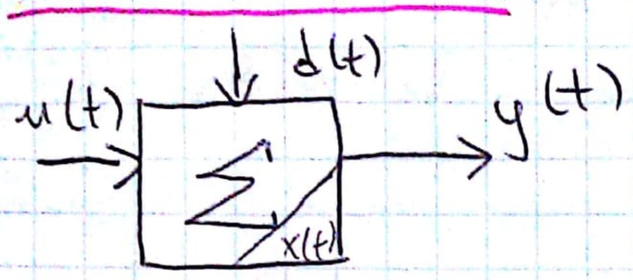
TEORIA DEI SISTEMI LEZIONE 2 10-10-18



Gli ingressi manipolabili sono funzioni che si possono modificare

Segnali:

$u(t)$ ingresso manipolabile, $u(t) \in \mathbb{R}^m$

$y(t)$ uscita misurabile, $y(t) \in \mathbb{R}^p$

$d(t)$ ingressi non manipolabili (disturbi)

Questi disturbi non possono essere modificati, sono parametri che devono essere accettati così come sono nella modellazione del sistema (non trattati nel corso)

$x(t)$ stato (uscite non misurabili) $x \in \mathbb{R}^n$

dove m, p, n sono numeri generici ≥ 1, poiché queste grandezze sono dei vettori di scalari.

$y(t) = w(t, u_{(-\infty, t]})$ è un sistema dinamico causale TC (tempo continuo) 1° 1 descritta secondo una rappresentazione globale i/u. Il problema è che questa forma non è maneggiabile

STATO

Lo stato di un sistema è definito come

$$x(t) = \sigma\left(t, u_{(-\infty, t)}\right)$$

t è escluso

"La variabile $x(t)$ è detta <u>stato</u> del sistema causale se $\exists\ \sigma(\cdot)$ t.c.

$x(t) \triangleq \sigma(t, u_{(-\infty,t)})$ che gode delle seguenti due proprietà:

1) $\exists$ legge di aggiornamento dello stato

$$x(t+\tau) = \psi\left(t+\tau,\ t,\ x(t),\ u_{[t, +\tau)}\right)$$

per calcolare lo stato nel tempo futuro

2) $x(t)$ è equivalente alla conoscenza di $u_{(-\infty,t)}$ (la storia passata dello ingresso)

per il calcolo di $y(t)$, cioè:

$$y(t) = \eta\left(t, x(t), u(t)\right)$$

Sistemi dinamici a stato vettore finito

$x \in \mathbb{R}^n$ è la minima quantità di informazione necessaria a descrivere la evoluzione del sistema

Usando le due leggi si possono ottenere altre due rappresentazioni

$$y(t+\tau) = \eta(t+\tau, x(t+\tau), u(t+\tau))$$

$$y(t+\tau) = \varphi(t+\tau, t, x(t), u_{[t, t+\tau]})$$

poiché noto il valore dello stato al tempo t, si può calcolare il valore dell'uscita al tempo $t+\tau$, infatti tutto il valore dell'ingresso da $-\infty$ a t è riassunto nello stato.

$$\begin{cases} y(t+\tau) = \varphi(t+\tau, t, x(t), u_{[t, t+\tau]}) \\ x(t+\tau) = \psi(t+\tau, t, x(t), u_{[t, t+\tau]}) \end{cases} \quad \forall t, \tau$$

rappresentazione i/s/u 2°

Per introdurre la derivata dello stato

Scanned by CamScanner

si verifica l'esistenza del limite

$$\dot{x}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{\psi(t+\varepsilon, t, x(t), u_{[t, t+\varepsilon)}) - x(t)}{\varepsilon} =$$

$$= f(t, x(t), u(t))$$

tutta la storia degli ingressi si riduce al valore di $x(t)$, cioè la funzione ottenuta. Sostituendo nella rapp. i/s/u:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = \eta(t, x(t), u(t)) \quad \forall t \geq t_0 \end{cases}$$

rappresentazione Locale i/s/u 3°

non compaiono le storie delle variabili, ma soltanto il loro valore istantaneo. Si riscrive la 2° per evidenziare il fatto che sono equivalenti:

$$\begin{cases} y(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t]}) \quad \forall t, t_0 \\ x(t) = \psi(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t)}) \ldots t \geq t_0 \end{cases}$$

Dato un sistema di eq. differenziali del I ordine:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2 \dots x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots x_n) \end{cases}$$ sistema di eq.

