Satellite artificiale geostazionario

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega R \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\omega}{R} & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \\ \quad B_1 \quad B_2 \end{array} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

matrici di raggiungibilità

$$R(A, B_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\omega}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{2\omega}{R} & 0 & \frac{2\omega^3}{R} \end{bmatrix}$$

$$R(A, B_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\omega & 0 \\ 0 & 2\omega & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & \frac{1}{R} & 0 & -\frac{4\omega^2}{R} \\ \frac{1}{R} & 0 & -\frac{4\omega^2}{R} & 0 \end{bmatrix}$$

$\det R(A, B_1) = 0$

$$\det R(A, B_2) = \frac{1}{R} 2w\left(-\frac{8w}{R} + \frac{2w^3}{R}\right) \neq 0$$

(Raggiungibilità, spazi raggiungibili, sottospazio di raggiungibilità, completa raggiungibilità nel discreto e nel continuo)

Proprietà di X^r

1) $X^r \supset \operatorname{Im} B$

2) X^r è A invariante

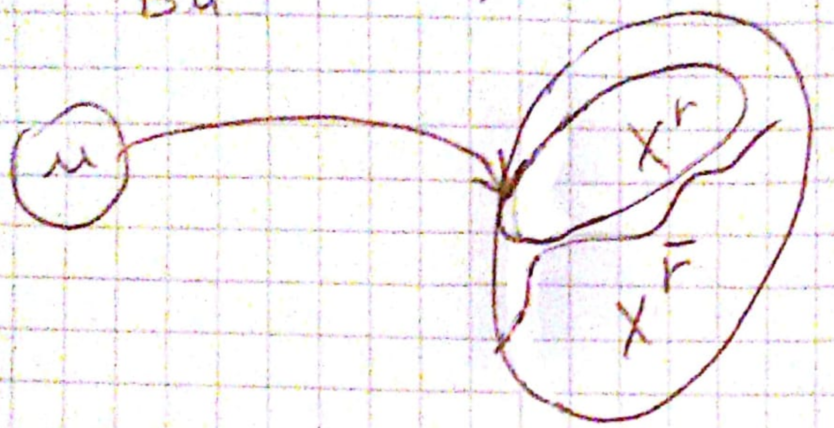
$$R = [B \; AB \; \dots \; A^{n-1}B]$$

è la matrice di raggiungibilità

$$X^r = \operatorname{Im} R = \operatorname{span}\{B, AB, \dots A^{n-1}B\}$$

$$x_{k+1} = A x_k + B u_k$$

Bu



X^r è A invariante se $\forall x \in X^r \Rightarrow$

$Ax \in X^r$ $\quad (AX^r = Im?)$

dove A_x è una proiezione, ma una mappatura

$X^r = Im[B\ AB \dots A^{n-1}B]$

$$AX^r = Im[AB\ A^2B \dots \underbrace{A^nB}_{(-\alpha_1 A^{n-1}B - \alpha_2 A^{n-2}B \dots \alpha_n B)}] =$$

$$= Im[B\ AB \dots A^{n-1}B]$$

CONTROLLABILITÀ

$x \in \mathbb{R}^n$ è controllabile in T passi

se $\exists\ u_0, u_1 \dots u_{T-1}$ t.c.

$$Ax^T = R_T \begin{bmatrix} u_{T-1} \\ u_{T-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}$$ x è un vettore noto $\Longleftrightarrow$

$$0x = A^T x + \sum_{i=0}^{T-1} A^{T-i-1} B u_i$$

Condizione di controllabilità per punto =

se è zero uno stato in T passi

(risolvendo l'equazione all'inverso)

si partono a zero le condizioni iniziali

Sottospazio di controllabilità in T passi

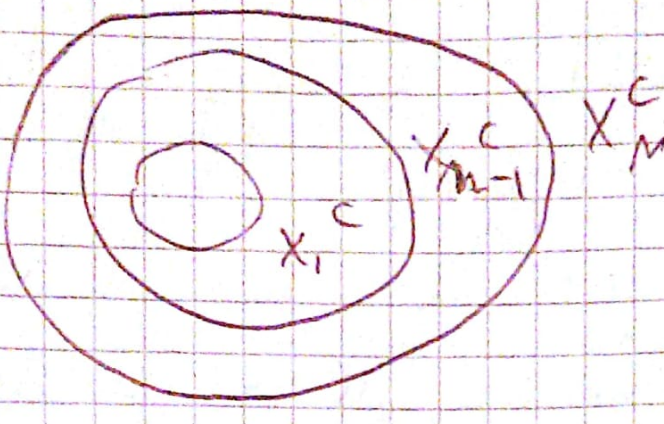
$$X_T^c = \left\{ x : A^T x \in X_T^r \right\}, \quad X_T^c \supset X_T^r$$

