TDS LEZIONE 5 17-10-18

Proprietà esponenziale di matrice

$e^{At} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

7) A diagonalizzabile $\Longrightarrow \exists\ T = \left[v_1 \middle| v_2 \middle| \cdots \middle| v_n \right]$ invertibile, $\Delta = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$

$e^{At} = T e^{\Delta t} T^{-1}$

8) A DIFETTIVA (non diagonalizzabile)
$\exists\ (d_1, v_1), (d_2, v_2), \ldots, (d_n, v_n)$ n coppie autovettori / autovalori
Nel caso difettivo $T = \left[v_1 \middle| v_2 \middle| \cdots \middle| v_n \right] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non è invertibile.

Cerco una matrice J simile ad A detta forma di Jordan di A

A è invertibile quando la molteplici-

tà algebrica di λ_i è uguale alla molte-
plicità geometrica di λ_i, $\forall i = 1, \dots, n$

Calcolo autovalore $= \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$ sono le radici del polinomio caratteristico di A

$$\boxed{\chi_A(\lambda) \triangleq \det(\lambda I - A)} = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots a_i$$

dove $\lambda = a + jb$ e $\bar{\lambda} = a - jb$

In generale $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ autovalori distinti $r < n$, cioè:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_n)^{m_n}$$

con $m_1 + m_2 + \dots + m_n = n$

$m.a.(\lambda_i) = m_i$

se gli autovalori sono tutti distinti allora la loro molteplicità algebrica è 1 (compaiono una sola volta, il loro esponente è 1. Se sono radici n volte, allora $m.a. = n$)

Per quanto riguarda la molteplicità geometrica: $Av = \lambda v$

Dato λ, come si può trovare v? Quanti sono i "v" che soddisfano la $Av = \lambda v$?

Per KER, nucleo della matrice, si intende un sottospazio lineare di vettori che risolvono la seguente equazione (possono essere infiniti oppure uno soltanto, che è lo $\emptyset$)

$$(I\lambda - A)v = 0 \Rightarrow v \in \underbrace{Ker(\lambda I - A)}_{\text{NUCLEO}}$$

Esempio

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Tutti i vettori che stanno nel KER possono essere scritti come combinazione lineare di una base

Allora la m.g.(λ) è la dimensione del $Ker(\lambda I - A)$, cioè il numero di vettori che formano la base di $Ker(\lambda I - A)$

$$m.g.(\lambda) \geq 1$$

Esempio:

- $m.a(\lambda) = 2$ e $m.g(\lambda) = 2$ allora esisto-no 2 autovettori a cui corrispondono 2 vettori linearmente indipendenti
Allora la matrice è invertibile
- $ma(\lambda) = 2$ e $mg(\lambda) = 1$
a due autovalori corrisponde un solo vettore, perciò la matrice non è inver-tibile
- Caso particolare:
$ma(\lambda_i) = 1, \forall i = 1, \dots, n \quad mg(\lambda_i) = 1$
ci sono n autovalori distinti a cui corrispondono, però, dei vettori linearmente dipendenti, perciò la matrice non è diagonalizzabile

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$ma = 2$, $mg = 1$
Infatti, calcolando il nucleo:

$$\left(1 \cdot I - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

non è diagonalizzabile, al massimo può essere ridotta nella forma di Jordan.

<u>Caso A difettiva</u>

A partire $(\lambda_1, v_1), (\lambda, v_2), \dots, (\lambda_m, \lambda_m)$ date, la teoria delle matrici in forma di Jordan permette di calcolare degli autovalori detti <u>generalizzati</u> che, aggiunti e quelli normali formano un insieme di n vettori linearmente indipendenti (catene di Jordan)

$$T_j = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{invertibile}$$

In questo modo si è colmato il difetto di A, di non avere n vettori linearmente indipendenti $\quad J = T_j A T_j^{-1}$

Si suppone che ci siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ autovalori distinti con $m.a.(\lambda_i) = n$

$$\sum_{i=1}^{r} n_i = n$$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & J_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$ matrice diagonale a blocchi

$J_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ blocchetto elementare di Jordan

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \emptyset \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \emptyset & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$m.a.(\lambda_i) = m_i$

$m.g.(\lambda_i) = 1$

Se $m.g.(\lambda_i) = m_i - 1 \Rightarrow J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_i & \\ \emptyset & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{matrix}} \end{bmatrix}$

ora la forma di Jordan non è più estesa a tutta la matrice, ma solo alle ultime 2 componenti

Esponenziale Matrice A difettiva

$J = T_J^{-1} A T_J$

$e^{At} = e^{(T_J J T_J^{-1})t} = T_J e^{Jt} T_J^{-1}$

8)

