Tema 4. Probabilidad

Eva Romero Ramos
evarom03@ucm.es

Universidad Complutense Madrid

Outline

Motivación

Problema: Repartir las entradas aleatoriamente entre los socios

- ✓ Se recibieron más de 12.000 solicitudes y cada podía pedir una o varias entradas.
- ✓ El equipo disponía únicamente de 5.000 para repartir entre sus socios.

Que hicieron: **Un sorteo**

0 - 1	0-1-2-3 - 4-5–6-7- 8-9 ó 0-1-2	0-1-2-3 -4-5–6- 7-8-9	0-1-2-3 -4-5–6- 7-8-9	0-1-2-3 -4-5–6- 7-8-9

- ❖ ¿Se trata de un reparto aleatorio?
- ❖ ¿Tienen todos las mismas posibilidades de obtener entradas?
- ❖ ¿Es un sorteo justo?
- ❖ ¿Cómo lo harías tu?

Outline

Conceptos básicos

Definición (Experimento aleatorio)

*Un **experimento aleatorio** es cualquier acción que puede dar lugar a diferentes posibles resultados, conocidos a priori, pero para los que no existe certeza de cual sucederá.*

Ejemplos: lanzar una moneda, lanzar un dado, el número de clientes que comprarán un producto, el número visitas de una web, la cotización diaria de una acción ...

Conceptos básicos

Definición (Espacio muestral Ω)

El Espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados a los que puede dar lugar un experimento aleatorio.

Definición (Suceso elemental)

Un suceso elemental es cada uno de los posibles resultados a los que puede dar lugar un experimento aleatorio.
El conjunto de todos los sucesos elementales es por tanto el Espacio muestral ω.

- Ejemplos:
  - Lanzar una moneda: $\Omega = \{\text{cara}, \text{cruz}\}$
  - Lanzar un dado: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - Cambio diario en el precio de una acción:
    $\Omega = \{\text{más alto que ayer}, \text{más bajo que ayer}\}$
  - Número de visitas de una web: $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Conceptos básicos

A veces no nos interesan los sucesos elementales, sino algún subconjunto de ellos.

Definición (Evento o suceso)

Un suceso es un conjunto de sucesos elementales del espacio muestral. Decimos que un suceso ocurre si el experimento aleatorio da como resultado alguno de de los sucesos elementales que contiene.

Definición (Suceso seguro)

Es el suceso que incluye todos los elementos del espacio muestral.

Definición (Suceso vacío)

Es el suceso que no incluye ninguno de los elementos incluidos en el espacio muestral.

Conceptos básicos

Ejemplo

Si consideramos el experimento aleatorio lanzar un dado y observar el resultado de la cara superior tendremos:

Espacio muestral	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Suceso elemental	$S_1 = \{3\}$; $S_2 = \{5\}$
Suceso compuesto	$S_3 = \{1, 2, 3\}$; $S_4 = \{2, 5\}$
Suceso seguro	$S_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Suceso vacío	$\emptyset = \{7\}$

Relaciones entre eventos

- **Unión** de sucesos:

$$\boxed{A \cup B \iff \text{elementos de } A, \text{ de } B \text{ o de ambos}}$$

- **Intersección** de sucesos:

$$\boxed{A \cap B \iff \text{elementos de } A \text{ y de } B}$$

Si dos sucesos no tienen intersección, decimos que son **mutuamente excluyentes** o **disjuntos** : $\boxed{A \cap B = \varnothing}$

Relaciones entre eventos

Definición (Partición del espacio muestral)

Una partición del espacio muestral es un conjunto de sucesos disjuntos dos a dos cuya unión es igual al espacio muestral.

Definición (Suceso complementario)

*Sea A un suceso del espacio muestral Ω. El conjunto de los sucesos elementales que pertenecen a Ω pero no a A se denomina **complementario** de A y se denota A^c.*

- $A \cup A^c = \Omega$
- $A \cap A^c = \emptyset$
- Los eventos A y A^c son partición del espacio muestral.

Outline

¿Qué es la probabilidad?

Definición (Probabilidad)

La probabilidad es una medida del grado de incertidumbre de los sucesos de un experimento aleatorio.

Se trata por tanto, de la forma de cuantificar las posibilidades que tiene de presentarse cada suceso del experimento.

