

#### Tema 1:

# Representación digital de la información

Fundamentos de computadores

José Manuel Mendías Cuadros

Dpto. Arquitectura de Computadores y Automática Universidad Complutense de Madrid

### **Contenidos**



- Introducción de conceptos.
- 2. Sistemas de numeración.
- Aritmética binaria.
- 4. Conversión entre bases.
- 5. Representación y aritmética de enteros en MyS.
- 6. Representación y aritmética de enteros en C2.
- Otras codificaciones.

#### Presentación basada en los libros:

• R. Hermida, F. Sánchez y E. del Corral. Fundamentos de computadores.

## Concepto de sistema

- Sistema: caja "negra" que a lo largo del tiempo:
  - Recibe información por sus entradas, x(t)
  - o Procesa dicha información según una cierta función, F
  - Genera información por sus salidas, z(t)



$$z(t) = F(x(t))$$

$$x(t_i)$$

## Analógicos vs. digitales

- Sistema analógico
  - Los valores que pueden tomar las entradas/salidas pertenecen a un espectro continuo de valores.
- Sistema digital
  - Los valores que pueden tomar las entradas/salidas están restringidos a un conjunto discreto de valores.



Los sistemas analógicos establecen semejanzas, los digitales numerizan

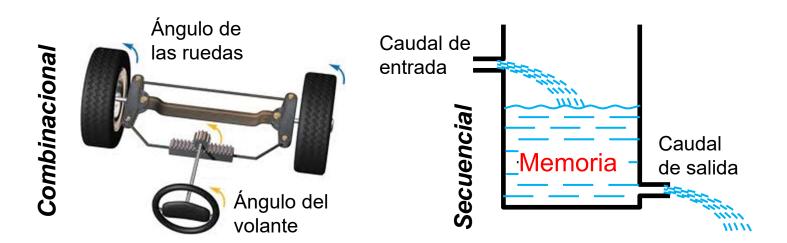
## Combinacionales vs. secuenciales



Sistema combinacional

$$z(t_i) = F(x(t_i))$$

- La salida en cada instante depende exclusivamente del valor de la entrada en ese instante.
- Sistema secuencial  $z(t_i) = F(x(t)), con t \in [0, t_i]$ 
  - La salida en cada instante depende del valor de la entrada en ese instante y de todos los valores que la entrada ha tomado con anterioridad.

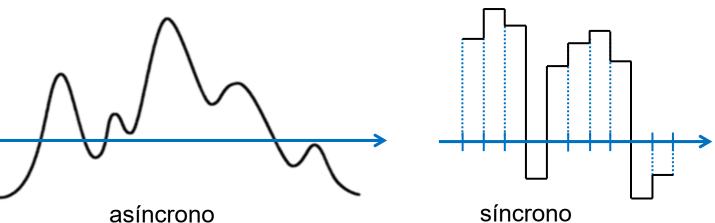


#### **Asíncronos**

Las entradas/salidas pueden cambiar en cualquier momento.

#### <u>Síncronos</u>

 Las entradas/salidas solo pueden cambiar en un conjunto discreto de instantes definidos por una señal de reloj.





## Especificación vs. implementación

- Especificación (¿qué hace?)
  - Descripción del comportamiento de un sistema sin precisar cómo está constituido.
- Implementación (¿cómo está hecho?)
  - Descripción de un sistema en base a un conjunto de elementos más simples interconectados.

Para una especificación dada existen multitud de implementaciones válidas.

## Síntesis vs. análisis



o Proceso de obtener una implementación que tenga el comportamiento definido por una especificación dada.

#### Análisis

 Proceso de obtener el comportamiento de una implementación dada.

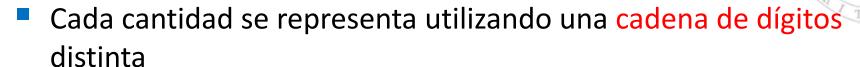


### Sistemas de numeración

- Mecanismo que permite dar una representación gráfica a cada número.
- Se define por:
  - O Un conjunto discreto de símbolos (dígitos) cada uno de los cuales representa directamente un número.
    - La cardinalidad de este conjunto se llama base.
  - Un conjunto discreto de reglas de generación (notación) que permiten representar números mayores usando más de un dígito.
  - Un conjunto de reglas de manipulación de símbolos (aritmética) que permite realizar coherentemente operaciones con números.

