

PROBLEMAS DE ESTADÍSTICA

HOJA 2.- PROBABILIDAD Y DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

1. Un aparato tiene dos componentes A y B. Los fallos en el aparato vienen motivados por fallos en alguna de las componentes. Al cabo de 5 años, la componente A ha fallado en el 6% de los aparatos, y la componente B en el 8%. En el 4% de los aparatos han fallado las dos componentes.
 - a) ¿Los fallos de A y B son independientes?
 - b) Si B ha fallado, ¿Cuáles la probabilidad de que A haya fallado?
2. Un examen consta de 14 temas. Se eligen al azar dos y el alumno deberá escoger una para contestarlo. Calcular la probabilidad de que a un alumno que ha preparado 5 temas le toque al menos uno que sepa. ¿Cuál es el número mínimo de temas que debe preparar para tener una probabilidad superior a 0,5 de superar el examen?
3. Un examen consta de 5 temas numerados. Para elegir un tema al azar, se propone lanzar un dado: si sale de 1 a 5, el número del tema es el resultado del dado; si sale 6 se vuelve a tirar hasta que sale de 1 a 5. Sabemos que el dado está trucado de manera que la probabilidad de que salga el dos es $\frac{2}{7}$ y la probabilidad de cualquier otro número es $\frac{1}{7}$. Hallar la probabilidad de que salga el tema 1 (que es el único estudiado).
4. En el primer curso de la Facultad hay dos grandes grupos: uno de mañana y otro de tarde. El 60% de los alumnos asiste al grupo de mañana y los restantes al grupo de tarde. En el grupo matutino, un 30% aprueba la Estadística en junio, un 25% la aprueba en septiembre y el 45% restante no aprueba ni en junio ni en septiembre. En el grupo vespertino, un 40% consigue aprobar la Estadística en junio, mientras que un 20% lo consigue en septiembre el 40% restante no aprueba en ninguna de las dos convocatorias.
 - a) Elegimos al azar tres alumnos del grupo de tarde. ¿Cuál es la probabilidad de que uno haya aprobado la Estadística en junio, otro en septiembre y el otro no haya conseguido aprobar?
 - b) Elegimos un alumno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del grupo de tarde si aprobó la Estadística en junio?
5. Una prueba de diagnóstico para un cierto cáncer, tiene probabilidad 0.96 de dar positiva si el paciente tiene cáncer, además el 99% de los individuos sin cáncer dan prueba negativa. Se elige un individuo al azar en una población en la que el 0.1% tiene ese tipo de cáncer
 - a) ¿Cuáles la probabilidad de que el individuo de positivo y tenga cáncer?
 - b) Si sabemos que el individuo ha dado positivo ¿Cuál es la probabilidad de que tenga cáncer?
6. En una caja hay 15 mascarillas, 4 FFP3 y las otras 11 FFP2. Sacamos una mascarilla al azar y sin devolverla a la urna sacamos una segunda mascarilla también al azar.
 - a) Calcular la probabilidad de que las dos mascarillas extraídas sean del mismo tipo.

- b) Calcular la probabilidad de sacar una mascarilla FFP2 en primer lugar, si sabemos que la segunda mascarilla fue FFP2.
7. Una urna contiene 6 bolas blancas, 4 rojas y 2 azules. Si se extraen 3 bolas sucesivamente sin reemplazamiento, calcular la probabilidad de que:
- Las tres bolas sean blancas.
 - 2 sean rojas y 1 azul.
 - Ninguna sea azul.
 - Al menos una sea roja.
 - Se extraiga una bola de cada color.
 - Las bolas se extraigan en el orden: blanca, roja y azul.
8. En un concurso se tiene una urna con 30 bolas con la siguiente composición: 5 bolas azules, 4 rojas, 3 verdes y 18 blancas. Se van a extraer tres bolas de forma consecutiva y sin reemplazamiento. El concursante tiene que apostar por una de las dos siguientes opciones:
- Al menos dos de las bolas extraídas son azules.
 - Al menos una de las bolas es roja y al menos otra es verde.
- ¿Cuál de las dos opciones debe elegir el concursante para tener mayor probabilidad de ganar el premio?
9. En una población rural, el 62% tiene teléfono fijo, el 34% tiene teléfono móvil y el 28% tiene ambos tipos de teléfonos. Elegida una persona al azar, calcule:
- La probabilidad de que solo tenga teléfono móvil.
 - Si tiene teléfono móvil, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga teléfono fijo?
 - Si tiene teléfono fijo, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga teléfono móvil?
10. Supongamos que se realiza un test para determinar si un conjunto de materiales son radiactivos. Se sabe de antemano que el 20% de los materiales son radiactivos. Respecto a la efectividad del test se sabe que:
- Si el material es radiactivo, el test será positivo el 95% de las veces.
 - Si el material no es radiactivo, el test será negativo el 90% de las veces.
- ¿Cuál es la probabilidad de que un material de positivo al test?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que un material que es positivo sea realmente radiactivo?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que un material que da positivo en el test no sea realmente radiactivo?
 - Si se examina una muestra de 200 materiales, ¿cuáles serían las frecuencias esperadas en cada una de las casillas de la tabla siguiente?

