Resolução de sistemas lineares

Métodos Diretos

Ivo Calado

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas

23 de Fevereiro de 2016

Roteiro

Observação

Este material é baseado no material produzido pelo professor **Jonas Joacir Radtke** da **UTPR**

Sistemas lineares

Um problema de grande interesse prático que aparece, por exemplo, em cálculo de estruturas e redes elétricas e solução de equações diferenciais, é o da resolução numérica de um sistema linear S_n de n equações com n incógnitas:

$$S_n = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

Sob a forma matricial S_n pode ser escrito como

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

onde A é uma matriz quadrada de ordem n, $\vec{x}$ e $\vec{b}$ são vetores com n componentes.

Sistemas lineares

O componente a_{ij} da matriz A é chamado de **coeficiente** da incógnita x_j e os b_i saõ chamados de **termos independentes**. A matriz A é chamada **matriz dos coeficientes** e a matriz:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} = \left[A : \vec{b} \right]$$

é chamada de **matriz aumentada** ou **matriz completa** do sistema.

Chamaremos de $\vec{x}^*$ o vetor solução e de $\overline{x}$, uma solução aproximada do sistema linear S_n.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Classificação Quanto ao Número de Soluções

Teorema

(i) Um sistema de n equações e n incógnitas admite solução se, e somente se o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.

(ii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p = n$, a solução será única.

(iii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p < n$, podemos escolher $n - p$ incógnitas, e as outras p incógnitas serão dadas em função destas.

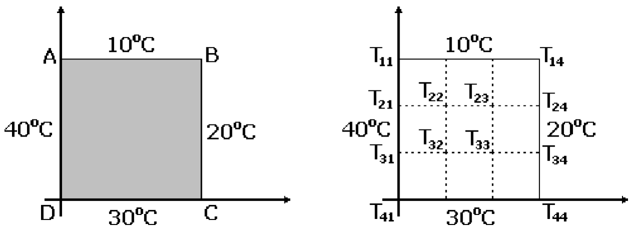
No caso (iii) dizemos que o grau de liberdade é $n - p$.
Denotamos por p_a o posto da matriz ampliada e p_c o posto da matriz dos coeficientes.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Aplicação na Engenharia

Problema

Uma placa quadrada de material homogêneo é mantida com a borda AB a temperatura de $10^o C$, a borda BC a $20^o C$, a borda CD a $30^o C$ e a borda AD a $40^o C$, conforme ilustrado na figura abaixo. Após atingido o equilibrio térmico, qual será a temperatura aproximada em cada ponto da placa?



Aplicação na Engenharia

Solução:

Intuitivamente podemos supor que a temperatura de um dado ponto da placa, após o equilibrio térmico, será dada pela média das temperaturas dos pontos vizinhos. Logo podemos escrever que

$$T_{22} = \frac{T_{12} + T_{23} + T_{32} + T_{21}}{4} = \frac{1}{4}(T_{23} + T_{32} + 50)$$

$$T_{23} = \frac{T_{13} + T_{24} + T_{33} + T_{22}}{4} = \frac{1}{4}(T_{33} + T_{22} + 30)$$

$$T_{32} = \frac{T_{22} + T_{33} + T_{42} + T_{31}}{4} = \frac{1}{4}(T_{22} + T_{33} + 70)$$

$$T_{33} = \frac{T_{23} + T_{34} + T_{43} + T_{32}}{4} = \frac{1}{4}(T_{23} + T_{32} + 50)$$

Aplicação na Engenharia

Reescrevendo as equações anteriores temos o seguinte sistema algébrico linear

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 4T_{22} & - & T_{23} & - & T_{32} & + & 0T_{33} & = & 50 \\ -T_{22} & + & 4T_{23} & + & 0T_{32} & - & T_{33} & = & 30 \\ -T_{22} & + & 0T_{23} & + & 4T_{32} & - & T_{33} & = & 70 \\ 0T_{22} & - & T_{23} & - & T_{32} & + & 4T_{33} & = & 50 \end{array}\right.$$

Aplicação na Engenharia

Reescrevendo as equações anteriores temos o seguinte sistema algébrico linear

$$\begin{cases} 4T_{22} - T_{23} - T_{32} + 0T_{33} = 50 \\ -T_{22} + 4T_{23} + 0T_{32} - T_{33} = 30 \\ -T_{22} + 0T_{23} + 4T_{32} - T_{33} = 70 \\ 0T_{22} - T_{23} - T_{32} + 4T_{33} = 50 \end{cases}$$

cuja a matriz ampliada é dada por

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & 50 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 30 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 70 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 50 \end{bmatrix}$$

