Семинар 02

Ивайло Андреев

27 февруари 2025

1 Въвеждаща задача

Ще започнем със задача, давана на държавен изпит на специалност "Приложна математика септември 2007г.

Да се намери в явен вид функцията $f : (-\pi, 2\pi) \to \mathbb{R}$, определена от условията:

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{\sin x + 2\cos x + 3} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Ще намерим функцията в явен вид, като интегрираме

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x + 2\cos x + 3}$$

$$\int f'(x)dx = \int \frac{1}{\sin x + 2\cos x + 3}dx$$

$$\int df(x) = \int \frac{1}{\sin x + 2\cos x + 3}dx$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int \frac{1}{\sin x + 2\cos x + 3} dx \\
&= \int \frac{1}{\frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} + \frac{2-2\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} + \frac{3+3\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}} dx \\
&\overset{u=x/2}{=} 2\int \frac{1+\tan^2 u}{\tan^2 u + 2\tan u + 5} du \\
&\overset{v=\tan u}{=} 2\int \frac{1+v^2}{v^2+2v+5} d\arctan v \\
&= 2\int \frac{1}{1+v^2}\frac{1+v^2}{v^2+2v+5} dv \\
&= 2\int \frac{1}{v^2+2v+1+4} dv \\
&= 2\int \frac{1}{(v+1)^2+4} dv \\
&= \frac{2}{4}\int \frac{1}{\frac{(v+1)^2}{4}+1} dv \\
&= \int \frac{1}{1+\left(\frac{v+1}{2}\right)^2} d\left(\frac{v+1}{2}\right)^2 \\
&= \arctan\left(\frac{v+1}{2}\right) + C \\
&= \arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{2}\right) + C
\end{aligned}
$$

Така намерихме f в явен вид с точност до 1 произволна константа. От даденото допълнително условие ще елиминираме константата.

$$
\begin{aligned}
f(0) = 0 \implies \arctan\left(\frac{\tan\frac{0}{2}+1}{2}\right) + C = 0 \\
\implies C = -\arctan\frac{1}{2} \approx -0.46
\end{aligned}
$$

Така получихме единствено решение за f:

$$
f(x) = \arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{2}\right) - \arctan\frac{1}{2}
$$

Коментар: Уравнението, което ни беше дадено включва производната на f и нейните аргументи и по дефиниция е диференциално уравнение и то ДУ от първо ред. Както видяхме, ако нямаме начални условия получаваме безброй много решения, които се различават с една константа. И когато добавихме начално условие, получихме достатъчно информация така, че да намерим единствено решение за уравнението. Такава постановка наричаме задача на Коши. За ДУ от ред n са необходими n на брой начални условия в една и съща точка $x_0 \in \Delta$.

2 Уравнения с разделени променливи

2.1 Общ случай

Уравнение с разделящи се променливи наричаме ДУ от следния вид:

$$y'(x) = f(x)g(y)$$

където $f(x)$ и $g(y)$ са непрекъснати функции.
Ако $g(\xi) = 0$ за $\xi \in \mathbb{R}$, то $y(x) \equiv \xi$ е решение на ДУ.
За y такова, че $g(y) \neq 0$ делим на $g(y)$.

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

Интегрираме по x.

$$\int \frac{y'}{g(y)} \mathrm{d}x = \int f(x) \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{g(y)} \mathrm{d}y = \int f(x) \mathrm{d}x$$

Ако $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати функции, то можем да решим интегралите.
Получаваме следните примитивни функции:

$$G'(y) = \frac{1}{g(y)} \text{ и } F'(x) = f(x)$$

Така

$$G(y) = F(x) + C$$

Ако $G(y)$ е взаимно еднозначна (биекция), то можем да запишем решението в явен вид по следния начин:

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$$

2.2 Задача 1.1.5 от учебника на проф. Огнян Христов

$$y' = x - 1 - y^2 + xy^2$$

$$y' = x - 1 + y^2(x - 1)$$

$$y' = (x - 1)(1 + y^2)$$

Сведохме до у-ние с разделени променливи.
Делим на $1 + y^2 \neq 0$

$$\frac{y'}{1 + y^2} = x - 1$$

$$\int \frac{y'}{1 + y^2} dx = \int (x - 1) dx$$

$$\arctan y = \frac{x^2}{2} - x + C \qquad \frac{x^2}{2} - x + C \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = \tan\left(\frac{x^2}{2} - x + C\right) \qquad \frac{x^2}{2} - x + C \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

