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right](y, t) &= (iy)^k \mathcal{F}[u](y, t) = (iy)^k U, \\ \mathcal{F}[\mu f + \nu g] &= \mu \mathcal{F}[f] + \nu \mathcal{F}[g], \end{aligned}$$

система (5) примет вид задачи Коши:

$$\begin{cases} \dot{U} + \alpha^2 y^2 U = 0, \\ U(0) = \Phi(y). \end{cases} \quad (6)$$

Легко видеть, что её решением является функция  $U_y(t) = \Phi(y)e^{-\alpha^2 y^2 t}$ . Чтобы получить решение  $u(x, t)$  исходной задачи, найдём обратное преобразование Фурье к данному решению:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{F}^{-1}[U_y] = \mathcal{F}^{-1}[\Phi(y)e^{-\alpha^2 y^2 t}] = \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\Phi] * \mathcal{F}^{-1}[e^{-\alpha^2 y^2 t}] = \\ &= \varphi(s) * \frac{\exp\left\{-\frac{s^2}{4\alpha^2 t}\right\}}{\sqrt{2t\alpha}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) \frac{\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4\alpha^2 t}\right\}}{\sqrt{2t\alpha}} ds, \end{aligned}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. В выкладке использовалось то, что

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[f \cdot g] &= \mathcal{F}^{-1}[f] * \mathcal{F}^{-1}[g], \\ \mathcal{F}^{-1}[e^{-\nu^2 y^2}] &= \frac{e^{-\frac{x^2}{4\nu^2}}}{\sqrt{2\nu}}. \end{aligned}$$

Вычислим последний интеграл. Для начала заметим, что

$$\varphi(s) = (1-s)(\theta(s) - \theta(s-1)) = \begin{cases} 1-s, & 0 \leq s \leq 1, \\ 0, & s \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]. \end{cases}$$

В таком случае

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) \frac{\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4\alpha^2 t}\right\}}{\sqrt{2t\alpha}} ds &= \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \int_0^1 (1-s) \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4\alpha^2 t}\right\} ds = \\ &= \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \int_0^1 ((1-x) + (x-s)) \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4\alpha^2 t}\right\} ds = \\ &= \frac{1-x}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \int_0^1 \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4\alpha^2 t}\right\} ds + \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \int_0^1 (x-s) \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4\alpha^2 t}\right\} ds = \\ &= \frac{1-x}{2} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{2\alpha\sqrt{t}}\right) \right] - \\ &\quad - \alpha\sqrt{\frac{t}{\pi}} \left[ \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}\right) - \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{4\alpha^2 t}\right) \right]. \end{aligned}$$

Итак, окончательно

$$u(x, t) = \frac{1-x}{2} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\alpha\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{2\alpha\sqrt{t}}\right) \right] - \alpha\sqrt{\frac{t}{\pi}} \left[ \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}\right) - \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{4\alpha^2 t}\right) \right].$$

#### Задача 4.

Максимизируйте целевую функцию

$$g(x, y) = 2x - y$$

при следующих условиях:

$$\begin{cases} x \leq 3, \\ y \geq -1, \\ -2x - 3y \leq 6, \\ -x + 2y \leq 6. \end{cases} \quad (M)$$

Решение.

Решим задачу графически. Положим  $2x - y = c$  и изобразим на плоскости  $xOy$  множество  $M$ . С ростом параметра  $c$  прямая  $2x - y = c$  опускается вдоль оси ординат, следовательно, достаточно найти такие точки  $(x, y)$ , при которых прямая  $2x - y = c$  пересекает множество  $M$  и имеет наименьшую ординату точки пересечения с осью  $Oy$ . Из рисунка 3 видно, что это достигается в точке  $(3, -1)$ , а значит,

$$\max_{(x,y) \in M} (2x - y) = 7.$$

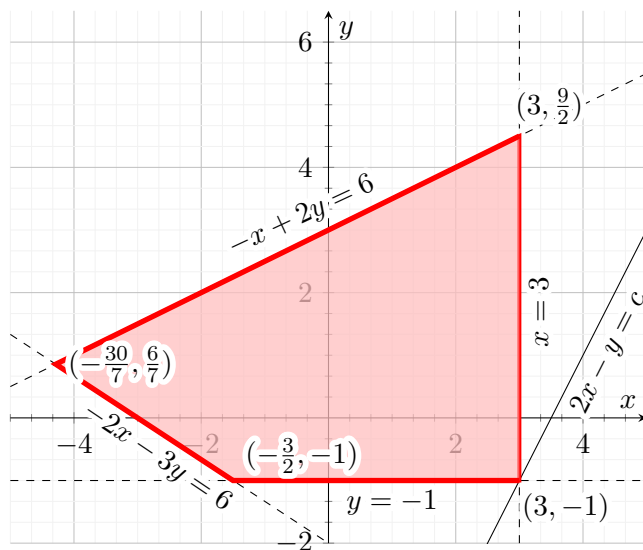


Рис. 3: Графическое решение задачи