Sistemas Triangulares

Seja um sistema de equações algébricas dado por $A\vec{x} = \vec{b}$ onde a matriz $A = (a_{ij})$ é **triangular superior**, ou seja, $a_{i,j} = 0$ se $j < i$, $j = 1, 2, ..., n$, que na forma expandida fornece

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

ou onde a matriz $A = (a_{ij})$ é **triangular inferior**, ou seja, $a_{ij} = 0$ se $j > i$, $j = 1, 2, ..., n$, que na forma expandida fornece

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & & & & & & & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & & & & & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

Observe que os sistemas triangulares determinados, isto é, quando a_{ii}, $i = 1, 2, ..., n$, são facilmente resolvidos por substituição retroativa ou progressiva.

Algorítmo

Seja a matriz A triangular superior de ordem n:

(1) $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$

(2) $i = n - 1$

(3) $x_i = \dfrac{\left(b_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j\right)}{a_{ii}}$

(4) $i = i - 1$

(5) Se $i \geq 1$, voltar ao passo (3)

(6) FIM

Algorítmo

Seja a matriz A triangular inferior de ordem n:

(1) $x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}$

(2) $i = 2$

(3) $x_i = \dfrac{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j\right)}{a_{ii}}$

(4) $i = i + 1$

(5) Se $i \leq n$, voltar ao passo (3)

(6) FIM

Exemplo

Determinar o vetor solução do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 & & & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & & & = & 2 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Exercício 1

Determinar o vetor solução dos seguintes sistemas lineares:

(a) $$\begin{cases} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & & 4x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ & & & & x_3 & = & 4 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x_1 & & & & & & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \end{cases}$$

Exercício 2

Implementar um programa computacional para a resolução de um sistema linear triangular superior. Como dados de entrada deverão ser fornecidos a dimensão da matriz, os valores dos coeficientes e os valores dos termos independentes.

Os métodos numéricos para resolução de um sistema linear podem ser divididos em dois grupos:

Métodos Diretos: são aqueles que, a menos de erros de arredondamento, fornecem a solução exata do sistema linear, caso ela exista, após um número finito de operações.

Métodos Iterativos: geram uma sequência de vetores $\{\vec{x}^{(k)}\}$, a partir de uma aproximação inicial $\vec{x}^{(0)}$. Sob certas condições esta sequência converge para a solução $\vec{x}^{*}$, caso ela exista.

Definição

Denomina-se **transformações elementares** às seguintes operações sobre as equações de um sistema linear:

(a) Trocar a ordem de duas equações do sistema.

(b) Multiplicar uma equação do sistema por uma constante não nula.

(c) Adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação.

Obs.: Qualquer conjunto de transformações elementares pode ser aplicado a um sistema de equações lineares sem alterar o conjunto solução do mesmo.

Definição

Dois sistemas S_1 e S_2 serão **equivalentes** se S_2 puder ser obtido de S_1 através de transformações elementares.

Método de eliminação de Gauss

Método de Eliminação de Gauss

O **Método de Eliminação de Gauss**, ou simplesmente **Método de Gauss**, consiste em transformar o sistema original $A\vec{x} = \vec{b}$ utilizando $(n-1)$ passos em um sistema linear equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior $U\vec{x} = \vec{c}$ o qual se resolve facilmente por substituição.

Exemplo

Resolver

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

pelo método de Gauss

Solução: Escreve-se a matriz aumentada do sistema linear, isto é,

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right] = \left[\, A \mid \vec{b} \,\right]$$

Fazendo $B_0 = B$ e chamando de $L_1^{(0)}$, $L_2^{(0)}$, $L_3^{(0)}$ as linhas 1, 2 e 3, respectivamente, de B_0, escolhe-se $a_{11}^{(0)}$ como pivô e calculam-se os multiplicadores:

$$m_{21}^{(0)} = -\frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$m_{31}^{(0)} = -\frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{2}{2} = -1$$

Faz-se, agora, as seguintes transformações elementares sobre as linhas de B_0:

$$\begin{array}{ccc} L_1^{(1)} & \leftarrow & L_1^{(0)} \\ L_2^{(1)} & \leftarrow & L_2^{(0)} + m_{21}^{(0)} \cdot L_1^{(0)} \\ L_3^{(1)} & \leftarrow & L_3^{(0)} + m_{31}^{(0)} \cdot L_1^{(0)} \end{array}$$

onde $L_1^{(1)}$, $L_2^{(1)}$ e $L_3^{(1)}$ são linhas da matriz transformada, B_1. Efetuando-se as transformações acima indicadas tem-se:

$$B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & \mathbf{-2} & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & -6 \end{array}\right]$$