2.3 Задача 1.1.6 от учебника на проф. Огнян Христов

$$y' = \cot x \tan y$$

при $\tan y = 0$ имаме, че $y = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ е решение
Делим на $\tan y \neq 0$:

$$\frac{y'}{\tan y} = \cot x$$

$$\frac{y'}{\tan y} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{1}{\tan y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{1}{\tan y} \cdot dy = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot dx$$

$$\cot y \cdot dy = \cot x \cdot dx$$

$$\int \cot y \cdot dy = \int \cot x \cdot dx$$

$$\ln|\sin y| = \ln|\sin x| + C$$

$$\ln|\sin y| = \ln|\sin x| + \ln C_1$$

$$\ln|\sin y| = \ln|C_1 \sin x|$$

$$\sin y = C_1 \sin x$$

$$y = \arcsin\left(C_1 \sin x\right)$$

$$y = \arcsin\left(C \sin x\right)$$

2.4 Задача 1.1.8 от учебника на проф. Огнян Христов

$$\begin{cases} xy - (1+y^2)\sqrt{1+x^2}y' = 0 \\ y(\sqrt{8}) = 1 \end{cases}$$

$$(1+y^2)\sqrt{1+x^2}\, y' = xy$$

$$\frac{1+y^2}{y}y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int \frac{1+y^2}{y}y'dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$\int \frac{1+y^2}{y}dy = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy + \int ydy = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}d(x^2+1)$$

$$\ln|y| + \frac{y^2}{2} = \sqrt{x^2+1} + C$$

Прилагаме началното условие от задачата на Коши $y(\sqrt{8}) = 1$

$$\ln|1| + \frac{1}{2} = \sqrt{8+1} + C$$

$$C = -\frac{5}{2}$$

$$\ln|y| + \frac{y^2}{2} = \sqrt{x^2+1} - \frac{5}{2}$$

2.5 2024г., изпит-задачи, вариант F, задача 1

$$(x+1)^2 y' = \mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} (2y-3)^2$$

Разглеждаме $(2y-3)^2 = 0$
$y = \dfrac{3}{2}$ е решение
Делим на $(2y-3)^2 \neq 0$

$$\frac{y'}{(2y-3)^2} = \frac{\mathrm{e}^{x+1}}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{y'}{(2y-3)^2} dx = \int \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2} dx$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{(2y-3)^2} d(2y-3) = \int \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2} d(x+1)$$

В десния интеграл внасяме $\dfrac{1}{(x+1)^2}$ под диференциала

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{(2y-3)^2} d(2y-3) = -\int \mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} d\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$-\frac{1}{2(2y-3)} = -\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} + C$$

$$y = \frac{1}{4\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} + C} + \frac{3}{2}$$

3 Хомогенни уравнения от първи ред

3.1 Общ случай

Хомогенно уравнение наричаме ДУ от следния вид:

$$y'(x) = F\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$

където F е непрекъсната в отворения интервал (α, β).
Хомогенното уравнение може да бъде записано във вида:

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

където M и N са хомогенни функции от степен k.
Ще решим уравнението като направим следното полагане:

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}$$

Така можем да изразим y по следния начин:

$$y = xz$$

Диференцираме по x.

$$y' = x'z + xz' = z + xz'$$

Заместваме в даденото уравнение и получаваме:

$$z + xz' = F(z)$$

$$xz' = F(z) - z$$

$$z' = \frac{1}{x}(F(z) - z)$$

Така получаваме уравнение с разделени променливи относно z.

