Семинар 04

Ивайло Андреев

13 март 2025

1 Уравнения, нерешени относно производната

1.1 Общ случай

$$y(x) = f(x, y'(x))$$

Полагаме $z(x) = y'(x)$
Получаваме $y(x) = f(x, z(x))$
Диференцираме по x.
Трябва да се получи нещо хубаво.
ВАЖНО! В крайния отговор трябва да има точно 1 константа, тъй като това е ОДУ от първи ред!

1.2 2024г., контролно 1, вариант C, задача 2

$$y = x^2(y')^2 + x \ln x y' + 1$$

Полагаме $z(x) = y'(x)$

$$y = x^2 z^2 + x \ln x z + 1 \qquad (*)$$

Диференцираме у-нието $(*)$ по x

$$y' = 2xz^2 + 2x^2 zz' + (x \ln x)' z + x \ln x z'$$

$$z = 2xz^2 + 2x^2 zz' + (\ln x + 1)z + x \ln x z'$$

$$\cancel{z} = 2xz^2 + 2x^2 zz' + \ln x z + + \cancel{z} + x \ln x z'$$

$$0 = 2xz^2 + 2x^2 zz' + \ln x z + x \ln x z'$$

$$0 = 2xz(z + xz') + \ln x (z + xz')$$

$$0 = (z + xz')(2xz + \ln x)$$

Първи случай: $z + xz' = 0$

$$z'x = -z$$

Проверяваме дали $z \equiv 0$ е решение, като заместим в $(*)$. $y = 1$ е решение.
Делим на $z \neq 0$

$$\frac{z'}{z} = -\frac{1}{x}$$

Интегрираме по x

$$\int \frac{1}{z} dz = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln |z| = \ln |x| + C$$

$$\mathrm{e}^{\ln |z|} = \mathrm{e}^{\ln |\frac{1}{x}| + C}$$

$$|z| = \mathrm{e}^C \left| \frac{1}{x} \right|$$

$$z = \pm C_1 \frac{1}{x}$$

$$z = C_2 \frac{1}{x}$$

Заместваме в $(*)$ с z

$$y = C_2^2 + C_2 \ln x + 1$$

Втори случай: $2xz + \ln x = 0$

$$z = -\frac{\ln x}{2x}$$

Заместваме в $(*)$ с z

$$y = x^2 \frac{\ln^2 x}{4x^2} - x \ln x \frac{\ln x}{2x} + 1$$

$$y = \frac{\ln^2 x}{4} - \frac{\ln^2 x}{2} + 1$$

$$y = -\frac{\ln^2 x}{4} + 1$$

2 Автономни нелинейни уравнения

2.1 Общ случай

$$f(y, y', y'') = 0$$

x не участва явно.

Възможно е x да не участва явно, но уравнението да не се решава с долуописания алгоритъм.

Полагаме $y'(x) = P(y(x))$

$$y''(x) = P'P$$

Заместваме в уравнението и трябва да се получи нещо хубаво.

Интегрира се по y. (Това е единственият тип задача, където се интегрира по y)

2.2 2024г., контролно 1, вариант F, задача 2

$$y'' = 2\mathrm{e}^y y'(y' - 3)^2$$

Полагаме $y'(x) = P(y) = P$

Тогава $y''(x) = (P(y))' = P'(y)y'(x) = P'P$

$$P'P = 2\mathrm{e}^y P(P - 3)^2$$

$$P'P - 2\mathrm{e}^y P(P - 3)^2 = 0$$

$$P(P' - 2\mathrm{e}^y (P - 3)^2) = 0$$

Ако $P \equiv 0$, то $y' \equiv 0 \implies y = C_1^*$ е решение. Иначе делим на $P \neq 0$

$$P' - 2\mathrm{e}^y (P - 3)^2 = 0$$

$$P' = 2\mathrm{e}^y (P - 3)^2$$

Получаваме уравнение с разделящи се променлива за y и $P(y)$

Ако $(P - 3)^2 \equiv 0$, то $P = 3$ и $y' \equiv 3 \implies y = 3x + C_2^*$ е решение. Иначе делим на $(P - 3)^2 \neq 0$