Escolhe-se $a_{22}^{(1)} = -2$ como pivô e calcula-se o multiplicador

$$m_{32}^{(1)} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -\frac{-6}{-2} = -3$$

São feitas agora as seguintes transformações elementares sobre as linhas de B_1:

$$\begin{array}{ccc} L_1^{(2)} & \leftarrow & L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} & \leftarrow & L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} & \leftarrow & L_3^{(1)} + m_{32}^{(1)} \cdot L_2^{(1)} \end{array}$$

onde $L_1^{(1)}$, $L_2^{(1)}$ e $L_3^{(1)}$ são linhas da matriz transformada, B_2, que está na forma triangular, isto é,

$$B_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right]$$

A matriz B_2 é a matriz aumentada do sistema triangular superior

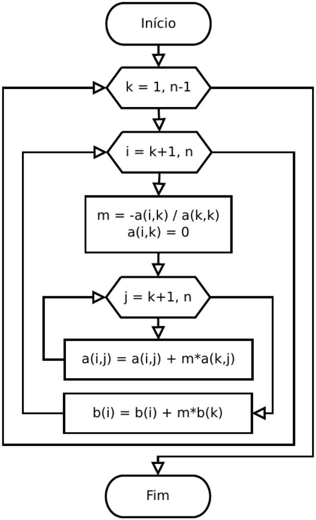
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ & - & 2x_2 & - & x_3 & = & -7 \\ & & & & 5x_3 & = & 15 \end{array}\right. \Rightarrow \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Dispositivo Prático

Linha	Multiplicador	Coeficientes	Vetor	Transformações
(1)		$\mathbf{2}$ $\quad 3 \quad -1$	5	
(2)	$-\frac{4}{2} = -2$	$4 \quad 4 \quad -3$	3	
(3)	$-\frac{2}{2} = -1$	$2 \quad -3 \quad 1$	-1	
(4)		$0 \quad \mathbf{-2} \quad -1$	-7	$-2 \cdot (1) + (2)$
(5)	$-\frac{-6}{-2} = -3$	$0 \quad -6 \quad 2$	-6	$-1 \cdot (1) + (3)$
(6)		$0 \quad 0 \quad 5$	15	

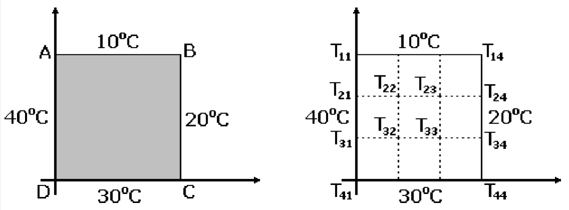
Método de eliminação de Gauss



Aplicação na Engenharia

Problema

Uma placa quadrada de material homogêneo é mantida com a borda AB a temperatura de 10^oC, a borda BC a 20^oC, a borda CD a 30^oC e a borda AD a 40^oC, conforme ilustrado na figura abaixo. Após atingido o equilibrio térmico, qual será a temperatura aproximada em cada ponto da placa?



Solução: Intuitivamente podemos supor que a temperatura de um dado ponto da placa, após o equilibrio térmico, será dada pela média das temperaturas dos pontos vizinhos. Logo podemos escrever que

$$T_{22} = \frac{T_{12} + T_{23} + T_{32} + T_{21}}{4} = \frac{1}{4}(T_{23} + T_{32} + 50)$$

$$T_{23} = \frac{T_{13} + T_{24} + T_{33} + T_{22}}{4} = \frac{1}{4}(T_{33} + T_{22} + 30)$$

$$T_{32} = \frac{T_{22} + T_{33} + T_{42} + T_{31}}{4} = \frac{1}{4}(T_{22} + T_{33} + 70)$$

$$T_{33} = \frac{T_{23} + T_{34} + T_{43} + T_{32}}{4} = \frac{1}{4}(T_{23} + T_{32} + 50)$$

Reescrevendo as equações anteriores temos o seguinte sistema algébrico linear

$$\begin{cases} 4T_{22} - T_{23} - T_{32} + 0T_{33} = 50 \\ -T_{22} + 4T_{23} + 0T_{32} - T_{33} = 30 \\ -T_{22} + 0T_{23} + 4T_{32} - T_{33} = 70 \\ 0T_{22} - T_{23} - T_{32} + 4T_{33} = 50 \end{cases}$$

cuja a matriz ampliada B_0 é dada por

$$B_0 = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & -1 & 0 & 50 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 30 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 70 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 50 \end{array}\right]$$

