Práctica 6

Nombre y Apellidos de los miembros del grupo:

1. Sea $\mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices 2×1 con coeficientes en $\mathbb{R}$. En $\mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ consideramos las siguientes operaciones

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 a \\ \alpha^2 b \end{pmatrix}$$

donde $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$. Observa que la multiplicación por escalares NO es la habitual. Calcula

$$2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \qquad\qquad 3\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \qquad\qquad 5\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$

¿ Es $\mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ con estas operaciones un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$? Razona la respuesta.

2. Calcular el valor de a y b para que el vector $v = (a, 2, -1, b)$ se pueda expresar como combinación lineal de los vectores $u_1 = (1, 2, -3, 4)$ y $u_2 = (-1, 0, -2, -3)$.

3. Considérese el subespacio vectorial

$$L[(-1, 1, 0), (0, -1, 1)] = \{\lambda(-1, 1, 0) + \beta(0, -1, 1) : \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}$$

de $\mathbb{R}^3$. ¿Pertenece el vector $(1, 1, 1)$ al subespacio V?

4. ¿Es el conjunto $U = \{(x, y, z) : x - y = 0\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$? Si la respuesta es afirmativa, pruébalo. Realiza un dibujo de U. Encuentra dos vectores de $\mathbb{R}^3$ que generen U.

5. ¿Es el polinomio $x^3 + 1$ una combinación lineal de $x^2 + x - 1$ y $x + 2$?

6. (Opcional) Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Sean U y W dos subespacios vectoriales de V. Demostrar que la intersección $U \cap W$ también es un subespacio vectorial de V.

   Solución: Lo primero que observamos es que $U \cap W$ no es vacío. En efecto, puesto que tanto U como W son subespacios vectoriales de V, se cumple que $\vec{0} \in U$ y $\vec{0} \in W$. Por tanto, $\vec{0} \in U \cap W$.

   Ahora, debemos comprobar que $U \cap W$ satisface las dos condiciones que debe satisfacer un conjunto no vacío para ser subespacio vectorial de V.

   i) Sean $v_1 \in U \cap W$ y $v_2 \in U \cap W$. ¿Es cierto que $v_1 + v_2 \in U \cap W$?

   ii) Sean $v \in U \cap W$ y $\lambda \in U \cap W$. ¿Es cierto que $\lambda v \in U \cap W$?