Hoja 8 de ejercicios: contrastes de hipótesis

Ejercicio 1.

Una firma farmaceútica factura un medicamento que debe contener al menos 400 unidades de cierto producto, y toma muestras para rechazar lotes que no mantengan el nivel mínimo. De cada uno de los 3 lotes A, B, C se toma una muestra de 10 ampollas obteniéndose:

Lote	$\bar{X}$	S
A	400,7	3,4
B	400,1	1,8
C	398,7	3,2

Si el número de unidades por ampolla sigue una distribución normal, ¿Cuáles de los lotes deben aceptarse y cuáles rechazarse según un control de calidad de tamaño $0,05$.

Solución.-

Se pretende contrastar:

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 400 \\ H_1 : \mu < 400 \end{cases}$$

Como σ^2 es desconocida, la región crítica para este contraste será:

$$C = \left\{ (X_1, \dots X_n) \,|\bar{X} < \mu_0 + \frac{S'}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha} \right\}$$

donde $\mu_0 = 400$, $n = 10$, S' son las cuasivarianzas y nos las dan y $\alpha = 0,05$.

Lote	$\bar{X}$	$\mu_0 + \frac{S'}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha}$	Decisión
A	400,7	$> 400 + \frac{3,4}{\sqrt{10}}(-1,833) = 398,02$	Se acepta
B	400,1	$> 400 + \frac{1,8}{\sqrt{10}}(-1,833) = 398,95$	Se acepta
C	398,7	$> 400 + \frac{3,2}{\sqrt{10}}(-1,833) = 398,14$	Se acepta

No hay evidencias suficientes para rechazar ninguno de los lotes. No obstante, para mantener el nivel de significación se podría utilizar la ponderación de Bonferroni.

Ejercicio 2.

Los paquetes de una cierta marca de cigarrillos indican que el contenido medio de nicotina es menor que 0,6 mg. por cigarrillo. Se analizan 100 cigarrillos con $\bar{X} = 0,63$mg. y $S = 0,11$mg. Construir un test para determinar si existe evidencia de que el contenido medio de nicotina es mayor que el especificado para el tamaño $0,05$. Calcular el p-valor crítico del contraste.

Solución.-

Se pretende contrastar:

$$\begin{cases} H_0 : \mu < 0,6 \\ H_1 : \mu \geq 0,6 \end{cases}$$

Bajo H_0:

$$X \sim N(0,6;\sigma) \rightarrow T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S'/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

Por lo que la región crítica de nuestro contraste será:

$$C = \left\{ (X_1, \ldots X_n) \,|T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S'/\sqrt{n}} > t_{n-1,\alpha} \right\}$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S'/\sqrt{n}} = \frac{063 - 0,6}{0,11/\sqrt{100}} = 2,72$$

$$t_{n-1,\alpha} = t_{99;0,05} = 1,66$$

Como $\begin{cases} T > t_{n-1,\alpha} \\ 2,72 > 1,66 \end{cases}$ $\rightarrow$ Tenemos evidencias suficientes para rechazar H_0 $\rightarrow$ Rechazamos

El p-valor es la probabilidad de que el valor observado esté en la regisón crítica cuando la hipótesis nula es verdadera. En este caso, si la hipótesis nula es verdadera, el estadístico de contraste sigue una $t(99)$ por lo que:

$$P(t(99) > 2,72) = 0,0038$$

Como el p-valor está por debajo del nivel de significación $0,05$, rechazamos.

Ejercicio 3.

Una empresa fabrica plástico con una determinada máquina. La empresa piensa que si la desviación típica del grosor del plástico excede 1,5 mm., hay razones para sospechar de su calidad. Se mide la anchura en mm. de 10 planchas de plástico con resultado: 226, 228, 226, 225, 232, 228, 227, 229, 225 y 230. Asumiendo que el grosor del plástico se comporta como una distribución normal, ¿Podemos afirmar que hay razones para sospechar de la calidad del producto?

