ÁLGEBRA LINEAL

1. Los Números Complejos

1.1. Halla el módulo y el argumento de los números complejos:

$4-3i$, $(3-4i)^{-1}$, $(2-i)^5$ y $\dfrac{1-i}{1+i}$

1.2. Dibuja los conjuntos de números complejos que verifican las siguientes condiciones:

a) $\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z = 2$ b) $\operatorname{Re}\frac{z-1}{z-3} = 0$ c) $|\dfrac{z-3}{z+3}| = 2$

d) $|z+2| = 2$ e) $|z-1| = |z+1|$ f) $\overline{z} = z^{-1}$

1.3. Prueba las siguientes igualdades:

a) $|z| = |\overline{z}|$ b) $\overline{\overline{z}} = z$ c) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ d) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ e) $\overline{-z} = -\overline{z}$ f) $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$

1.4. Para cualquier número complejo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, prueba que: $z, -z, \overline{1/z}, \overline{-1/z}$ y 0 están alineados (o lo que es lo mismo, están sobre una misma recta).

1.5. a) Sea $z \neq 1, -1$ y con $|z| = 1$. Prueba que $\dfrac{1+z}{1-z}$ es un complejo imaginario puro.

b) Sea z un complejo de módulo 1. Prueba que $z + z^{-1}$ es un número real.

1.6. Determina los números complejos z que verifican:

a) $z^2 - 3z + 4 = 0$ b) $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$ c) $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$

1.7. a) Demuestra que si $z \in \mathbb{C}$ tiene parte real igual a -1, entonces el número complejo $\frac{z}{|z|^2}$ pertenece a la circunferencia de centro $-\frac{1}{2}$ y radio $\frac{1}{2}$.

b) Describe geométricamente la aplicación $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \big(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})\big)z$.

c) Describe geométricamente la aplicación $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \big(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})\big)z + (1+i)$.

1.8. Calcula: a) $\sqrt[3]{-i}$ b) $\sqrt[3]{-8i}$ c) $\sqrt[5]{-1-i}$ d) $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$

e) Determina los números complejos tales que su cuadrado coincide con alguna de sus raíces cuadradas.

1.9.

a) Demuestra que las raíces n-ésimas de un número complejo no nulo se obtienen multiplicando una de ellas por las raíces n-ésimas de 1.

b) Prueba que el producto de dos raíces n-ésimas de la unidad es de nuevo una raíz n-ésima de la unidad.

c) Prueba que la inversa multiplicativa de una raíz n-ésima de la unidad es de nuevo una raíz n-ésima de la unidad.

1.10. Si $1, z_1$ y z_2 son las tres raíces cúbicas distintas de 1, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) $z_1^{-1} = 1$, b) $z_1^{-1} = z_1$, c) $z_1^{-1} = z_2$, d) $z_1^{-1} \neq 1$ y $z_1^{-1} \neq z_2$.

1.11. a) Prueba que para cualquier número natural n, el polinomio $z - 1$ divide al polinomio $z^n - 1$.

b) Demuestra que las raíces n-ésimas de 1 distintas de 1 son las soluciones de la ecuación polinómica $z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0$. (*Pista:* ¿Cuál es el cociente de la división del apartado a)?)

c) Prueba que si m y n son dos números naturales y m divide a n, entonces el polinomio $z^m - 1$ divide al polinomio $z^n - 1$.

1.12. Sea n un número natural tal que $n \geq 2$. Usando el Ejercicio 11.b), prueba que:

a) $\cos\dfrac{2\pi}{n} + \cos\dfrac{4\pi}{n} + ... + \cos\dfrac{2(n-1)\pi}{n} = -1$. b) $\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{n} + ... + \operatorname{sen}\dfrac{2(n-1)\pi}{n} = 0$.

1.13. Expresa $\cos 3t$ y $\operatorname{sen} 3t$ como polinomios de $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$.

1.14.* Sea $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ una serie de números complejos. Decimos que la serie es *convergente* si las series de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$ son convergentes. Se dice que la serie converge a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n.$$

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es convergente, prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ también lo es.

b) Prueba que $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge para todo $z \in \mathbb{C}$.

c) Comprueba que $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Deduce que $-1 = e^{i\pi}$.

1.15.* Para $t \in \mathbb{R}$, prueba las siguientes igualdades: a) $e^{i(t+2\pi)} = e^{it}$ b) $|e^{it}| = 1$ c) $\overline{e^{it}} = e^{-it}$

d) $\cos nt = \dfrac{e^{int} + e^{-int}}{2}$ e) $\operatorname{sen} nt = \dfrac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$ f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt = \frac{e^{int}}{in} \Big|_{-\pi}^{\pi}$

(*Indicación:* Se define $\int f(t) + ig(t)dt := \int f(t)dt + i \int g(t)dt$).

1.16. a) Si $w \in \mathbb{C}$ es una raíz del polinomio con coeficientes reales $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$, prueba que $\overline{w}$ también lo es.

b) Utiliza la ecuación $z^2 + zi + 2 = 0$, para ver que el apartado anterior no es cierto en general si los coeficientes son complejos.

1.17. Encuentra las soluciones de la ecuación $z^3 - (1-2i)z^2 - z + (1-2i) = 0$, si se sabe que $1 - 2i$ es una solución de la misma.

1.18. Se pide descomponer el polinomio $z^4 + 1$ como

a) producto de polinomios (no constantes) con coeficientes en $\mathbb{Q}$ y de grado lo menor posible.

b) producto de polinomios (no constantes) con coeficientes en $\mathbb{R}$ y de grado lo menor posible.

c) producto de polinomios (no constantes) con coeficientes en $\mathbb{C}$ y de grado lo menor posible.

Haz lo mismo para los polinomios: $z^3 + z^2 - z + 2$ y $z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1$.