Hoja 5. Ejercicios de variable aleatoria discreta

1. Sea X una variable aleatoria discreta con la siguiente función de cuantía

x	**$P_x(x)$**
3	0.2
5	0.3
8	0.4
10	K

a) Obtén el valor de k.

K= 1- 0,2-0,3-0,4 =0,1

b) Obtén la función de distribución.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si & X < 3 \\ 0{,}2 & si & 3 \leq X < 5 \\ 0{,}5 & si & 5 \leq X < 8 \\ 0{,}9 & si & 8 \leq X < 10 \\ 1 & si & X \geq 10 \end{cases}$$

c) Calcula:

a. *$P(2<X\leq 5)=P(X=3)+P(X=5)=0{,}2+0{,}3=0{,}5$*

b. *$P(4\leq X<8) =P(X=5)=0{,}3=0{,}3$*

c. *$P(3\leq X\leq 8) =P(X=3)+P(X=5) +P(X=8)=0{,}2+0{,}3+0.4=0{,}9$*

d. *$P(3\leq X<8) =P(X=3)+P(X=5)=0{,}2+0{,}3=0{,}5$*

e. *$P(3<X\leq 8)= P(X=5) +P(X=8)=0{,}3+0.4=0{,}7$*

f. *$P(3<X<8) =P(X=5)=0{,}3$*

d) Obtén:

a. *$P(X\leq 5)= P(X=3)+P(X=5)=0{,}2+0{,}3=0{,}5$*

b. *$P(X>8)=P(X=10)=0{,}1$*

c. *$P(X=4)=0$*

d. *$P(X=5)=0.3$*

2. Una variable aleatoria puede tomar los valores 3,5 y 7 con probabilidades 0'25; 0'55 y 0'20 respectivamente. Calcule:

   a. Su esperanza matemática.

$$E(X)=\sum_i x_i p_i = 3\cdot 0,25+5\cdot 0,55+7\cdot 0,2=4,9$$

   b. Su varianza.

$$V(X)=E[X^2]-\left(E\left[X\right]\right)^2$$

$$E(X^2)=\sum_i x_i^2 p_i = 3^2\cdot 0,25+5^2\cdot 0,55+7^2\cdot 0,2=25,8$$

$$V(X)=E[X^2]-\left(E\left[X\right]\right)^2=25,8-4,9^2=1,79$$

   c. Su desviación típica.

$$\sigma=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1,79}=1,34$$

3. Sea X una variable aleatoria discreta con función de cuantía:

x_i	$p_i=P(X=x_i)$
2	0,1
4	0,3
6	0,4
8	0,2
	1,0

Determine para la variable aleatoria X:

a. Esperanza.

$$E(X)=\sum_i x_i p_i = 2\cdot 0,1+4\cdot 0,3+6\cdot 0,4+8\cdot 0,2=5,4$$

b. Varianza.

$$V(X)=E[X^2]-\left(E\left[X\right]\right)^2$$

$$E(X^2)=\sum_i x_i^2 p_i = 2^2 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,3 + 6^2 \cdot 0,4 + 8^2 \cdot 0,2 = 32,4$$

$$V(X)=E[X^2]-\left(E\left[X\right]\right)^2 = 32,4-5,4^2 = 3,24$$

c. Coeficiente de variación.

$$V=\frac{\sigma}{E[X]}=\frac{\sqrt{Var[X]}}{E[X]}=\frac{\sqrt{3,24}}{5,4}=0,\widehat{3}$$

4. Sea la variable aleatoria X con función de cuantía:

x_i	$p_i=P(X=x_i)$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{8}$
3	$\frac{1}{8}$
	1

Si Y=3X-2, calcúlense E(Y) y V(Y).

$$E(X)=\sum_i x_i p_i = -3\cdot\frac{1}{8}-2\cdot\frac{1}{8}+0\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=0$$

$$E(X^2)=\sum_i x_i^2 p_i = (-3)^2\cdot\frac{1}{8}(-2)^2\cdot\frac{1}{8}+0^2\cdot\frac{1}{8}+2^2\cdot\frac{1}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}=3,25$$

$$V(X)=E[X^2]-\left(E\left[X\right]\right)^2 = 3,25-0^2 = 3,25$$

$$E(Y)=E(3X-2)=3\cdot E[X]-2=3\cdot 0-2=-2$$

$$VAR(Y)=VAR(3X-2)=3^2\cdot VAR[X]=3^2\cdot 3,25=29,25$$

5. Sea la variable aleatoria X con función de distribución:

x_i	F(x)
0,2	0,2
0,5	0,4
0,7	0,6
1	1

Halla la función de cuantía y calcula:

x_i	P(X=x)
0,2	0,2
0,5	0,2
0,7	0,2
1	0,4

a) P(X≤0,6) = F(0,6) =0,4
b) P(0≤X≤2) = F(0,2) = 0,2
c) P(0,3≤X≤0,7) = F(0,7) - F(0,2) = 0,6 - 0,2=0,4
d) P(0≤X<0,7) = F(0,5) = 0,4