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{bmatrix}$$

dove $J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \emptyset \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \emptyset & & & \lambda_i \end{bmatrix}$, $J_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & & \\ & e^{J_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_r t} \end{bmatrix}$$

con $J_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$, $e^{J_i t} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$

quindi:

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & \emptyset & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \,, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau + Du(t)$$

autovalori: -1 e -2, sono distinti $\Rightarrow$
la matrice è diagonalizzabile
Si devono trovare gli autovettori:

$\lambda_1 = -1 \Rightarrow v_1 = ?$

$\lambda_2 = -2 \Rightarrow v_2 = ?$

Quindi:

$$(\lambda_1 I - A)v_1 = 0 \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & +2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & +1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & +1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} -2x + y = 0 \\ y = 2x \end{array}$$

$$v_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_2 I - A)v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \ldots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} A T = \Lambda$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ -2e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Sostituendo:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} +$$

$$+ \int_0^t \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & \\ 2e^{-(t-\tau)} - 2e^{-2(t-\tau)} & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} u(\tau)\, d\tau =$$

$$\begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} \\ 2e^{-(t-\tau)} - 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} u(\tau)\, d\tau$$

$$x_1(t) = e^{-t} x_{01} + \int_0^t e^{-(t-\tau)} u(\tau)\, d\tau$$

$$x_2(t) = (2e^{-t} - 2e^{-2t}) x_{01} + e^{-2t} x_{02} +$$

$$+ \int_0^t (2e^{-(t-\tau)} - 2e^{-2(t-\tau)}) u(\tau)\, d\tau$$

$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$

Si devono scegliere le condizioni iniziali e l'ingresso

$$\int_0^t e^{\alpha t} = \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \right]_0^t$$

Sviluppo di Sylvester

$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow \exists\ \beta_0(t), \beta_1(t), \dots, \beta_{n-1}(t)$
funzioni scalari di $t \in \mathbb{R}$ tale che
$e^{At} = \beta_0(t) I + \beta_1(t) A + \dots \beta_{n-1}(t) A^{n-1}$

caso $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ distinti

Sfruttando la proprietà $e^{At} v = e^{\lambda t} v$

(λ, v) autovalore / autovettore di A

$$\begin{cases} \beta_0(t) + \beta_1(t)\lambda_1 + \dots + \beta_{m-1}(t)\lambda_1^{m-1} = e^{\lambda_1 t} \\ \beta_0(t) + \beta_1(t)\lambda_2 + \dots + \beta_{m-1}(t)\lambda_2^{m-1} = e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \beta_0(t) + \beta_1(t)\lambda_m + \dots + \beta_{m-1}(t)\lambda_m^{m-1} = e^{\lambda_m t} \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow V\beta = m$

dove $V = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & \lambda_m & \dots & \lambda_m^{m-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$.

detta matrice di Vandermonde

è invertibile se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sono distinti

$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0(t) \\ \beta_1(t) \\ \vdots \\ \beta_{m-1}(t) \end{bmatrix} \qquad m = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_m t} \end{bmatrix}$.

Caso autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ non distinti

Sia λ con molteplicità algebrica ν

$$\beta_0(t) + \lambda\beta_1(t) + \lambda^2\beta_2(t) + \dots + \lambda^{m-1}\beta_{m-1}(t) = e^{\lambda t}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\beta_0(t) + \lambda\beta_1(t) + \dots + \lambda^{m-1}\beta_{m-1}(t)\right) = \frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t} = t e^{\lambda t}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{\nu-1}}{d\lambda^{\nu-1}}\left(- - - - - - - \right) = \frac{d^{\nu-1}}{d\lambda^{\nu-1}} e^{\lambda t} = t^{\nu-1} e^{\lambda t}$$

Caso autovalori complessi e coniugati

$$\lambda = Re(\lambda) + j\, Im(\lambda)$$
$$\bar{\lambda} = Re(\lambda) - j\, Im(\lambda)$$

$$\begin{cases} \beta_0(t) + \lambda\beta_1(t) + \dots + \lambda^{m-1}\beta_{m-1}(t) = e^{\lambda t} & (1) \\ \beta_0(t) + \bar{\lambda}\beta_1(t) + \dots + \bar{\lambda}^{m-1}\beta_{m-1}(t) = e^{\bar{\lambda} t} & (2) \end{cases}$$

(1) + (2) = (3)

(1) − (2) = (4)

