Уравнения от първи ред

Дефиниция: $f(x,y)$ е **липшицова** по y в Π, ако $\exists K>0$, за което е изпълнено следното неравенство:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leq K|y_1-y_2|$$

където $(x,y_1),(x,y_2)\in\Pi$ са произволни.

Лема: Ако $f(x,y), f'_y(x,y)\in C(\Pi) \implies f(x,y)$ е липшицова по y в Π.

Теорема (**Локална теорема за единственост и съществуване**):
Нека $f(x,y)$ е непрекъсната и липшицова по y в
$\Pi := \{(x,y)\in\mathbb{R} : |x-x_0|\leq a, |y-y_0|\leq b\}$. Тогава съществува единствено решение на задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

в интервала $[x_0-h, x_0+h]$, където $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$ и $M = \max\limits_{\Pi}|f(x,y)|$.

Дефиниция: Точката $(x_0,y_0)\in D$ е **обикновена точка** за уравнението $f(x,y,y')=0$, ако $f(x_0,y_0,z)=0$ има краен брой различни и реални решения $z_1<z_2<\cdots<z_m$ и $f'_z(x_0,y_0,z_j)\neq 0 \quad j=1,2,\ldots,m$

Дефиниция: Точката $(x_0,y_0)\in D$ е **особена точка** за уравнението $f(x,y,y')=0$, ако $f(x_0,y_0,z)=0$ има реално решение z_0 и $f'_z(x_0,y_0,z_0)=0$

Дефиниция: Решението на уравнението $f(x,y,y')=0$ е **особено решение**, ако всички точки от графиката на решението са особени.

Теорема (**Теорема за редукцията**): Нека $(x_0,y_0)\in D$ е обикновена точка за уравнението $f(x,y,y')=0$. Тогава в достатъчно малка околност $U\in D$ на точката (x_0,y_0) съществуват функции $f_j(x,y) \quad j=1,2,\ldots,m$ такива, че $f_j,(f_j)'_y\in C(U) \quad f_j(x_0,y_0)=z_j$ и всяко решение на задачата на Коши:

$$\begin{cases} f(x,y,y') = 0 \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

е решение на някоя от задачите на Коши:

$$\begin{cases} y' = f_j(x,y) \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$