Resolução de sistemas lineares

Métodos Iterativos

Ivo Calado

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas

23 de Fevereiro de 2016

Roteiro

Observação

Este material é baseado no material produzido pelo professor **Jonas Joacir Radtke** da **UTPR**

A solução $\overline{x}$ de um sistema de equações lineares $A\vec{x} = \vec{b}$ pode ser obtido resolvendo, de forma iterativa, o sistema equivalente da forma

$$\vec{x} = F\,\vec{x} + \vec{d}$$

onde F é uma matriz $n \times n$, $\vec{x}$ e $\vec{d}$ vetores de $n \times 1$.
Observamos que $\varphi(\vec{x}) = F\,\vec{x} + \vec{d}$ é uma função de iteração dada na forma matricial.

Esquema Iterativo

Partindo de $\vec{x}^{(0)}$ (vetor da aproximação inicial) e então construímos consecutivamente os vetores de aproximação $\vec{x}^{(k+1)}$ pela fórmula:

$$\vec{x}^{(k+1)} = F\,\vec{x}^{(k)} + \vec{d} = \varphi(\vec{x}^{(k)})$$

O processo é interrompido ao satisfazer os critérios de parada adotados ou quando atingir o número máximo de passos iterativos.

Critérios de Parada

Critérios de Parada

Diversos critérios podem ser adotados, dentre eles destacamos:

(i) Critério baseado na distância entre $\vec{x}^{(k)}$ e $\vec{x}^{(k-1)}$:

$$d^{(k)} = \max_{1\leq i\leq n} \left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| < \varepsilon_1$$

(ii) Critério baseaedo na distância relativa entre $\vec{x}^{(k)}$ e $\vec{x}^{(k-1)}$:

$$d_r^{(k)} = \frac{\max_{1\leq i\leq n} \left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right|}{\max\limits_{1\leq i\leq n} \left|x_i^{(k)}\right|} < \varepsilon_2$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Método de Jacobi

A forma como método de Jacobi transforma o sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ em $\vec{x} = F\vec{x} + \vec{d}$ é a seguinte:
Tomando o sistema original:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

e supondo que $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, ..., n$, isolamos o vetor $\vec{x}$ mediante a separação pela diagonal, como segue:

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Método de Jacobi

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n\right) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n\right) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}\right) \end{cases}$$

Desta forma temos $\vec{x} = F\,\vec{x} + \vec{d}$, onde

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \frac{-a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{-a_{23}}{a_{22}} & \dots & \frac{-a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{-a_{n2}}{a_{nn}} & \frac{-a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

O método de Jacobi consiste em dado $\vec{x}^{(0)}$, aproximação inicial, obter $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$, ..., $\vec{x}^{(k)}$, através da relação recursiva

$$\vec{x}^{(k+1)} = F\,\vec{x}^{(k)} + \vec{d}$$

$$\left\{\begin{array}{ccl}
x_1^{(k+1)} & = & \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\
x_2^{(k+1)} & = & \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\
\vdots & & \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
x_n^{(k+1)} & = & \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right)
\end{array}\right.$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Exemplo

Resolva o seguinte sistema linear pelo método de Jacobi com $\vec{x}(0) = (0,7;\ -1,6;\ 0,6)^T$ e $d_r^{(k)} < \varepsilon_2 = 0,05$.

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

Solução: O processo iterativo é

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{10}\left(7 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{5}\left(-8 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{10}\left(6 - 2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}\right) \end{cases}$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Para $k = 0$ temos

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{10}\left(7 - 2x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right) = \dfrac{1}{10}\Big(7 - 2\cdot(-1,6) - 0,6\Big) = 0,96 \\[2ex] x_2^{(1)} = \dfrac{1}{5}\left(-8 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}\right) = \dfrac{1}{5}\Big(-8 - 0,7 - 0,6\Big) = -1,86 \\[2ex] x_3^{(1)} = \dfrac{1}{10}\left(6 - 2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}\right) = \dfrac{1}{10}\Big(6 - 2\cdot 0,7 - 3\cdot(-1,6)\Big) = 0,94 \end{cases}$$

Calculando $d_r^{(1)}$ temos

$$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = 0,26$$

$$\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = 0,26 \qquad \Rightarrow \qquad d^{(1)} = \frac{0,34}{\max\limits_{1\le i\le n}\left|x_i^{(1)}\right|} = 0,1828 > \varepsilon_2$$

$$\left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = 0,34$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Para $k = 1$:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 0,978 \\ x_2^{(2)} = -1,98 \\ x_3^{(2)} = 0,966 \end{cases} \Rightarrow \quad d_r^{(2)} = \frac{0,12}{1,98} = 0,0606 > \varepsilon_2$$

Para $k = 2$:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0,9994 \\ x_2^{(3)} = -1,9888 \\ x_3^{(3)} = 0,9984 \end{cases} \Rightarrow \quad d_r^{(3)} = \frac{0,0324}{1,9888} = 0,0163 < \varepsilon_2$$

Então a solução aproximada $\overline{x}$ do sistema linear obtida pelo método de Jacobi, é

$$\overline{x} = \vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,9994 \\ -1,9888 \\ 0,9984 \end{pmatrix}$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Critério de Convergência

Critério das Linhas

Uma condição **suficiente** (mas não necessária) para garantir a convergência do método de Jacobi aplicado ao sistema linear $A\vec{x} = \vec{b}$, com $a_{ii} \neq 0$, $\forall i$, é a seguinte:

Seja $\alpha_k = \sum_{j=1,\, j\neq k}^{n} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|}$. Se $\alpha = \max_{1<k<n} \alpha_k < 1$, então o método de Gauss-Jacobi gera uma sequência $x^{(k)}$ convergente para a solução do sistema dado, independentemente da escolha da aproximação inicial, $x^{(0)}$

Analisando a matriz A do sistema linear do exemplo anterior,

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

temos

$$\alpha_1 = \frac{2+1}{10} = \frac{3}{10} = 0,3 < 1$$

$$\alpha_2 = \frac{1+1}{5} = \frac{2}{5} = 0,4 < 1$$

$$\alpha_3 = \frac{2+3}{10} = \frac{5}{10} = 0,5 < 1$$

então,

$$\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \alpha_k = 0,5 < 1$$

Logo, temos garantia da convergência do método de Jacobi.