deriva dalla A-invarianza di X_T^r

$$\forall x \in X_T^r \Rightarrow A^K x \in X_T^r \quad \forall K$$

Controllabilità in τ passi:
vale la seguente inclusione:

$$X_1^c \supset X_2^c \dots \supset X_n^c = X_{n+i}^c \quad \forall i \geq 0$$



Uno stato è controllabile se lo è al più in n passi. Se non va a zero in n passi, non si riuscirà a farlo neanche aumentando il numero di passi.

$X^c = \{x : A^n x \in X^r\}$ è il sottospazio di controllabilità
(tutti gli x che possono essere portati a zero)

Condizione di completa controllabilità

$$X^c = \mathbb{R}^n \iff \underbrace{\operatorname{Im} A^n \subset X^r}_{} = \operatorname{Im} R$$

il sistema è controllabile

Controllabilità e raggiungibilità sono due concetti differenti

Infatti il sistema può soddisfare questa condizione ma il rango di R può essere minore di n

Condizione di completa controllabilità in T-passi

$$X_T^C = \mathbb{R}^n \iff \operatorname{Im} A^T \subset X_T^C = \operatorname{Im} R_T$$

Esempio:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det R = 0$$

$$x^r = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

<u>Controllabilità in 2 passi</u>

<u>$\text{Im } A^2 \subset X^r_2$</u>

quindi $X^r = X^r_2$ perché

$$R^2 = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 = A \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \beta\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Infatti:

$$\mathrm{span}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \subset \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

Non è un sistema completamente raggiungibile ma è completamente controllabile, abbiamo in due passi

Lo span è il set dei dati raggiungibili

Per calcolare il set dei dati non raggiungibili, invece:

$\mathbb{R}^n = X^r \oplus X^{\bar{r}}$ Calcolo di $X^{\bar{r}}$

$X^{\bar{r}} = (\mathrm{Im}\, R)^{\perp} = \mathrm{Ker}\, R^T$

↳ sottospazio ortogonale, completa $\mathbb{R}^n$

$$R^T$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_2 + x_3 = 0$

$x_2 = 0$

$x_3 = 0$

x_1 qualsiasi

Esempio

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det R \neq 0$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Im}\, A^3 \subset X^r$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$X_1^r = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ $\quad X_1^c = \left\{ x : Ax \in \mathrm{span}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Ax è combinazione lineare di x

$X_2^r = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$$= \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}}^{Ax} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} =$$

$X_3^r = \mathbb{R}^3$

$$= \{ x_1 = x_3 \,,\ x_2 = 0 \}$$

$X_2^c = \left\{ x : A^2 x \in \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right\} =$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{cases} x_3 = \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_1 = \beta + \alpha \end{cases} \iff \left\{ \begin{matrix} x_2, x_3 \text{ liberi} \\ x_1 = x_2 + x_3 \end{matrix} \right\}$$

$$X_3^c = \{ x : A^3 x \subset \mathbb{R}^3 \}$$

Relazioni fra X^r e X^c

1) $X^c \supset X^r$

2) $X^r = \mathbb{R}^n \implies X^c = \mathbb{R}^n$

completa raggiungibilità implica completa controllabilità

3) $\begin{cases} X^c = \mathbb{R}^n \\ A \text{ invertibile} \end{cases} \implies X^r = \mathbb{R}^n$

$(\mathrm{Im}\, A^n \subset X^r \text{ e } A \text{ invertibile}) \implies X^r = \mathbb{R}^n$

A tempo discreto si ha l'equivalenza tra controllabilità e raggiungibilità (completa) solo se A è invertibile

Per quanto riguarda a tempo continuo:

Raggiungibilità e controllabilità

Raggiungibilità nell'intervallo $[0, T]$

$\dot{x} = Ax + Bu, \; x(0) = 0x$

$$x(T) = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B u(\tau) \, d\tau =$$

Si uso lo sviluppo di Sylvester, al posto dell'esponenziale di matrice

$$e^{At} = \beta_0(t) I + \beta_1(t) A + \dots + \beta_n(t) A^{n-1}$$

$$= \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0(T) \\ \gamma_1(T) \\ \vdots \\ \gamma_{n-1}(T) \end{bmatrix}$$

R

$$y_i(T) = \int_0^T \beta_i(T-\sigma)\, u(\sigma)\, d\sigma,$$

$$i = 0 \dots n-1$$

Nel tempo continuo, quel che si riesce a fare in un intervallo, lo si riesce a fare in un qualsiasi altro intervallo, tutto dipende dalla matrice di raggiungibilità. Allora si riesce a mappare tutto $\mathbb{R}^n$ solo se la matrice di raggiungibilità è a rango pieno, è indipendente da T. Quindi a tempo continuo si parla di RAGGIUNGIBILITA' e non di raggiungibilità in T passi.