#### ್ಲಿ SP SP

## Notación posicional



$$(a_{n-1}, a_{n-2}, a_1, a_0)_r$$

- a<sub>n-1</sub> es el dígito más significativo
- a<sub>0</sub> es el dígito menos significativo
- r es la base del sistema de numeración
- El valor de cada dígito es función de la posición que ocupa en la cadena (peso). El peso de la posición i en un sistema de base r es ri

$$(valor\ digito)_i = (valor\ digito) \times r^i$$

El valor de una cadena es la suma del valor de cada uno de los dígitos que la forman.

## Notación polinomial

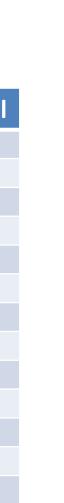


 Cada cantidad se representa por un polinomio cuya resolución permite conocer el valor representado

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \times r^i$$

Notación posicional	Notación polinomial	Cantidad representada
(17) <sub>10</sub>	$1\times10^{1} + 7\times10^{0}$	17
(10001) <sub>2</sub>	$1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$	17
(21) <sub>8</sub>	$2 \times 8^1 + 1 \times 8^0$	17
(11) <sub>16</sub>	$1 \times 16^1 + 1 \times 16^0$	17

## Sistemas base 10, 2, 8 y 16



Decimal	Binario	Octal	Hexadecimal
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	Α
11	1011	13	В
12	1100	14	С
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
	computadores	bina	rio compacto



### Aritmética binaria



#### Aritmética de símbolos

o Las tablas de sumar, restar, multiplicar... dígitos.

Suma	
0 + 0 = 0	
0 + 1 = 1	
1+0=1	
1 + 1 = 0	y me llevo 1

Resta	
0 - 0 = 0	
0 - 1 = 1	y me llevo 1
1 - 0 = 1	
1 - 1 = 0	

Multiplicación
$0 \times 0 = 0$
$0 \times 1 = 0$
$1 \times 0 = 0$
1 × 1 = 1

#### Aritmética de notación

o El mecanismo para sumar, restar, multiplicar... cadenas de dígitos.

