Isolamento de Raízes

Cálculo Numérico

Ivo Calado

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas

23 de Fevereiro de 2016

Roteiro

Observação

Este material é baseado no material produzido pelo professor **Jonas Joacir Radtke** da **UFTPR**

Definição

Um número real ξ é um **zero da função** $f(x)$ ou uma **raiz da equação** $f(x) = 0$ se $f(\xi) = 0$.

Etapas para o cálculo de raizes

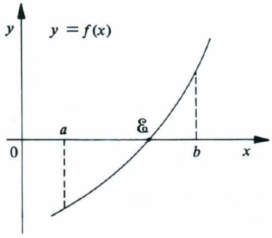
(i) **Localização** ou **isolamento** das raízes, que consiste em obter um intervalo que contém a raiz; e

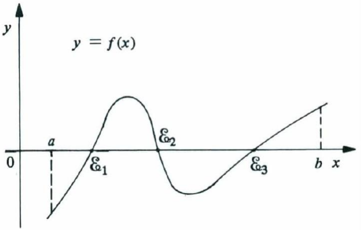
(ii) **Refinamento**, que consiste em, escolhidas aproximações iniciais no intervalo encontrado no processo de localização, melhorá-las sucessivamente até se obter uma aproximação para a raiz dentro de uma precisão ε prefixada.

Isolamento de Raízes

Teorema de Bolzano

Se uma função contínua $f(x)$ assume valores de sinais opostos nos pontos extremos do intervalo $[a, b]$, isto é $f(a) \cdot f(b) < 0$, então o intervalo conterá, no mínimo, uma raiz da equação $f(x) = 0$, em outras palavras haverá, no mínimo, um número $\xi \in (a, b)$ tal que $f(\xi) = 0$.





Observação: Sob as hipóteses do Teorema de Bolzano, se $f'(x)$ existir e preservar o sinal em (a, b), então este intervalo contém um única equação de $f(x) = 0$.

Exemplo

Isolar os zeros reais de $f(x) = x^3 - 9x + 3$.

Solução: Construindo uma tabela de valores para $f(x)$ e considerando apenas os sinais temos:

x	$-\infty$	-100	-10	-5	-3	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

Sabendo que $f(x)$ é contínua para qualquer x real e observando as variações de sinal, podemos concluir que cada um dos intervalos $I_1 = [-5, -3]$, $I_2 = [0, 1]$ e $I_3 = [2, 3]$ contém pelo menos um zero de $f(x)$. ■

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Exercício

Isolar os zeros da função $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$.

Solução: Temos que $D(f) = \mathbb{R}^+$ ($D(f) \equiv$ domínio de $f(x)$). Construindo uma tabela de valores com o sinal de $f(x)$ para determinados valores de x temos

x	0	1	2	3	...
$f(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	...

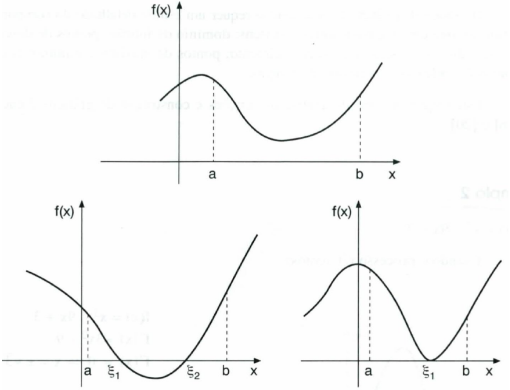
Analisando a tabela, vemos que $f(x)$ admite pelo menos um zero no intervalo $(1, 2)$.

Para saber se este zero é único neste intervalo devemos analisar o sinal de $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5e^{-x} > 0, \forall x > 0$$

Assim, podemos concluir que $f(x)$ admite um único zero em todo seu domínio de definição e este zero está no intervalo $(1, 2)$. ■

Observação: Se $f(a) \cdot f(b) > 0$ então podemos ter várias situações no intervalo $[a, b]$, conforme mostram os gráficos:



A análise gráfica da função $f(x)$ ou da equação $f(x) = 0$ é fundamental para se obter boas aproximações para a raiz.

Para analisar graficamente uma função ou equação é suficiente utilizar um dos seguintes processos:

(i) esboçar o gráfico da função $f(x)$ e localizar as absisas dos pontos onde a curva intercepta o eixo ox;

(ii) a partir da equação $f(x) = 0$, obter a equação equivalente $g(x) = h(x)$, esboçar os gráficos das funções $g(x)$ e $h(x)$ no mesmo eixo cartesiano e localizar os pontos x onde as duas curvas se interceptam, pois neste caso $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow g(\xi) = h(\xi)$

(iii) usar os programas que traçam gráficos de funções, disponíveis em algumas calculadoras ou softwares matemáticos.