Para abordar esta tarea de cuantificar la incertidumbre existen dos enfoques diferenciados:

- El enfoque frecuentista
- El enfoque bayesiano

Enfoque Frecuentista

- Introduciremos este enfoque con un ejemplo clásico: **Lanzar una moneda**.
- Asumimos que la probabilidad de obtener cara es 1/2, pero, **¿Qué significa?**
- Para observar si se verifica esta probabilidad, Karl Pearson (1857 – 1936) lanzó una moneda 24000 veces y obtuvo 12012 caras $\Longrightarrow \frac{12012}{24000} = 0.5005$.
- Más formalmente, podemos decir que el punto de vista frecuentista entiende la probabilidad como el límite de la frecuencia relativa de casos favorables que se obtienen al repetir un experimento aleatorio infinitas veces, es decir,

$$\boxed{P(S) = \lim_{n \to \infty} \frac{\mathcal{N}(S)}{n}}$$

- Problema: ¿Qué ocurre si no podemos repetir el experimento muchas veces?

Enfoque bayesiano

- La La estadística bayesiana está basada en el Teorema de Bayes, que estudiaremos a continuación.
- La idea intuitiva es que obtendremos la probabilidad de un suceso, basándonos en nuestro conocimiento sobre el mismo y, si es posible, en la repetición del experimento o en su caso la observación de la muestra.
- Tendremos como punto de partida la probabilidad **a priori**, basada en nuestro conocimiento sobre el suceso, y a partir de ella obtendremos la probabilidad **a posteriori**, teniendo en cuenta la observación del experimento.
- La estadística bayesiana comenzó a desarrollarse con más fuerza a partir de los años 90, gracias a la capacidad de computación que trajeron los ordenadores.
- En la actualidad está en auge y se utiliza en numerosas áreas de la ciencia y en el mundo empresarial, por su aplicabilidad.
- Son ejemplos de ello las ayudas de numerosos programas como el paquete office.

Propiedades del cálculo de probabilidades

- La probabilidad de un suceso S se denota $P(S)$.
- Axiomas de probabilidad según Kolgomorov:
  1. $0 \leq P(S) \leq 1$
  2. $P(\Omega) = 1$
  3. Para cualquier conjunto de sucesos disjuntos dos a dos se cummple que la probabilidad de su unión es la suma de sus probabilidades, es decir,

$$P(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k) = \sum_i^k P(S_i)$$

- Propriedades adicionales:
  - Si $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_K = \Omega$, entonces:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_K) = 1$$

  - $P(A^c) = 1 - P(A)$.
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Ejemplo

Ejemplo

Considérese un dado de 6 caras no equilibrado, para el que las probabilidades de obtener cada una de sus caras son las siguientes: $P(1) = 0,2$; $P(2) = 0,05$; $P(3) = 0,2$; $P(4) = 0,1$; $P(5) = 0,25$ *y* $P(6) = 0.2$.

Calcule las siguientes probabilidades:

a) Probabilidad de lanzar el dado y obtener un número par.

b) Probabilidad de lanzar el dado y obtener un número impar.

c) Obtenga una partición el espacio muestral, calcule las probabilidades de los sucesos que la componen y compruebe se suman 1.

Ejemplo

a) Probabilidad de lanzar el dado y obtener un número par.

$$P(par) = P(\{2\},\{4\},\{6\}) = 0,05 + 0,1 + 0,2 = 0,35$$

b) Probabilidad de lanzar el dado y obtener un número impar.

$$P(impar) = P(\{1\},\{3\},\{5\}) = 0,2 + 0,2 + 0,25 = 0,65$$

c) Obtenga una partición el espacio muestral, calcule las probabilidades de los sucesos que la componen y compruebe se suman 1. $S_1 = P(\{1\},\{3\})$,

$S_2 = P(\{6\})$ *y* $S_3 = P(\{2\},\{4\},\{5\})$
$P(S_1) = P(\{1\},\{3\}) = 0,2 + 0,2 = 0,4$ $P(S_2) = P(\{6\}) = 0,2$
$P(S_3) = P(\{2\},\{4\},\{5\}) = 0,05 + 0,1 + 0,25 = 0,4$
$P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) = 0,4 + 0,2 + 0,4 = 1$

Ejemplo

Ejemplo

Considere el experimento aleatorio "lanzar dos dado equilibrados" y considere los siguientes sucesos:

S_1 = *La suma de los dos números que salen es par.*

S_2 = *Sale al menos un uno.*

Calcule las probabilidades de los sucesos: $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$, $\bar{S}_1 \cap S_2$ *y* $(S_1 \cup S_2)^c$.