6. Una empresa de seguros observó que en la ciudad X, el 20 % de los hogares estaban asegurados contra un cierto tipo de incidentes. Si la empresa elige cinco hogares, al azar, y usted es el consultor, le piden:

a) El número de hogares que se espera estén asegurados.
b) Probabilidad de que dos hogares estén asegurados.
c) Probabilidad de que al menos tres hogares estén asegurados.
d) Probabilidad de que ningún hogar esté asegurado.
e) Probabilidad de que algún hogar esté asegurado.

Éxito= “Estar cubierto frente a ese tipo de incidentes.”

X= “Nº de hogares cubiertos frente a este tipo de incidentes.”

$$X \sim Binomial(5; 0{,}2)$$

a) El número de hogares que se espera estén asegurados.

E[X]=n·p=5·0,2=1

b) Probabilidad de que dos hogares estén asegurados.

$$P(X=2)=\binom{5}{2}\cdot 0,2^2\cdot 0,8^3=0,2048$$

c) Probabilidad de que al menos tres hogares estén asegurados.

$$P(X\geq 3)=1-P(X<3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$$

$$P(X=0)=\binom{5}{0}\cdot 0,2^0\cdot 0,8^5=0{,}32768$$

$$P(X=1)=\binom{5}{1}\cdot 0,2^1\cdot 0,8^4=0{,}4096$$

$$P(X=2)=\binom{5}{2}\cdot 0,2^2\cdot 0,8^3=0{,}2048$$

$$P(X\geq 3)=1-P(X<3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=$$
$$=1-0,32768-0,4096-0,2048=0,05792$$

d) Probabilidad de que ningún hogar esté asegurado.

$$P(X=0)=\binom{5}{0}\cdot 0,2^0\cdot 0,8^5=0{,}32768$$

e) Probabilidad de que algún hogar esté asegurado.

$$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-0{,}32768=0{,}67232$$

7. La evolución histórica de las cotizaciones de un determinado activo bursátil indica que la probabilidad de que su precio en los viernes sea inferior al de los lunes es del 80%. Ante esta situación, un inversor da orden de compra de dichos activos los viernes y de venta los lunes, durante cuatro semanas consecutivas. Constate que la probabilidad de obtención de rendimientos positivos en tres de las cuatro semanas coincide con la probabilidad de obtención de rendimientos positivos las cuatro semanas.

Éxito= "Obtener rendimientos positivos."

X= "Nº de semanas que se obtienen rendimientos positives."

$$X\sim Binomial(4;0{,}8)$$

$$P(X=3)=\binom{4}{3}\cdot 0,8^3\cdot 0,2^1=0{,}4096$$

$$P(X=4)=\binom{4}{0}\cdot 0,8^4\cdot 0,2^0=0{,}4096$$

8. Una multinacional tiene 1.500 clientes en su base de datos. Se sabe además que la probabilidad de que un cliente se dé de baja por no estar conforme con el servicio es 0,003. Suponiendo que el hecho de que un cliente se dé de baja es independiente de lo que hagan el resto de clientes, calcule la probabilidad de que más de dos se den de baja.

Este experimento se puede modelizar utilizando tanto la distribución Binomial como la distribución de Poisson. Esto es así, porque cuando el número de veces que se repite el experimento es muy grande y la probabilidad de éxito muy pequeña y en este tipo de situaciones la distribución Binomial se puede aproximar mediante una distribución de Poisson.

Usando la distribución Binomial:

Éxito= "Cancelar el Servicio por no estar conforme."

X= "Nº de clientes que cancelan el Servicio por no estar conformes."

$$X \sim Binomial(1500; 0{,}003)$$

$$P(X > 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) =$$
$$= 1 - 0{,}011 - 0{,}0498 - 0{,}1123 = 0{,}8268$$
$$P(X = 0) = \binom{1500}{0} \cdot 0{,}003^0 \cdot 0{,}997^{1500} = 0{,}011$$
$$P(X = 1) = \binom{1500}{1} \cdot 0{,}003^1 \cdot 0{,}997^{1499} = 0{,}0498$$
$$P(X = 2) = \binom{1500}{2} \cdot 0{,}003^2 \cdot 0{,}997^{1498} = 0{,}1123$$

Usando la distribución de Poisson:

Éxito= "Cancelar el Servicio por no estar conforme."

