Программа экзамена по Алгебре
в 10 классе двухгодичного физ-мат потока
(по уже пройденному материалу)

Примечание. Вопросы и пункты, *выделенные курсивом*, — необязательные. Нужно, конечно, уметь решать уравнения и неравенства, изучавшиеся в I семестре: с модулями, рациональные и иррациональные.

Два основных правила комбинаторики [правило произведения и правило суммы]. Размещения, сочетания и перестановки (без повторений). Биномиальные коэффициенты, треугольник Паскаля. Три основных тождества для биномиальных коэффициентов [$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$, $C_n^k = C_n^{n-k}$, $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$], три способа доказательства каждого из них [через: явную формулу, количество подмножеств, бином, дифференцирование бинома].

Бином Ньютона. Полиномиальная формула [обобщение бинома Ньютона для $(x_1 + \cdots + x_k)^n$]. Гармонический треугольник Лейбница. Размещения, сочетания и перестановки с повторениями. Использование в комбинаторных задачах приёма, основанного на замене соседних элементов одним элементом. Формула включений и исключений (доказательство с использованием кругов Эйлера для случаев $n = 2$ и $n = 3$ множеств). Количества целочисленных неотрицательных решений уравнения $x_1 + \cdots + x_m = n$ и неравенства $x_1 + \cdots + x_m \leqslant n$ с заданными m, n. Геометрические комбинаторные задачи о количестве частей, сводящиеся к составлению и решению рекуррентного соотношения. Сумма k-ых степеней натуральных чисел, не превосходящих n (способ получения и вид общей формулы для данного натурального k).

Делимость целых чисел. Признаки делимости [на 2, 3, 5, 6, 9, 11]. Деление целых чисел с остатком. Простые и составные числа. Бесконечность множества простых чисел. Решето Эратосфена. Основная теорема арифметики. Каноническое разложение. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное, связь между ними и два способа их вычисления. Алгоритм Евклида, линейное выражение (представление) НОД. Связь наибольшего общего делителя и всех делителей двух чисел. Связь наименьшего общего кратного и всех кратных двух чисел. НОД и НОК нескольких целых чисел, линейное выражение для НОД нескольких чисел.

Линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными, критерий их разрешимости, нахождение общего решения. Второе доказательство основной теоремы арифметики. Иррациональность (нецелых) алгебраических корней из натуральных чисел. Метод решения системы из двух линейных диофантовых уравнений с тремя неизвестными.

Мультипликативные функции натурального аргумента: число натуральных делителей натурального числа, сумма натуральных делителей натурального числа, функция Эйлера и их вычисление. Равенство $\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = n$.

Сравнения. Вычеты, составление таблиц для операций сложения и умножения вычетов. Метод доказательства отличия от нуля значения многочлена с целыми коэффициентами от целочисленной переменной, основанный на переходе к вычетам.

Теорема Вильсона, малая теорема Ферма. Теорема Эйлера и малая теорема Ферма как её следствие.

Китайская теорема об остатках. Явная формула для решений системы сравнений в Китайской теореме об остатках.

Периодичность остатков степеней натурального числа. Её использования для вычисления остатков для больших степеней. Использование Китайской теоремы об остатках для вычисления остатка при делении степени натурального числа на не взаимно-простое с ним число. Определение длины предпериодической части.

Обобщённая Китайская теорема об остатках. Условие разрешимости системы двух сравнений с не взаимно-простыми модулями.

Геометрическое и комбинаторное доказательство теоремы Вильсона и малой теоремы Ферма.

Взаимная простота чисел Ферма и бесконечность множества простых чисел. Результаты, использующие аналоги алгоритма Евклида: делимость друг на друга и НОД для **1)** чисел вида $a^n - 1$ (с заданным целым $a \neq 0; 1$), **2)** чисел Фибоначчи u_n [используя формулу $u_{n+m} = u_m u_{n-1} + u_{m+1} u_n$].

Кольцо вычетов, его обратимые элементы и делители нуля и связь их количеств с функцией Эйлера. Поле вычетов по простому модулю. Понятие о мультипликативной полугруппе и аддитивной группе кольца (на примере кольца вычетов). Понятие о группе обратимых элементов полугруппы (на примере мультипликативной полугруппы кольца вычетов).

Многочлены над произвольным кольцом или полем. Обоснование использования теоремы Безу и деления многочленов для решения алгебраических сравнений по простому модулю. Обоснование формулы для решений квадратичных сравнений по простому модулю. Квадратичные вычеты и невычеты по простому модулю, их количества, критерий Эйлера. Группа ненулевых квадратичных вычетов по простому модулю. Использование критерия Эйлера для доказательства существования или отсутствия решений квадратичного сравнения по простому модулю. Метод решения алгебраических сравнений по составному модулю, основанный на использовании Китайской теоремы об остатках, решении сравнений по простым модулям и переходе к кратным модулям [от модуля m к кратному ему модулю $\widetilde{m}$].