Condizione di completa raggiungibilità

$$X^r \triangleq \operatorname{Im} R = \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow \text{rango } R = n$$

completa raggiungibilità

La controllabilità coincide con la raggiungibilità a tempo continuo

Controllabilità TC

$$0_x = e^{AT}x + R_T \begin{bmatrix} \gamma_0(T) \\ \gamma_1(T) \\ \vdots \\ \gamma_{n-1}(T) \end{bmatrix}$$

$$-e^{AT}x = R_T \begin{bmatrix} \gamma_0(T) \\ \gamma_1(T) \\ \vdots \\ \gamma_{n-1}(T) \end{bmatrix}$$

conta l'esponenziale di matrice che conta

$$X^c = \{ x : -e^{AT}x \in X^r \}$$

$$X^r = \mathbb{R}^n \Rightarrow X^c = \mathbb{R}^n$$

$$X^c = \mathbb{R}^n \Rightarrow X^r = \mathbb{R}^n$$

Proprietà dei sistemi (TI - TD)

1) Sia (A, B) coppia completamente raggiungibile. Sia $x = T\tilde{x}$ cambio di coordinate nello stato.

Allora $(\underbrace{T^{-1}AT}_{\bar{A}}, \underbrace{T^{-1}B}_{\bar{B}})$ è completamente raggiungibile

$$\bar{R} = [\bar{B} \ \ \bar{A}\bar{B} \ \ldots \ \bar{A}^{n-1}\bar{B}] =$$

$$= [T^{-1}B \ \ (T^{-1}A\cancel{T})\cancel{T^{-1}}B \ \ldots \ \underbrace{(T^{-1}AT)^{n-1}}_{T^{-1}A^{n-1}\cancel{T}}\cancel{T^{-1}}B]$$

$$= T^{-1}[B \ \ AB \ \ldots \ A^{n-1}B] = T^{-1}R$$

2) Sia (A, B) coppia non completamente raggiungibile, $\dim X^r = \rho < n$ (rango $R = \rho$)

$$T = [\underbrace{\mathcal{B}_r}_{\rho} \ \vdots \ \underbrace{\mathcal{B}_{\bar{r}}}_{n-\rho}]\, n$$

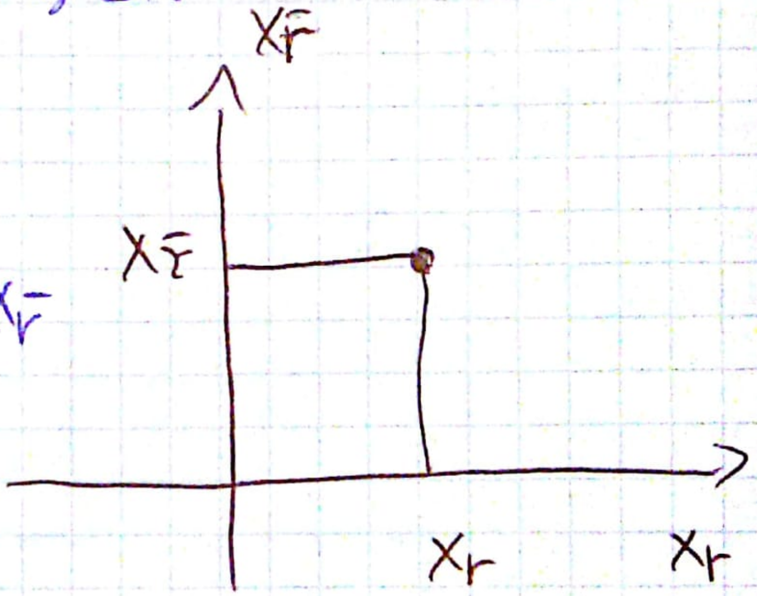
$\mathcal{B}_r = \{$ p vettori linearmente indipendenti che soddisfano le colonne di $\mathcal{R}$ $\}$

