ÁLGEBRA LINEAL
7. Diagonalización

7.1. Calcula los autovalores y autovectores de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ -6 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \\ 9 & 8 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

7.2. Halla los autovalores y autovectores de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

7.3. Halla los valores propios y los vectores propios de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

7.4. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Halla sus autovalores y autovectores.

b) ¿Es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$? En caso afirmativo, halla su diagonalización sobre $\mathbb{R}$, que llamaremos D, y la matriz invertible P tal que $P^{-1}AP = D$.

7.5. Decide si la siguiente matriz es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.6. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) ¿Es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$?

b) En caso afirmativo, encuentra una matriz diagonal D y una matriz invertible P tal que $A = PDP^{-1}$.

7.7. Halla la forma diagonal sobre $\mathbb{R}$, si existe, de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

7.8. Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Es A diagonalizable sobre $\mathbb{R}$? ¿Y sobre $\mathbb{C}$?

7.9. Diagonaliza sobre $\mathbb{C}$ la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.10. Sea A una matriz $n \times n$ real. Demuestra que si λ es un autovalor complejo de A, entonces $\overline{\lambda}$ es también un autovalor de A.

7.11. Dado el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ de matriz asociada respecto de la base canónica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿se puede encontrar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz de f respecto de B es diagonal?

7.12. Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base de un espacio vectorial real V y sea f el endomorfismo de V dado por

$$f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1, \qquad f(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2, \qquad \text{Ker } f = L(\vec{u}_2 - \vec{u}_3).$$

Se pide:

a) La matriz de f respecto de la base B.

b) La imagen de f y su dimensión.

c) Los autovalores y la ecuación característica de f.

d) Una base B' respecto de la cual f tenga matriz diagonal.

e) La matriz del cambio de base de B a B'.

7.13. ¿Son diagonalizables sobre $\mathbb{R}$ las siguientes matrices?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 2 & m+2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.14. Estudia para qué valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

7.15. Halla A^{47}, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

7.16. Considérese la matriz A del Ejercicio 7.9. Explica, sin llegar a hacerlo explícitamente, cómo calcularías la matriz real A^{100}.

7.17. Se tiene dos sucesiones de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ que satisfacen la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 6x_n - y_n \\ y_{n+1} = 3x_n + 2y_n \end{cases}$$

Calcula $\frac{1}{4}(3x_{n+1} + y_{n+1})$ si $x_1 = y_1 = 1$.

7.18. a) Sea A una matriz cuadrada de orden n con entradas reales. Demuestra que si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de A, entonces λ también es un autovalor de A^{t}. (Indicación: recuerda que el determinante de una matriz y de su transpuesta coincide).

b) Sea A una matriz cuadrada de orden n con entradas reales con la propiedad de que, fijada una columna cualquiera, la suma de las entradas de dicha columna es igual a 1. Demuestra que 1 es un autovalor de A (Indicación: usa el apartado anterior).

7.19. Recuérdese el Ejercicio 2.20 del Tema 2. Decimos que (x_0, y_0) es un vector de probabilidad si $0 \leq x_0, y_0 \leq 1$ y $x_0 + y_0 = 1$.

(a) Calcular un vector de probabilidad de población sana y enferma con la propiedad de que permanece invariante día tras día (y al cual llamamos *vector de probabilidad invariante*). ¿Existe más de uno?

(b) Probar que incluso si se comienza con un vector de probabilidad (x_0, y_0) arbitrario de población sana y enferma, se cumple que cuando el número n de días tiende a infinito entonces los porcentajes de población sana y enferma tienden al vector de probabilidad invariante. (Indicación: diagonaliza la matriz T e intenta aproximar la potencia T^n cuando n es un número enorme).

(c) Comprueba empíricamente el apartado anterior: elige al azar un vector $\vec{v} = (x_0, y_0)$ de probabilidad y, con un ordenador, calcular el producto $T^n \cdot \vec{v}$ para los valores $n = 5, 10, 50$. ¿El resultado se aproxima al vector de probabilidad invariante? Imagina que tuvieses que calcular (de forma aproximada) el vector de probabilidad invariante de una matriz cuadrada de orden 100, ¿como preferirías calcularlo: con el método del apartado (a), o con el método de este apartado (c)?

Comentario: Lo que sucede en este ejercicio no es una casualidad, es una propiedad que tienen las *matrices estocásticas* (es decir, las que satisfacen que sus columnas son vectores de probabilidad) que tienen todos sus elementos estrictamente positivos. Este tipo de matrices, y lo que hemos observado en este ejercicio, está detrás por ejemplo del algoritmo de búsqueda de Google, llamado PageRank.

7.20. Para aprobar una asignatura de grado se tiene un máximo de 6 convocatorias. En cada convocatoria ocurre que, de los alumnos que se presentan por primera vez, aprueban 3 de cada 10, obtienen compensable (es decir, una nota entre 4 y 5) otros 3 de cada 10 y suspende el resto. Además de los alumnos compensables de otras convocatorias aprueban 7 de cada 10, saca compensable 1 de cada 10 y suspenden los demás. Por último, de los alumnos suspensos de otras convocatorias aprueban 3 de cada 10 y el resto suspende. Partiendo de un grupo de 125 alumnos que cursan por primera vez la asignatura ¿cuántos se espera que lleguen a aprobarla?