Interpolação

Ivo Calado

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas

23 de Fevereiro de 2016

Roteiro

Observação

Este material é baseado no material produzido pelo professor **Jonas Joacir Radtke** da **UTFPR**

A seguinte tabela relaciona o calor específico da água e a respectiva temperatura:

Temperatura (°C)	20,0	25,0	30,0	35,0
Calor específico	0,99907	0,99852	0,99826	0,99818

Temperatura (°C)	40,0	45,0	40,0
Calor específico	0,99828	0,99849	0,99878

Suponhamos que se queira calcular:

i) o calor específico da água a 32,5°C

ii) a temperatura para a qual o calor específico é 0,99837

Interpolar uma função $f(x)$ consiste em aproximar essa função por uma outra função $g(x)$, escolhida entre uma classe de funções definida *a priori* e que satisfaça algumas propriedades. A função $g(x)$ é então usada em substituição à função $f(x)$

A necessidade de realizar o procedimento de interpolação surge em situações como:

i) quando são conhecidos somentos os valores numéricos da função para um conjunto de pontos e é necessário calcular o valor da função em um ponto não tabelado

ii) quando a função em estudo tem uma expressão tal que operações como a diferenciação e a integração são difíceis (ou mesmo impossíveis) de serem realizadas

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Interpolar esta função $f(x)$ definida em x_0, x_1, ..., x_n, $(n+1)$ pontos distintos de um intervalo $[a, b]$ consiste em aproximar esta função por um polinômio $P(x)$ de grau menor ou igual a n, tal que este coincida com a função nestes pontos, isto é,

$$P(x_i) = f(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, ..., n$$

Teorema: Existência e Unicidade

Seja $f(x)$ definida em x_0, x_1, ..., x_n, $(n+1)$ pontos distintos de um intervalo $[a, b]$, então existe um único polinômio $P(x)$ de grau menor ou igual a n tal que

$$P(x_i) = f(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, ..., n$$

Prova: Considere o polinômio de grau n,
$P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ tal que

$$P(x_i) = f(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, ..., n$$

Desta forma temos:

$$\begin{cases} a_0x_0^0 & + & a_1x_0 & + & \dots & + & a_{n-1}x_0^{n-1} & + & a_nx_0^n = & y_0 \\ a_0x_1^0 & + & a_1x_1 & + & \dots & + & a_{n-1}x_1^{n-1} & + & a_nx_1^n = & y_1 \\ a_0x_2^0 & + & a_1x_2 & + & \dots & + & a_{n-1}x_2^{n-1} & + & a_nx_2^n = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\ a_0x_n^0 & + & a_1x_n & + & \dots & + & a_{n-1}x_n^{n-1} & + & a_nx_n^n = & y_n \end{cases}$$

Podemos observar que temos um sistema de equações lineares $A\vec{x} = \vec{b}$, onde

$$A = \begin{bmatrix} x_0^0 & x_0^1 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ x_1^0 & x_1^1 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

O $\det A$, chamado de **determinante de Vandermonde**, é dado por $\det A = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$

Como os pontos x_i, $i = 0, 1, ..., n$, são distintos, segue que $\det(A) \neq 0$, o que significa que o sistema linear possui uma única solução e, portanto, os coeficientes a_0, a_1, ..., a_n do polinômio são únicos calculados pela resolução deste sistema. Em resumo, o polinômio $P(x)$ existe e é único.

Definição

Denominamos **polinômio interpolador** de uma função $f(x)$ definida em x_0, x_1, ..., x_n $(n+1)$ pontos distintos de um intervalo $[a, b]$, ao polinômio $P(x)$ de grau menor ou igual a n, que coincide com a função nos pontos x_i, $i = 0, 1, ..., n$, isto é,

$$P(x_i) = f(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, ..., n$$

Embora o polinômio interpolador $P(x)$ coincida com a função nos pontos de interpolação x_0, x_1, ..., x_n, espera-se que $P(\overline{x}) \approx f(\overline{x})$ para $\overline{x} \neq x_i$, $i = 0, 1, ..., n$, ou seja, estimamos $f(x)$ pelo polinômio interpolador e cometemos um erro $E(\overline{x})$ nesta

Exemplo

Considere a função $f(x)$ definida nos pontos, conforme tabela abaixo. Determine o polinômio interpolador e estime $f(0,8)$.

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

Solução: Com 3 pontos distintos temos um polinômio interpolador de ordem 2, ou seja,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Logo:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot (-1)^1 + a_2 \cdot (-1)^2 = 4 \\ a_0 + a_1 \cdot (0)^1 + a_2 \cdot (0)^2 = 1 \\ a_0 + a_1 \cdot (2)^1 + a_2 \cdot (2)^2 = -1 \end{cases}$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Na forma matricial:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema obtemos:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Substituindo no polinômio interpolador temos:

$$P(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$

Para estimar $f(0,8)$ substituimos $x = 0,8$ em $P(x)$, logo,

$$f(0,8) \approx P(0,8) = 1 - \frac{7}{3} \cdot (0,8) + \frac{2}{3} \cdot (0,8)^2 = -0,44$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Exercício 01

Seja $f(x) = 2\,e^x + 3$ definida no intervalo $[0, 1]$.

(a) Aproxime $f(0,35)$ utilizando interpolação linear com $x_0 = 0$ e $x_1 = 0,5$.

(b) Aproxime $f(0,85)$ utilizando interpolação linear com $x_0 = 0,5$ e $x_1 = 1$.

(c) Aproxime $f(0,35)$ e $f(0,85)$ utilizando um polinômio de grau 2, com os pontos $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$ e $x_2 = 1$.

(d) Em qual dos casos obtemos melhor aproximação no ponto desejado? Justifique suas afirmações.

Exercício 02

Mostre que existe um único polinômio de grau ≤ 2 tal que
$P(1) = 3$, $P(2) = 5$ e $P(3) = 12$.
Usando o polinômio interpolador avalie $P(1,5)$.

Exercício 03

Considere a função $f(x) = \frac{1}{(x+1)}$ tabelada nos pontos conforme tabela abaixo. Determine o polinômio interpolador e estime $f(1,3)$.

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	1/2	1/3

Exercício 04

Considere uma função $f(x)$ tabelada nos pontos conforme tabela abaixo. Determine o polinômio interpolador e estime $f(0,6)$.

x_i	0,5	0,7	0,9	1,1
$f(x_i)$	5,8	7,9	10,1	12,3

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Sejam x_0, x_1, ..., x_n, $(n+1)$ pontos distintos e $y_i = f(x_i), i = 0, \cdots, n$, a forma de Lagrange para o polinômio interpolador é dado por:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

onde,

$$L_k(x) = \frac{\prod_{j=0, j\neq k}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq k}^{n} (x_k - x_j)}$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Exemplo

Considere a função $f(x)$ definida nos pontos, conforme tabela abaixo. Determine o polinômio interpolador.

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	4	1	-1

Solução: pela forma de Lagrange, temos que:

$$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

, onde:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 2)}{(-1 - 0)(-1 - 2)} = \frac{x^2 - 2x}{3}$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} = \frac{x^2-x-2}{-2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)} = \frac{x^2+x}{6}$$

Assim, na forma de Lagrange,

$$p_2(x) = 4\left(\frac{x^2-2x}{3}\right) + 1\left(\frac{x^2-x-2}{-2}\right) + (-1)\left(\frac{x^2+x}{6}\right)$$

Agrupando os termos semelhantes, obtemos que
$p_2(x) = 1 - \dfrac{7}{3}x + \dfrac{2}{3}x^2$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Exercício 01

Implementar um programa computacional para determinar o polinômio interpolador de um conjunto de pares ordenados a partir das forma polinomial e da forma de Lagrange.

Quando a função $f(x)$ está disponível, e $f^{(n+1)}(x)$ for contínua em $I = [x_0, x_n]$, podemos escrever a seguinte relação:

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

onde,

$$M_{n+1} = \max_{1 \leq i \leq n} |f^{(n+1)}(x)|$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Exemplo

Seja $f(x) = e^x + x - 1$ tabelada abaixo. Obter $f(0,7)$ e fazer uma análise do erro cometido.

x_i	$0,0$	$0,5$	$1,0$
$f(x_i)$	$0,0$	$1,1487$	$2,7183$

x_i	$1,5$	$2,0$
$f(x_i)$	$4,9811$	$8,389$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS

Exemplo

Seja $f(x) = e^x + x - 1$ tabelada abaixo. Obter $f(0,7)$ e fazer uma análise do erro cometido.

x_i	$0,0$	$0,5$	$1,0$
$f(x_i)$	$0,0$	$1,1487$	$2,7183$

x_i	$1,5$	$2,0$
$f(x_i)$	$4,9811$	$8,389$

Verificar como é possível estimar o valor absoluto do erro $|E_n(x)|$ quando a função $f(x)$ só é conhecida a partir da tabela de valores.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA ALAGOAS