Tema 3. Métodos combinatorios.

Eva Romero Ramos
evarom03@ucm.es

Universidad Complutense de Madrid

Outline

Outline

Permutaciones sin repetición

Definición.- Para un conjunto de n elementos, se denomina permutación a cualquier forma de ordenar los n elementos, sin repetir ninguno y utilizándolos todos.

El número total de permutaciones diferentes que se pueden obtener, se calculan del siguiente modo:

$$\boxed{\mathrm{P}_n = n!}$$

Ejemplo 1.- Si tenemos un conjunto con los valores 1,2,3 y queremos saber de cuantas formas diferentes se pueden ordenar estos tres elementos, tendremos:

$\{1,2,3\}$	$\{2,1,3\}$	$\{2,3,1\}$
$\{1,3,2\}$	$\{3,1,2\}$	$\{3,2,1\}$

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Permutaciones con repetición

Definición.- Para un conjunto de n elementos, en el que existen grupos de elementos indistinguibles entre sí (que denotaremos $a, b, c \ldots$) se denomina permutación con repetición a cualquier ordenación en la que aparezcan todos los elementos y se repitan los indistinguibles el mismo número de veces que aparecen.

El número total de permutaciones con repetición que se pueden obtener se calcula del siguiente modo:

$$\boxed{\mathrm{PR}_n^{a,b,c\ldots} = \frac{n!}{a!b!c!}}$$

Ejemplo de permutaciones con repetición

Ejemplo 2.- Si tenemos un conjunto con los valores 1, 2, 2, 3 y queremos saber de cuantas formas diferentes se pueden ordenar estos elementos, tendremos:

$\{1,2,2,3\}$	$\{2,2,1,3\}$	$\{2,2,3,1\}$	$\{1,2,3,2\}$
$\{1,3,2,2\}$	$\{3,1,2,2\}$	$\{2,1,2,3\}$	$\{2,3,2,1\}$
$\{3,2,1,2\}$	$\{2,3,1,2\}$	$\{2,1,3,2\}$	$\{3,2,2,1\}$

$$PR_4^{2,1,1} = \frac{4!}{2!1!1!} = \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{2} = 12$$

Ejercicio 1

¿Cuántas palabras diferentes, con sentido o sin el, se pueden escribir con las letras de la palabra "DISCO"? ¿Y con las letras de la palabra "CANICA"?

¿Cuántas palabras diferentes, con sentido o sin el, se pueden escribir con las letras de la palabra "DISCO"? ¿Y con las letras de la palabra "CANICA"?

Solución.-

DISCO: Como no se repite ninguna letra, se trata de contar las diferentes permutaciones sin repetición que hay:

$$P_5 = 5! = 120$$

Ejercicio 1

¿Cuántas palabras diferentes, con sentido o sin el, se pueden escribir con las letras de la palabra "DISCO"? ¿Y con las letras de la palabra "CANICA"?

Solución.-

DISCO: Como no se repite ninguna letra, se trata de contar las diferentes permutaciones sin repetición que hay:

$$P_5 = 5! = 120$$

CANICA: Como se repiten dos letras, se trata de contar las diferentes permutaciones con repetición que hay:

$$PR_6^{2,2,1,1} = \frac{6!}{2!2!1!1!} = 180$$

Outline

Variaciones sin repetición

Definición.- Se denomina variación sin repetición a cada una de las posibles ordenaciones de r elementos tomadas de un grupo de n.

El número total de variaciones sin repetición que se puede realizar con los n elementos tomados de r en r es:

$$\boxed{\mathrm{V}_n^r = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}$$

Ejemplo 3.- De un grupo de 20 estudiantes se pretenden seleccionar 5 para la lista de representantes escolares. ¿Cuantas listas de 5 estudiantes diferentes se pueden obtener con los alumnos del grupo?

$$V_{20}^5 = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1.860.480$$

Variaciones con repetición

Definición.- Se denomina variación con repetición a cada una de las posibles ordenaciones de r elementos tomadas de un grupo de n permitiendo elementos repetidos.

El número total de variaciones con repetición que se puede realizar con los n elementos tomados de r en r es:

$$\boxed{\mathrm{VR}_n^r = n^r}$$

Ejemplo 4.- Se extraen sucesivamente y con reemplazamiento 3 bolas de una urna que contiene 8 bolas de distintos colores. ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener?

$$VR_8^3 = 8^3 = 512$$

Ejercicio 2

¿Cuántos posibles números de 5 cifras se pueden extraer de un bombo con los 10 dígitos sin reemplazamiento? ¿Y con reemplazamiento?

Ejercicio 2

¿Cuántos posibles números de 5 cifras se pueden extraer de un bombo con los 10 dígitos sin reemplazamiento? ¿Y con reemplazamiento?

Solución.-

Sin reemplazamiento hablamos de obtener números de 5 cifras formados por los 10 dígitos, es decir, los valores del 0 al 9. Son por tanto, variaciones de 10 elementos tomados de 5 en 5 y hay un total de:

$$V_{10}^{5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{10!}{5!} = 30.240$$

Ejercicio 2

¿Cuántos posibles números de 5 cifras se pueden extraer de un bombo con los 10 dígitos sin reemplazamiento? ¿Y con reemplazamiento?

Solución.-

Sin reemplazamiento hablamos de obtener números de 5 cifras formados por los 10 dígitos, es decir, los valores del 0 al 9. Son por tanto, variaciones de 10 elementos tomados de 5 en 5 y hay un total de:

$$V_{10}^{5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{10!}{5!} = 30.240$$

Si se extraen con reemplazamiento sería el caso de la lotería nacional, variaciones con repetición de 10 elementos tomados de 5 en 5:

$$VR_{10}^{5} = 10^5 = 100.000$$

Outline

Definición.- Se denominan combinaciones sin repetición a cada uno de los posibles conjuntos de x elementos tomados de un grupo de n.

El número total de combinaciones sin repetición que se puede realizar con los n elementos tomando x es:

$$\boxed{C_n^x = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}}$$

Ejemplo 5.- ¿De cuantas formas puedo extraer 3 bolas simultáneamente de una urna que contiene 10 bolas de colores diferentes?

$$C_{10}^3 = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{3! \cancel{7!}} = 120$$

Combinaciones con repetición

Definición.- Se denominan combinaciones con repetición a cada uno de los posibles conjuntos de x elementos tomados de un grupo de n con reemplazamiento.

El número total de combinaciones con repetición que se puede realizar con los n elementos tomando x es:

$$\boxed{\mathrm{CR}_n^x = \binom{n+x-1}{x} = \frac{(n+x-1)!}{x!(n-1)!}}$$

Ejemplo 6.- ¿De cuantas formas puedo extraer 3 bolas simultáneamente de una urna que contiene bolas de 10 colores diferentes, si el número de bolas de cada color es superior a 3?

$$CR_{10}^3 = \binom{10+3-1}{3} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = 220$$

Ejercicio 3

Si tenemos 10 libros, ¿de cuántas formas se pueden elegir 4? ¿Y si hubiera 4 ejemplares de cada libro?

Ejercicio 3

Si tenemos 10 libros, ¿de cuántas formas se pueden elegir 4? ¿Y si hubiera 4 ejemplares de cada libro?

Solución.-

En el primer caso, como los libros son distintos tenemos que:

- No se utilizan todos los elementos.
- No importa el orden.
- No se repiten los elementos.

Se trata, por tanto de combinaciones sin repetición:

$$C_{10}^{4} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$$

Ejercicio 3

Si tenemos 10 libros, ¿de cuántas formas se pueden elegir 4? ¿Y si hubiera 4 ejemplares de cada libro?

Solución.-

En el primer caso, como los libros son distintos tenemos que:

- No se utilizan todos los elementos.
- No importa el orden.
- No se repiten los elementos.

Se trata, por tanto de combinaciones sin repetición:

$$C_{10}^{4} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$$

Si tuviésemos 4 ejemplares de cada libro sí se podrían repetir los elementos, por lo que se trataría de combinaciones con repetición.

$$CR_{10}^{4} = \binom{10+4-1}{4} = \frac{13!}{4! \cdot 9!} = 715$$

Tabla resumen

		Sin repetición	Con repetición
Importa el orden	Se toman todos los elementos	Permutaciones sin repetición (**P**) $\boxed{P_n = n!}$	Permutaciones con repetición (**PR**) $\boxed{PR_n^{a,b,c\ldots} = \frac{n!}{a!b!c!}}$
	No se toman todos los elementos	Variaciones sin repetición (**V**) $\boxed{V_n^r = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}$	Variaciones con repetición (**VR**) $\boxed{VR_n^r = n^r}$
No importa el orden		Combinaciones sin repetición (**C**) $\boxed{C_n^x = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}}$	Combinaciones con repetición (**CR**) $\boxed{CR_n^x = \binom{n+x-1}{x} = \frac{(n+x-1)!}{x!(n-1)!}}$