Si può risolvere come un'unica equazione di ordine n.

$$y^{(n)}(t) = f(t, y^{(n-1)}(t), y^{(n-2)}(t), \dots, y(t), u^{(n)}(t), u^{(n-1)}(t), \dots, \dot{u}(t), u(t))$$

$$\left.\begin{array}{l} y^{(n-1)}(t_0) = \dot{y}_0 \\ \dot{y}(t_0) = y_0 \end{array}\right\} \text{ condizioni iniziali}$$

È una rappresentazione equivalente, dove $y^{(n)}(t)$ è la derivata n-esima

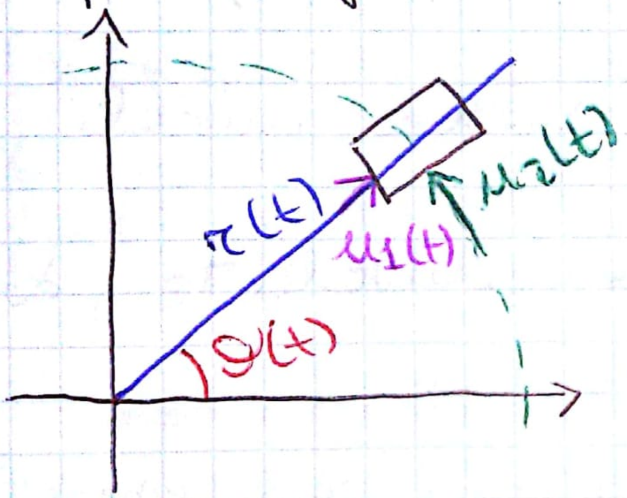
La derivata dell'ingresso non può essere più grande della derivata massima dell'uscita (ci si deve fermare ad n)

<u>rappresentazione locale i/u</u> 4°

Per trovare modelli matematici si usano la 3° e la 4°

La rapp. globale i/s/u è la soluzione
la rapp. locale i/s/u
la rapp. di stato è più completa di quella i/u, perché questa rappresenta l'evoluzione del sistema quando si è lontani dal. le condizioni iniziali e quando queste sono nulle, non hanno effetto sul sistema.

Esempio: modello non lineare di un satellite artificiale geostazionario (ruota alla stessa velocità della Terra, quindi sembra fisso)



: u_1 spinta radiale, il motore che la avvicina e allontana → acc. centrifuga ↗

$$\ddot{r}(t) = \underbrace{r(t)\dot{\vartheta}^2(t)}_{} - \frac{k}{\underbrace{r^2(t)}_{}} + u_1(t)$$

legge attrazione gravitazionale

$$\ddot{\vartheta}(t) = \frac{-2\dot{\vartheta}(t)\dot{r}(t)}{r(t)} + \frac{1}{r(t)} u_2(t)$$

momenti

È una rappresentazione locale (non compare la storia dell'ingresso) i/u (non ci sono informazioni sullo stato, ci dovrebbe essere una derivata prima della funzione, ad esempio).
È un modello causale. Si vuole pensare ad una rapp. i/s/u, trovando un'unica soluzione, che dipende dalle condizioni iniziali e dagli ingressi.

Soluzione geostazionaria:
il satellite deve muoversi a velocità costante, lungo la circonferenza:

$\dot{r}(t) = 0, \forall t$ $\qquad \dot{\vartheta}(t) = w, \forall t$

$r(t) = R, \forall t$ $\qquad \vartheta(t) = wt, \forall t$

velocità fissa
velocità rotazione Terra

$$\begin{cases} 0 = R w^2 - \dfrac{K}{R^2} \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow R^3 w^2 = K$$

$$\begin{cases} x_1(t) = r(t) - R \\ x_2(t) = \dot{r}(t) \\ x_3(t) = \vartheta(t) - wt \\ x_4(t) = \dot{\vartheta}(t) - w \end{cases} \qquad \dot{r}(t) = 0,\ r(t) = R \Rightarrow \dot{\vartheta}(t) = w,\ \vartheta(t) = wt$$

$$\Updownarrow$$

$x_1(t) = 0,\ x_2(t) = 0$

$x_3(t) = 0$, $x_4(t) = 0$, $\forall t$ quando lo stato è tutto ϕ, allora ci si sta muovendo sull'orbita. → legge evoluzione dello stato