$$\frac{P'}{(P - 3)^2} = 2\mathrm{e}^y$$

Интеграраме по y

$$\int \frac{P'}{(P - 3)^2} dy = \int 2\mathrm{e}^y dy$$

$$\int \frac{1}{(P-3)^2} d(P-3) = 2\int \mathrm{e}^y dy$$

$$-\frac{1}{P-3} = 2\mathrm{e}^y - C_1$$

$$\frac{1}{P-3} = -2\mathrm{e}^y + C_1$$

$$\frac{1}{C_1 - 2\mathrm{e}^y} = P - 3$$

$$P = 3 + \frac{1}{C_1 - 2\mathrm{e}^y}$$

$$y' = 3 + \frac{1}{C_1 - 2\mathrm{e}^y}$$

Получаваме уравнение с разделящи се променлива за x и $y(x)$

$$y' = \frac{3C_! - 6\mathrm{e}^y + 1}{C_! - 2\mathrm{e}^y}$$

Нека $C_2 = 3C_! + 1 \implies C_! = \dfrac{C_2 - 1}{3}$

$$y' = \frac{3C_2 - 18\mathrm{e}^y}{C_2 - 1 - 6\mathrm{e}^y}$$

$$y' \frac{C_2 - 1 - 6\mathrm{e}^y}{3C_2 - 18\mathrm{e}^y} = 1$$

$$y' \frac{3C_2 - 18\mathrm{e}^y - 3}{3C_2 - 18\mathrm{e}^y} = 3$$

$$y' \left(1 - 3\frac{1}{3C_2 - 18\mathrm{e}^y}\right) = 3$$

$$y' \left(1 - \frac{1}{C_2 - 6\mathrm{e}^y}\right) = 3$$

$$y' \left(1 + \frac{1}{6\mathrm{e}^y - C_2}\right) = 3$$

Интегрираме по x

$$\int y' \left(1 + \frac{1}{6\mathrm{e}^y - C_2}\right) dx = \int 3dx$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{6\mathrm{e}^y - C_2}\right) dy = 3\int dx$$

$$\int dx + \frac{1}{6}\int \frac{1}{\mathrm{e}^y - \frac{C_2}{6}}dy = 3\int dx$$

Решаваме интеграла

$$I = \int \frac{1}{\mathrm{e}^y - \frac{C_2}{6}}dydx$$

Полага се $u = e^y$, откъдето $du = e^y dy = udy$, следователно

$$I = \int \frac{du}{u(u - \frac{C_2}{6})}$$

Разлагаме на елементарни дроби

$$\frac{1}{u(u - \frac{C_2}{6})} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u - \frac{C_2}{6}} = \frac{A(u - \frac{C_2}{6}) + Bu}{u(u - \frac{C_2}{6})}$$

$$1 = A(u - \frac{C_2}{6}) + Bu$$

$$A = -\frac{6}{C_2}; \quad B = \frac{6}{C_2}$$

$$I = \int \left(-\frac{6}{C_2}\frac{1}{u} + \frac{6}{C_2}\frac{1}{u - \frac{C_2}{6}} \right) du$$

$$I = -\frac{6}{C_2}\ln|u| + \frac{6}{C_2}\ln\left|u - \frac{C_2}{6}\right| + C$$

$$I = \frac{6}{C_2}\ln\left|\frac{e^y - \frac{C_2}{6}}{e^y}\right| + C$$

$$y + \frac{\ln\left|1 - \frac{C_2}{6\mathrm{e}^y}\right|}{C_2} = 3x + C_3$$

3 Уравнения, където липсват първите младши производни

3.1 Общ случай

$$f(x, y', y'') = 0$$

В случая липсват първите 1 най-млладши производни, а именно y.
Тогава полагаме $p(x) = y'(x)$

3.2 Задача 2.2.3 от учебника на проф. Огнян Христов

$$y'' + (y')^2 = y'\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Полагаме $p(x) = y'(x)$

$$p' + p^2 = p\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$p' = p\left(x + \frac{1}{x}\right) - p^2$$