Ejemplo

Espacio muestral y sus probabilidades:

{1,1}	1/36
{1,2}	2/36
{1,3}	2/36
{1,4}	2/36
{1,5}	2/36
{1,6}	2/36
{2,2}	1/36
{2,3}	2/36
{2,4}	2/36
{2,5}	2/36
{2,6}	2/36

{3,3}	1/36
{3,4}	2/36
{3,5}	2/36
{3,6}	2/36
{4,4}	1/36
{4,5}	2/36
{4,6}	2/36
{5,5}	1/36
{5,6}	2/36
{6,6}	1/36

✓ $P(S_1) = 18/36 = 1/2$

✓ $P(S_2) = 11/36$

✓ $P(S_1 \cap S_2) = 5/36$

✓ $P(S_1 \cup S_2) = \frac{1}{2} + \frac{11}{36} - \frac{5}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

✓ $P(\bar{S_1} \cap S_2) = \frac{6}{36} = 1/6$

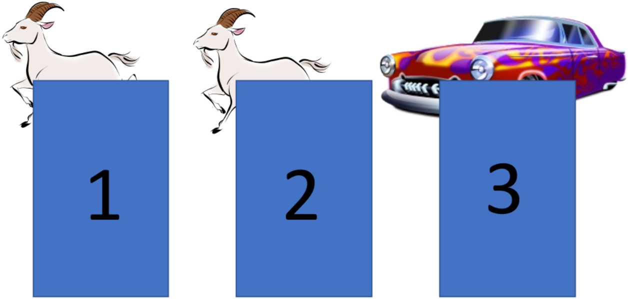
✓ $P(\overline{S_1 \cap S_2}) = 1 - P(S_1 \cap S_2) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}$

Outline

La probabilidad condicionada

- Disponer de información sobre un suceso puede modificar su espacio muestral y por tanto sus probabilidades.
- Podemos decir que cuanta mas información tengamos más reducido quedará el espacio muestral.
- Ejemplo.- Si se ha lanzado un dado y pretendemos adivinar el resultado nuestra probabilidad de acierto será de 1/6. Sin embargo, si sabemos que el valor obtenido ha sido un número par, el espacio muestral quedará reducido a solo 3 posibles valores, por lo que nuestra probabilidad de acierto será mayor (1/3).

Dilema de las puertas



¿Vale la pena cambiar nuestra elección si nos dan la oportunidad tras abrir una puerta?

La probabilidad condicionada

- Nuestras probabilidades de ganar a priori, independientemente de la puerta elegida son de 1/3.
- Sin embargo, las probabilidades a posteriori son diferentes, de modo que la probabilidad de ganar el coche si cambio, será de 2/3 mientras que si mantengo mi elección es de 1/3.
- Para entenderlo bien, podemos analizar la posibles situaciones:
  - Si he elegido la puerta número 1, el presentador abrirá la número 2 y al cambiar de puerta ganaré el coche.
  - Si he elegido la puerta número 2, el presentador abrirá la número 1 y al cambiar de puerta ganaré el coche.
  - Si he elegido la puerta número 3, el presentador abrirá cualquiera de la otras dos y al cambiar de puerta ganaré una cabra.

El presentado nunca abrirá la puerta con la cabra porque se acabaría el juego.

La probabilidad condicionada

Definición (Probabilidad condicionada)

Consideremos dos sucesos S_1 y S_2, para los que sabemos que existe cierto grado de relación, de forma que lo que suceda con S_1 afectará a S_2. En esta situación definiremos la probabilidad de S_1 condicionado a S_2 como:

$$\boxed{P\left(S_1 \mid S_2\right) = \frac{P\left(S_1 \cap S_2\right)}{P\left(S_2\right)}}$$

donde $P\left(B\right) \neq 0$

$P(S_1 / S_2)$ es una probabilidad y debe cumplir los tres axiomas de Kolmogorov.

Outline

Teorema de Bayes

El teorema de Bayes define la probabilidad del suceso S_2 condicionado a S_1 $(P(S_2/S_1))$ del siguiente modo:

$$\boxed{P\left(S_2 \mid S_1\right) = \frac{P\left(S_1 \mid S_2\right) P\left(S_2\right)}{P\left(S_1\right)}}$$

Este teorema es la base de la estadística Bayesiana, ya que permite pasar de la probabilidad a priori de S_1, basada en nuestro conocimiento del suceso, a su probabilidad a posteriori cuando incorporamos la información conocida (la que proporciona el suceso S_2).