$\dot{x} = f(t, x, u)$ Allora, usando lo stato si ottiene (derivando *):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = (x_1(t)+R)(x_4(t)+\omega)^2 - \dfrac{K}{(x_1(t)+R)^2} + u_1(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = \dfrac{-2(x_4(t)+\omega)\,x_2(t)}{(x_1(t)+R)} + \dfrac{1}{(x_1(t)+R)}\,u_2(t) \end{cases}$$

Rappresentazione locale i/s/u

Se non c'è nulla il satellite si muove all'infinito nell'orbita, quindi:

$x_1(0)=0$, $x_2(0)=0$, $x_3(0)=0$, $x_4(0)=0$

l'orbita viene abbandonata se c'è un disturbo e le forze non sono bilanciate

Si deve fare un controllo sul satellite, in modo che ritorni in orbita (asintoticamente stabile se senza motori) STABILITA' ORBITA

Preda - Predatore (modello ambientale Lokta-Volterra)

$$\dot{x}(t) = x(t)\left(-\underline{r_x} + \underline{b_x}\, y(t)\right)$$

$$\dot{y}(t) = y(t)\left(-\underline{r_y} - \underline{b_y}\, x(t)\right)$$

lo stato è il vettore x, y $\quad y=x$

x predatori, y prede

Rapp. di stato, locale

$\dot{x} = f(\cancel{t}, x_i, \cancel{u})$ → non ci sono ingressi

→ non dipendono dal tempo, sono costanti >0

Ci devono essere due condizioni iniziali, perché ci sono due eq.: $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$ n. prede e predatori al tempo $\emptyset$

In forma estesa:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \overbrace{-r_x\, x(t)}^{\text{decrescita}}_{\text{se } y=0} + b_x\, \underbrace{x(t)\, y(t)} \\ \dot{y}(t) = \underbrace{r_y\, y(t)}_{\substack{\text{crescita} \\ \text{se } x=0}} - b_y\, \underbrace{x(t)\, y(t)} \end{cases}$$

b_x → abilità predatore di prendere la preda

b_y → abilità preda di scappare

fattore di incontro tra prede e predatori

$x=0$ non ci sono predatori, $y=0$ non ci sono prede

r fattore crescita / decrescita delle popolazioni

Classificazione dei sistemi

Def. 1

Un sistema dinamico è Tempo Continuo se $t \in \mathbb{R}$

Un sistema dinamico è Tempo Discreto se $t \in \mathbb{Z}$

(non si hanno più segnali a tempo continuo ma sequenze di valori del segnale. Il TD non è legato al tempo ma agli eventi. Non si usano, allora, le eq. differenziali ma le eq. alle differenze)

Def. 2 Sistema statico o dinamico

Def. 3 Sistema dinamico a stato vettore a dimensione finita $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$
$y(t) \in \mathbb{R}^p$

Def. 4 Un sistema dinamico si dice tempo invariante se le risposte sono invarianti rispetto a traslazioni temporali