Получихме уравнение на Бернули

$$z = p^{-1} \implies z' = -p^{-2}p' \implies p' = -z'p^{-2}$$

$$z' = z\left(-x - \frac{1}{x}\right) + 1$$

$$I = -\int \left(-x - \frac{1}{x}\right) dx$$

$$I = -\frac{x^2}{2} - \ln|x| + C_!$$

$$z = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2} - \ln|x| + C_1}\left(C + \int \mathrm{e}^{+\frac{x^2}{2} + \ln|x| - C_1} dx\right)$$

$$z = \mathrm{e}^{C_1}\left|\frac{1}{x}\right|\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(C + \int \mathrm{e}^{C_1}|x|\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} dx\right)$$

$$z = \pm\mathrm{e}^{C_1}\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(C + \int \frac{1}{\pm\mathrm{e}^{C_1}} x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} dx\right)$$

$$z = C_2\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(C + \frac{1}{C_2}\int x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} dx\right)$$

$$z = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(C_2C + \frac{C_2}{C_2}\int x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} dx\right)$$

$$z = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(C_3 + \int \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} d\frac{x^2}{2}\right)$$

$$z = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left(C_3 + \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\right)$$

$$\frac{1}{p} = \frac{C_3}{x}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{y'} = \frac{1+C_3}{x}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y' = \frac{x}{1+C_3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}$$

Получаваме уравнение с разделени променливи

$$\int y'dx = \int \frac{x}{1+C_3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}dx$$

Решаваме интеграла

$$J = \int \frac{x}{1+C_3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}dx$$

$$J = -\int \frac{1}{1+C_3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}d\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$J = -\int \frac{1}{1+C_3\mathrm{e}^{u}}du$$

$$J = -\int \frac{1}{v(1+C_3v)}dv$$

$$J = -\frac{1}{C_3}\int \frac{1}{v(1+\frac{v}{C_3})}dv$$

$$\frac{1}{v(1+\frac{v}{C_3})} = \frac{A}{v} + \frac{B}{1+\frac{v}{C_3}} = \frac{Av+\frac{A}{C_3}+Bv}{v(1+\frac{v}{C_3})}$$

$$A = C_3; \quad B = -C_3$$

$$J = -\frac{1}{C_3}\int \left(\frac{C_3}{v} - \frac{C_3}{1+\frac{v}{C_3}}\right)dx$$

$$J = -\int \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{1+\frac{v}{C_3}}\right)dx$$

$$J = -\ln|v| + \ln|1+\frac{v}{C_3}| + C_4$$

$$J = -\ln|\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}| + \ln|1+\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{C_3}| + C_4$$

$$J = \frac{x^2}{2} + \ln|1+\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{C_3}| + C_4$$

Така решението е

$$y = \frac{x^2}{2} + \ln|1 + \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{C_3}| + C_4$$

4 Хомогенни уравнения от по-висок ред

4.1 2024г., контролно 1, вариант A, задача 2

$$[3x\sin(3x) - \cos(3x)]yy' = x\cos(3x)[(y')^2 - yy'']$$

Полагаме $z = \frac{y'}{y}$

$$y' = yz$$

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z')$$

Заместваме в уравнението

$$[3x\sin(3x) - \cos(3x)]y^2z = x\cos(3x)[y^2z^2 - y^2(z^2 + z')]$$

$$[3x\sin(3x) - \cos(3x)]y^2z = x\cos(3x)[y^2z^2 - y^2z^2 - y^2z')]$$

$$[3x\sin(3x) - \cos(3x)]y^2z = -x\cos(3x)y^2z'$$

Получихме уравнение с разделени променливи.
$y \equiv 0$ е решение на уравнението. Делим на $y^2 \neq 0$

$$[3x\sin(3x) - \cos(3x)]z = -x\cos(3x)z'$$

$$z' = -\frac{3x\sin(3x) - \cos(3x)}{x\cos(3x)}z$$

$z \equiv 0$ е решение и тогава $y' = 0$ е решение и съответно $y = C$ е решение. Делим на $z \neq 0$

$$\frac{z'}{z} = \frac{\cos(3x) - 3x\sin(3x)}{x\cos(3x)}$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{1}{x} - 3\tan(3x)$$

$$\int \frac{z'}{z}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int 3\tan(3x)dx$$

$$\int \frac{1}{z} dz = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} d(3x)$$

$$\int \frac{1}{z} dz = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{\cos(3x)} d\cos(3x)$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln|\cos(3x)| + C_1$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln|\cos(3x)| + \ln C_2$$

$$\ln|z| = \ln|x\cos(3x)C_2|$$

$$z = \pm C_2 x \cos(3x)$$

$$z = C_3 x \cos(3x)$$

$$\frac{y'}{y} = C_3 x \cos(3x)$$

Получихме уравнение с разделени променливи.