## Suma binaria



$$S = 9 + 11$$

sumando 1 sumando 2 suma

# FC tema

## Suma binaria



$$S = 9 + 11$$

#### ಕ್ಕ FC

## Suma binaria



$$S = 9 + 11$$

## Suma binaria



$$S = 9 + 11$$

		1	
1	0	0	1
1	0	1	1
			0

acarreos
sumando 1
sumando 2
suma

## Suma binaria



$$S = 9 + 11$$

## Suma binaria



$$S = 9 + 11$$

acarreos
sumando 1
sumando 2
suma

## Suma binaria



$$S = 9 + 11$$

### Suma binaria



$$S = 9 + 11$$

Acarreos sumando 1 sumando 2 Suma

### Resta binaria



$$R = 83 - 21$$

83

1 0 1 0 0 1 1

minuendo 1 0 1 0 1 sustraendo acarreos

### Resta binaria



$$R = 83 - 21$$

83

1 0 1 0 0 1 1

### Resta binaria



$$R = 83 - 21$$

83

-21

1 0 1 0 0 1 1

minuendo 1 0 1 0 1 sustraendo acarreos diferencia

62

### Resta binaria



$$R = 83 - 21$$

83

62

-21

1 0 1 0 0 1 1

1 0 1 0 1 sustraendo

minuendo acarreos diferencia

### Resta binaria



$$R = 83 - 21$$

83

-21

1 0 1 0 0 1 1

1 0 1 0 1 sustraendo acarreos diferencia

minuendo

62

### Resta binaria



$$R = 83 - 21$$

83

-21

62

1 0 1 0 0 1 1

1 0 1 0 1 sustraendo

minuendo acarreos diferencia

### Resta binaria



$$R = 83 - 21$$

83

-21

62

1 0 1 0 0 1 1

### Resta binaria



$$R = 83 - 21$$

83

-21

62

1 0 1 0 0 1 1

### Resta binaria



$$R = 83 - 21$$

83

-21

62

1 0 1 0 0 1 1

### Resta binaria



$$R = 83 - 21$$

83

-21

62

1 0 1 0 0 1 1

## - A

## Multiplicación binaria



$$P = 11 \times 5$$

1 1 5

1 0 1 1 1 1 0 1

multiplicando multiplicador

# versión 2021

#### *tem* **FC**

## Multiplicación binaria



$$P = 11 \times 5$$

1 1 × 5 5

× 1011 × 101 multiplicando multiplicador

productos parciales

# versión 2021

## FC

## Multiplicación binaria



$$P = 11 \times 5$$

multiplicando multiplicador

productos parciales

## Multiplicación binaria



$$P = 11 \times 5$$

multiplicando multiplicador

productos parciales

## Multiplicación binaria



$$P = 11 \times 5$$

multiplicando multiplicador

productos parciales

# Multiplicación binaria



$$P = 11 \times 5$$

1 1 × 5 5 5

× 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 multiplicando multiplicador

productos parciales

resultado

# FC.

# Multiplicación binaria



$$P = 11 \times 5$$

	1	1
×		5
	5	5

multiplicando multiplicador

productos parciales

resultado

### Conversión entre bases



Sustitución en serie

base R → base S, usando la aritmética de <u>base S</u>

 Se evalúa la representación polinomial del número usando la aritmética de base S.

$$(2A)_{16} = 2 \times 16^1 + 10 \times 16^0 = 32 + 10 = (42)_{10}$$

$$(1010)_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$
  
= 8 + 0 + 2 + 0 =  $(10)_{10}$ 

### Conversión entre bases



División por la base

base R → base S, usando la aritmética en <u>base R</u>

 Se divide sucesivamente el número por S reservando los restos hasta que el cociente sea menor que S.

$$(12)_{10} = (1100)_2$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
1 & 2 & & \\
-1 & 2 & 6 & 2 \\
\hline
0 & -6 & 3 & 2 \\
\hline
0 & -2 & 1 \\
\hline
1 & & + peso \\
\end{array}$$

### Conversión entre bases



Conversión entre potencias de la misma base

base 
$$R \rightarrow base S=R^i$$

base 
$$2 \rightarrow$$
 base  $8=2^3$  o base  $16=2^4$ 

- Los dígitos de base R se agrupan de derecha a izquierda en bloques de i elementos.
- Cada bloque se remplaza por el correspondiente dígito de base S.

$$(10011110110)_2 = (2366)_8$$

$$(100111101)_2 = (13D)_{16}$$

### Conversión entre bases



Conversión entre potencias de la misma base

base 
$$R=S^i \rightarrow base S$$

base 
$$8=2^3$$
 o base  $16=2^4 \rightarrow$  base 2

 Cada dígito de base R se remplaza por el correspondiente bloque de dígitos en base S.

$$(713)_8 = (111001011)_2$$

$$(A5C)_{16} = (101001011100)_2$$

## Representación de la información



- Un sistema digital solo procesa información digital codificada en binario.
  - Una codificación es un convenio que asocia a cada elemento de información una representación binaria diferente.
  - Un mismo dato puede tener distintas representaciones en distintos códigos.
- Cada código usa un número de dígitos binarios fijo (bits de anchura) que limita el número de datos representable.
  - Con n bits como máximo se representan 2<sup>n</sup> datos diferentes.
- El problema del desbordamiento:
  - En las codificaciones numéricas, se produce cuando el resultado de una operación aritmética no es representable (no hay un código que represente al resultado).
  - Deben detectarse porque el resultado obtenido es incorrecto.

### Binario puro



- Codifica números naturales
- Notación n bits:
  - o n bits codifican la magnitud en binario.
- Rango representable: [ 0, 2<sup>n</sup>-1 ]

$$6_{10} = (00110)_{2-5 \text{bits}}$$

- Aritmética:
  - Extensión (pasar de n a m bits la representación del número, con m>n)
    - Completar con ceros por la izquierda.
  - o Suma
    - Suma binaria
    - Hay desbordamiento si al sumar el bit más significativo se produce un acarreo.

## Magnitud y signo (MyS)



- Codifica números enteros
- Notación n bits:
  - 1 bit codifica el signo (el bit más significativo)
  - o n-1 codifican la magnitud en binario.