Escolhe-se $a_{11}^{(0)} = 4$ como pivô e calculam-se os multiplicadores:

$$m_{21}^{(0)} = -\frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{(-1)}{4} = 0,25$$

$$m_{31}^{(0)} = -\frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{(-1)}{4} = 0,25$$

$$m_{41}^{(0)} = -\frac{a_{41}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -\frac{0}{4} = 0$$

Faz-se, agora, as seguintes transformações elementares:

$$\begin{aligned}
L_1^{(1)} &\leftarrow L_1^{(0)} \\
L_2^{(1)} &\leftarrow L_2^{(0)} + 0,25 \cdot L_1^{(0)} \\
L_3^{(1)} &\leftarrow L_3^{(0)} + 0,25 \cdot L_1^{(0)} \\
L_4^{(1)} &\leftarrow L_4^{(0)}
\end{aligned}$$

Efetuando-se as transformações acima indicadas tem-se:

$$B_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & -1 & 0 & 50 \\ 0 & 3,75 & -0,25 & -1 & 42,5 \\ 0 & -0,25 & 3,75 & -1 & 82,5 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 50 \end{array}\right]$$

Escolhe-se $a_{22}^{(1)} = 3,75$ como pivô e calcula-se os multiplicadores:

$$m_{32}^{(1)} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -\frac{(-0,25)}{3,75} = 0,06666$$

$$m_{42}^{(1)} = -\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -\frac{(-1)}{3,75} = 0,26666$$

São feitas agora as seguintes transformações elementares sobre as linhas de B_1:

$$
\begin{aligned}
L_1^{(2)} &\leftarrow L_1^{(1)} \\
L_2^{(2)} &\leftarrow L_2^{(1)} \\
L_3^{(2)} &\leftarrow L_3^{(1)} + 0,06666 \cdot L_2^{(1)} \\
L_4^{(2)} &\leftarrow L_4^{(1)} + 0,26666 \cdot L_2^{(1)}
\end{aligned}
$$

Efetuando-se as transformações acima indicadas tem-se:

$$
B_2 = \left[\begin{array}{rrrr|r}
4 & -1 & -1 & 0 & 50 \\
0 & 3,75 & -0,25 & -1 & 42,5 \\
0 & 0 & 3,73333 & -1,06666 & 85,33333 \\
0 & 0 & -1,06666 & 3,73333 & 61,33333
\end{array}\right]
$$

Escolhe-se $a_{33}^{(2)} = 3,73333$ como pivô e calcula-se o multiplicador:

$$m_{43}^{(2)} = -\frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = -\frac{(-1,06666)}{3,73333} = 0,28571429$$

São feitas agora as seguintes transformações elementares sobre as linhas de B_1:

$$\begin{aligned}
L_1^{(3)} &\leftarrow L_1^{(2)} \\
L_2^{(3)} &\leftarrow L_2^{(2)} \\
L_3^{(3)} &\leftarrow L_3^{(2)} \\
L_4^{(3)} &\leftarrow L_4^{(2)} + 0,28571 \cdot L_3^{(2)}
\end{aligned}$$

Efetuando-se as transformações acima indicadas tem-se:

$$B_2 = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & -1 & 0 & 50 \\ 0 & 3,75 & -0,25 & -1 & 42,5 \\ 0 & 0 & 3,73333 & -1,06666 & 85,33333 \\ 0 & 0 & 0 & 3,42857 & 85,71428 \end{array}\right]$$

Fazendo substituição retroativa temos:

$$T_4 = \frac{85,71428}{3,42857} = 25$$

$$T_3 = \frac{85,33333 + 1,06666 \cdot 25}{3,73333} = 30$$

$$T_2 = \frac{42,5 + 0,25 \cdot 30 + 1 \cdot 25}{3,75} = 20$$

$$T_1 = \frac{50 + 1 \cdot 20 + 1 \cdot 30 + 0 \cdot 25}{4} = 25$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Exercício

Resolva o sistema linear abaixo utilizando o Método de Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -21,2 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = 5,7 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1,8 \end{cases}$$

Exercício 2

Determinar o vetor solução dos sistemas lineares abaixo através do método de eliminação de Gauss:

(a) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 6,9 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = -6,6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10,2 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = -12,3 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 7,12 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 12,02 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 14,90 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 20,72 \end{cases}$$