Solución.-

Si asumimos normalidad en los datos podemos plantear el contraste:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma \leq 1,5 \\ H_1 : \sigma > 1,15 \end{cases} \equiv \begin{cases} H_0 : \sigma^2 \leq 2,25 \\ H_1 : \sigma^2 > 2,25 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que el estadístico:

$$T = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma_0^2} \overset{H_0}{\sim} \chi^2_{n-1}$$

Luego la región crítica del contraste será:

$$C = \left\{ (X_1, \ldots X_n) \,|T = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1,\alpha} \right\}$$

$$\bar{X} = 227,6$$
$$S'^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1} = \frac{46,4}{9} = 5,15$$
$$T = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma_0^2} = \frac{(10-1)5,15}{2,25} = 20,62$$
$$\chi^2_{9;0,05} = 16,92$$

Como $\begin{cases} T > \chi^2_{9;0,05} \\ 20,62 > 16,92 \end{cases}$ $\rightarrow$ Tenemos evidencias suficientes para rechazar H_0 $\rightarrow$ Rechazamos

Tenemos evidencias suficientes para afirmar que la varianza excede 2,25 y por tanto la desviación típica de 1,5 por lo que hay razones para sospechar de la calidad del producto.

Ejercicio 4.

Se realiza un experimento para comparar la eficiencia de dos métodos de ejercicio (A y B) en la reducción de peso. Veinte personas se dividen al azar en dos grupos de tamaño 10. Cada grupo realiza un tipo de ejercicio durante 5 semanas. Los datos de reducción son:

Método A	2,1	2,9	2,7	2,2	2,5	2,3	2,8	2,5	2,4	2,1
Método B	3,0	3,2	3,3	3,5	3,6	3,1	2,9	2,8	3,0	2,7

Según estos datos y asumiendo normalidad en las muestras, ¿Hay evidencias de que el método B es mejor que el método A?

Solución.-

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A \geq \mu_B \\ H_1 : \mu_A < \mu_B \end{cases}$$

Asumiendo que:

$$\begin{cases} X_A = \text{Reducción de peso A} \sim N(\mu_A, \sigma_A^2) \\ X_B = \text{Reducción de peso B} \sim N(\mu_B, \sigma_B^2) \end{cases}$$

Las varianzas son deconocidas, pero no sabemos si podemos asumir que son iguales o no. Comenzaremos entonces contrastando:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \\ H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2 \end{cases}$$

Para contrastar la igualdad de varianzas podemos usar el estadístico $T = \frac{S_A^{'2}}{S_B^{'2}}$ que si las varianzas son iguales se comporta como una $F(m-1, n-1)$. Entonces la región crítica será:

$$C = \left\{ (X_1, \dots X_n) \,| T < F_{m-1,n-1,1-\alpha/2} \text{ ó } T > F_{m-1,n-1,\alpha/2} \right\}$$

En este caso:

$$\bar{X}_A = 2,45 \qquad S_A^{'2} = 0,08$$
$$\bar{X}_B = 3,11 \qquad S_B^{'2} = 0,085$$
$$T = \frac{S_A^{'2}}{S_B^{'2}} = 0,9411$$

$$C = \{ (X_1, \dots X_n) \,| T < F_{9;9;1-0,025} \text{ ó } T > F_{9;9;0,025} \} \equiv$$
$$\{ (X_1, \dots X_n) \,| T < 0,2483 \text{ ó } T > 4,025 \}$$

Como el estadístico de contraste $T = 0,9411$ no se encuentra en la región crítica, podemos asumir que las varianzas son iguales y aplicar el contraste para la diferencia de medias con varianzas desconocidas e iguales.

$$T = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{S_c \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \overset{H_0}{\sim} t_{n+m-2}$$