3.2 Задача 1.2.2 от учебника на проф. Огнян Христов

$$xy^2y' = x^3 + y^3$$

$y \equiv 0$ не е решение и съответно делим на xy^2

$$y' = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{y}{x}$$

$$y' = \left(\frac{1}{\frac{y}{x}}\right)^2 + \frac{y}{x}$$

Полагаме $z = \dfrac{y}{x} \implies y' = z'x + z$

$$z'x + z = \left(\frac{1}{z}\right)^2 + z$$

$$z'x = \frac{1}{z^2}$$

$$z'z^2 = \frac{1}{x}$$

$$\int z^2 dz = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{z^3}{3} = \ln|x| + C$$

$$z = \sqrt[3]{3\ln|x| + C}$$

$$y = x\sqrt[3]{3\ln|x| + C}$$

4 Уравнения от вид на линейна фунцкия

4.1 Общ случай

Уравнение от вид на линейна функция наричаме ДУ от следния вид:

$$y' = f(ax + by + c)$$

където $a, b \neq 0$

$$\text{Полагаме } z(x) = ax + by(x) + c$$

$$z'(x) = a + by'(x)$$

$$y' = \frac{z'(x) - a}{b}$$

Заместваме в даденото уравнение:

$$\frac{z'(x) - a}{b} = f(z)$$

$$z' = bf(z) + a$$

$$\frac{z'}{bf(z) + a} = 1$$

Получихме уравнение с разделящи се променливи.

4.2 2024г., контролно 1, вариант А, задача 1

$$\begin{cases} y' = (5x + y - 1)^2 - 4(5x + y - 1) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Полагаме $z = 5x + y - 1 \implies y' = z' - 5$

$$z' - 5 = z^2 - 4z$$

$$z' = z^2 - 4z + 5$$

Делим на $z^2 - 4z + 5 > 0$

$$\frac{z'}{z^2 - 4z + 5} = 1$$

Получихме у-ние с разделени променливи

$$\int \frac{1}{z^2 - 4z + 5} dz = \int dx$$

$$\int \frac{1}{(z-2)^2 + 1} d(z-2) = \int dx$$

$$\arctan(z-2) = x + C$$

$$\arctan(5x + y - 3) = x + C$$

Прилагаме началното условие $y(1) = 1$

$$\arctan 3 = 1 + C$$

$$C = \arctan 3 - 1$$

Така

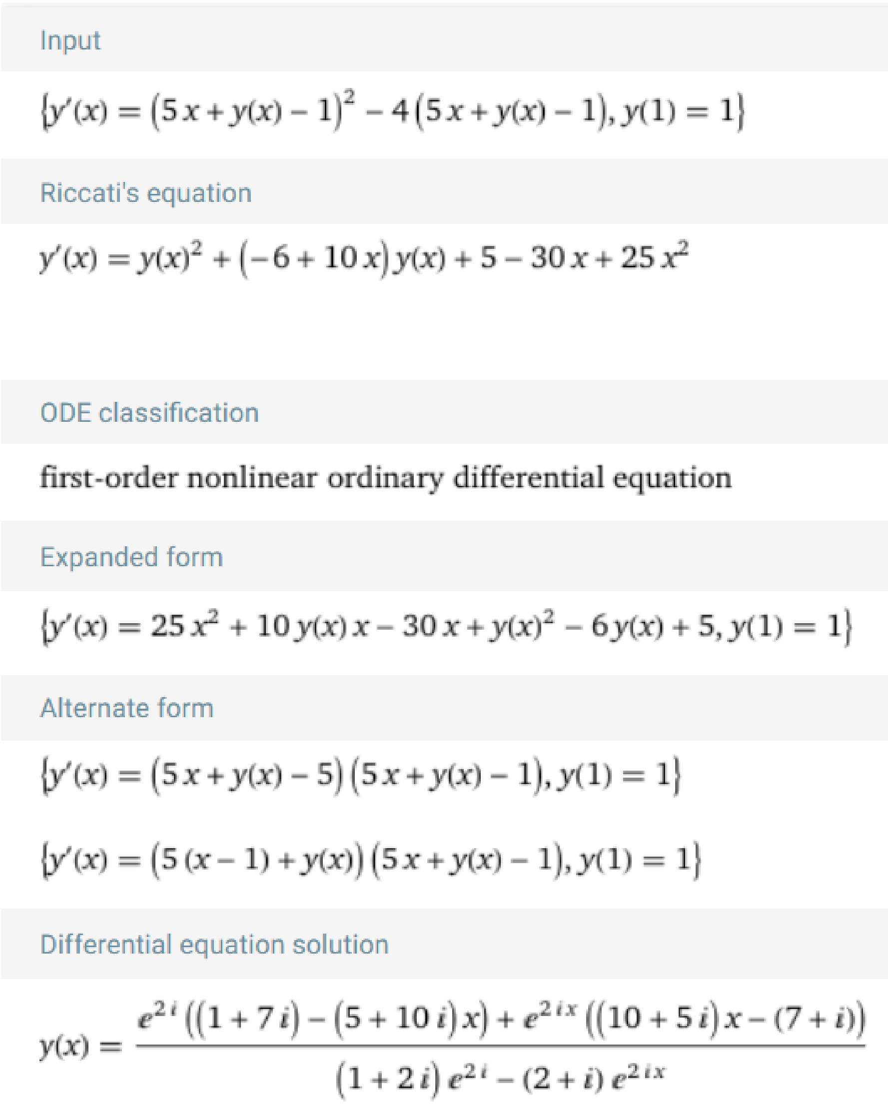
$$\arctan(5x + y - 3) = x + \arctan 3 - 1 \qquad x + \arctan 3 - 1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$5x + y - 3 = \tan(x + \arctan 3 - 1)$$