• Positivos: 
$$+ N = 0 (N)_2$$

• Negativos: 
$$-N = 1(N)_2$$

- Rango representable: [-(2<sup>n-1</sup>-1), +(2<sup>n-1</sup>-1)]
  - o el cero tiene doble representación (000..00) y (100..00)

# Magnitud y signo (MyS)



- Codificar el signo  $'+' \equiv '0'$ ,  $'-' \equiv '1'$
- o Codificar la magnitud en binario de n-1 bits usando división por la base.

$$-26_{10} \rightarrow \text{MyS} \text{ de 8 bits} \quad \begin{cases} \text{signo} \equiv (1) \\ \text{magnitud} \equiv (0011010) \end{cases} \quad -26_{10} = (10011010)_{\text{MyS}}$$
  
+115<sub>10</sub>  $\rightarrow$  MyS de 8 bits  $\begin{cases} \text{signo} \equiv (0) \\ \text{magnitud} \equiv (1110011) \end{cases} \quad +115_{10} = (01110011)_{\text{MyS}}$ 

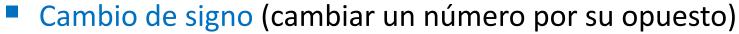
#### Procedimiento de decodificación:

- Decodificar el signo '0' ≡ '+', '1' ≡ '-'
- o Decodificar la magnitud usando sustitución en serie.

$$(10010010)_{\text{MyS}} \rightarrow \text{decimal} \quad \begin{cases} \text{signo} \equiv '-' \\ \text{magnitud} \equiv 18_{10} \end{cases} \quad (10010010)_{\text{MyS}} = -18_{10}$$

$$(01011010)_{\text{MyS}} \rightarrow \text{decimal} \quad \begin{cases} \text{signo} \equiv '+' \\ \text{magnitud} \equiv 90_{10} \end{cases} \quad (01011010)_{\text{MyS}} = +90_{10}$$

# Aritmética en MyS



o Cambiar el bit de signo

$$-(00110)_{\text{MyS-5bits}} = (10110)_{\text{MyS-5bits}}$$

- Extensión (pasar n a m bits, con m>n)
  - Manteniendo el signo, completar la magnitud con ceros por la izquierda.

$$(-6_{10}) = (10110)_{MyS-5bits} = (10000110)_{MyS-8bits}$$

- Suma / Resta
  - Signo y magnitud se manipulan por separado.
  - El signo del resultado depende de las magnitudes y signos de los operandos.
  - Las magnitudes se suman o restan en función de la magnitud y signo de los operandos.



# Aritmética en MyS: suma



- Signo (A) = signo (B)
  - Signo (R) = signo (A) = signo (B)
  - Magnitud (R) = magnitud (A) + magnitud (B)

- Signo (A) = positivo, signo (b) = negativo, |A| ≥ |B|
  - Signo (R) = signo (A) = positivo
  - Magnitud (R) = magnitud (A) magnitud (B)

+ 4	4	0 1 0 0	1 0 0
+ - 2	- :2	+ 1 0 1 0	- :0 1 0
+		0	0 1 0

# Aritmética en MyS: suma



- Signo (A) = positivo, signo (b) = negativo, |A| < |B|</p>
  - Signo (R) = signo (B) = negativo
  - Magnitud (R) = magnitud (B) magnitud (A)

- Resto de casos
  - o Equivalente a alguno de los anteriores si se aplica conmutatividad.
- Desbordamiento
  - Hay desbordamiento si al operar con el bit más significativo de la magnitud se produce un acarreo.

# Complemento a dos (C2)



- Codifica números enteros
- Notación con <u>n</u> bits:

 $\circ$  Positivos: + N = 0 (N)<sub>2</sub>

• Negativos:  $-N = (2^n - N)_2 = C2((N)_2)$ 

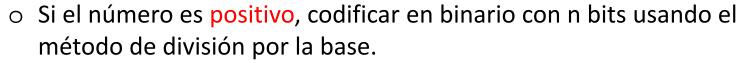
• el bit más significativo se denomina bit de signo

- **Rango representable:**  $[-(2^{n-1}), +(2^{n-1}-1)]$ 
  - o el cero tiene una única representación (000..00)
  - o el rango es asimétrico, hay un negativo de más (100..00)

$$6_{10} = (0110)_2 \Rightarrow (+6_{10}) = (00110)_{C2-5bits}$$
  
 $(2^5 - 6)_{10} = (26)_{10} = (11010)_2 \Rightarrow (-6_{10}) = (11010)_{C2-5bits}$ 

