Программа экзамена по Алгебре
в 10 классе двухгодичного физ-мат потока

Примечание. Вопросы и пункты, *выделенные курсивом*, — необязательные, но те, кто их ответят, будут дополнительно поощрены.

Арифметическая и геометрическая прогрессии, формулы их общего члена и суммы.

Математическая индукция и её модификации: полная математическая индукция, математическая индукция глубины k, обратная математическая индукция [по убывающему, а не возрастающему номеру]; их обоснование.

Два метода доказательства тождеств и неравенств на основе метода математической индукции [основываясь на рассмотрении разности или отношения двух последовательных членов]. Упрощение выражений с помощью метода математической индукции.

Неравенство Бернулли [$(1+x)^n \geqslant 1+nx$ для $x \geqslant -1$ и натурального n].

Понятие рекуррентной последовательности и последовательность Фибоначчи. Числа Фибоначчи с неположительными номерами, формула их связи с числами Фибоначчи с положительными номерами [$u_{-n} = (-1)^{n+1}u_n$]. Формула для общего члена последовательности Фибоначчи [$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$].

Простейшие геометрические задачи о количестве частей, в которых возникают рекуррентные последовательности.

Понятие алгебраического корня степени n. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух и нескольких неотрицательных чисел. Неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел. Иллюстрация метода обратной математической индукции на примере доказательства неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим.

Отображения множеств и их композиции (произведения). Область определения и образ отображения множеств. Ассоциативность операции композиции, использование коммутативных диаграмм. Независимость результата вычисления композиции нескольких отображений от способа расстановки скобок, два вывода этого свойства: 1) с использованием коммутативных диаграмм и 2) из свойства ассоциативности. Коммутирующие или перестановочные отображения. Некоммутативность операции композиции на множестве всех преобразований множества, содержащего более одного элемента. Некоммутативность операции композиции на множестве всех перестановок множества, содержащего более двух элементов. Количество преобразований множества из n элементов.

Понятие графа, ориентированного графа, пути в графе, связного графа. Длина пути, петля (замкнутый путь длины 1). Графическое изображение (граф) отображения.

Инъективные, сюръективные и биективные отображения, их распознавание по графу отображения.

Тождественное отображение множества. Обратное отображение, условие его существования [биективность отображения], понятие обратимого отображения. Формула для отображения, обратного к композиции двух обратимых отображений.

Преобразования множества, постоянные отображения множества, k-ая степень f^k преобразования f множества (k — натуральное). Подвижные и неподвижные точки (элементы) преобразования множества. Перестановки множества, k-ая степень f^k перестановки f множества (k — целое). Формулы, связывающие степени отображения [$(f^k)^{-1} =$

$(f^{-1})^k$, $f^{k+l} = f^k \circ f^l$, $f^{kl} = (f^k)^l$]. Количество преобразований множества из n элементов. Количество перестановок множества из n элементов.

Решение простейших уравнений в отображениях $\alpha \circ \chi = \beta$ и $\chi \circ \alpha = \beta$ с заданными α, β, случай обратимого α.

Цикл (циклическая перестановка). Граф преобразования множества. Орбита элемента множества под действием перестановки. Строение графа перестановки и разложение перестановки в произведение (композицию) независимых (т.е. с непересекающимися множествами подвижных элементов) циклов, тип перестановки. Коммутативность независимых (т.е. с непересекающимися множествами подвижных элементов) перестановок. Разложение перестановки в произведение (композицию) транспозиций (циклов длины 2), в частности, транспозиций, переставляющих пары соседних элементов [метод "пузырька"].

Порядок перестановки, его определение по типу перестановки.

Результат о том, что n-ая степень перестановки f равна тождественному отображению тогда и только тогда, когда n делится на порядок f. Результат о том, что порядок композиции двух коммутирующих перестановок является делителем наименьшего общего кратного порядков этих перестановок.

Чётные и нечётные перестановки, чётность обратной перестановки и композиции двух перестановок. Количество чётных перестановок множества из n элементов. Результат о том, что чётность перестановки совпадает с чётностью числа инверсий в ней. Чётность циклической перестановки. Определение чётности перестановки по её типу.