Método de Pivotação Completa

No momento de se calcular o multiplicador m_{ik}, se o pivô estiver próximo de zero, o método pode ampliar os erros de arredondamento. Para se contornar estes problemas, escolhe-se como pivô $\max(|a_{ij}|)$, com $i, j = 1, 2, ..., n$. Logo,

$$m_{iq} = -\frac{a_{iq}}{a_{pq}}$$

onde a_{pq} é o elemento pivô e a linha p é a linha pivotal. Soma-se, a cada linha não pivotal, o produto da linha pivotal pelo fator correspondente m_{iq} da linha não pivotal. Rejeitando esta coluna e a p-ésima linha do pivô, tem-se uma nova matriz $M^{(1)}$. Repetindo o mesmo raciocínio $n-1$ vezes chegamos a uma única linha. Para se obter a solução, constrói-se o sistema formado por todas as linhas pivotais e, a partir da última linha pertencente a matriz $M^{(n-1)}$, resolve-se através de substituições retroativas.

Exemplo

Resolver pelo método de pivotação completa, retendo, durante as eliminações, cinco algarismos depois da vírgula:

$$\begin{cases} 0,20x_1 - 2,00x_2 + 4,50x_3 = 13,20 \\ 1,90x_1 + 1,25x_2 - 2,95x_3 = -5,46 \\ 2,00x_1 - 5,00x_2 + 3,00x_3 = 20,4 \end{cases}$$

Solução: A matriz ampliada é dada por:

$$B_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 0,20 & -2,00 & 4,50 & 13,20 \\ 1,90 & 1,25 & -2,95 & -5,46 \\ 2,00 & -5,00 & 3,00 & 20,40 \end{array}\right]$$

Escolhe-se como pivô o maior em valor absoluto dentre os coeficientes da matriz A, ou seja, $a_{32} = -5$, e calculam-se os multiplicadores:

$$m_{12}^{(0)} = -\frac{a_{12}}{a_{32}} = -\frac{(-2)}{(-5)} = -0,4$$
$$m_{22}^{(0)} = -\frac{a_{22}}{a_{32}} = -\frac{1,25}{(-5)} = 0,25$$

Faz-se, agora, as seguintes transformações elementares sobre as linhas de B_0:

$$\begin{aligned} L_1^{(1)} &\leftarrow L_1^{(0)} + m_{12}^{(0)} \cdot L_3^{(0)} \\ L_2^{(1)} &\leftarrow L_2^{(0)} + m_{22}^{(0)} \cdot L_2^{(0)} \\ L_3^{(1)} &\leftarrow L_3^{(0)} \end{aligned}$$

$$B_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} -0,60 & 0,00 & 3,30 & 5,04 \\ 2,40 & 0,00 & -2,20 & -0,36 \\ 2,00 & -5,00 & 3,00 & 20,40 \end{array}\right]$$

Escolhe-se como pivô o maior em valor absoluto dentre os coeficientes da matriz A com exceção da segunda coluna, ou seja, $a_{32} = 3,3$, e calculam-se os multiplicadores:

$$m_{23}^{(1)} = -\frac{a_{23}}{a_{13}} = -\frac{(-2,2)}{3,3} = \frac{2}{3}$$

Faz-se, agora, as seguintes transformações elementares sobre as linhas de B_0:

$$\begin{array}{ccc} L_1^{(2)} & \leftarrow & L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} & \leftarrow & L_2^{(1)} + m_{23}^{(1)} \cdot L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} & \leftarrow & L_3^{(1)} \end{array}$$

$$B_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} -0,60 & 0,00 & 3,30 & 5,04 \\ 2,00 & 0,00 & 0,00 & 3,00 \\ 2,00 & -5,00 & 3,00 & 20,40 \end{array}\right]$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Efetuando-se as substituições retroativas obtemos:

$$x_1 = \frac{3,00}{2,00} = 1,5$$

$$x_3 = \frac{5,04 + 0,6 \cdot 1,5}{3,3} = 1,8$$

$$x_2 = \frac{20,4 - 2 \cdot 1,5 - 3 \cdot 1,8}{-5,0} = -2,4$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Exercício 1

Resolva o sistema linear abaixo utilizando o método de pivotação completa:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Exercício 2

Determinar o vetor solução dos sistemas lineares abaixo através do método de pivotação completa:

(a) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 6,9 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = -6,6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10,2 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = -12,3 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 7,12 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 12,02 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 14,90 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 20,72 \end{cases}$$