# Complemento a dos (C2)





$$+93_{10} \rightarrow C2 \text{ de 8 bits } \left\{93_{10} = (01011101)_2\right\} +93_{10} = (01011101)_{C2}$$

 Si el número es negativo, codificar el número prescindiendo del signo en binario de n bits usando el método de división por la base y realizar el complemento a dos del resultado.

$$-78_{10} \rightarrow C2 \text{ de 8 bits} \quad \left\{ \begin{array}{l} 78_{10} = (01001110)_2 \\ C2(01001110) = (10110010) \end{array} \right\} -78_{10} = (10110010)_{C2}$$

# Complemento a dos (C2)



#### Procedimiento de decodificación:

 Si el bit de signo es positivo (vale '0'), decodificarlo usando el método de sustitución en serie.

$$(01110001)_{C2} \rightarrow \text{decimal} \left\{ (01110001)_2 = (113)_{10} \right\} (01110001)_{C2} = +113_{10}$$

 Si el bit de signo es negativo (vale '1'), realizar su complemento a dos y decodificar el resultado usando el método de sustitución en serie.

$$(10110100)_{C2} \rightarrow \text{decimal} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{C2}(10110100) = (01001100) \\ (01001100)_2 = (76)_{10} \end{array} \right\} (10110100)_{C2} = -76_{10}$$

# Complemento a dos (C2)



- Para realizar la operación C2 hay varias opciones:
  - o Restar el número a 2<sup>n</sup>
  - Invertir todos los bits y sumar 1
  - Copiar los bits de derecha a izquierda hasta encontrar el primer 1, invertir el resto.

### Aritmética en C2



- Cambio de signo (cambiar un número por su opuesto)
  - o Complementar a dos el número

$$-(00110)_{C2-5bits} = C2(00110) = (11010)_{C2-5bits}$$

- Extensión (pasar n a m bits, con m>n)
  - Replicar el bit de signo hacia la izquierda

$$(-6_{10}) = (11010)_{C2-5bits} = (111111010)_{C2-8bits}$$

$$(+6_{10}) = (00110)_{C2-5bits} = (00000110)_{C2-8bits}$$

# versión 2021

### Aritmética en C2: suma



Signo (A) = signo (B)

6

 $\circ$  R = A + B

0

Signo (A) = positivo, signo (B) = negativo,  $|A| \ge |B|$ 

$$\circ$$
 R = A + B

### Aritmética en C2: suma



Signo (A) = positivo, signo (B) = negativo, |A| < |B|</p>

$$\circ$$
 R = A + B

Resto de casos

o Equivalente a alguno de los anteriores si se aplica conmutatividad.

Resumen suma/resta

 Para sumar/restar números en C2 basta con hacerlo en binario, ignorando el acarreo del bit más significativo.

o No obstante, es común realizar la resta como la suma del opuesto

• 
$$A - B = A + (-B) =_{C2} A + C2(B)$$

### Aritmética en C2: suma

#### Desbordamiento

- En la suma, solo puede producirse si ambos operandos son del mismo signo. En la resta, solo si son de distinto signo.
- Se detecta chequeando si el signo del resultado es coherente con el signo de los operandos. Si al sumar dos números negativos da resultado positivo o al sumar dos positivos da negativos.
- NO se tiene en cuenta el acarreo del bit más significativo

el rango representable con 4 bits es: [-8, +7]

# Comparación códigos (4 bits)



Decimal	MyS	<b>C2</b>			
+7	0111	0111			
+6	0110	0110			
+5	0101	0101			
+4	0100	0100			
+3	0011	0011			
+2	0010	0010			
+1	0001	0001			
+0	0000	0000			
-0	1000				
-1	1001	1111			
-2	1010	1110			
-3	1011	1101			
-4	1100	1100			
-5	1101	1011			
-6	1110	1010			
-7	1111	1001			
-8		1000			

### Representaciones decimales

- BCD (Binary Coded Decimal)
  - Cada dígito decimal se representa por un bloque de 4 bits (nibble)
     que lo codifica en binario.