Условие того, что вычет числа (-1) является квадратичным вычетом по простому модулю, два его доказательства [использующее критерий Эйлера и использующее разбиение всех ненулевых вычетов на четвёрки вычетов]. Явная формула для числа, квадрат вычета которого равен вычету числа (-1).

Радианная мера угла. Тригонометрический круг. Тригонометрические функции: синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла. Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения, периодичность. Формулы тригонометрических функций (синус и косинус) суммы, разности, двойного угла, половинного угла, формулы понижения степени. Преобразование суммы тригонометрических функций (синус и косинус) в их произведение и произведения в сумму. Метод вспомогательного аргумента. Методы решения для частных случаев тригонометрических уравнений [вида $P(\cos x \pm \sin x, \cos x \sin x) = 0$, однородных относительно $\cos x, \sin x$, сводящихся к однородным относительно $\cos x, \sin x$].

Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики. Общий вид решения простейших тригонометрических уравнений и неравенств. Тригонометрические уравнения и неравенства, сводящиеся к алгебраическим, в частности, к квадратным. Использование свойства ограниченности синуса и косинуса в решении задач.

Иррациональные (с радикалами) тригонометрические уравнения и неравенства. Использование единичного круга для решения тригонометрических неравенств и систем неравенств и/или уравнений.

Теорема Ферма о простом числе как сумме двух квадратов. Теорема о натуральных числах, представимых в виде суммы квадратов двух целых чисел. Первый критерий Эйлера простоты числа [связан с количеством представлений числа в виде разности квадратов двух натуральных чисел] (с доказательством) и второй критерий Эйлера простоты числа [связан с количеством представлений числа в виде суммы квадратов двух натуральных чисел] (*доказательство*).

Теорема Минковского (доказательство для двумерного *и трёхмерного* случая).

Делимость многочленов. Деление многочленов с остатком. Понятие неприводимого многочлена. Разложение многочленов на неприводимые над полями действительных и рациональных чисел, его единственность с точностью до умножения сомножителей на ненулевые постоянные. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух многочленов, их единственность с точностью до умножения сомножителей на ненулевые постоянные. Связь между НОД и НОК, способ их вычисления. Алгоритм Евклида, линейное выражение (представление) НОД двух многочленов. Связь наибольшего общего делителя и всех делителей двух многочленов. Связь наименьшего общего кратного и всех кратных двух многочленов.

Кратность корня многочлена. Связь корней и кратностей корней для двух многочленов, один из которых делится на другой, для их частного, для многочлена и его производной. Построение многочлена, все корни которого совпадают со всеми общими корнями двух заданных многочленов, кратности его корней. Построение многочлена, все корни которого простые и совпадают со всеми корнями заданного многочлена.

Алгебраические числа. Минимальный многочлен алгебраического числа, его единственность с точностью до умножения на ненулевую постоянную. Совпадение минимальных многочленов всех алгебраических чисел и всех неприводимых над $\mathbb{Q}$ многочленов. Сопряжённые алгебраические числа, разбиение множества всех алгебраических чисел на непересекающиеся множества сопряжённых. Теорема о том, что алгебраические числа образуют поле. Теорема об алгебраической замкнутости поля алгебраических чисел.

Лемма Гаусса о «содержании» произведения двух многочленов от одной переменной над $\mathbb{Z}$, её следствие о совпадении неприводимости многочленов от одной переменной над $\mathbb{Z}$ и над $\mathbb{Q}$. Признак Эйзенштейна неприводимости многочлена от одной переменной с целыми коэффициентами, примеры его применения (в частности, для многочлена $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$, где p — простое). Разложение многочленов или доказательство неприводимости многочленов над $\mathbb{Z}$ с использованием метода неопределённых коэффициентов. Необходимое и достаточное условие неприводимости над $\mathbb{Z}$ многочлена третьей степени.

Результат о том, что симметрический многочлен с целыми коэффициентами преобразуется в многочлен с целыми коэффициентами от элементарных симметрических многочленов. Целые алгебраические числа. Целые алгебраические числа, являющиеся рациональными числами. Свойство минимальных многочленов целых алгебраических чисел. Результат о том, что целые алгебраические числа образуют кольцо, но не поле. Аналог для целых алгебраических чисел теоремы об алгебраической замкнутости поля алгебраических чисел.

Результант двух многочленов. Его представление в виде многочлена с целыми коэффициентами от коэффициентов этих многочленов. Свойства результанта: изменение результанта при перестановке многочленов, связь результанта многочленов f

и g и результанта остатка при делении f на g и g, результант многочлена и произведения двух многочленов. Дискриминант многочлена, его связь с результантом многочлена и его производной.

Теорема Дирихле о бесконечности простых чисел в арифметической прогрессии: её доказательство для прогрессий вида $3k + 2$, $4k + 3$, $6k + 5$ и $4k + 1$.