Ejercicio 1

Obtenga el valor de la probabilidad o de abscisa en las siguientes situaciones:
a) $P(1,237 \leq \chi^2(6) \leq 7,84)$
b) Si $P(3,05 \leq \chi^2(11) \leq a) = 0,49$, hállese a.
c) $SiP(a \leq \chi^2(4) \leq 7,78) = 0,8$, hállese a.
d) $P(505 \leq \chi^2(500) \leq 550)$
e) $P(300 \leq \chi^2(310) \leq 400)$

Solución.-

a)

$$P(1,237 \leq \chi^2(6) \leq 7,84) = P(\chi^2(6) \geq 1,237) - P(\chi^2(6) \geq 7,84) = 0,975 - 0,25 = 0,725$$

b)

$$\begin{aligned} Si\ P(3,05 \leq \chi^2(11) \leq a) = 0,49 \rightarrow \\ P(\chi^2(11) \geq 3,05) - P(\chi^2(11) \geq > a) = 0,49 \rightarrow \\ 0,99 - P(\chi^2(11) > a) = 0,49 \rightarrow \\ P(\chi^2(11) > a) = 0,5 \rightarrow a = 10,34 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} Si\ P(a \leq \chi^2(4) \leq 7,78) = 0,8 \rightarrow \\ P(\chi^2(4) \geq a)) - P(\chi^2(4) \geq 7,78)) = 0,8 \rightarrow \\ P(\chi^2(4) \leq a) - 0,1 = 0,8 \rightarrow \\ P(\chi^2(4) \geq a) = 0,9 \rightarrow a = 1,064 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} P(505 \leq \chi^2(500) \leq 550) = \\ P\left(\sqrt{2 \cdot 505} - \sqrt{2 \cdot 500 - 1} \leq \sqrt{2\chi^2(500)} - \sqrt{2 \cdot 500 - 1} \leq \sqrt{2 \cdot 550} - \sqrt{2 \cdot 500 - 1}\right) = \\ P\left(0,17 \leq N(0,1) \leq 1,56\right) = P\left(N(0,1) \geq 0,17\right) - P\left(N(0,1) \geq 1,56\right) = \\ 0,4325 - 0,0594 = 0,3731 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} P(300 \leq \chi^2(310) \leq 400) = \\ P\left(\sqrt{2 \cdot 300} - \sqrt{2 \cdot 310 - 1} \leq \sqrt{2\chi^2(310)} - \sqrt{2 \cdot 310 - 1} \leq \sqrt{2 \cdot 400} - \sqrt{2 \cdot 310 - 1}\right) = \\ P\left(-0,38 \leq N(0,1) \leq 3,4\right) = 1 - P\left(N(0,1) \geq 0,38\right) - P\left(N(0,1) \geq 3,4\right) = \\ 1 - 0,3520 - 0 = 0,648 \end{aligned}$$

Ejercicio 2

Obtenga el valor de la probabilidad o de abscisa en las siguientes situaciones:

a) $P(t(10) \leq -1,812)$
b) $P(0,695 < t(12) < a) = 0,2$
c) $P(t(200) > 0,7)$
d) $P(t(150) > a) = 0,25$

Solución.-

a)

$$P(t(10) \leq -1,812) = P(t(10) > 1,812) = 0,05$$

b)

$$\begin{aligned} P(0,695 < t(12) < a) = 0,2 \rightarrow P(t(12) > 0,695) - P(t(12) \geq a) \rightarrow \\ 0,25 - P(t(12) \geq a = 0,2 \rightarrow P(t(12) \geq a) = 0,25 - 0,2 \rightarrow \\ P(t(12) \geq a) = 0,05- > a = 1,782 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} P(t(200) > 0,7) = P\left(\frac{t(200) - 0}{\sqrt{\frac{200}{200-2}}} > \frac{0,7 - 0}{\sqrt{\frac{200}{200-2}}}\right) = \\ P\left(Z > 0,6964)\right) = 0,2451 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(t(150) > a) = 0,25 \rightarrow P\left(\frac{t(150) - 0}{\sqrt{\frac{150}{150-2}}} > \frac{a - 0}{\sqrt{\frac{150}{150-2}}}\right) = \\ P\left(Z > \frac{a}{1,0067}\right) = 0,25 \rightarrow \text{a es positivo} \rightarrow \\ \frac{a}{1,0067} = 0,67 \rightarrow 0,6745 \end{aligned}$$

Ejercicio 3

Obtenga el valor de la probabilidad o de abscisa en las siguientes situaciones:
a) $P(F(4,5) > 11,39)$
b) $P(F(2;3) > a) = 0,05$
c) $P(F(10;50) < a) = 0,99$
d) $P(F(4,6) \geq a) = 0,95$
e) $P(F(6,8) > a) = 0,99$

Solución.-

a)

$$P(F(4,5) > 11,39) = 0,01$$

b)

$$P(F(2;3) > a) = 0,05 \rightarrow a = 9,55$$

c)

$$P(F(10;50) < a) = 0,99 \rightarrow 1 - P(F(10;50) \geq a) = 0,99 \rightarrow$$
$$P(F(10;50) \geq a) = 0,01 \rightarrow a = 2,70$$

d)

$$P(F(4,6) \geq a) = 0,95 \rightarrow P\left(\frac{1}{F(4,6)} \leq \frac{1}{a}\right) = 0,95 \rightarrow$$
$$1 - P\left(\frac{1}{F(4,6)} \geq \frac{1}{a}\right) = 0,95 \rightarrow P\left(\frac{1}{F(4,6)} \geq \frac{1}{a}\right) = 0,05 \rightarrow$$
$$\frac{1}{a} = 6,16 \rightarrow a = \frac{1}{6,16} = 0,1623$$

d)

$$P(F(6,8) > a) = 0,99 \rightarrow P\left(\frac{1}{F(6,8)} \leq \frac{1}{a}\right) = 0,99 \rightarrow$$
$$1 - P\left(F(8,6) \geq \frac{1}{a}\right) = 0,99 \rightarrow P\left(F(6,8) \geq \frac{1}{a}\right) = 0,01 \rightarrow$$
$$\frac{1}{a} = 8,10 \rightarrow a = \frac{1}{8,10} = 0,1234$$

Ejercicio 4

Calcule la probabilidad del suceso conjunto $\{\bar{X} \geq 0,9; S^2 \geq 0,9\}$ donde $\bar{X}$ y S^2 proceden de un m.a.s. de tamaño cinco de una distribución $N(1; \sigma = 0,5)$.

Solución.-

Por el lema de Fisher, sabemos que $\bar{X}$ y S^2 son independientes, por lo que:

$$P\left(\bar{X} > 0,9; S^2 > 0,6\right) = P\left(\bar{X} > 0,9\right) \cdot P\left(S^2 > 0,6\right)$$

$$P\left(\bar{X} > 0,9\right) = P\left(\frac{\bar{X} - 1}{0,5} > \frac{0,9 - 1}{0,5}\right) = P\left(Z > -0,14\right) =$$
$$1 - P\left(Z < -0,14\right) = 1 - P\left(Z > 0,14\right) = 1 - 0,443 = 0,557$$

$$P\left(S^2 > 0,6\right) = P\left(\frac{5 \cdot S^2}{0,5^2} > \frac{5 \cdot 0,6}{0,5^2}\right) = P\left(\chi^2(4) > 12\right) = 0,01735$$

$$P\left(\bar{X} > 0,9; S^2 > 0,6\right) = P\left(\bar{X} > 0,9\right) \cdot P\left(S^2 > 0,6\right) = 0,557 \cdot 0,01735 = 0,00966$$