$x = Tz$

$$z = \begin{bmatrix} x_r \\ \hline x_{\bar{r}} \end{bmatrix} \begin{matrix} p \\ n-p \end{matrix}$$

si è partizionato lo spazio degli stati

si vede l'evoluzione dei sottospazi x_r e $x_{\bar{r}}$



1) $\mathrm{Im}\, B \subset X^r$

2) X^r è A invariante

$T^{-1}AT = \bar{A}$

$$T^{-1}B = \bar{B} = \begin{bmatrix} B_r \\ \hline B_{\bar{r}} \end{bmatrix} u \qquad \begin{bmatrix} x_r \\ \hline x_{\bar{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_r \\ \hline B_{\bar{r}} \end{bmatrix} u$$

la parte non raggiungibile non deve essere influenzata da u, in base alla condizione 1)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} p & n-p \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ n-p \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} A_r & A_{r\bar{r}} \\ \hline 0 & A_{\bar{r}} \end{array}\right] \end{array} \begin{bmatrix} x_r \\ 0 \end{bmatrix} =$$

perché x_r è invariante rispetto ad A

$$= \begin{bmatrix} x_r^+ \\ 0 \end{bmatrix}$$

questo è il cambio di coordinate scelto

$$T^{-1}B = \bar{B} = \begin{bmatrix} B_r \\ \hline 0 \end{bmatrix} u$$

Rappresentazione di raggiungibilità alla KALMAN

$$T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} B_r & \vdots & B_{\bar r} \end{bmatrix} \\ \quad p \qquad\quad n-p \end{array}$$

$$\bar A = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} A_r & \vdots & A_{r\bar r} \\ \hdashline 0 & \vdots & A_{\bar r} \end{bmatrix}$$

$$\bar B = T^{-1} B = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} B_r \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} p \\ n-p \end{array} \end{array}$$

$$z_{k+1} = \bar A z_k + \bar B u_k$$

$$\begin{bmatrix} x_{r,k+1} \\ x_{\bar r,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_r & \vdots & A_{r\bar r} \\ \hdashline 0 & \vdots & A_{\bar r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r,k} \\ x_{\bar r,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = p \begin{bmatrix} \overbrace{C_r}^{p} & \vdots & \overbrace{C_{\bar r}}^{n-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r,k} \\ x_{\bar r,k} \end{bmatrix} + D_r u_k$$

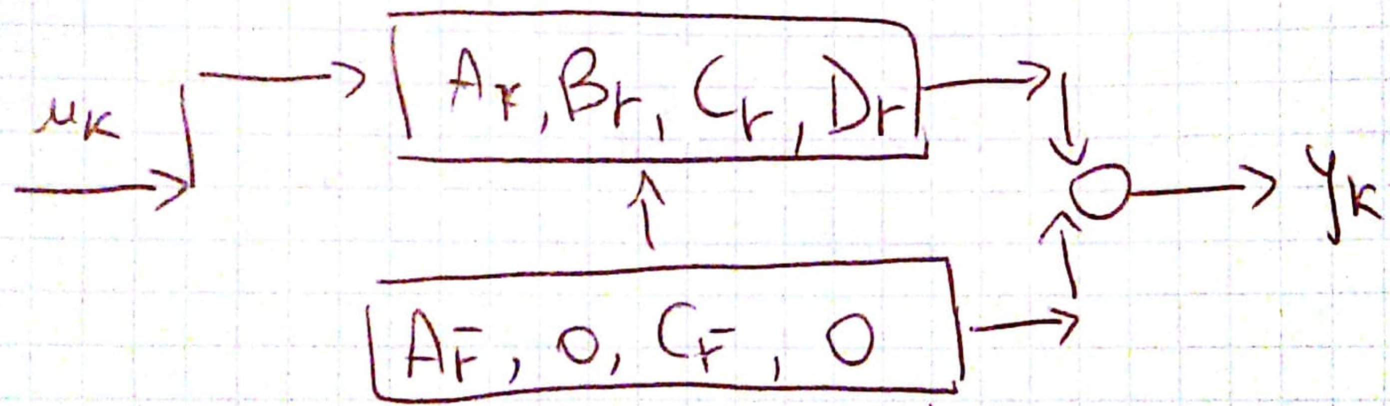
La parte raggiungibile è influenzata dall'ingresso e dalla parte non ragg.

$$x_{r,k+1} = A_r x_{r,k} + A_{r\bar{r}} x_{\bar{r},k} + B_r u_k$$

La parte non raggiungibile invece, non è influenzata dall'ingresso:

$$x_{\bar{r},k+1} = A_{\bar{r}} x_{\bar{r},k}$$ evolve in evoluzione libera *

$$y_k = C_r x_{r,k} + C_{\bar{r}} x_{\bar{r},k} + D_r u_k$$



* siccome non si può controllare, si cerca di avere sistemi raggiungibili

Gli autovalori di A si dividono in:

- autovalori ρ raggiungibili (di A_r)
- autovalori $n-\rho$ non raggiungibili (di $A_{\bar{r}}$)

← sistema instabile

Calcolo della fdt i/u

$$W_{yu}(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B + D$$

$$= \left[C_r \mid C_{\bar{r}} \right] \left[\lambda I - \left[\begin{array}{c|c} A_r & A_{r\bar{r}} \\ \hline 0 & A_{\bar{r}} \end{array} \right] \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} B_r \\ \hline 0 \end{array} \right] + D_r =$$

$$= \left[C_r \mid C_{\bar{r}} \right] \left[\begin{array}{c|c} (\lambda I - A_r)^{-1} & A_{r\bar{r}}^{*} \\ \hline 0 & (\lambda I - A_{\bar{r}})^{-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} B_r \\ 0 \end{array} \right] + D_r =$$

$$= \left[C_r \mid C_{\bar{r}} \right] \left[\begin{array}{c} (\lambda I - A_r)^{-1} B_r \\ \hdashline 0 \end{array} \right] + D_r$$

La fdt si riduce alla fdt della sola parte raggiungibile

Quindi:

$$W_{yu}(\lambda) = \frac{\beta_0 \lambda^p + \beta \lambda^{p-1} + \dots \beta_p}{\lambda^p + \alpha_1 \lambda^{p-1} + \dots \alpha_p} =$$

Il grado massimo del polinomio caratteristico è ρ. La fdt si è ridotta di grado, non è più n (da una matrice $n \times n$, di n poli e n zeri) Non compaiono tutti i poli che nascono dagli autovalori non raggiungibili, che sono stati cancellati da zeri. E' pericoloso se questi poli non sono stabili

$$= \frac{K(\lambda - z_1)(\lambda - z_2) \cdots (\lambda - z_\rho)}{(\lambda - p_1)(\lambda - p_2) \cdots (\lambda - p_\rho)}$$

la raggiungibilità riguarda il modello, non l'impianto.

Anche i coefficienti di Markov dipendono solo dalla parte raggiungibile

$$w_k = \begin{cases} D, & k=0 \\ CA^{k-1}B, & k>0 \end{cases}$$

$$W_{\bar{K}} = \begin{cases} D_r \, , & K=0 \\ [\, C_r \mid C_{\bar{r}} \,] \left[\begin{array}{c|c} A_r & A_{r\bar{r}}^{*} \\ \hline 0 & A_r^{K-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} B_r \\ \hline 0 \end{array}\right], & k>0 \end{cases}$$

Tutto quello che non è raggiungibile non compare nel legame i/u

$$= \begin{cases} D_r \, , & K=0 \\ C_r A_r^{K-1} B_r \, , & K>0 \end{cases}$$

$$\bar{R} = [\, \bar{B} \;\; \bar{A}\bar{B} \; \dots \; \bar{A}^{n-1}\bar{B} \,] = \begin{array}{c} \left[\begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r B_r \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} A_r^{n-1} B_r \\ 0 \end{bmatrix} \right] \end{array} \begin{array}{l} \to \rho \\ \to n-\rho \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_r & A_{r\bar{r}} \\ \hline 0 & A_{\bar{r}} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_r^{K} & A_{r\bar{r}}^{*} \\ \hline 0 & A_{\bar{r}}^{K} \end{array}\right]$$

Controllabilità TD

Sia (A, B controllabile ma non raggiungibile

$$\mathrm{Im}\begin{bmatrix} A_r & A_{r\bar{r}} \\ 0 & A_{\bar{r}} \end{bmatrix} \subset \mathrm{Im}\left[\begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_r B_r \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} A_r^{n-1} B_r \\ 0 \end{bmatrix}\right] \begin{array}{l} \rho \\ n-\rho \end{array}$$

$$\boxed{A_{\bar{r}}^{n} = 0 \text{ necessariamente}}$$

$A_{\bar{r}}^{n} = 0 \iff A_{\bar{r}}$ è nilpotente di ordine $n-\rho$

(cioè tutti gli autovalori di $A_{\bar{r}}$ sono nulli)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è nilpotente $\Rightarrow$

$\exists\, k \leq n$ t.c. $A^k = O_{n \times n}$

Questo si utilizza per il controllo a tempo discreto
A tempo continuo si usa il controllo asintotico