Алгоритмы и структуры данных
Домашняя работа
Неделя 1

Иван Алексеев M3139

17.09.2020

Задача 1

Доказать: $\sum\limits_{i=1}^{n+5} 2^i = O(2^n)$
Решение:

Преобразуем $\sum\limits_{i=1}^{n+5} 2^i = 2^{n+6} - 1$
Теперь вспомним определение $O(g(n))$:

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Заметим, что при $c = 2^7$ и $n_0 = 1$ $\forall n > n_0 = 1$ выполянется

$$\sum_{i=1}^{n+5} 2^i = 2^{n+6} - 1 \leq c \cdot 2^n = 2^{n+7} = 2^{n+6} + 2^{n+6}$$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n+5} 2^i = 2^{n+6} - 1 = O(2^n)$, ч.т.д.

Задача 2

Доказать: $\frac{n^3}{6} - 7n^2 = \Omega(n^3)$
Решение:

Вспомним определение $\Omega(g(n))$:

$$f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists c > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 : f(n) \geq c \cdot g(n)$$

Пусть $c = \frac{1}{30}$ $n_0 = 52$:

$$\frac{n^3}{6} - 7n^2 \ \vee \ c \cdot n^3 = \frac{n^3}{30} \ \Leftrightarrow \ 5n^3 - 210n^2 \ \vee \ n^3$$

$$2n \ \vee \ 105 \ \Leftrightarrow \ 2n \ \geq \ 105, n > 52$$

$\Leftrightarrow \frac{n^3}{6} - 7n^2 = \Omega(n^3)$, ч.т.д.

Задача 3

Доказать: $max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))), \ f(n) \geq g(n) \geq 0$
Решение:

Вспомним определение $\Theta(g(n))$:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 : c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$$

Пусть из пары функций $f(n)$ будет больше $g(n)$. Тогда $max(f(n), g(n)) = f(n)$. Учитывая вышесказанное, заметим, что из $f(n) \geq g(n)$ следует

$$2f(n) \geq g(n) + f(n) \geq f(n)$$

Тогда при $c_1 = 1$ и $c_2 = 2$ неравентсво из определения Θ выполняется, а значит $max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n)))$, ч.т.д.

Задача 4

Решение:

$1,\ (\frac{3}{2})^2,\ n^{\frac{1}{\log n}},\ \log\log n,\ \sqrt{\log n},\ (\sqrt{2})^{\log n},\ (\log n)^2,\ n,\ 2^{\log n},\ \log n!,\ n \cdot \log n,\ n^2,\ 4^{\log n},\ n^3,\ (\log n)!,\ n^{\log\log n},\ (\log n)^{\log n},\ n \cdot 2^n,\ e^n,\ n!,\ (n+1)!,\ 2^{2^n},\ 2^{2^{n+1}}$