Teorema de la probabilidad total

- Sean S_1 y S_2 dos sucesos. Entonces S_1 se puede expresar como:

$$S_1 = (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap S_2^c)$$

- Como $S_1 \cap S_2$ y $S_1 \cap S_2^c$ son disjuntos, tenemos:

$$\begin{aligned}
\boxed{P(S_1)} &= P(S_1 \cap S_2) + P(S_1 \cap S_2^c) = \\
&= P(S_1 \mid S_2)\, P(S_2) + P(S_1 \mid S_2^c)\, P(S_2^c) = \\
&= \boxed{P(S_1 \mid S_2)\, P(S_2) + P(S_1 \mid S_2^c)\, [1 - P(S_2)]}
\end{aligned}$$

- En muchas ocasiones es difícil calcular la probabilidad de un suceso directamente, pero es fácil calcularla si sabemos si ha ocurrido algún suceso relacionado.

Ejemplo

Una compañía de seguros divide a los individuos en dos grupos: uno con probabilidade alta (AP) de accidente y otro con probabilidad baja (BP). Sus estadísticos muestran que una persona del grupo AP va a sufrir un accidente dentro de un período fijo de un año con probabilidad 0.4*, mientras esta probabilidad es* 0.2 *para una persona del grupo BP. Asumiendo que el* 30% *de la población pertenece al grupo AP,*
(a) ¿cuál es la probabilidad que un nuevo cliente sufra un accidente el año siguiente a la compra del seguro?

Ejemplo

Una compañía de seguros divide a los individuos en dos grupos: uno con probabilidade alta (AP) de accidente y otro con probabilidad baja (BP). Sus estadísticos muestran que una persona del grupo AP va a sufrir un accidente dentro de un período fijo de un año con probabilidad 0.4, mientras esta probabilidad es 0.2 para una persona del grupo BP. Asumiendo que el 30% de la población pertenece al grupo AP,
(a) ¿cuál es la probabilidad que un nuevo cliente sufra un accidente el año siguiente a la compra del seguro?

Solución

$A =$ *el cliente pertenece al grupo AP*
$B =$ *el cliente va a sufrir un accidente dentro de un año*

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \mid A)\, P(A) + P(B \mid A^c)\, P(A^c) = \\ &= 0.4 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.26 \end{aligned}$$

Ejemplo

(b) Supongamos que un nuevo cliente sufre un accidente dentro del año siguiente a la compra del seguro. ¿Cuál es la probabilidad que él/ella pertenezca al grupo AP?

Ejemplo

(b) Supongamos que un nuevo cliente sufre un accidente dentro del año siguiente a la compra del seguro. ¿Cuál es la probabilidad que él/ella pertenezca al grupo AP?

Solución

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\,P(B \mid A)}{P(B)} = $$
$$= \frac{0.3 \cdot 0.4}{0.26} = 0.46$$

Ejemplo

Un análisis de sangre detecta una cierta enfermedad cuando está presente con una eficacia de 95%. El análisis también produce un "falso positivo" para el 1% de las personas saludables analizadas. Si el 0.5% de la población tiene la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que una persona tenga la enfermedad sabiendo que el resultado del análisis ha sido positivo?

Ejemplo

Un análisis de sangre detecta una cierta enfermedad cuando está presente con una eficacia de 95%. El análisis también produce un "falso positivo" para el 1% de las personas saludables analizadas. Si el 0.5% de la población tiene la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que una persona tenga la enfermedad sabiendo que el resultado del análisis ha sido positivo?

Solución

$A =$ *la persona analizada tiene la enfermedad*
$B =$ *el resultado del análisis es positivo*

$$\begin{aligned} P(A \mid B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B \mid A)\, P(A) + P(B \mid A^c)\, P(A^c)} = \\ &= \frac{0.95 \cdot 0.005}{0.95 \cdot 0.005 + 0.01 \cdot 0.995} = 0.323 \end{aligned}$$

Outline

Independencia

Definición (Independencia)

Sean S_1 y S_2 dos sucesos, se dice que son ***estadísticamente independientes*** *si y solo si:*

$$\boxed{P(S_1 \cap S_2) = P(S_1)\, P(S_2)}$$

Eso implica que:

$$\begin{aligned} P(S_1 \mid S_2) &= P(S_1) \qquad (\text{if } P(S_2) > 0) \\ P(S_2 \mid S_1) &= P(S_2) \qquad (\text{if } P(S_1) > 0) \end{aligned}$$

En general, los sucesos $E_1, E_2, \ldots, E_K$ son estadísticamente independientes si y solo si:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_K) = P(E_1)\, P(E_2)\, (E_K)$$