Семинар 03

Ивайло Андреев

6 март 2025

1 Уравнения от вид на дробно-линейна функция

1.1 Общ случай

Уравнение от вид на дробно-линейна функция наричаме ДУ от следния вид:

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{mx + ny + p}\right)$$

Нека разгледаме правите:

$$\begin{cases} l_1 := ax + by + c = 0 \\ l_2 := mx + ny + p = 0 \end{cases}$$

Ако $l_1 || l_2$ или $l_1 \equiv l_2$, то даденото уравнение е от вид на линейна функция.
Ако системата е определена, то я решаваме и намираме решението и (x_0, y_0).
Полагаме:

$$u = x - x_0$$

$$v = y - y_0$$

Изразяваме y'

$$y(x) = v(u) + y_0$$

$$y'(x) = v'(u)$$

$$v' = f\left(\frac{a(u + x_0) + b(v + y_0) + c}{m(u + x_0) + n(v + y_0) + p}\right)$$

$$v' = f\left(\frac{au + bv + [ax_0 + by_0 + c]}{mu + nv + [mx_0 + ny_0 + p]}\right)$$

Изразите в скобите са точно решенията на системата и съответно са равни на 0.

$$v' = f\left(\frac{au+bv}{mu+nv}\right)$$

Делим в числител и в знаменател на $u \neq 0$.

$$v' = f\left(\frac{a+b\frac{v}{u}}{m+n\frac{v}{u}}\right)$$

Получихме хомогенно уравнение.

1.2 2023г., контролно 1, вариант х, задача 2

$$y' = \frac{3y-3x-3}{y+3x+3}$$

Решаваме системата

$$\begin{cases} 3y-3x-3=0 \\ y+3x+3=0 \end{cases}$$

Решението на системата е $(x_0, y_0) = (-1, 0)$
Полагаме

$$u = x+1$$

$$v = y$$

$$v' = \frac{3v-3u+3-3}{v+3u-3+3} = \frac{3v-3u}{v+3u} = \frac{3\frac{v}{u}-3}{\frac{v}{u}+3}$$

Получихме хомогенно уравнение
Полагаме

$$z = \frac{v}{u}$$

Така

$$v = zu$$

$$v' = z'u + z$$

Заместваме в уравнението

$$z'u + z = \frac{3z-3}{z+3}$$

$$z'u = \frac{3z-3}{z+3} - z$$

$$z'u = \frac{3z-3}{z+3} - \frac{z^2+3z}{z+3}$$

$$z'u = \frac{-z^3-3}{z+3}$$

$$\frac{z+3}{z^2+3}z' = -\frac{1}{u}$$

$$\int \frac{z+3}{z^2+3}dz = -\int \frac{1}{u}du$$

$$\int \frac{z}{z^2+3}dz + 3\int \frac{1}{z^2+3}dz = -\int \frac{1}{u}du$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{z^2+3}d(z^2+3) + \sqrt{3}\int \frac{1}{(\frac{z}{\sqrt{3}})^2+1}d\frac{z}{\sqrt{3}} = -\int \frac{1}{u}du$$

$$\frac{1}{2}\ln|z^2+3| + \sqrt{3}\arctan\frac{z}{\sqrt{3}} = -\ln|u| + C$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{y}{x+1}\right)^2+3\right| + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{y}{x+1}\right) = -\ln|x+1| + C$$

1.3 2024г., контролно 1, вариант C, задача 1

$$\begin{cases} y' = \left(\dfrac{y+4x-8}{4x-4}\right)^2 \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

Решаваме системата

$$\begin{cases} y+4x-8=0 \\ 4x-4=0 \end{cases}$$

Решението на системата е $(x_0, y_0) = (1, 4)$
Полагаме

$$u = x - 1$$

$$v = y - 4$$

$$v' = \left(\frac{v + 4 + 4u + 4 - 8}{4u + 4 - 4}\right)^2 = \left(\frac{v + 4u}{4u}\right)^2 = \left(\frac{v}{4u} + 1\right)^2$$

Получихме хомогенно уравнение
Полагаме

$$z = \frac{v}{u}$$

Така

$$v = zu$$

$$v' = z'u + z$$

Заместваме в уравнението

$$z'u + z = \frac{1}{16}(z + 4)^2$$

$$16z'u + 16z = z^2 + 8z + 16$$

$$16z'u = z^2 - 8z + 16$$

$$16z'u = (z - 4)^2$$

$$\frac{z'}{(z - 4)^2} = \frac{1}{16u}$$

$$\int \frac{1}{(z - 4)^2} d(z - 4) = \frac{1}{16} \int \frac{1}{u} du$$

$$-\frac{1}{z - 4} = \frac{\ln|u|}{16} + C$$

$$z = 4 - \frac{16}{16C + \ln|u|}$$

$$\frac{y - 4}{x - 1} = 4 - \frac{16}{16C + \ln|x - 1|}$$

Прилагаме началното условие $y(0) = 4$

$$\frac{4 - 4}{0 - 1} = 4 - \frac{16}{\ln|-1| + 16C}$$

$$0 = 4 - \frac{16}{16C}$$

$$C = \frac{1}{4}$$

Така получаваме окончателно решение

$$y = 4 + (x-1)\left(4 - \frac{16}{4 + \ln|x-1|}\right)$$

2 Линейни уравнения от първи ред

Линейно уравнение от първи ред наричаме ДУ от следния вид:

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

където $a(x), b(x)$ са непрекъснати функции в затворен интервал.
Общото решение се дава със следната формула:

$$y(x) = e^{\int a(x)dx}\left(C + \int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx\right)$$

2.1 Задача 1.5.3 от учебника на проф. Огнян Христов

$$y' = -y\sin x + \mathrm{e}^{\cos x}$$

$$a(x) = -\sin x$$

$$b(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$$

Формулата изисква да сметнем интегралите $I = \int a(x)dx$ и $-I$

$$I = \int -\sin x dx = \cos x + C_1$$

$$-I = -\cos x - C_1$$

Прилагаме формулата

$$y = \mathrm{e}^{I}\left(C + \int \mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{e}^{-I}dx\right)$$

$$y = \mathrm{e}^{\cos x + C_!}\left(C + \int \mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{e}^{-\cos x - C_1}dx\right)$$

$$y = \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{\cos x}\left(C + \mathrm{e}^{-C_1}\int \mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{e}^{-\cos x}dx\right)$$

$$y = \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{\cos x}\left(C + \mathrm{e}^{-C_1}\int \mathrm{e}^{\cos x - \cos x}dx\right)$$

$$y = \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{\cos x}\left(C + \mathrm{e}^{-C_1}\int dx\right)$$

Също виждаме, че втората константа може да бъде елиминирана лесно. Обикновено дори не пишем произволната константа при примитивните в такъв тип задачи освен ако няма конкретна причина - например ако искаме константата да разкрие модул.

$$y = \mathrm{e}^{\cos x}\left(\mathrm{e}^{C_1}C + \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{-C_1}\int dx\right)$$

$$y = \mathrm{e}^{\cos x}\left(C_2 + \int dx\right)$$

$$y = \mathrm{e}^{\cos x}\left(C_2 + x + C_3\right)$$

$$y = \mathrm{e}^{\cos x}\left(C_4 + x\right)$$

2.2 2024г., изпит-задачи, вариант D, задача 1

$$x(x+2)^2 y' = 4(x+2)y + x(x+1)$$

$$y' = \frac{4}{x(x+2)}y + \frac{x+1}{(x+2)^2}$$

$$a(x) = \frac{4}{x(x+2)}$$

$$b(x) = \frac{x+1}{(x+2)^2}$$

Формулата изисква да сметнем интегралите $I = \int a(x)dx$ и $-I$

$$\begin{aligned} I &= \int a(x)dx \\ &= \int \frac{4}{x(x+2)}dx \\ &= 4\int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}\right)dx \end{aligned}$$

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}=\frac{1}{x(x+2)}=\frac{Ax+2A+Bx}{x(x+2)}$$

$$(B+A)x+2A=0x+1$$

Така

$$B+A=0; \quad 2A=1 \implies A=\frac{1}{2}; B=-\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
I &= 4\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}\right)dx \\
&= 4\int\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{2(x+2)}\right)dx \\
&= 2\int\frac{1}{x}dx-2\int\frac{d(x+2)}{x+2} \\
&= 2\ln|x|-2\ln|x+2| \\
&= 2(\ln|x|-\ln|x+2|) \\
&= 2\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| \\
&= \ln\left|\frac{x}{x+2}\right|^2 \\
&= \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-I &= -\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)^2 \\
&= \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)^{-2} \\
&= \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)^2
\end{aligned}$$

$$y=\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)^2}\left(C+\int\frac{x+1}{(x+2)^2}\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)^2}dx\right)$$

$$y=\left(\frac{x}{x+2}\right)^2\left(C+\int\frac{x+1}{(x+2)^2}\frac{(x+2)^2}{x^2}dx\right)$$

$$y = \left(\frac{x}{x+2}\right)^2 \left(C + \int \frac{x+1}{1}\frac{1}{x^2} dx\right)$$

$$y = \left(\frac{x}{x+2}\right)^2 \left(C + \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx\right)$$

$$y = \left(\frac{x}{x+2}\right)^2 \left(C + \ln|x| - \frac{1}{x}\right)$$

3 Уравнение на Бернули

3.1 Общ случай

Уравнение на Бернули наричаме ДУ от следния вид:

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^n$$

където $a(x), b(x)$ са непрекъснати функции в затворен интервал и $n \in \mathbb{R}$.
Ако $n = 0$ получаваме линейно уравнение.
Ако $n = 1$ получаваме уравнение с разделящи се променливи.
Делим на y^n при $y \neq 0$.

$$\frac{y'}{y^n} = a(x)y^{1-n} + b(x)$$

$$\text{Полагаме } z = y^{1-n}$$

$$z' = (1-n)y^{-n}y'$$

$$y' = \frac{z'y^n}{1-n}$$

Заместваме в даденото уравнение.

$$\frac{z'y^n}{(1-n)y^n} = a(x)z + b(x)$$

$$z' = (1-n)a(x)z + (1-n)b(x)$$

Получаваме линейно уравнение.