$\forall t, t_0, t \geq t_0, \forall u(\cdot), \forall x(t_0) \in \mathbb{R}^n$

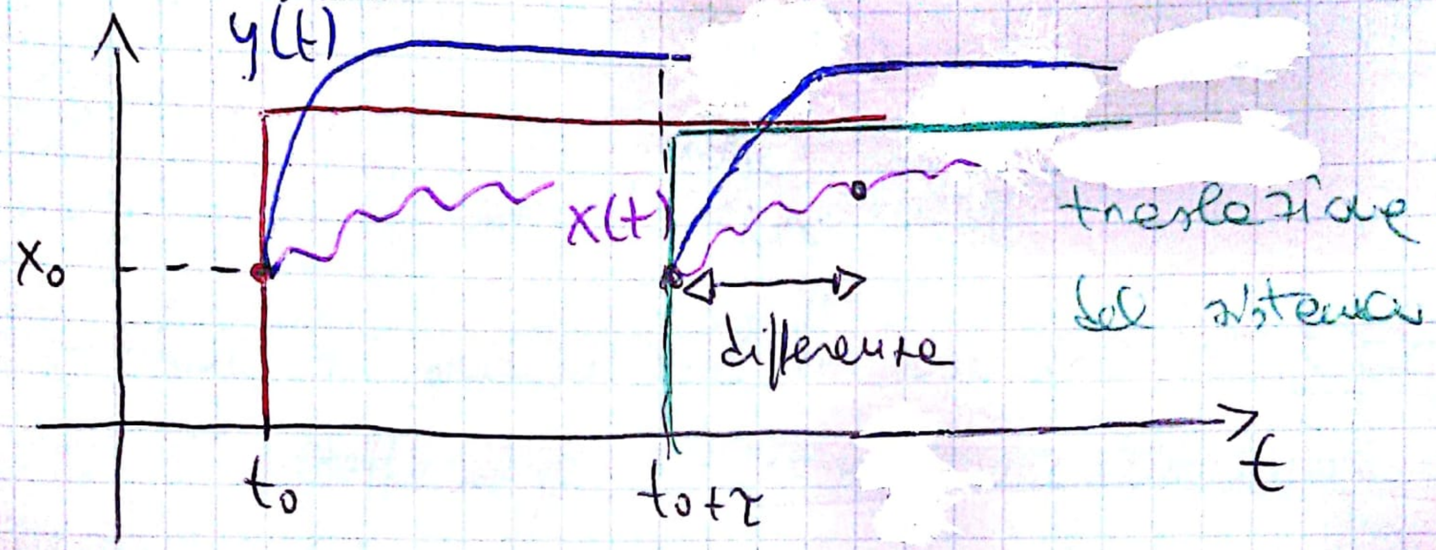
si ha $\forall \tau$ $\gamma(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t)}) =$

$\gamma(t+\tau, t_0+\tau, x(t_0), u^{-\tau}_{[t_0+\tau, t+\tau]})$

$$\varphi(t, t_0, x(t_0), u_{(t_0,t)}) = \varphi(t+\tau, t_0+\tau, x(t_0), u^{-\tau}_{[t_0+\tau, t+\tau]})$$

allora:

$$u^{-\tau}_{[t_0+\tau, t+\tau)} = u_{[t_0, t]}$$



Proprietà dei sistemi Tempo-Invarianti: (TI)

$$* \begin{cases} \psi(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t)}) = \psi(t-t_0, x(t_0), u_{(t_0,t)}) \\ \varphi(t, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t)}) = \varphi(t-t_0, x(t_0), u_{[t_0,t)}) \end{cases}$$

*Si dimostra scegliendo $\tau = -t_0$

Le risposte, in questi sistemi, dipendono dalla differenza $(t-t_0)$, non dal tempo

Rappresentazioni locali di sistemi TI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) = \eta(x(t), u(t)) \end{cases}$$

non dipende dal tempo

Le risposte dipendono da t_0, quelli a T variante dipendono, invece, dalla distanza dal tempo iniziale.

Rappresentazione dipendente dal tempo

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = g\left(y^{(n-1)}(t), \dots, y(t), u^{(m)}(t), \dots, u(t)\right) \\ y^{(n-1)}(0) = y_0^{n-1}, \dots, y(0) = y_0 \end{cases}$$

<u>Def. 5</u> Un sistema si dice <u>lineare</u> se vale il <u>principio di sovrapposizione degli effetti</u>

$\forall t, t_0, t \geq t_0, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall (x_0^1, u^1(\cdot)), (x_0^2, u^2(\cdot))$

derivate

$$\Psi(t, t_0, (\alpha_1 x_0^1 + \alpha_2 x_0^2), (\alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2)) =$$

$$\alpha_1 \Psi(t, t_0, x_0^1, u^1_{[t_0,t)}) + \alpha_2 \Psi(t, t_0, x_0^2, u^2_{[t_0,t)})$$

$$\varphi(t, t_0, (\alpha_1 x_0^1 + \alpha_2 x_0^2), (\alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2)) =$$

$$= \alpha_1 \varphi(t, t_0, x_0^1, u^1_{[t_0,t]}) + \alpha_2 \varphi(t, t_0, x_0^2, u^2_{[t_0,t]})$$

Un evento è una coppia stato iniziale - ingresso.