Exercício 2

Analise graficamente as seguintes funções:

(a) $f(x) = x^3 - 9x + 3$

(b) $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$

(c) $f(x) = x \log(x) - 1$

Exercício 3

Isole ao menos uma das raízes das seguintes equações:

(a) $4\,cos(x) - e^{2x} = 0$

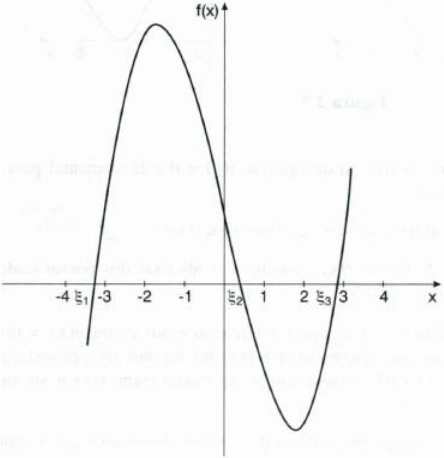
(b) $\frac{x}{2} - tg(x) = 0$

(c) $1 - x\,ln(x) = 0$

(d) $2^x - 3x = 0$

(e) $x^3 + x - 1000 = 0$

a)



$f(x) = x^3 - 9x + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 9$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

x	f(x)
−4	−25
−3	3
$-\sqrt{3}$	13.3923
−1	11
0	3
1	−5
$\sqrt{3}$	−7.3923
2	−7
3	3

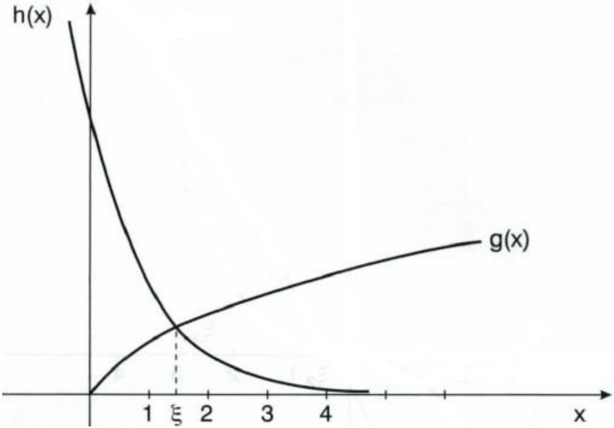
$\xi_1 \in (-4, -3)$

$\xi_2 \in (0, 1)$

$\xi_3 \in (2, 3)$

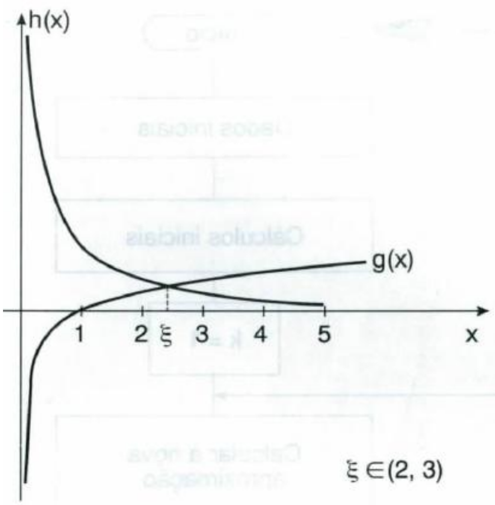
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

b)



$\xi \in (1, 2)$

c)

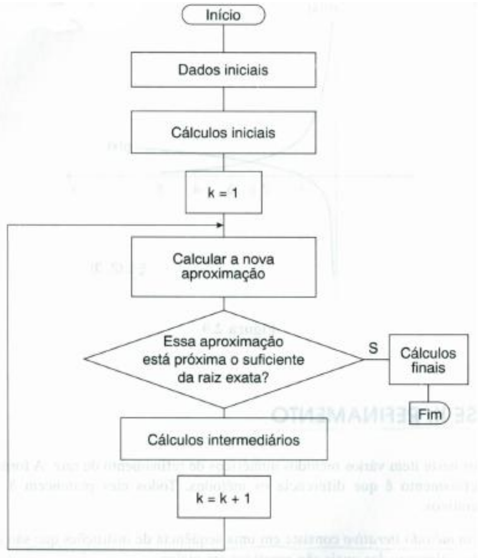


Refinamento

Definição

Um **método iterativo** consiste em uma sequência de instruções que são executadas passo a passo, algumas das quais são repetidas em ciclos.

