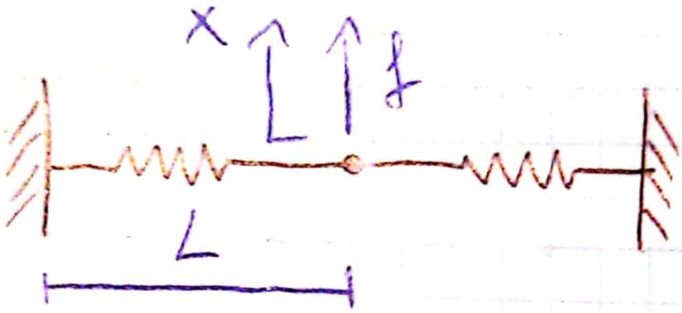


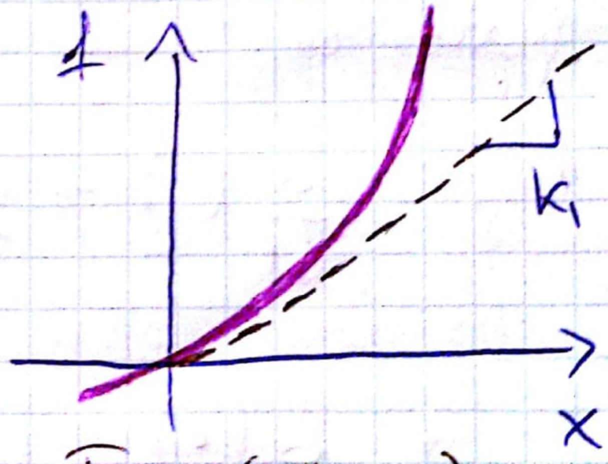
L_0 lunghezza nativa

$$f = 2kx\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{L^2+x^2}}\right) \sim$$

approssimazione in serie di Taylor

$$\sim 2k\left[\left(1 - \frac{L_0}{L}\right)x + \frac{1}{2}x^3\frac{L_0}{L^3}\right] =$$

$$= k_1 x + k_3 x^3$$



Si vuole affrontare la dinamica:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_1 x + k_3 x^3 = F\cos(\omega t + \varphi)$$

Si deve adimensionalizzare questa equazione, in modo da ridurre i parametri ai soli fondamentali per la descrizione di questa equazione.

$\tau = t \cdot \omega_n$ tempo adimensionale

$\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$ frequenza adimensionale

sono parametri senza unità di misura

$\omega_n = \sqrt{\frac{K_1}{m}}$ frequenza naturale del sistema lineare corrispondente, quello in cui $K_3 = 0$

Allora la derivata fatta rispetto al tempo si può descrivere così:

$$(\dot{\ }) = \frac{d}{dt}(\ ) = \frac{d(\ )}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} =$$

$$= \frac{d(\cdot)}{d(\tau)} \cdot \omega_n = (\cdot)' \omega_n$$

derivata rispetto al tempo adimensionale

Nelle formule della dinamica si va a dividere tutto per $\frac{1}{m\,\omega_n^2}$ $\longrightarrow$

$$\rightarrow \quad x'' + \frac{c}{m}\frac{1}{\omega_n}x' + x + \frac{K_3}{m\omega_n^2}x^3 =$$

$$= F\cos(\Omega\tau + \varphi)$$

$\ddot{x}$

$\Downarrow$ sistema con tempo adimensionale

$(\cdot)' \omega_n \cdot (\cdot)' \omega_n = (\cdot)'' \omega_n^2$ ad esempio

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n}$$

$$Y = \frac{x}{x_0} \qquad x_0 = F/K_1$$

dove F è il modulo della forza che si sta applicando.

Si tratta di una forza armonica, quindi considerare il suo modulo equivale a prendere la forza statica, infatti x_0 è la deflessione statica per $K_3 = 0$

Scanned by CamScanner

cioè lo spostamento del sistema deve essere corrispondente

Allora:

$$y'' + 2\xi y' + y + \frac{K_3}{K_1}\frac{1}{x_0}x_0^3 y^3 =$$

$$= \cos(\Omega t + \varphi) \longrightarrow$$

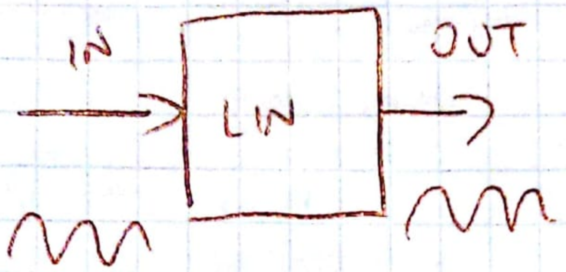
Allora l'equazione iniziale, definendo delle nuove variabili adimensionali, può essere rappresentata con questa espressione:

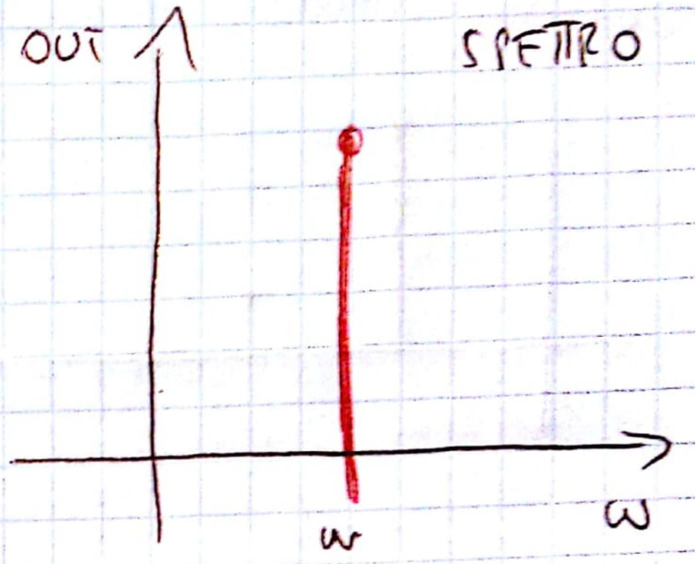
EQUAZIONE DI DUFFING

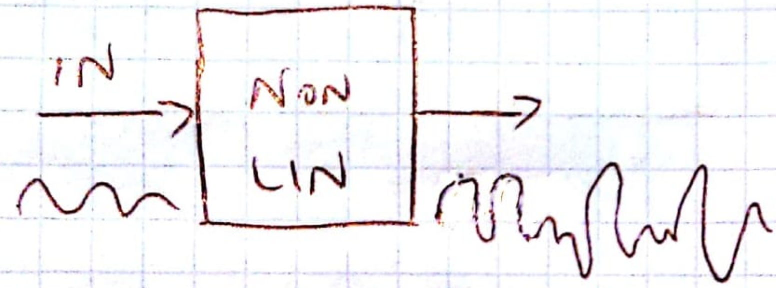
$$\boxed{y'' + 2\xi y' + y + \gamma y^3 = \cos(\Omega\tau + \varphi)}$$

Quindi la dinamica del sistema è governata solo da due parametri ξ, $\gamma = \frac{K_3}{K_1}x_0^2$ adimensionali, che descrivono infinite combinazioni dei parametri dimensionali

L'aggiunta del termine cubico comporta la non linearità.

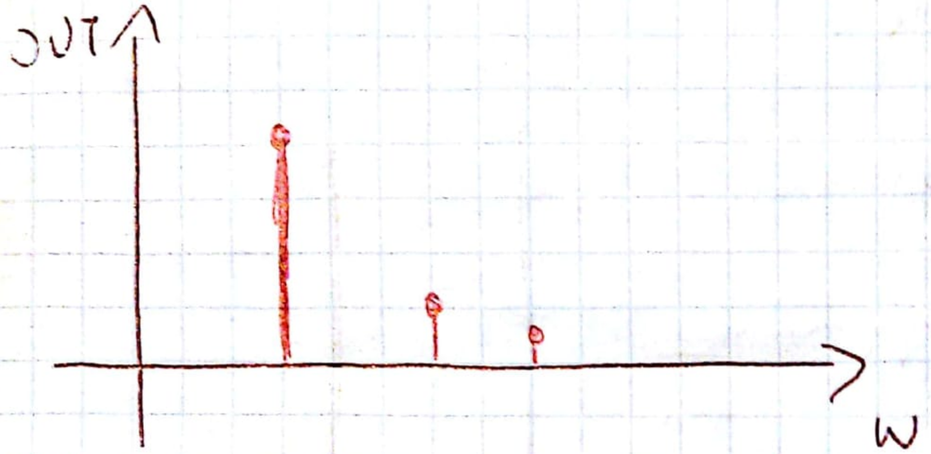




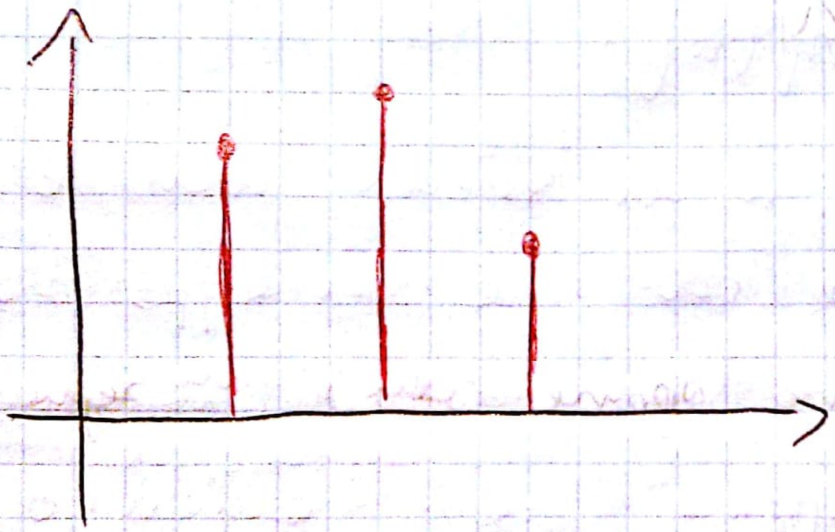


In questo caso, in un sistema non lineare, risponde con una sovrapposizione di armoniche, si tratta di un segnale periodico; oppure quasi-armonico, cioè compare un solo valore di frequenza, tutte le altre sono molto piccole, quindi si ha una sola frequenza, che è la stessa di quella del segnale iniziale; oppure un segnale caotico

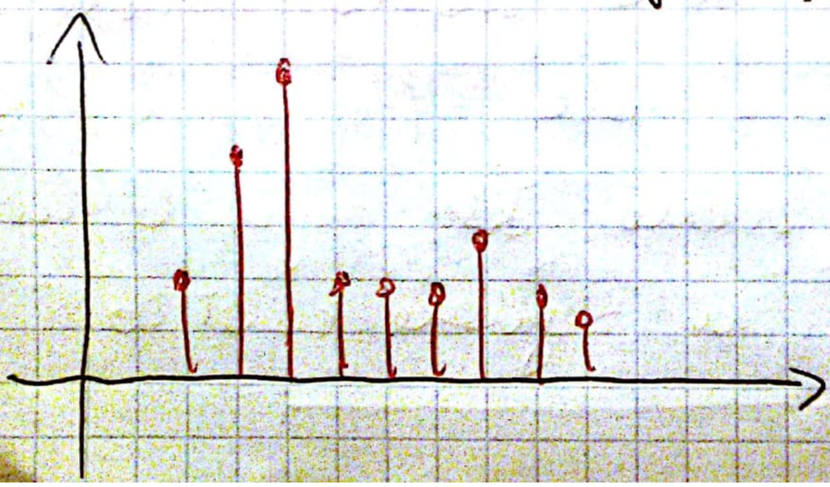
Nel caso di un segnale quasi-armonico



Nel caso di un segnale periodico



Nel caso di un segnale caotico:

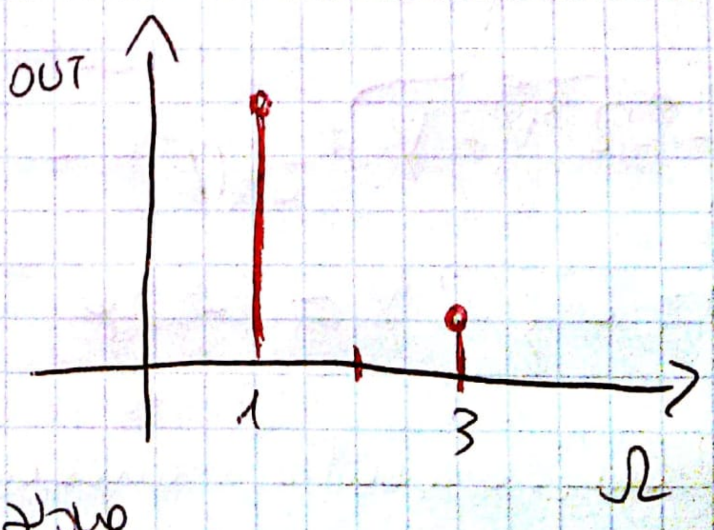


$$y \sim Y \cos(\Omega \tau)$$

$$-\omega^2 Y \cos(\Omega\tau) - 2\xi \Omega Y \sin(\Omega \tau) + Y \cos(\Omega\tau) + \gamma Y^3 (\cos(\Omega \tau))^3 = \cos(\Omega\tau + \varphi)$$

Si ha comunque un effetto non lineare perché $\cos^3 = \frac{3}{4}\cos(\Omega\tau) + \cancel{\frac{1}{4}\cos(3\Omega\tau)}$

(è una formula esatta, deriva dalle formule di moltiplicazione delle forme trigonometriche)



la componente armonica è al triplo della frequenza di eccitazione

Questa è comunque piccola, perciò si può trascurare

Andando a sostituire si ottiene:

$-\Omega^2 Y \cos \; - 2\xi \Omega Y \sin + Y \cos +$
$+\frac{3}{4} Y^3 \cos = \cos C\varphi - \sin S\varphi$

poiché:

$\cos^3 = \frac{3}{4}\cos(\Omega\tau) \sim \frac{3}{4}\cos$

dove $\sin$ e $\cos$ stanno per
$\sin(\Omega\tau)$ e $\cos(\Omega\tau)$ e
$C\varphi$ sta per $\cos(\Omega\tau+\varphi)$ e
$S\varphi$ sta per $\sin(\Omega\tau+\varphi)$

per semplicità di scrittura

H.B.M.

$$\begin{cases} \overbrace{-\Omega^2 Y + Y}^{Y(1-\Omega^2)} + \frac{3}{4}\gamma Y^3 = C\varphi \\ -2\xi\Omega Y = -S\varphi \end{cases}$$

S & A

Bilanciamento armonico dei coefficienti del seno e del coseno rispetto a $(\Omega\tau+\varphi)$
È la conseguenza di aver messo la fase nella forzante e non nella risposta (per semplicità di calcolo)

$$Y^2(1-\Omega^2)^2 + \frac{9}{16}\gamma^2 Y^6 + \frac{3}{2}\gamma Y^5(1-\Omega^2) + 4\xi^2\Omega^2 Y^2 = 1$$

$$\boxed{\frac{9}{16}\gamma^2 Y^6 + \frac{3}{2}Y^4\gamma(1-\Omega^2) + Y^2\left[(1-\Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\right] - 1 = 0}$$

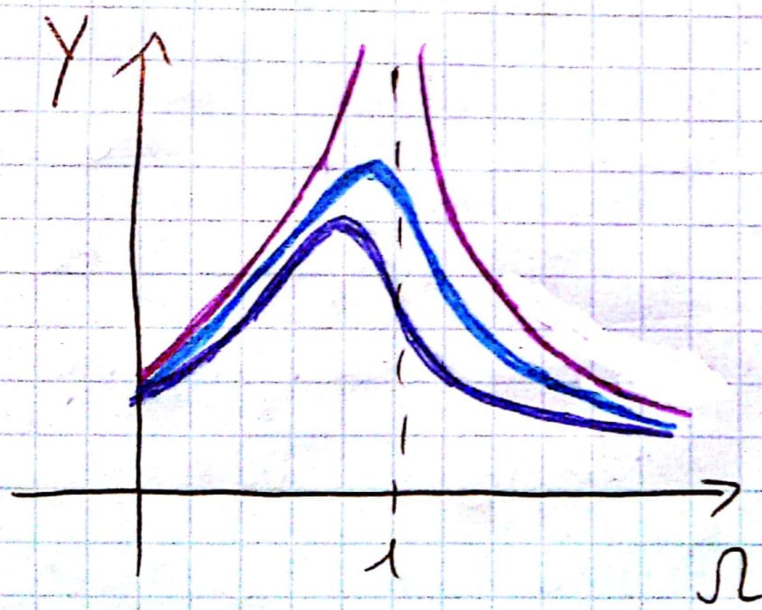
*

È una risposta in frequenza

Per $\gamma = 0$ l'espressione si riduce:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2}}$$

che è la risposta del sistema lineare, in forma adimensionalizzata

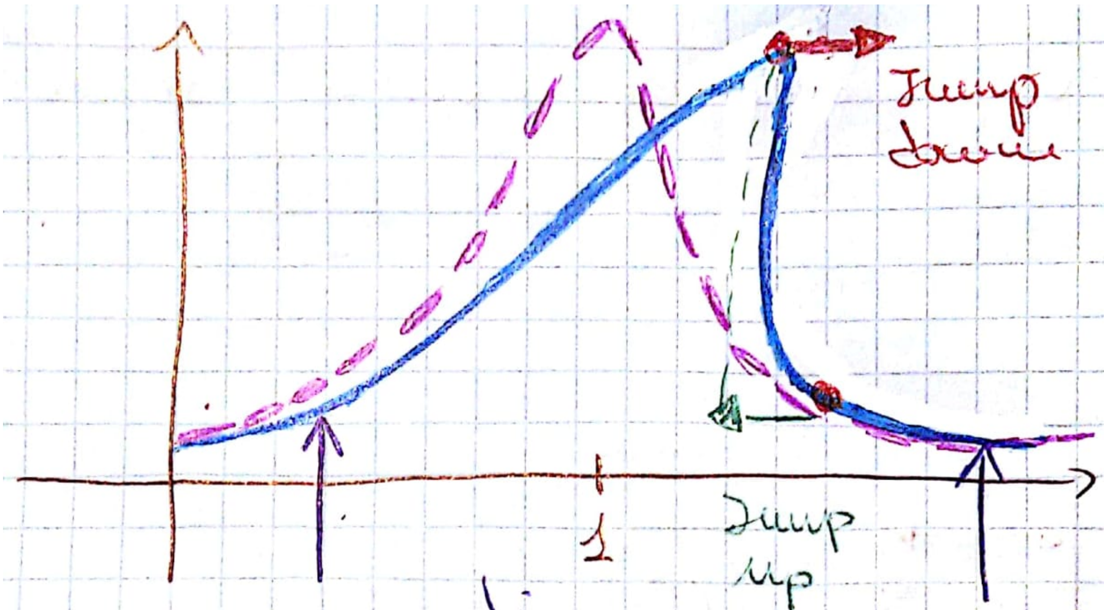


Il parametro che determina il comportamento del sistema è solo ξ

* questa equazione si può intendere come una cubica in y^2

Matlab usa il comando roots(a), dove a è il vettore dei coefficienti, per risolvere una qualsiasi equazione polinomiale. Nel caso di una cubica, si possono avere o tre soluzioni reali o una reale e due complesse e coniugate, che in questo caso non avrebbero alcun significato fisico, perciò sono da escludere.

Il picco di risonanza si sposta alle alte frequenze e si verifica la multi-valuenza, cioè la presenza di più valori nella risposta, nel caso non lineare. Invece in un sistema non lineare questo non è detto



zona di risonanza — zona di non risonanza

BRANCH RISONANTE — BRANCH ANTIRISONANTE

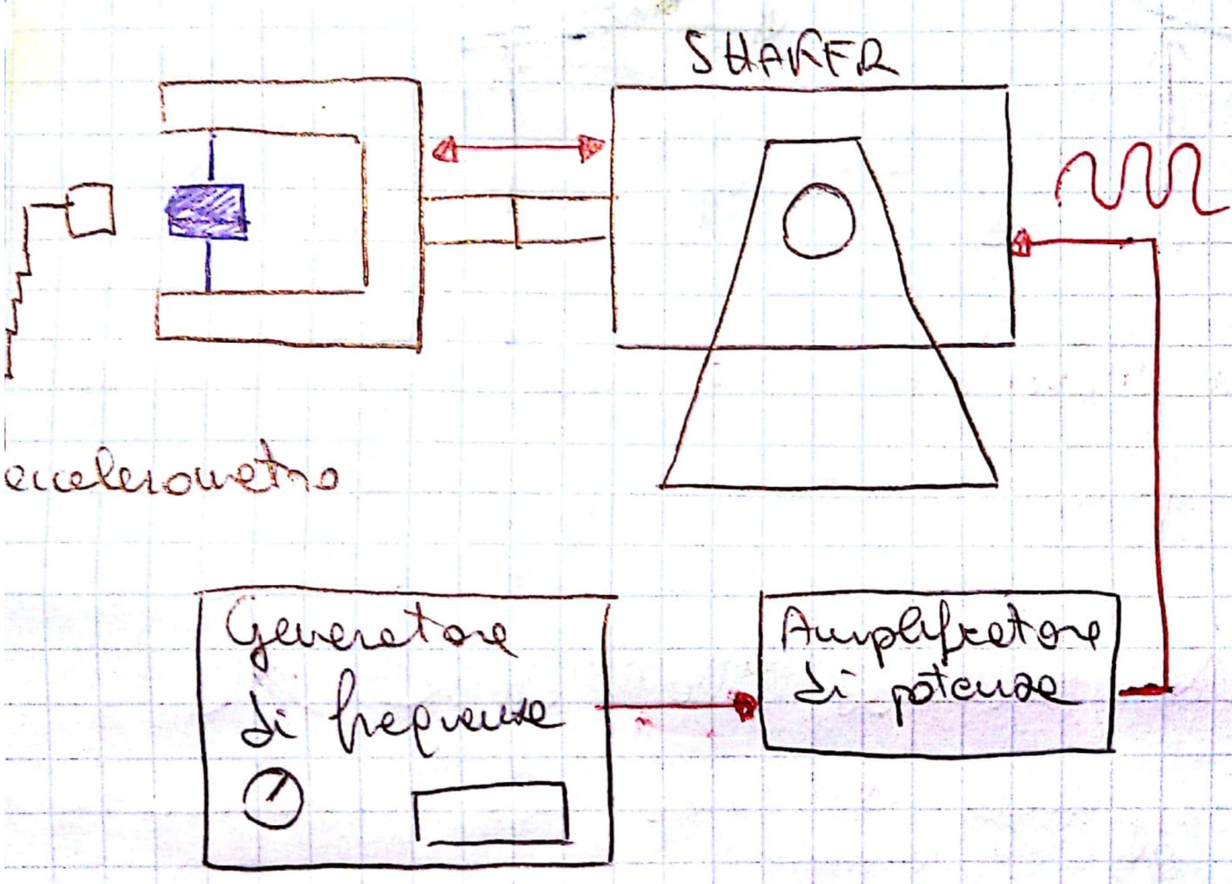
Se si facesse uno sweep per il sistema lineare si ottiene che il sistema risponde secondo la curva, cioè raggiunge il picco, la risonanza, e poi decresce (andamento dolce)

Nel caso non lineare non c'è continuità nella risposta, si ha un jump, una discontinuità, si passa da un'ampiezza all'altra in maniera improvvisa, con l'aumento della frequenza

Jump down → salto giù

Jump up → salto su

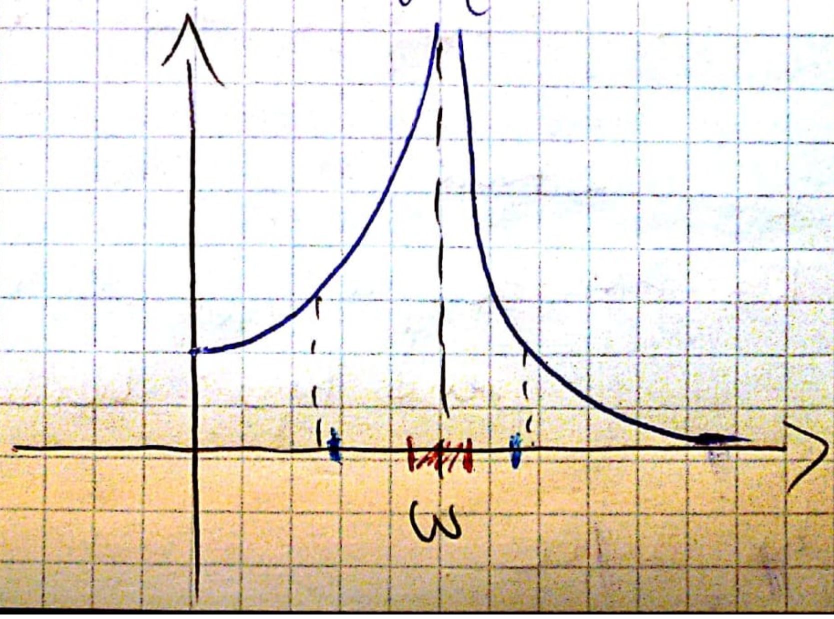
Esempio: apparecchio sperimentale shaker "motore"



Il filo di nylon si comporta come una molla, ma funziona come un elastico cioè non a compressione, ma solo a trazione.

Questo fenomeno del jump, generalmente, è sconveniente, perché la risposta passa in maniera brusca, da un'ampiezza ad un'altra. Si può sfruttare, però, nel caso dell'energy harvesting

Se si vuole recuperare il massimo dell'energia, si deve considerare che è sistema forzato bene alla frequenza di risonanza, in un sistema lineare. Però la banda è molto stretta.
Se si vuole allargare la banda però, si recupera meno energia, perché non si lavora esattamente alla frequenza di risonanza



Utilizzare un sistema non lineare permette di aumentare l'ampiezza di banda, perché si sposta il picco di risonanza, quindi si lavora sempre alla frequenza di risonanza, però con una banda più ampia. Quello che si deve evitare sono i salti, i jump.

L'obiettivo degli ultimi 20 anni è, quindi, quello di sfruttare i fenomeni non lineari, anziché eliminarli.

In un sistema non lineare

molle → cubica con k_3 + "hardening"

molle → cubica con k_3 − "softening"

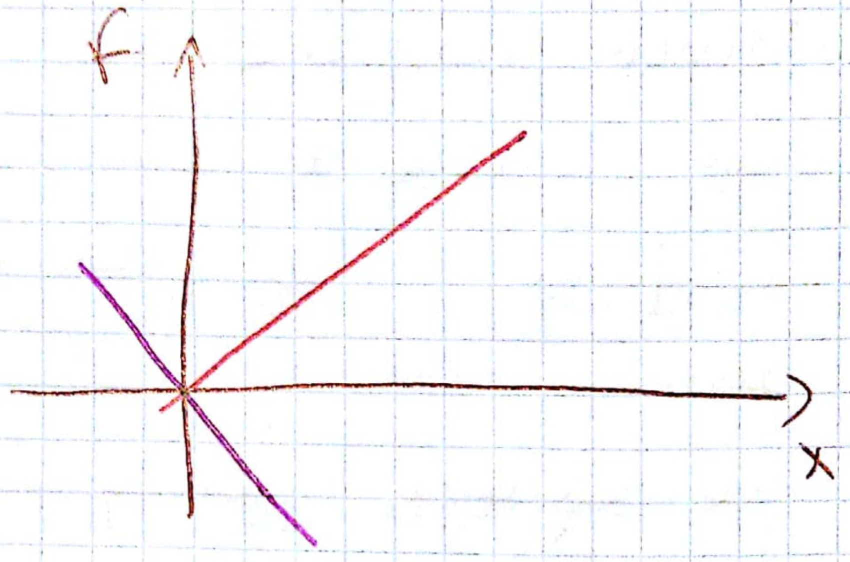
Consideriamo:

$k_3 \geq 0$ sempre, quindi il termine cubico è di tipo hardening

k_1 invece?

Scanned by CamScanner

Per quanto riguarda k_1:



$k_{10} = 0$ quasi zero

$k_1 < 0$ bi-stabile, cioè

ho due configurazioni di stabilità *

(esatto come il flap del cellulare)

in base alla pendenza positiva o

negativa, però mantenendo k_1 un

valore negativo.

Vibration isolators → ISOLATORE

alla posizione di equilibrio statico, il

sistema è molto cedevole

* scatto in basso o scatto in alto

Se l'input non è armonico ma uno shock → SHOCK ISOLATORS

La isteresi non lineare è come se andasse a modificare il damping effettivo del sistema.

Si utilizza la isteresi per influire uno smorzamento, il vantaggio allora è che il picco è ridotto.

Vibration Energy harvesters

Tutto quello che viene dissipato dal damper, viene raccolto dal sistema

Se il gap è piccolo, il sistema si comporta come snap-through → bistabile, o scatta su o scatta giù

Se il gap è grande è hardening

MICRO - AIR - VEHICLES

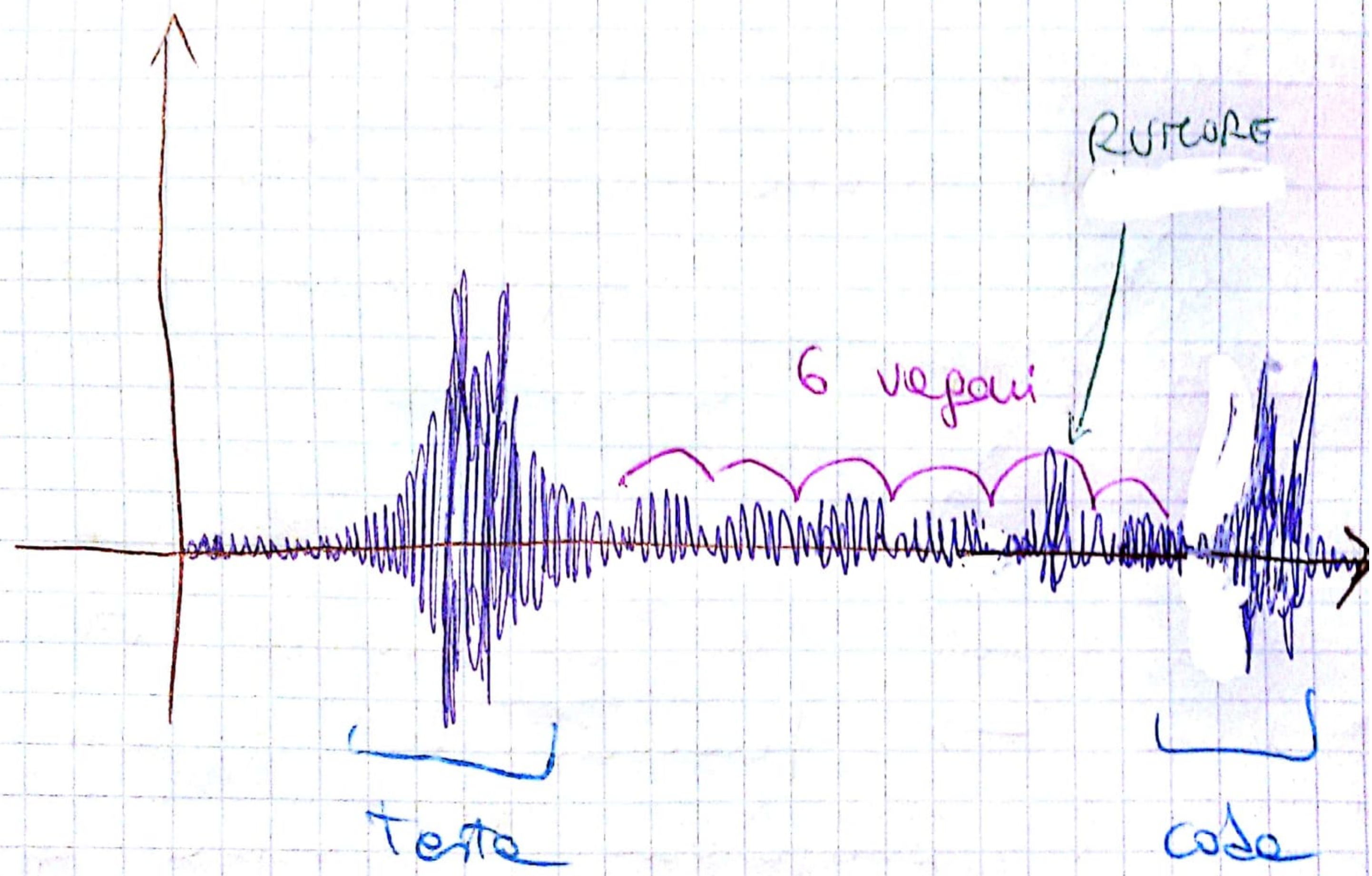
Invece che avere le ali che si muovono alla stessa velocità dell'input si sfrutta la configurazione bistabile, questa scelta, per aumentarla.

La curva sperimentale che descrive il movimento del meccanismo è chiusa → fenomeno di ISTERESI cioè c'è dispersione di energia ogni volta che si fa un ciclo.

$$\frac{\text{Energia cinetica di picco}}{\text{Energia in input}} \Longrightarrow$$

RAPPORTO (adimensionale) DI ENERGIA descrive l'energia cinetica delle ali, a parità di input

Train - induced vibrations



Lezione: Martedì 13 9:30