$$\int \frac{y'}{y} dx = \int C_3 x \cos(3x) dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = C_3 \int x \cos(3x) dx$$

$$I = \int x \cos(3x) dx$$

$$I = \frac{1}{9} \int 3x \cos(3x) d(3x)$$

$$I = \frac{1}{9} \int u \cos u du$$

$$I = \frac{1}{9} \int u d\sin u$$

$$I = \frac{1}{9} \left(u \sin u - \int \sin u du \right)$$

$$I = \frac{1}{9} (u \sin u + \cos u) + C_4$$

$$I = \frac{x\sin(3x)}{3} + \frac{\cos(3x)}{9} + C_4$$

$$\ln|y| = \frac{C_3 x\sin(3x)}{3} + \frac{C_3\cos(3x)}{9} + C_3C_4$$

$$y = \pm \mathrm{e}^{\frac{C_3 x\sin(3x)}{3} + \frac{C_3\cos(3x)}{9} + C_3C_4}$$

4.2 2022г., контролно 1, вариант 2, задача 2

$$4xyy'' - x^2y^2 = 4x(y')^2 + 8yy', \quad x > 0$$

Полагаме $z = \dfrac{y'}{y}$

$$y' = yz$$

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z')$$

Заместваме в уравнението

$$4xy^2(z' + z^2) - x^2y^2 = 4xy^2z^2 + 8y^2z$$

$y \equiv 0$ е решение на уравнението. Делим на $y^2 \neq 0$

$$4x(z' + z^2) - x^2 = 4xz^2 + 8z$$

$$4xz' + 4xz^2 - x^2 = 4xz^2 + 8z$$

$$4xz' - x^2 = 8z$$

$$4xz' = x^2 + 8z$$

$$z' = \frac{x}{4} + z\frac{2}{x}$$

$$z' = z\frac{2}{x} + \frac{x}{4}$$

Получихме линейно уравнение

$$I = \int \frac{2}{x}dx$$

$$I = 2\int \frac{1}{x}dx$$

$$I = 2\ln|x|$$

$$I = \ln x^2$$

$$-I = -\ln x^2 = \ln x^{-2}$$

$$z = \mathrm{e}^{\ln x^2}\left(C + \frac{1}{4}\int x\mathrm{e}^{\ln x^{-2}}dx\right)$$

$$z = x^2\left(C + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}dx\right)$$

$$z = x^2\left(C + \frac{1}{4}\ln|x|\right)$$

$$z = Cx^2 + \frac{x^2\ln|x|}{4}$$

По условие имаме, че $x > 0$ и съответно можем да разкрием модула

$$z = Cx^2 + \frac{x^2\ln x}{4}$$

$$\frac{y'}{y} = Cx^2 + \frac{x^2\ln x}{4}$$

Получаваме уравнение с разделени променливи

$$\int \frac{y'}{y}dx = \int \left(Cx^2 + \frac{x^2\ln x}{4}\right)dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = C\int x^2dx + \frac{1}{4}\int x^2\ln x dx$$

Решаваме интеграла

$$J = \int x^2\ln x dx$$

$$J = \frac{1}{3}\int \ln x dx^3$$

$$J = \frac{1}{3}\left(x^3\ln x - \int x^3 d\ln x\right)$$

$$J = \frac{1}{3}\left(x^3\ln x - \int \frac{1}{x}x^3dx\right)$$

$$J = \frac{1}{3}\left(x^3 \ln x - \int x^2 dx\right)$$

$$J = \frac{1}{3}\left(x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}\right)$$

$$J = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9}$$

Така получаваме

$$\ln|y| = \frac{Cx^3}{3} + \frac{x^3 \ln x}{12} - \frac{x^3}{36} + C_2$$

$$|y| = \mathrm{e}^{\frac{Cx^3}{3} + \frac{x^3 \ln x}{12} - \frac{x^3}{36} + C_2}$$

$$|y| = \mathrm{e}^{C_2}\mathrm{e}^{\frac{Cx^3}{3} + \frac{x^3 \ln x}{12} - \frac{x^3}{36}}$$

$$y = \pm\mathrm{e}^{C_2}\mathrm{e}^{\frac{Cx^3}{3} + \frac{x^3 \ln x}{12} - \frac{x^3}{36}}$$

$$y = C_3\mathrm{e}^{\frac{Cx^3}{3} + \frac{x^3 \ln x}{12} - \frac{x^3}{36}}$$