Линейная функция одного или нескольких аргументов. Модуль. Три класса функций одного аргумента: конечно-кусочно-линейные непрерывные функции (т.е. непрерывные функции, линейные на каждом из отрезков, образующих конечное разбиение вещественной прямой), линейно-модульные функции (т.е. функции, представимые в виде композиции линейных функций и функции взятия модуля) и канонические линейно-модульные функции (т.е. функции вида $k_1|x - x_1| + \cdots + k_n|x - x_n| + kx + b$). Результат о том, что линейные функции от конечного набора конечно-кусочно-линейных функций и модуль от конечно-кусочно-линейной функции также являются конечно-кусочно-линейными функциями (т.е. замкнутость класса конечно-кусочно-линейных функций относительно операций взятия линейных функций и модуля). Теоремы о совпадении всех трёх классов функций (о том, что конечно-кусочно-линейные и канонические линейно-модульные функции совпадают и о том, что линейно-модульные функции являются конечно-кусочно-линейными).

Минимум и максимум конечного набора чисел и конечного набора функций. Экстремумы (минимум и максимум) функции на интервале, точки экстремума (точки минимума и точки максимума). Метод нахождения экстремумов (минимума и максимума) конечно-кусочно-линейной функции. Результат о том, что минимум и максимум конечного набора конечно-кусочно-линейных функций также являются конечно-кусочно-линейными функциями (т.е. замкнутость класса конечно-кусочно-линейных функций относительно операций минимума и максимума конечного набора функций).

Квадратный трёхчлен, квадратичная функция. Линейные, квадратные, рациональные уравнения и неравенства. Уравнения и неравенства, сводящиеся к квадратным. Метод интервалов для рациональных неравенств. Уравнения и неравенства с модулем.

Многочлены от одной переменной. Делимость многочленов, деление многочленов с остатком: существование и однозначность деления, схема Горнера (вычисление значения многочлена и деление многочлена на линейный двучлен). Корни многочлена.

Теорема Безу. Теорема Виета. Число корней многочлена [не превосходит степени многочлена].

Частные методы решения алгебраических и рациональных уравнений высоких степеней: использование замены и разложения на множители, возвратные уравнения, применение метода неопределённых коэффициентов для разложения многочлена на множители и для его представления в виде квадратичного многочлена от квадратичного многочлена (для многочленов 4-ой степени), теорема о рациональных корнях многочленов с целыми коэффициентами. Вывод условия на коэффициенты многочлена 4-ой степени, при которых он представим в виде квадратичного многочлена от квадратичного многочлена.

Многочлены от нескольких переменных. Симметрические многочлены, элементарные симметрические многочлены, понятие орбиты одночлена. Рекуррентная формула Ньютона для выражения степенных сумм (сумм k-ых степеней) через элементарные симметрические многочлены (доказательство для случаев $k = 1$ и $n \leqslant k$, где n — количество переменных; *доказательство для случая произвольных k и n*). Основная теорема о симметрических многочленах (доказательство существования и единственности для случая $n = 2$ и $n = 3$ переменных; *доказательство для случая произвольного числа n переменных*). Методы нахождения представления симметрического многочлена в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов для случая $n = 2$ и $n = 3$ переменных: выражение орбит через элементарные симметрические многочлены и нахождение общего вида искомого многочлена с неопределёнными коэффициентами (исходя из анализа степеней слагаемых в исходном многочлене) с последующим использованием метода неопределённых коэффициентов и метода частных значений. Обобщённые формулы Виета.

Дискриминант многочлена и его использование для проверки наличия совпадающих корней. Метод разложения симметрических многочленов на множители. Доказательство тождеств для симметрических многочленов.

Антисимметрические многочлены, простейший антисимметрический многочлен. Лемма о частном при делении с остатком двух многочленов, коэффициенты которых являются многочленами от параметров. Основная теорема об антисимметрических многочленах.

Системы и совокупности уравнений и неравенств. Методы решения систем уравнений. Равносильные преобразования систем. Системы и совокупности неравенств с одной переменной, использование числовой прямой. Использование симметрии при решении систем рациональных уравнений, сведение к симметрическим многочленам. Преобразование однородного алгебраического уравнения, уменьшающее число переменных.

Алгебраический корень числа. Иррациональные уравнения и неравенства. Метод следствий. Метод равносильных преобразований. Метод решения иррационального уравнения, основанный на введении новых (избыточных) переменных и сведении к системе рациональных уравнений.