$$y = 3 - 5x + \tan(x + \arctan 3 - 1)$$

4.2.1 Коментари и коректност

Добре, получихме решение. Как можем да проверим дали е вярно?
Най-довереният ни източник по подразбиране е Wolfram Alhpa и се обръщаме към него.



Input

$$\{y'(x) = (5x + y(x) - 1)^2 - 4(5x + y(x) - 1), y(1) = 1\}$$

Riccati's equation

$$y'(x) = y(x)^2 + (-6 + 10x)\, y(x) + 5 - 30x + 25x^2$$

ODE classification

first-order nonlinear ordinary differential equation

Expanded form

$$\{y'(x) = 25x^2 + 10\, y(x)\, x - 30x + y(x)^2 - 6\, y(x) + 5, y(1) = 1\}$$

Alternate form

$$\{y'(x) = (5x + y(x) - 5)(5x + y(x) - 1), y(1) = 1\}$$

$$\{y'(x) = (5(x - 1) + y(x))(5x + y(x) - 1), y(1) = 1\}$$

Differential equation solution

$$y(x) = \frac{e^{2i}((1 + 7i) - (5 + 10i)x) + e^{2ix}((10 + 5i)x - (7 + i))}{(1 + 2i)e^{2i} - (2 + i)e^{2ix}}$$

Фигура 1: Решение от Wolfram Alpha

То ни дава някакво решение, но изглежда не използва факта, че уравнението е доста нагласено и го свежда до уравнение на Рикати от вида $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$, което не може да се реши в общия случай с елементарни математически операции. Wolfram ни дава някакво комплексно решение. Няма да го изследваме дали съвпада с нашето получено. Вместо това ще направим проверка за коректност на нашето решение по друг начин.

Ще проверим дали решението ни е коректно по по-традиционен начин, а именно като заместим с получения резултат и видим дали имаме тъждество. Вместо да го правим на ръка, това е добър момент да въведем символно смятане. В случая ще накараме машина (с помощта на Octave) да направи нужните сметки.

Код:

```
syms x C;

y(x) = 3 - 5*x + tan(x+C)

C = solve(y(1) == 1, C)

y(x) = 3 - 5*x + tan(x+C)

lhs = diff(y(x), x)

rhs = simplify(
    (5*x+y-1)^2 - 4*(5*x+y-1)
)

lhs == rhs
```

Изход:

```
y(x) = (symfun) -5*x + tan(C + x) + 3
C = (sym) -1 + atan(3)
y(x) = (symfun) -5*x + tan(x - 1 + atan(3)) + 3
lhs = (sym)

     2
  tan (x - 1 + atan(3)) - 4

rhs = (sym)

     2
  tan (x - 1 + atan(3)) - 4

ans = (sym) True
```