	Radiactivo	No radiactivo	TOTAL
Positivo			
Negativo			
TOTAL			200

11. Sea el experimento aleatorio consistente en el lanzamiento de dos dados, donde la variable aleatoria X es la diferencia, en valor absoluto, entre las puntuaciones obtenidas en ambos dados.

- a) Obtener y representar la distribución de probabilidad.
- b) Hallar la función de distribución.
- c) Calcular la probabilidad $P(2 \leq X \leq 4)$.
- d) Calcular la esperanza y la desviación típica de X .

12. Muchos fenómenos de ciencias experimentales se expresan matemáticamente mediante una ley de probabilidad exponencial negativa:

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-kx} & 0 \leq x \\ 0 & x < 0 \end{cases}, \quad k > 0$$

- a) Determinar para que valores de k , $f(x)$ es una función de densidad.
- b) Hallar la expresión para la función de distribución.

13. Supongamos que se contesta sin pensar a un test de 10 preguntas, cada una con cinco respuestas alternativas, de las cuales solo una es correcta. Calcúlese la probabilidad de acertar al menos cinco preguntas.

14. En cierto lugar, la probabilidad de que la temperatura máxima anual supere el valor de 40°C es $P = 0,15$. Calcular la probabilidad de que en los próximos cinco años:

- a) Se supere dicho valor una vez.
- b) Se supere dicho valor al menos una vez.

15. Una variable aleatoria continua X toma valores en el intervalo $[0,3]$, siendo su función de densidad $f(x) = k(1 + 3x^2)$. Se pide:

- (a) Determinar el valor de k y hallar la función de distribución.
- (b) Obtener la esperanza, varianza y desviación típica de la variable aleatoria.

16. Se tienen 3 antivirus A, B y C, cuyos porcentajes de fallo ante un determinado virus son 3%, 5% y 4% respectivamente. Elegido uno al azar, se observa que el virus no ha desaparecido, ¿cuál es la probabilidad de que se haya usado el antivirus B?

17. En los últimos 600 años se han producido 12 grandes terremotos en España. Determínese la probabilidad de que se produzcan dos en los próximos 25 años. Ídem sabiendo que no se ha producido ninguno desde hace 100 años.

18. En una estación de montaña se han observado 20 días con altura de nieve mayor que h durante un periodo de 10 años. Suponiendo que es aplicable la distribución de Poisson, calcular la probabilidad de superar dicho valor h :

- a) Menos de cinco veces en los próximos dos años.
- b) Más de tres veces en el próximo año.
- c) Una vez en el año 2001.

19. En un examen se plantean 10 cuestiones a las que debe responderse verdadero o falso. Un alumno aprobará el examen si, al menos, 7 respuestas son acertadas.

¿Qué probabilidad de aprobar tiene un estudiante que responde todo al azar? ¿Y uno que sabe el 30% de la asignatura?

20. Se sabe que la incidencia del cáncer de mama en la población de mujeres adultas es del 0,8%. Si una mujer tiene cáncer de mama, hay un 90% de posibilidades de que al realizarle una mamografía, dicha prueba dé positivo. Si una mujer no tiene cáncer de mama, todavía existe un 7% de posibilidades de que tenga una mamografía positiva.

- ¿En qué porcentaje de la población la prueba da negativo?
- Si una mujer va al control anual y tiene su mamografía positiva, ¿cuál es la probabilidad de que tenga cáncer de mama?
- En una clínica se atienden 50 controles anuales al día, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres mamografías den positivo?

21. Sea un sistema electrónico de 10 componentes que requiere para su funcionamiento que, al menos, 6 de sus componentes funcionen correctamente. Si la probabilidad de funcionamiento de un componente es de 0,35 calcular:

- La probabilidad de que el sistema funcione correctamente.
- Responder a la misma pregunta en el caso de que el sistema conste de 20 componentes, con probabilidad de funcionamiento de cada uno de 0,40.
- Responder a la misma pregunta si el número de componentes es 100 y la probabilidad de cada uno es 0,03

22. La longitud aleatoria de una pieza se distribuye con función de densidad

$$f(x) = \frac{3}{4} (x - 1) (3 - x)$$

Para $1 \leq x \leq 3$. Si se considera que una pieza es correcta cuando su longitud está comprendida entre 2 y 3 ¿Cuál es la probabilidad de que la pieza sea correcta?