Siendo $S_c^2 = \frac{(n-1)S_A'^2+(m-1)S_B'^2}{n+m-2}$

Y la región crítica será:

$$C = \{(X_1, \dots X_n) \,|T < t(n+m-2)\}$$

$$S_c^2 = \frac{(n-1)S_A'^2+(m-1)S_B'^2}{n+m-2} = \frac{9 \cdot 0,08 + 9 \cdot 0,085}{10+10-2} = 0,083$$

$$T = \frac{\bar{X_A} - \bar{X_B}}{S_c\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} = \frac{2,45-3,11}{\sqrt{0,083}\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}} = -5,1226$$

$$-t_{18;0,05} = -1,734$$

Como $-5,1226 < -1,734$ el estadístico de contraste se encuentra en la región crítica, por lo que se rechaza H_0, es decir, μ_A no es mayor o igual que μ_B, o en otras palabras, la perdida de peso es mayor con el método B.

Ejercicio 5.

Se realizan predicciones de la fuerza de agarre con las manos de 10 zurdos, obteniéndose:

Mano Izquierda	140	90	125	130	95	121	85	97	131	110
Mano Derecha B	138	87	110	132	96	120	86	90	129	100

Asumiendo normalidad en las muestras, ¿Podemos decir que estos datos proporcionan evidencia suficiente para afirmar que la gente que escribe con la mano izquierda tiene mayor fuerza de agarre con la mano izquierda que con la derecha?

Solución.-

$$\begin{cases} H_0 : \mu_I \geq \mu_D \\ H_1 : \mu_I < \mu_D \end{cases}$$

Asumiendo que:

$$\begin{cases} X_I = \text{Fuerza de agarre con la mano izquierda} \sim N(\mu_I, \sigma_I^2) \\ X_D = \text{Fuerza de agarre con la mano derecha} \sim N(\mu_D, \sigma_D^2) \end{cases}$$

Las varianzas son deconocidas, pero no sabemos si podemos asumir que son iguales o no. Comenzaremos entonces contrastando:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_I^2 = \sigma_D^2 \\ H_1 : \sigma_I^2 \neq \sigma_D^2 \end{cases}$$

Usaremos el estadístico $T = \frac{S_I'^2}{S_D'^2}$ que si las varianzas son iguales se comporta como una $F(m-1, n-1)$. Entonces la región crítica será:

$$C = \left\{ (X_1, \dots X_n) \,|T < F_{m-1,n-1,1-\alpha/2} \text{ ó } T > F_{m-1,n-1,\alpha/2} \right\}$$

En este caso:

$$\begin{aligned} \bar{X}_I = 112,4 \qquad S_I'^2 &= 383,15 \\ \bar{X}_D = 108,8 \qquad S_D'^2 &= 390,62 \\ T = \frac{S_I'^2}{S_D'^2} &= 0,98 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C = \{ (X_1, \dots X_n) \,|T < F_{9;9;1-0,025} \text{ ó } T > F_{9;9;0,025} \} \equiv \\ \{ (X_1, \dots X_n) \,|T < 0,2483 \text{ ó } T > 4,025 \} \end{aligned}$$

Como el estadístico de contraste $T = 0,98$ no se encuentra en la región crítica, podemos asumir que las varianzas son iguales y aplicar el contraste para la diferencia de medias con varianzas desconocidas e iguales.

$$T = \frac{\bar{X}_I - \bar{X}_D}{S_c \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \overset{H_0}{\sim} t_{n+m-2}$$

Siendo $S_c^2 = \frac{(n-1)S_I'^2 + (m-1)S_D'^2}{n+m-2}$

Y la región crítica será:

$$C = \{ (X_1, \dots X_n) \,|T < t(n+m-2) \}$$

$$\begin{aligned} S_c^2 &= 386,88 \\ T &= 0,4092 \\ -t_{18;0,05} &= -1,734 \end{aligned}$$

Como $0,4082 > -1,734$ el estadístico de contraste **no se encuentra en la región crítica**, por lo que no tenemos evidencias suficientes para rechazar H_0. No podemos afirmar entonces que las personas que escriben con la mano izquierda tienen más fuerza de agarre en esta mano.