3.2 2024г., контролно 1, вариант F, задача 1

$$\begin{cases} 3(1+x)(1-x)^2y' = 4(x-1)y - 3(x+1)^3\mathrm{e}^{-2x}y^4 \\ y(0) = \sqrt[3]{2} \end{cases}$$

$$y' = \frac{4}{3}\frac{1}{(x+1)(x-1)}y - \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{-2x}y^4$$

Вижда се, че $y \equiv 0$ е решение на ДУ, но не на задачата на Коши.
Делим на $y^4 \neq 0$

$$\frac{y'}{y^4} = \frac{4}{3}\frac{1}{(x+1)(x-1)}y^{-3} - \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{-2x}$$

Полагаме $z(x) = y^{-3} = \dfrac{1}{y^3}$

Тогава $z'(x) = -3y^{-4}(x)y'(x) \implies y' = -\dfrac{z'y^4}{3}$

$$-\frac{z'y^4}{3}\frac{1}{y^4} = \frac{4}{3}\frac{1}{(x+1)(x-1)}z - \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{-2x}$$

$$z' = -4\frac{1}{(x+1)(x-1)}z + 3\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{-2x}$$

$$a(x) = -4\frac{1}{(x+1)(x-1)}; \quad b(x) = 3\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{-2x}$$

$$I = \int a(x)dx = -4\int \frac{1}{(x+1)(x-1)}dx = -4\int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}\right)dx$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{Ax - A + Bx + B}{(x+1)(x-1)}$$

$$x(A+B) + (B-A) = 0x + 1$$

$$B - A = 1; \quad A + B = 0$$

$$A = -\frac{1}{2}; \quad B = \frac{1}{2}$$

$$I - 4\left(\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}d(x-1) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}d(x+1)\right)$$

$$I = 2(\ln|x+1| - \ln|x-1|)$$

$$I = 2\ln\frac{x+1}{x-1} = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$$

$$-I = -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-2} = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$$

$$z = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\left(C + 3\int \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\mathrm{e}^{-2x}dx\right)$$

$$z = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\left(C - \frac{3}{2}\int \mathrm{e}^{-2x}d(-2z)\right)$$

$$z = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\left(C - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right)$$

Прилагаме началното условие

$$\frac{1}{2} = 1\left(C - \frac{3}{2}\right)$$

$$C = 2$$

Така решението на задачата на Коши е:

$$\frac{1}{y^3} = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2\left(2 - \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}\right)$$

3.3 2022г., контролно 1, вариант 2, задача 1

$$\begin{cases} -5x\dfrac{y'}{y^6} = \dfrac{2}{y^5} + x^3\mathrm{e}^x\cos x \\ y\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$$

Полагаме $z(x) = y^{-5} = \dfrac{1}{y^5}$

Тогава $z'(x) = -5y^{-6}(x)y'(x) \implies y' = -\dfrac{z'y^6}{5}$

$$-5x\frac{1}{y^6}y^6\frac{1}{-5}z' = 2z + x^3\mathrm{e}^x\cos x$$

$$z' = \frac{2}{x}z + x^2\mathrm{e}^x\cos x$$

$$a(x) = \frac{2}{x}; \quad b(x) = x^2\mathrm{e}^x\cos x$$

$$I = \int a(x)dx = 2\int \frac{1}{x}dx = 2\ln|x| = \ln x^2$$

$$-I = -\ln x^2 = \ln x^{-2}$$

$$z = x^2 \left(C + \int \mathrm{e}^x \cos x dx \right)$$

$$J = \int \mathrm{e}^x \cos x dx$$

$$J = \int \mathrm{e}^x d \sin x$$

$$J = \mathrm{e}^x \sin x - \int \sin x d\mathrm{e}^x$$

$$J = \mathrm{e}^x \sin x - \int \sin x d\mathrm{e}^x$$

$$J = \mathrm{e}^x \sin x + \int \mathrm{e}^x d \cos x$$

$$J = \mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x \cos x dx$$

$$J = \mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x - J + C^*$$

$$J = \frac{\mathrm{e}^x (\sin x + \cos x)}{2} + C$$

$$z = x^2 \left(C + \frac{\mathrm{e}^x (\sin x + \cos x)}{2} \right)$$

$$\frac{1}{y^5} = x^2 \left(C + \frac{\mathrm{e}^x (\sin x + \cos x)}{2} \right)$$

Прилагаме началното условие $y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1$

$$1 = \frac{9}{16}\pi^2 C \implies C = \frac{16}{9\pi^2}$$

$$\frac{1}{y^5} = x^2 \left(\frac{16}{9\pi^2} + \frac{\mathrm{e}^x}{2} (\sin x + \cos x) \right)$$