Si se empaquetan dichas piezas en lotes de cinco unidades, determínese

- La distribución de la variable aleatoria "número de piezas defectuosas en un lote".
- ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya dos o más piezas defectuosas?
- Si el lote fuera de 5000 piezas, ¿cuál será la probabilidad de que en un lote haya más de 2575 piezas defectuosas?

23. Una compañía de seguros con 10.000 asegurados halla que el 0,005% de la población fallece cada año de un cierto tipo de accidente.

- Hallar la probabilidad de que la compañía tenga que pagar a más de tres asegurados, por dicho accidente, en un año determinado.
- ¿Cuál es el número medio de siniestros por año?

24. Un zoólogo estudia una cierta especie de ratones de campo. Para ello, captura ejemplares de una población grande en la que la proporción de dicha especie es p .

- Si $p = 0,3$, hallar la probabilidad de que en 6 ejemplares capturados haya, al menos, 2 de los que le interesan.
- Si $p = 0,05$, calcular la probabilidad de que en 200 haya exactamente 3 de los que le interesan.
- Si $p = 0,4$, calcular la probabilidad de que en 200 haya entre 75 y 110 de los que le interesan.

d) ¿Cuál es el número medio de ejemplares que tendrá que capturar para encontrar uno de la especie que le interesa, si $p = 0,2$?

25. Del total de personas que han comprado un antivirus, el 60% lo han usado antes durante un periodo de prueba gratuito, mientras que solo un 10% de los que no lo han comprado ha pasado este periodo de prueba. Del total de usuarios analizados, un 20% ha llevado a cabo el periodo de prueba. Se pide:
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un usuario elegido al azar compre el antivirus?
 - b) Calcular la probabilidad anterior cuando se sabe que el usuario ha pasado el periodo de prueba.
 - c) Si se escogen 10 usuarios al azar, ¿cuál es la probabilidad de al menos uno haya comprado el antivirus?

Si los 10 usuarios se eligen al azar entre los que han pasado el periodo de prueba, ¿cuál es entonces la probabilidad de que al menos uno haya comprado el antivirus?

26. Un laboratorio A dispone de 6 aminoácidos (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 y A_6) para elaborar proteínas con 4 aminoácidos diferentes en cada proteína, de forma que dos proteínas son diferentes cuando tienen una secuencia diferente de aminoácidos y/o si están dispuestos en distinto orden (en caso de coincidir los aminoácidos elegidos). Se pide:
- a) ¿Cuántas proteínas se pueden formar?
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de formar la proteína P, formada por la siguiente cadena: $A_1-A_6-A_3-A_4$?
 - c) Si el laboratorio A ha elaborado 10 proteínas de forma independiente, ¿cuál es la probabilidad de que haya fabricado al menos 2 proteínas P?,
 - d) ¿Cuál es el número medio de proteínas tipo P se espera fabrique A?
27. A una prueba de resolución de problemas se presentan 200 personas. Se sabe por otras ediciones que la probabilidad de que una persona resuelva el problema correctamente es de 0.2. Los acertantes reciben como premio un lote de libros. La entidad organizadora ha comprado 50 lotes.
- ¿Cuál es la probabilidad de que no sea necesario comprar más lotes?
28. Una centralita recibe unas 300 llamadas por hora. Si se sabe que dicha centralita no puede establecer más de 12 conexiones por minuto, calcular:
- a) La probabilidad de que reciba una sola llamada en un minuto dado.
 - b) La probabilidad de que la capacidad de la centralita quede rebasada en un minuto dado.
29. Una importante compañía de hardware desea realizar un estudio sobre la calidad de las memorias RAM que fabrica. Con este fin, se seleccionan al azar 100 memorias RAM de manera independiente. De entre las memorias RAM seleccionadas, 30 son defectuosas.
- (a). Calcular la probabilidad de que se obtengan 18 memorias RAM defectuosas.
 - (b). Calcular la probabilidad de al menos 45 piezas sean defectuosas.
30. Un determinado fármaco es efectivo en el 25% de los pacientes que sufren una cierta enfermedad. Si dicho fármaco se aplica a 80 pacientes afectados por dicha enfermedad, calcular la probabilidad de que entre 25 y 35 de ellos se curen.

31. En un grupo de 20 personas que acuden a una revisión médica, hay 14 que están vacunadas de tétanos y 6 no. Se seleccionan 5 personas diferentes de ese grupo y se pasan a una segunda sala. Elegida una de esas cinco personas, se observa que está vacunada de tétanos. ¿Cuál es la probabilidad de que las cinco personas estén vacunadas?