

Задача 1. Решете уравнението

$$(x - 2)y' = 2y + (x + 1)(x - 2)^2.$$

Задача 2. Решете уравнението

$$(x + 2)^3 y' + 2(x + 2)^2 y = x - 1.$$

Задача 3. Решете уравнението

$$y'' \sin(1 - x) = (2 - y') \cos(1 - x).$$

Задача 5. Решете уравнението

$$(2 + e^x)y'' = e^x(y' - 3).$$

Задача 6. Решете задачата на Коши

$$\left| \begin{array}{l} y'' + 2y' + 2y = 0, \\ y(0) = 2, \ y'(0) = -1. \end{array} \right.$$

Задача 7. Решете задачата на Коши

$$\left| \begin{array}{l} y'' - 4y' + 5y = 0, \\ y(0) = -1, \ y'(0) = 2. \end{array} \right.$$

Задача 8. Решете задачата на Коши

$$\left| \begin{array}{l} y'' - 6y' + 9y = 0, \\ y(\frac{1}{3}) = e, \ y'(\frac{1}{3}) = 0. \end{array} \right.$$

Задача 9. Решете задачата на Коши

$$\begin{cases} 3(x+1)y' + 6x(x+1)y^4 + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Задача 10. Решете задачата на Коши

$$\begin{cases} 3(1-x)y' = 4x(x-1)y^4 + 6y \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Задача 11. Решете задачата на Коши

$$\begin{cases} (y' - 2y)y = 8x \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Задача 12. Дадени са функциите $y_1(x) = e^{2x}$ и $y_2(x) = xe^{2x}$.

а) Пресметнете детерминантата на Вронски за функциите $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

б) Защо функциите $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуват фундаментална система от решения на линейно диференциално уравнение от втори ред с постоянни коефициенти? Напишете това уравнение.

Задача 13. Дадено е уравнението

$$(3x+1)y'' + (3x-2)y' - 3y = 0, \quad x > -1/3.$$

а) Намерете частно решение на уравнението от вида $y_1(x) = ax + b$, $a \neq 0$.

б) Проверете, че функцията $y_2(x) = e^{-x}$ също е решение на даденото уравнение. Пресметнете детерминантата на Вронски за функциите $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

в) Намерете общото решение на уравнението.

Задача 14. Дадено е уравнението

$$y' = \frac{4y - 2x - 6}{x + y - 3}. \quad (*)$$

- 1.) Намелете пресечната точка (a, b) на правите $l_1 : 4y - 2x - 6 = 0$ и $l_2 : x + y - 3 = 0$.
- 2.) Уравнение от какъв тип се получава за функцията $z(t) = y(t+a) - b$ след като направите смяна на променливите $x = t + a, y = z + b$ в уравнението $(*)$?

Задача 15. За уравнението

$$y' + 2y^2 = \frac{6}{x^2} \quad (**)$$

намерете частно решение от вида $y_1(x) = \frac{a}{x}$. Уравнение от какъв тип се получава за функцията $z(x)$ след полагане $y(x) = z(x) + y_1(x)$ в $(**)$?

Задача 16. Дадена е задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = a(x)y + x^2 \\ y(1) = 2 \end{cases},$$

където $a \in C(-3, 5)$. Проверете, че функцията

$$y(x) := e^{\int_1^x a(t) dt} \left(2 + \int_1^x t^2 e^{-\int_1^t a(s) ds} dt \right)$$

е решение да дадената задача на Коши в интервала $(-3, 5)$.

Задача 17. Дадено е уравнението

$$y'' + p y' + 4y = 0,$$

където p е реален параметър.

а) При какви стойности на p всички решения на уравнението са ограничени за $x \in (-\infty, +\infty)$?

б) При какви стойности на p всички решения на уравнението клонят към 0 при $x \rightarrow -\infty$?

в) При какви стойности на p уравнението има поне едно периодично решение, различно от $y(x) \equiv 0$?

Задача 18. Решете уравнението

$$xyy'' - yy' = x(y' - 2y)y'.$$

Задача 19. Решете уравнението

$$3xyy'' = (xy + 3y + 3xy')y'.$$

Задача 20. Решете уравнението

$$y'y'' + 2(y')^4 + y^2y'' + 2y^2(y')^3 = 0.$$