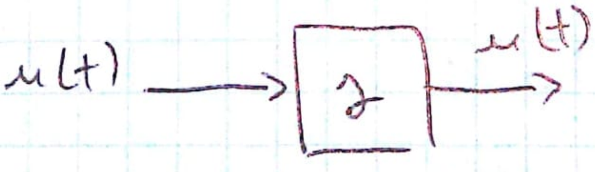
$$\begin{cases} \beta_0(t) + Re(\lambda)\beta_1(t) + Re(\lambda^2)\beta_2(t) + \dots + Re(\lambda^{n-1})\beta_{n-1}(t) = Re(e^{\lambda t}) & (3) \\ Im(\lambda)\beta_1(t) + Im(\lambda^2)\beta_2(t) + \dots + Im(\lambda^{n-1})\beta_{n-1}(t) = Im(e^{\lambda t}) & (4) \end{cases}$$

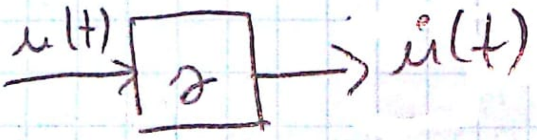
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

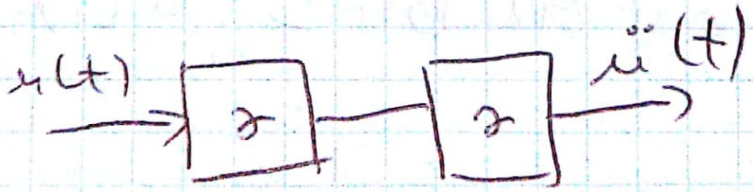
$$y^n(t) = g(y^{n-1}(t), \dots, y(t), u^m(t), \dots u(t))$$

$y(0)$
$y'(0)$
$y^{n-1}(0)$

Funzioni di trasferimento del sistema $s = \dfrac{d}{dt}$







$$u(t) \longrightarrow \boxed{\partial^2} \xrightarrow{\ddot{u}(t)}$$

$$\partial^{r} u(t) = u^{(r)}(t)$$

$r > 0$

Ad esempio:

$$(1 + 3\partial + 5\partial^2)u(t) = u(t) + 3\dot{u}(t) + 5\ddot{u}(t)$$

$$\partial I x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$(\partial I - A)x(t) = B u(t)$$

per ∂ sufficientemente grande, la matrice è invertibile

$$x(t) = (\partial I - A)^{-1} B u(t)$$

$$W_{xu}(\partial) \triangleq (\partial I - A)^{-1} B$$

matrice di trasferimento ingresso/stato

$$x(t) = W_{xu}(\partial) u(t)$$

$$W_{xu}(\partial) \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$y(t) = \left[C(\partial I - A)^{-1} B + D\right] u(t)$$

$$y_u(s) \triangleq C(sI-A)^{-1}B+D$$

matrice di trasferimento ingresso/uscita

Calcolo di $(sI-A)^{-1}$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{Adj(sI-A)}{\det(sI-A)}$$

$\det(sI-A)$ che è il polinomio caratteristico di A (le sue radici sono gli autovalori di A)

$\chi_A(s)$ è un polinomio di grado n se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ che ammette n radici, che corrispondono agli autovalori $\lambda_i \in \mathbb{C}$ di A

$\det(sI-A) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha s^{n-2} + \dots + \alpha_n$ con $\alpha_i \in \mathbb{R}$

Aggiunto di A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} |e_{11}| & \dots & |e_{1n}| \\ \vdots & & \\ |e_{n1}| & \dots & |e_{nn}| \end{bmatrix}^T$$

Trasposta della matrice dei complementi algebrici

$$|e_{ij}| = (-1)^{i+j} \det \begin{array}{c} j \\ \begin{bmatrix} & | & \\ - & - \!\!+\!\! - & - \\ & | & \end{bmatrix} i \end{array} \quad \begin{bmatrix} + \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$$

si eliminano gli elementi sulla riga i e la colonna j e si calcola il determinante

Una matrice in cui i coefficienti sono dei polinomi è detta polinomiale, perché si può sempre scrivere come polinomio.

Ad esempio:

$$\begin{bmatrix} s+1 & s+2 \\ s+3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Adj(sI-A) = A_1 s^{n-1} + A_2 s^{n-2} + \dots + A_n$$

$A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, 2, \dots n$

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{(\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n)} \left[A_1 \lambda^{n-1} + \dots + A_n \right] =$$

si tratta di funzioni razionali

Aij generico

$$= \begin{bmatrix} \frac{\beta_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \beta_0}{\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n} & \\ & \end{bmatrix}$$

Formula di Souriau-Leverrier $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$A_1 = I_n$ $\qquad \alpha_1 = -\mathrm{tr}(A_1 A)$

$A_2 = A_1 A + \alpha_1 I_n$ $\qquad \alpha_2 = -\frac{1}{2}(A_2 A)$

$\vdots$

$A_n = A_{n-1} A + \alpha_{n-1} I_n$ $\qquad \alpha_n = -\frac{1}{n} \mathrm{tr}(A_n A)$