$$(375)_{10} = (001101110101)_{BCD}$$

- Exceso-3
  - Cada dígito decimal se representa por un bloque de 4 bits que codifica en binario el valor del dígito + 3.

$$(375)_{10} = (011010101000)_{EX-3}$$

Simplifican la conversión decimal-binario y evitan pérdidas de precisión en la conversión de números con parte fraccionaria

### Representaciones de alfabetos

- ASCII (American Standard Code for Information Interchange)
  - Codifica el alfabeto latino occidental con 7 bits.
  - Los códigos 00h-1Fh (0-31) y el 7Fh (127) son de control.
  - Los códigos 20h-7Eh (32-126) son imprimibles.
  - Hay diferentes extensiones de 8 bits (1 byte) para soportar más caracteres imprimibles.
- EBCDIC (Extended Binary Coded Decimal Interchange Code)
  - o Codifica el alfabeto latino occidental con 8 bits.
- Unicode. (Investigad en qué consiste)

# Código ASCII (7 bits)



ASC	II Hex	Simbolo	ASCII	Hex	Símbolo	ASCII	Hex	Símbolo	ASCII	Hex S	Simbolo
0	0	NUL	16	10	DLE	32	20	(espacio)	48	30	0
1	1	SOH	17	11	DC1	33	21	1	49	31	1
2	2	STX	18	12	DC2	34	22	-	50	32	2
3	3	ETX	19	13	DC3	35	23	#	51	33	3
4	4	EOT	20	14	DC4	36	24	S	52	34	4
5	5	ENQ	21	15	NAK	37	25	%	53	35	5
6	6	ACK	22	16	SYN	38	26	&	54	36	6
7	7	BEL	23	17	ETB	39	27		55	37	7
8	8	BS	24	18	CAN	40	28	(	56	38	8
9	9	TAB	25	19	EM	41	29	)	57	39	9
10	A	LF	26	1A	SUB	42	2A		58	3A	
11	В	VT	27	1B	ESC	43	2B	+	59	3B	;
12	C	FF	28	1C	FS	44	2C	,	60	3C	<
13	D	CR	29	1D	GS	45	2D		61	3D	=
14	E	SO	30	1E	RS	46	2E	-	62	3E	>
15	F	SI	31	1F	US	47	2F	1	63	3F	?
ASC	II Hex	Simbolo	ASCII	Hex	Símbolo	ASCII	Hex	Simbolo	ASCII	Hex S	Simbolo
64	40	@	80	50	Р	96	60		112	70	р
65	41	A	81	51	Q	97	61	a	113	71	q
66	42	В	82	52	R	98	62	b	114	72	r
67	43	C	83	53	S	99	63	С	115	73	S
68	44	D	84	54	T	100	64	d	116	74	t
69	45	E	85	55	U	101	65	e	117	75	U
70	46	F	86	56	V	102	66	f	118	76	V
71	47	G	87	57	W	103	67	g	119	77	W
72	48	н	88	58	X	104	68	h	120	78	X
73	49	1	89	59	Y	105	69	i	121	79	У
74	4A	J	90	5A	Z	106	6A	j	122	7A	Z
75	4B	K	91	5B	[	107	6B	k	123	7B	{
76	4C	L	92	5C	1	108	6C	1	124	7C	1
77	4D	M	93	5D	]	109	6D	m	125	7D	}
78	4E	N	94	5E	٨	110	6E	n	126	7E	~
79	4F	0	95	5F	_	111	6F	0	127	7F	

### No olvidar



### Una cadena de bits por sí misma no significa nada

10001001

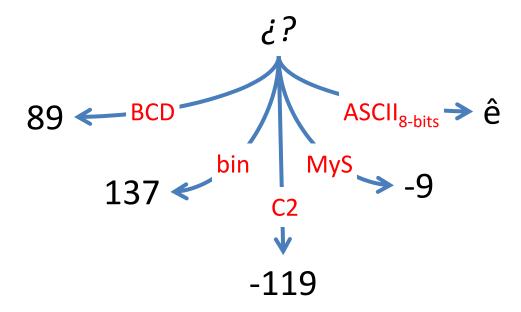
*¿?* 

### No olvidar



### Una cadena de bits por sí misma no significa nada

#### 10001001



es la codificación usada la que le da sentido