X= "Nº de clientes que cancelan el Servicio por no estar conformes."

Para calcular el parámetro de la distribución de Poisson, calcularemos el número esperado de clientes que cancelarán el servicio por no estar conformes: E[X]=1500·0,003=4,5.

$$X \sim Poisson(4{,}5)$$

$$P(X > 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) =$$
$$= 1 - 0{,}011 - 0{,}0499 - 0{,}1124 = 0{,}8267$$
$$P(X = 0) = \frac{e^{-4,5} \cdot 4,5^0}{0!} = 0{,}011$$
$$P(X = 1) = \frac{e^{-4,5} \cdot 4,5^1}{1!} = 0{,}0499$$
$$P(X = 2) = \frac{e^{-4,5} \cdot 4,5^2}{2!} = 0{,}1124$$

Como se puede comprobar ambos resultados son muy similares.

9. Una Comunidad Autónoma ha recibido financiación externa para la realización de 250 proyectos de inversión, de los cuales 50 han tenido repercusiones negativas sobre el medio ambiente.
Con objeto de estudiar estás consecuencias de las actuaciones llevadas a cabo, la autoridad competente selecciona 10 proyectos al azar. ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 hayan afectado negativamente al medio ambiente?

X= "Nº de proyectos seleccionados con impacto medioambiental negativo."

$$X \sim Hipergeométrica\left(250; 10; \frac{50}{250}\right)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(x < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$
$$= 1 - \frac{\binom{50}{0}\binom{200}{10-0}}{\binom{250}{10}} - \frac{\binom{50}{1}\binom{200}{10-1}}{\binom{250}{10}} = 1 - 0{,}1025 - 0.2635$$
$$= 0{,}6291$$

10. El número de accidentes que se producen en una vía de circulación de una ciudad es, en promedio, de dos a la semana. Determínese:

a) Probabilidad de que no se registre ningún accidente en una semana determinada.

Éxito="Qué tenga lugar un accidente."

X="Número de accidentes que se producen por semana."

$$X \sim Poisson(2)$$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} = 0{,}0{,}1353$$

b) Probabilidad de que en un mes haya más de 5 accidentes.

Éxito="Qué tenga lugar un accidente."

X="Número de accidentes que se producen por mes."

$$X \sim Poisson(8)$$

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$$
$$-P(X = 3) - P(X = 4) - P(X = 5) = 1 - 0{,}0027 - 0{,}0107 - 0{,}0286$$
$$-0{,}0572 - 0{,}0916 - 0{,}0003 = 1 - 0{,}1912 = 0{,}8088$$

Ya que:

$$P(X=0)=\frac{e^{-8}\cdot 8^0}{0!}=0{,}0027;\quad P(X=1)=\frac{e^{-8}\cdot 8^1}{1!}=0{,}0107$$
$$P(X=2)=\frac{e^{-8}\cdot 8^2}{2!}=0{,}0286;\quad P(X=3)=\frac{e^{-8}\cdot 8^3}{3!}=0{,}0572$$
$$P(X=4)=\frac{e^{-8}\cdot 8^4}{4!}=0{,}0916;\quad P(X=5)=\frac{e^{-8}\cdot 8^5}{5!}=0{,}0003$$

11. Sea una moneda ideal. Determínese:

a) Probabilidad de que en 10 lanzamientos se obtengan 6 caras.

X= "Nº de caras en 10 lanzamientos de una moneda".

$$X\sim Binomial(10;0.5)$$
$$P(X=6)=\binom{10}{6}\cdot 0,5^6\cdot 0,5^4=0{,}2051$$

b) Probabilidad de que salgan tres cruces antes de conseguir la primera cara.

X = Número de lanzamientos fallidos antes de obtener la primera cara

X~Geométrica (0,5)

$$P(X=3)=(0{,}5)^3\cdot 0{,}5=0{,}0625$$

c) Probabilidad de que sean necesarios 12 lanzamientos para obtener la cuarta cara.

X = Número de lanzamientos fallidos antes de obtener la cuarta cara

X~BN(4;0,5)

$$P(X=8)=\binom{8+12-1}{8}(0{,}5)^8\cdot(0{,}5)^4=0{,}0403$$

12. En una empresa de televenta un comercial (A) realiza en media 3 ventas a la semana y su compañero (B) realiza 2. Por política de empresa, mensualmente se despide a los comerciales que realicen menos de 4 ventas. Se pide:

a) Probabilidad de que en un determinado mes se despida al comercial A.

Éxito="Qué el comercial A realice una venta."

X_A="Número de ventas que realiza el comercial A en un mes."

$$X_A\sim Poisson(12)$$

$$P(X_A<4)=P(X_A=0)+P(X_A=1)+P(X_A=2)+P(X_A=3)=$$
$$=6{,}144\cdot 10^{-6}+7{,}37\cdot 10^{-5}+0{,}0004423+0{,}001769=0{,}002291$$

Ya que:

$$P(X_A=0)=\frac{e^{-12}\cdot 12^0}{0!}=6{,}144\cdot 10^{-6}$$
$$P(X_A=1)=\frac{e^{-12}\cdot 12^1}{1!}=7{,}37\cdot 10^{-5}$$
$$P(X_A=2)=\frac{e^{-12}\cdot 12^2}{2!}=0{,}0004423$$

$$P(X_A = 3) = \frac{e^{-12} \cdot 12^3}{3!} = 0{,}001769$$

b) Probabilidad de que en un determinado mes, B no sea despedido.

Éxito="Qué el comercial B realice una venta."

X_B="Número de ventas que realiza el comercial B en un mes."

$$X_B \sim Poisson(8)$$

$$P(X_B \geq 4) = 1 - P(X_B < 4) = 1 - P(X_B = 0) - P(X_B = 1) - P(X_B = 2) - P(X_B = 3) =$$
$$= 1 - 0{,}00033 - 0{,}0026 - 0{,}01 - 0{,}0286 = 0{,}9576$$

Ya que:

$$P(X_B = 0) = \frac{e^{-8} \cdot 8^0}{0!} = 0{,}00033$$
$$P(X_B = 1) = \frac{e^{-8} \cdot 8^1}{1!} = 0{,}0026$$
$$P(X_B = 2) = \frac{e^{-8} \cdot 8^2}{2!} = 0{,}01$$
$$P(X_B = 3) = \frac{e^{-8} \cdot 8^3}{3!} = 0{,}0286$$

c) Si se sabe que entre los dos han realizado 4 ventas en una semana, probabilidad de que solo una de esas ventas haya sido realizada por A.

Como sabemos que entre los dos comerciales han realizado 4 ventas, tendremos que:

Éxito="Que la venta haya sido realizada por el comercial A."

$X_A/(X_A+X_B=4)$="Número de las 4 que ha sido realizadas por el comercial A."

$$\left(\frac{X_A}{X_B + X_B}\right) \sim Binomial\left(4; \frac{3}{2+3}\right)$$

$$P\left(\frac{X_A = 1}{X_A + X_B = 4}\right) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0{,}1536$$

13. ¿Cuántas veces habrá que lanzar un dado para tener el 10% de probabilidad de sacar al fin un as?

Solución. -

X = Número de lanzamientos fallidos antes de obtener un as.

X~Geométrica (1/6)

$$P(X=K)=\left(\frac{5}{6}\right)^k\cdot\frac{1}{6}=0{,}1\rightarrow\left(\frac{5}{6}\right)^k=0{,}6\rightarrow Log\left(\frac{5}{6}\right)^k=Log(0{,}6)\rightarrow k\cdot Log\left(\frac{5}{6}\right)$$
$$=Log(0{,}6)\rightarrow k=\frac{Log(0{,}6)}{Log\left(\frac{5}{6}\right)}=2{,}8$$

14. Una correduría de seguros tiene catalogados como siniestros graves a aquellos que le suponen un coste superior a 50.000 €. Se sabe que su cartera tiene un promedio de un siniestro grave al semestre. Además, si la compañía tiene más de 4 siniestros graves al año tendría que declararse en suspensión de pagos. ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía se declare en suspensión de pagos?

Éxito=”Que ocurra un siniestro grave”.

X=”Número de siniestros graves que suceden en un año

$$X\sim Poisson(2)$$
$$P(X>4)=1-P(X\leq 4)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)-P(X=3)-P(X=4)=$$
$$=1-0{,}1353-0{,}2707-0{,}02707-0{,}1804-0{,}090=1-0{,}9473=0{,}0526$$

Ya que:

$$P(X=0)=\frac{e^{-2}\cdot 2^0}{0!}=0{,}1353$$
$$P(X=1)=\frac{e^{-2}\cdot 2^1}{1!}=0{,}2707$$
$$P(X=3)=\frac{e^{-2}\cdot 2^3}{3!}=0{,}1804$$
$$P(X=2)=\frac{e^{-2}\cdot 2^2}{2!}=0{,}2070$$
$$P(X=4)=\frac{e^{-2}\cdot 2^4}{4!}=0{,}090$$

15. Al matricularse una persona en la Facultad tiene una probabilidad igual a 0,35 de que le corresponda el horario de tarde. Si se han matriculado en un día 100 personas, calcúlese la probabilidad de que a 40 de ellas les asignen el mencionado horario. Calcule también la probabilidad de que el número de personas en horario de tarde esté comprendido entre 28 y 30, ambos inclusive.

Éxito= “Matricularse en horario de tarde.”

X= “Nº de personas matriculadas en horario de tarde.”

$$X\sim Binomial(100;0{,}35)$$
$$P(X=40)=\binom{100}{40}\cdot 0{,}35^{40}\cdot 0{,}35^{60}=0{,}0474$$
$$P(20\leq X\leq 30)=P(X=28)+P(X=29)+P(X=30)=$$

$$= \binom{100}{28} \cdot 0{,}35^{28} \cdot 0{,}65^{72} + \binom{100}{29} \cdot 0{,}35^{29} \cdot 0{,}65^{71} + \binom{100}{30} \cdot 0{,}35^{30} \cdot 0{,}65^{70}$$

$$=$$

$$= 0{,}0290 + 0{,}0388 + 0{,}0494 = 0{,}1172$$

16. La probabilidad de obtener una pieza defectuosa en un proceso de fabricación es 0,001. Si tenemos un lote de 2.000 piezas, ¿cuál será la probabilidad de obtener tres piezas defectuosas?

Este experimento se puede modelizar utilizando tanto la distribución Binomial como la distribución de Poisson. Esto es así, porque cuando el número de veces que se repite el experimento es muy grande y la probabilidad de éxito muy pequeña y en este tipo de situaciones la distribución Binomial se puede aproximar mediante una distribución de Poisson.

Usando la distribución Binomial:

Éxito= "Obtener una pieza defectuosa."

X= "Nº de piezas defectuosas."

$$X \sim Binomial(2.000; 0{,}001)$$

$$P(X = 3) = \binom{2.000}{3} \cdot 0{,}001^{3} \cdot 0{,}999^{1.997} = 0{,}1805$$

Usando la distribución de Poisson:

Éxito= "Obtener una pieza defectuosa."

X= "Nº de piezas defectuosas."

Para calcular el parámetro de la distribución de Poisson, calcularemos el número esperado de piezas defectuosas que obtendremos en las 2.000: E[X]=2.000·0,001=2.

$$X \sim Poisson(2)$$

$$P(X = 3) = \frac{e^{-2} \cdot 2^{3}}{3!} = 0{,}0{,}1804$$

Como se puede comprobar ambos resultados son muy similares.

17. Una vía de una ciudad tiene seis cruces regulados por semáforo. La probabilidad de que al pasar un vehículo un semáforo esté en verde es 0,60. ¿Cuál es la probabilidad de atravesar dicha vía en verde, encontrándose rojo solamente el último semáforo? Se supone que la regulación de los semáforos es tal que éstos son independientes entre sí.

Solución. -

Éxito="Qué un semáforo esté en rojo".
X = Número de semáforos en verde que pasamos.
X~Geométrica (0,4)

$$P(X=5)=(0{,}6)^5\cdot 0{,}4=0.0311$$

18. Un determinado día, la dirección de una empresa decide seleccionar al azar 20 de sus 100 empleados para que contesten una encuesta sobre sus condiciones laborales. Si en dicho día son 5 los empleados que se encuentran de baja, ¿cuál es la probabilidad de que se contesten 18 cuestionarios?

X= "Nº de empleados seleccionados que responden al cuestionario."

$$X \sim Hipergeométrica\left(100; 20; \frac{95}{100}\right)$$

$$N=100, n=20, N_1=95, N_2=5, P=95/100$$

$$P(X=18)=\frac{\binom{95}{18}\binom{5}{20-18}}{\binom{100}{20}}0{,}2073$$

X= "Nº de empleados seleccionados que no responden al cuestionario."

$$X \sim Hipergeométrica\left(100; 20; \frac{5}{100}\right)$$

$$N=100, n=20, N_1=5, N_2=95, P=5/100$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{5}{2}\binom{95}{20-2}}{\binom{100}{20}}0{,}2073$$