Exemplo

A matriz A do sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$$

não satisfaz o critério das linhas pois $\alpha_1 = \frac{3+1}{1} = 4 > 1$.
Contudo, se permutarmos a primeira equação com a segunda, temos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema original e a matriz deste novo sistema satisfaz o critério das linhas.

Exercício 1

Determinar a solução dos seguintes sistemas lineares pelo método de Jacobi com no máximo 10 iterações, $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$ e $\varepsilon_2 = 10^{-2}$.

(a)
$$\begin{cases} x_1 - 0,25x_2 - 0,25x_3 = 0 \\ -0,25x_1 + x_2 - 0,25x_4 = 0 \\ -0,25x_1 + x_3 - 0,25x_4 = 0,25 \\ -0,25x_2 + x_4 = 0,25 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = -1 \\ 2x_1 - 8x_2 + x_3 - x_4 = -6 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 = 33 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -7 \\ x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 26 \end{cases}$$

Método de Gauss-Seidel

O processo iterativo consiste em, sendo $\vec{x}^{(0)}$ uma aproximação inicial, calcular $\vec{x}^{(1)}$, $\vec{x}^{(2)}$, ..., $\vec{x}^{(k)}$, por

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
x_1^{(k+1)} & = & \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\
x_2^{(k+1)} & = & \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\
x_3^{(k+1)} & = & \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_3^{(k+1)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\
\vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
x_n^{(k+1)} & = & \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right)
\end{array}
\right.
$$

Exemplo

Resolver o seguinte sistema linear pelo método de Gauss-Seidel com $\vec{x}^{(0)} = (0,\ 0,\ 0)^T$ e $d_r^{(k)} < \varepsilon_2 = 5 \cdot 10^{-2}$.

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Solução: O processo iterativo é:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{5}\left(5 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{4}\left(6 - 3x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{6}\left(0 - 3x_1^{(k+1)} - 3x_3^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

Para $k = 0$:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} & = & \frac{1}{5}(5 - 0 - 0) = 1 \\ x_2^{(1)} & = & \frac{1}{4}(6 - 3 \cdot 1 - 0) = 0,75 \\ x_3^{(1)} & = & \frac{1}{6}(0 - 3 \cdot 1 - 3 \cdot 0,75) = -0,875 \end{cases}$$

Calculando $d_r^{(1)}$ temos

$$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = 1$$

$$\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = 0,75 \qquad \Rightarrow \quad d^{(1)} = \frac{1}{\max\limits_{1 \le i \le n} \left|x_i^{(1)}\right|} = 1 > \varepsilon_2$$

$$\left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = 0,875$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Para $k = 1$:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{5}(5 - 0,75 + 0,875) = 1,025 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{4}(6 - 3 \cdot 1,025 + 0,875) = 0,95 \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{6}(0 - 3 \cdot 1,025 - 3 \cdot 0,95) = -0,9875 \end{cases}$$

Calculando $d_r^{(2)}$ temos

$$\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = 0,025$$

$$\left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = 0,2 \quad \Rightarrow \quad d^{(2)} = \frac{0,2}{\max\limits_{1 \leq i \leq n} \left|x_i^{(2)}\right|} = 0,1951 > \varepsilon_2$$

$$\left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| = 0,1125$$

Para $k = 2$:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \dfrac{1}{5}(5 - 0,95 + 0,9875) = 1,0075 \\ x_2^{(3)} = \dfrac{1}{4}(6 - 3 \cdot 1,0075 + 0,9875) = 0,9912 \\ x_3^{(3)} = \dfrac{1}{6}(0 - 3 \cdot 1,0075 - 3 \cdot 0,9912) = -0,9993 \end{cases}$$

Calculando $d_r^{(4)}$ temos

$$\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = 0,0175$$

$$\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = 0,0412 \quad \Rightarrow \quad d^{(3)} = \frac{0,0412}{\max\limits_{1 \le i \le n} \left|x_i^{(3)}\right|} = 0,0409 < \varepsilon_2$$

$$\left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = 0,0118$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Exercício 1

Determinar a solução dos sistemas lineares pelo método de Gauss-Seidel com no máximo 10 iterações, $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$ e $\varepsilon_2 = 10^{-2}$.

(a) $$\begin{cases} x_1 - 0,25x_2 - 0,25x_3 = 0 \\ -0,25x_1 + x_2 - 0,25x_4 = 0 \\ -0,25x_1 + x_3 - 0,25x_4 = 0,25 \\ -0,25x_2 + x_4 = 0,25 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = -1 \\ 2x_1 - 8x_2 + x_3 - x_4 = -6 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 = 33 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_2 - 7x_3 + 2x_4 = -7 \\ x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 26 \end{cases}$$