A execução de um ciclo recebe o nome de **iteração**. Cada iteração utiliza resultados das iterações anteriores e efetua determinados testes que permitem verificar se foi atingido um resultado próximo o suficiente do resultado esperado.



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Critérios de Parada

Existem duas interpretações para raiz aproximada que nem sempre levam ao mesmo resultado:

$\overline{x}$ é raiz aproximada com precisão ε se:

(i) $|\overline{x} - \xi| < \varepsilon$ ou

(ii) $|f(\overline{x})| < \varepsilon$

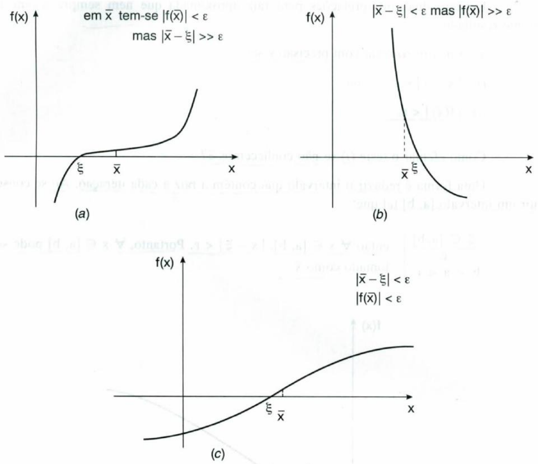
Para aplicar o teste (i) sem conhecer ξ podemos reduzir o intervalo que contém a raiz a cada iteração. Ao se conseguir um intervalo $[a, b]$ tal que:

$$\xi \in [a, b] \quad \text{e} \quad b - a < \varepsilon$$

então $\forall x \in [a, b]$, $|x - \xi| < \varepsilon$. Portanto $\forall x \in [a, b]$ pode ser tomado como $\overline{x}$.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Observação: Nem sempre é possível ter as exigências (i) e (ii) satisfeitas simultaneamente. Os gráficos a seguir ilustram algumas possibilidades:

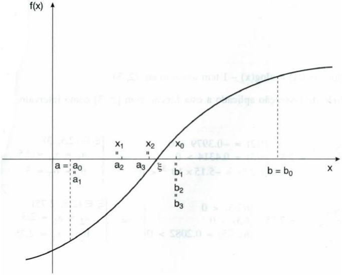


Método da Bissecção

Seja a função $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$ e tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$ e supondo por simplicidade que o intervalor (a, b) contenha uma única raiz da equação $f(x) = 0$.

Objetivo

Reduzir a amplitude do intervalo que contém a raiz até se atingir a precisão requerida: $b - a < \varepsilon$, usando para isto a sucessiva divisão de $[a, b]$ ao meio.



Exemplo

Encontre o zero da função $f(x) = x\log(x) - 1$ utilizando o Método da Bissecção.

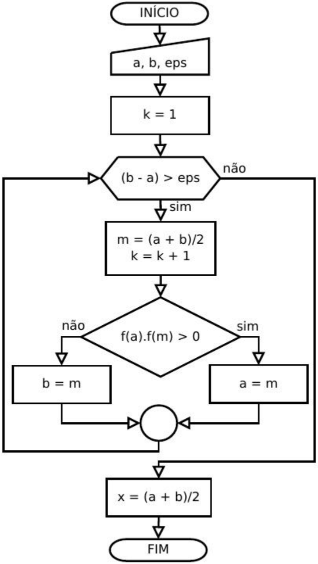
Solução: Já vimos que a função $f(x)$ dada tem um zero no intervalo $(2,3)$.

$$x_0 = \frac{2+3}{2} = 2,5 \left\{ \begin{array}{l} f(2) = -0,3979 < 0 \\ f(3) = 0,4314 > 0 \\ f(2,5) = -0,00515 < 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi \in (2,5;3) \\ a_1 = x_0 = 2,5 \\ b_1 = b_0 = 3 \end{array} \right.$$

$$x_1 = \frac{2,5+3}{2} = 2,75 \left\{ \begin{array}{l} f(2,5) < 0 \\ f(3) > 0 \\ f(2,75) = 0,2082 > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi \in (2,5;2,75) \\ a_2 = a_1 = 2,5 \\ b_2 = x_1 = 2,75 \end{array} \right.$$

Repetir o processo até atingir a precisão requerida.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS


INÍCIO
a, b, eps
k = 1
(b - a) > eps
não
sim
m = (a + b)/2
k = k + 1
f(a).f(m) > 0
não
sim
b = m
a = m
x = (a + b)/2
FIM

Em alguma etapa do processo tem-se ou a raiz exata ξ ou uma sequência infinita de intervalos encaixados a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, ..., tal que

$$f(a_n) \cdots f(b_n) < 0 \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Como a cada iteração o intervalo $[a, b]$ é dividido o meio, na n-ésima iteração o comprimento do intervalo será:

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

Deve-se obter o valor de n tal que $b_n - a_n < \varepsilon$, ou seja,

$$\frac{b_0 - a_0}{2^n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 2^n > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \log(2^n) > \log\left(\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}\right)$$

$$\Rightarrow \quad n\log(2) > \log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad n > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Exemplo

Se desejarmos encontrar ξ, o zero da função $f(x) = x\log(x) - 1$ que está no intervalo $[2,3]$ com precisão $\varepsilon = 10^{-2}$, quantas iterações, no mínimo, devemos efetuar?

Solução: Como $a_0 = 2$, $b_0 = 3$ e $\varepsilon = 10^{-2}$ temos que

$$n = \frac{\log(3-2) - \log(10^{-2})}{\log(2)}$$

$$n = \frac{\log(1) + 2\log(10)}{\log(2)}$$

$$n = \frac{0+2}{0,3010}$$

$$n \approx 6,64$$

Logo, devemos efetuar 7 iterações para atingir a precisão requerida.

Exercício 1

Estimar o número de iterações e calcular pelo menos um zero real das funções abaixo, usando o método da Bissecção e $\varepsilon = 0,1$.

(a) $f(x) = x^3 - 9x + 3$

(b) $f(x) = x + log(x)$

(c) $f(x) = 3x - cos(x)$

(d) $f(x) = x + 2\,cos(x)$

Exercício 2

Implementar o método da bissecção para obter pelo menos um zero real das funções do Exercício 1 com precisão $\varepsilon = 10^{-8}$. O programa deve imprimir as aproximações obtidas em cada iteração e fazer um gráfico da raiz aproximada versus k.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Método da Posição Falsa

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$, intervalo que contém uma raiz da equação $f(x) = 0$.
Supor que o intervalo (a, b) contenha uma única taiz da equação $f(x) = 0$. Podemos esperar conseguir a raiz aproximada $\overline{x}$ usando as informações sobre os valores de $f(x)$ disponíveis a cada iteração.
No caso da bissecção, x é simplesmente a média aritmética entre a e b:

$$x = \frac{a+b}{2}$$

O objetivo do método da posição falsa é obter uma aproximação melhor que a média aritmética

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$, intervalo que contém uma raiz da equação $f(x) = 0$.
Supor que o intervalo (a, b) contenha uma única taiz da equação $f(x) = 0$. Podemos esperar conseguir a raiz aproximada $\overline{x}$ usando as informações sobre os valores de $f(x)$ disponíveis a cada iteração.
No caso da bissecção, x é simplesmente a média aritmética entre a e b:

$$x = \frac{a+b}{2}$$

O objetivo do método da posição falsa é obter uma aproximação melhor que a média aritmética

Intuição

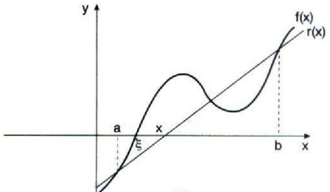
Seja $f(x) = x^3 - 9x + 3, [a, b] = [0, 1] \, e \, f(1) = -5 < 0 < 3 = f(0)$
ξ "parece" estar mais próximo de 0 que de 1

Método da posição falsa

Em vez de tomarmos a média aritmética entre a e b, tomamos a média aritmética ponderada, com pesos $|f(b)|$ e $|f(a)|$, respectivamente

$$x = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Graficamente, este ponto x é a intersecção entre o eixo $\overrightarrow{ox}$ e a reta $r(x)$ que passa por $(a, f(a))$ e $bf(b)$



(a)

O método da posição falsa aplicado a $xlog(x) - 1$ em $[a_0, b_0] = [2, 3]$, fica:

$$f(a_0) = -0,3979 < 0$$

$$f(b_0) = 0,4314 > 0$$

$$x_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = \frac{2 * 0,4314 - 3 * (-0,3979)}{0,4314 - (-0,3979)} = 2,4798$$

$f(x_0) = -0,0219 < 0$. Como $f(a_0)$ e $f(x_0)$ têm o mesmo sinal,
$a_1 = x_0 = 2,4798$
$b_1 = b_0 = 3$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS