TDS — LEZIONE 8 — 24-10-18

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \,, \quad \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x_k$$

$$W_{yu}(z) = C(zI-A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-1 & 0 \\ -1 & z-0,5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(z-1)(z-0,5)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-0,5 & 0 \\ 1 & z-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{z+0,5}{(z-1)(z-0,5)}$$ è la f.d.t.

Il modello ARMA che corrisponde all'eq. alle differenze è $y_k = \dfrac{z+0,5}{(z-1)(z-0,5)} u_k$

$$(z-1)(z-0,5) = z^2 - 1,5z + 0,5$$

$$y_k = \frac{(z+0,5)\,z^{-2}}{z^{-2}(z^2-1,5z+0,5)} u_k \Rightarrow y_k = \frac{z^{-1}+0,5z^{-2}}{1-1,5z^{-1}+0,5z^{-2}} u_k$$

$$(1-1,5z^{-1}+0,5z^{-2})\,y_k = (z^{-1}+0,5z^{-2})\,u_k$$

$$y_k - 1{,}5\, y_{k-1} + 0{,}5\, y_{k-2} = u_{k-1} + 0{,}5\, u_{k-2}$$

$$y_k = 1{,}5\, y_{k-1} - 0{,}5\, y_{k-2} + u_{k-1} + 0{,}5\, u_{k-2}$$

$y_0, y_1 \qquad u_k = \{u_0, u_1, \dots, u_k\}_{k=0}^{\infty}$

La risposta impulsiva è sequenza di Markov

$$u_k = \begin{cases} D, & k = 0 \\ CA^{k-1}B, & k > 0 \end{cases}$$

$w_k \in \mathbb{R}$

$w_0 = 0$

$w_k = CA^{k-1}B$

$$A^k = T\Delta^k T^{-1} \qquad A^{k-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0{,}5)^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [1\ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0{,}5)^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[3 \quad (0{,}5)^{k-1}] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 3 - 2(0{,}5)^{k-1}$$

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_k = 3 - 2(0{,}5)^{k-1} \quad k \geq 1 \end{cases}$$

$w_0 = 0$

$w_1 = 1$

$w_2 = 2$

$w_3 = 5/2$

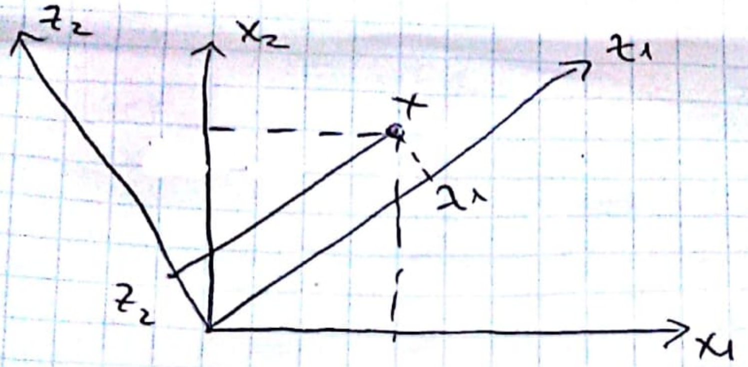
$$\frac{z+0,5}{z^2-1,5z+0,5} = z^{-1} + 2z^{-2} + \frac{5}{2}z^{-3} + \dots$$

Problemi di rappresentazione

Partendo da una f.d.t. o una sequenza di Markov si vuole trovare la rappresentazione di stato corrispondente.

Una rappresentazione cambia al cambiare dello stato

Cambiamento di coordinate nello stato



$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$x = Tz$

con $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e

T invertibile

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = [v_1]_z \, x_1 + [v_2]_z \, x_2$$

La base scelta deve essere linearmente

indipendente

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases} \qquad x(0) = x_0$$

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \bar{A} z(t) + \bar{B} u(t) \\ y(t) = \bar{C} z(t) + \bar{D} u(t) \end{cases}$$

Per $x = Tz$ si ottiene

$$\begin{cases} T\dot{z}(t) = T^{-1} A T z(t) + T^{-1} B u(t) \\ y(t) = C T z(t) + D u(t) \end{cases} \qquad z(0) = T^{-1} x(0)$$

dove $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [v_1]_x z_1 + [v_2]_x z_2 = T \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$

$\bar{A} = T^{-1} A T$, $\bar{B} = T^{-1} B$, $\bar{C} = CT$, $\bar{D} = D$

se si effettua un cambio di coordinate

Se si volesse scrivere tutto cambiando le base in u:

$u = S v$ dove $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$, invertibile

$y = V \lambda$ dove $V \in \mathbb{R}^{p \times p}$, invertibile

La nuova uscita si chiama γ, non y

$$\dot{z}(t) = T^{-1}ATz(t) + T^{-1}BS\nu(t)$$
$$\gamma(t) = V^{-1}CT^{-1}z(t) + V^{-1}DS\nu(t)$$

$$S(A, B, C, D) \simeq S(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)$$

I due sistemi si dicono algebricamente equivalenti

Proprietà dei sistemi algebricamente equivalenti:

1) gli autovalori di A coincidono con gli autovalori di $T^{-1}AT$, $\forall T$

2) $W_{yu}(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B + D$ è invariante rispetto a tutti i sistemi algebricamente equivalenti

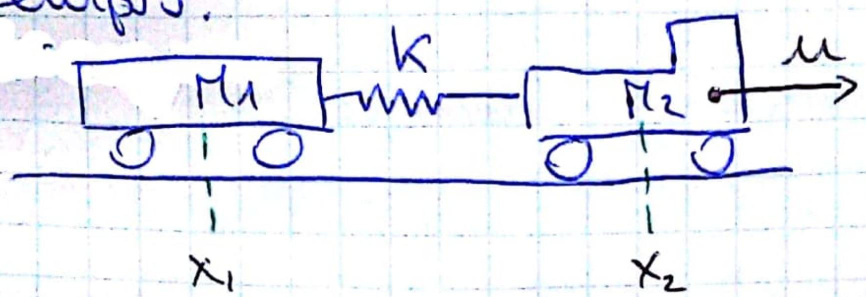
$$\overline{W}_{yu}(\lambda) = \overline{C}(\lambda I - \overline{A})^{-1}\overline{B} + \overline{D} = W_{yu}(\lambda) =$$
$$= CT(\lambda I - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D = CT\left[T^{-1}(\lambda I - A)T\right]^{-1} \cdot$$
$$\cdot T^{-1}B + D = C\cancel{T}\cancel{T^{-1}}(\lambda I - A)^{-1}\cancel{T}\cancel{T^{-1}}B + D =$$
$$= C(\lambda I - A)^{-1}B + D = W_{yu}(\lambda)$$

3) Sequenza di Markov è invariante per tutti i sistemi algebricamente equivalenti

$$w_k = \begin{cases} D_{k-1}, & k=0 \\ CA^{k-1}B, & k>0 \end{cases} = \bar{w}_k = \begin{cases} \bar{D}, & k=0 \\ \bar{C}\bar{A}^{k-1}\bar{B}, & k>0 \end{cases}$$

$\forall\ T$

Esempio:



$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x} \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

quattro coordinate di x, perché ogni corpo deve essere descritto in funzione di posizione e velocità rispetto all'asse (se ruota oltre che traslare si aggiungono informazioni)

$$\begin{cases} M_1\ddot{x}_1 + K(x_1 - x_2) = 0 \\ M_2\ddot{x}_2 + K(x_2 - x_1) = u(t) \end{cases} \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\frac{K}{M_1}x_1 + \frac{K}{M_1}x_2$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_2 = -\frac{K}{M_2}x_2 + \frac{K}{M_2}x_1 + u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & 0 & \frac{k}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_2} & 0 & -\frac{k}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Si vuole usare z come base:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \\ x_1 + x_2 \\ \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}}_{T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}}_{z}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = T^{-1} A T^{z} z(t) + T^{-1} B u(t) \qquad z(0) = T^{-1} x(0)$$

Problema di realizzazione 1

(caso scalare $m = p = 1$)

Data una funzione razionale

$$W(\lambda) = \frac{\beta_0 \lambda^n + \beta_1 \lambda^{n-1} + \dots + \beta_n}{\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n}, \quad \lambda = \{s, z\}$$

trova una rappresentazione di stato $S = (A, B, C, D)$ che la realizza, cioè $C(\lambda I - A)^{-1} B + D = W(\lambda)$

Problema di realizzazione 2

(caso scalare $m = p = 1$)

Data una sequenza di n. reali

$W_k = \{w_0, w_1, \dots w_k\}_{k=0}^{\infty}$, $w_k \in \mathbb{R}$, trova se possibile, una rappresentazione di stato $S = S(A, B, C, D)$ di cui è la sequenza di Markov, cioè

$$w_k = \begin{cases} D, & k = 0 \\ CA^{k-1}B, & k > 0 \end{cases}$$

Si noti:

$$W(\lambda) = \beta_0 + \frac{b_1 \lambda^{n-1} + b_2 \lambda^{n-2} + \dots + b_n}{\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n} =$$

$$= \overset{w_0}{\overset{\parallel}{\beta_0}} = w_1 \lambda^{-1} + w_2 \lambda^{-2} + \dots + w_n \lambda^{-n} + \frac{R(\lambda^{-1})}{\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} \dots}$$

Rappresentazioni canoniche di realizzazione di ordine n

RCN1

"Rappresentazione canonica di raggiungibilità 1)

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \\ \hline -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \dots & -\alpha_1 \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad D = \beta_0$$

→ non dipende dal sistema, è fisso

$$C = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \dots & b_1 \end{bmatrix}$$

A ha una forma caratteristica, detta "FORMA COMPAGNA"

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots \alpha_n$$

(Realizzazione Canonica di Osservabilità 2)

RCO2

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \\ \hline -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \dots & -\alpha_1 \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} C = [1 \ 0 \dots 0] \\ D = w_0 \ (= \beta_0) \end{array}$$

RCO1

Realizzazione canonica di Osservabilità 1)

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_n \\ \hline & & & -\alpha_{n-1} \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & -\alpha_1 \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} \qquad D = \beta_0$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

RCR2

(Realizzazione canonica di raggiungibilità 2)

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_n \\ \hline & & & -\alpha_{n-1} \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & -\alpha_1 \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad D = \omega_0 \ (= \beta_0)$$

$$C = \begin{bmatrix} \omega_1 & \cdots & \omega_n \end{bmatrix}$$

$$S(A,B,C,D) \underset{T}{\approx} S(\bar{A},\bar{B},\bar{C},\bar{D}) \iff W_{yu}(\lambda) = \bar{W}_{yu}(\lambda)$$

<u>Sistemi duali</u>

$$S(A,B,C,D) \underset{*}{\approx} S(A^*,B^*,C^*,D^*) \iff **$$

$A^* = A^T$

$\underline{B^* = C^T}$

$\underline{C^* = B^T}$

$D^* = D^T$

$$W^*_{yu}(\lambda) = C^*(\lambda I - A^*)^{-1}B^* + D^T =$$
$$= B^T(\lambda I - A^T)^{-1}C^T + D^T$$

$$W^*_{yu}(\lambda)^T = C[(\lambda I - A^T)^T]^{-1}B + D =$$
$$= C(\lambda I - A)^{-1}B + D$$

$$** \quad W^*_{yu}(\lambda) = W^T_{yu}(\lambda)$$

Allora

$$\begin{tikzcd}
RCR1 \arrow[r, phantom, "\underset{T}{\approx}"] \arrow[r, bend left, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow, "SS*"'] & RCR2 \arrow[d, leftrightarrow, "SS*"] \\
RCO1 \arrow[r, phantom, "\underset{T}{\approx}"] \arrow[r, bend right, leftrightarrow] & RCO2
\end{tikzcd}$$

dualità

equivalenza algebrica Sistema (dt)

Esempio:

$$W(\lambda) = \frac{3\lambda^2 + 3\lambda - 6}{\lambda^2 - \lambda + 1/4} = \boxed{3 + \frac{6\lambda - 27/4}{\lambda^2 - \lambda + 1/4}}^{\,*} =$$

$$= 3 + 6\lambda^{-1} - 3/4\,\lambda^{-2} + \frac{9/4\,\lambda^{-1} + 3/16\,\lambda^{-2}}{\lambda^2 - \lambda + 1/4}$$

RCR1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/4 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -27/4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D = [3]$$

RCO1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -27/4 \\ 6 \end{bmatrix} \quad C = [0 \;\; 1]$$

$$D = [3]$$

RCR2

coefficienti di Markov

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & -3/4 \end{bmatrix}$$

$$D = [3]$$

(la duale è tutto trasposto)

RC02

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 \\ -3/4 \end{bmatrix} \qquad C = [1 \quad 0] \qquad D = [3]$$

Quindi:

effinito / determin.

$$W_{yu}(\lambda) = \left[-\frac{27}{4} \quad 6\right] \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1/4 & \lambda-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 =$$

$$= \frac{1}{\lambda(\lambda-1)+1/4} \left[-\frac{27}{4} \quad 6\right] \begin{bmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1/4 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 =$$

$$= \boxed{\frac{6\lambda - 27/4}{\lambda^2 - \lambda + 1/4} + 3} \, *$$

Si può dimostrare che, date:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & I_{n-1} \\ \hline -\alpha_n & -\alpha_{n-1} \cdots -\alpha_1 \end{array}\right] \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad D = \beta_0$$

$$C = [b_n \quad b_{n-1} \cdots b_1]$$

$$(\lambda I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|ccc} & & -I_m & \\ \hline \alpha_m & \alpha_{m-1} & \cdots & \alpha_1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|cccc} \lambda & -1 & & & \\ & \lambda & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & -1 \\ \hline \alpha_m & \alpha_{m-1} & \cdots & \cdots & (\alpha_1 + \lambda) \end{array}\right]^{-1} = \frac{\left[\begin{array}{c|c} & 1 \\ & \lambda \\ & \vdots \\ & \lambda^{m-1} \end{array}\right]}{\lambda^m + \alpha_1 \lambda^{m-1} \cdots \alpha_m}$$

* ultima colonna dell'aggiunta

$C(\lambda I - A)^{-1} B + D$

$$[b_m \cdots b_1] \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{m-1} \end{bmatrix} = b \lambda^{m-1} \cdots b_m$$