TDS LEZIONE 24 18-12-18

Teorema di Allocazione per la sintesi

Osservatore Asintotico

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0 \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

osservatore alla Luenberger

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y), & \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ \hat{y} = C\hat{x} + Du \end{cases}$$

$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ errore ricostruzione dello stato

Sintesi

Osservatore Asintotico

$\exists L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ t.c. $\lim_{t \to \infty} e(t) = 0_x$

In particolare

$\dot{e}(t) = (A + LC)e(t)$, $e(0) = x_0 - \hat{x}_0$

Sintesi Osservatore Asintotico

Determino L t.c.

$$\det(\lambda I-(A+LC)) = p(\lambda)$$

$\forall$ $p(\lambda)$ polinomio di $\partial p = n$ assegnato.

$S(A, B, C, D) \longleftrightarrow$ sintesi Osservatore

$\Updownarrow$

$S^*(A^*, B^*, C^*, D^*) \longleftrightarrow$ sintesi retroazio-ne statica dello stato $\Longleftrightarrow$

(A^*, B^*) completamente raggiungibile

$\exists$ K unico, $\det(\lambda I - (A^* + B^* K^*))$
$= p(\lambda)$ $\forall$ $p(\lambda)$

$A^* = A^T$

$B^* = C^T$

$K^* = L^T$

(A^*, B^*) completamente raggiungibile $\Longleftrightarrow$ (A^T, C^T)

$$\text{rango}\left[B^* \; A^*B^* \; \dots \; A^{*\,n-1}B^*\right] = n$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{rango}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^T = n$$

$$\det(\lambda I - (\underbrace{A^* + B^* K^*}_{A^T + C^T L^T})) = \det(\lambda I - (A + LC)^T)$$

Sintesi osservatore asintotico
Determina L t.c. (con L unico)

$$\det(\lambda I - (A+LC)) = p(\lambda), \quad \forall\, p(\lambda)$$

polinomio
Ha soluzione se e solo se (A, C) completamente osservabile

Si suppone (A, C) non completamente osservabile
Utilizzando una decomposizione di osservabilità alla Kalman

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ A_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}} \end{bmatrix} \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_o \\ B_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C_o & 0 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} L_o \\ L_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$

$$x = Tz \, , \quad z = \begin{bmatrix} x_o \\ \hline x_{\bar o} \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\bar A + \bar L \bar C = \left[\begin{array}{c|c} A_o & 0 \\ \hline A_{o\bar o} & A_{\bar o} \end{array}\right] + \begin{bmatrix} L_o \\ \hline L_{\bar o} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} C_o & 0 \end{array}\right]$$

$$\det(\lambda I - (\bar A + \bar L \bar C)) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \\ - - - \\ \\ \end{bmatrix} =$$

$$= \det(\lambda I - (A_o + L_o C_o)) \underbrace{\det(\lambda I - A_{\bar o})}$$

L'errore di ricost. va a 0 se gli autov. della parte non oss. sono asintoticamente st.
Gli autovalori non osservabili non cambiano, si può modificare solo la parte osservabile

RIVELABILITA'

Un sistema è detto Rivelabile se tutti gli autovalori di $A_{\bar{o}}$ sono asintoticamente stabili

$$\left(\underbrace{Re(\lambda_i^{\bar{o}}) < 0}_{TC} \;,\; \underbrace{|\lambda_i^{\bar{o}}| < 1}_{TD} \right)$$

Osservatore dead - beat (TD)

$$\begin{cases} x_{k+1} = A x_k + B u_k, \quad x_0 = x_0 \\ y_k = C x_k + D u_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = A \hat{x}_k + B u_k + L(\hat{y}_k - y_k), \quad \hat{x}_0 = \hat{x}_0 \\ \hat{y}_k = C \hat{x}_k + D u_k \end{cases}$$

$$e_k = x_k - \hat{x}_k$$

$e_{k+1} = (A+LC)\,e_k \,,\quad e_0$

La sintesi di un osservatore dead-beat corrisponde a determinare L t.c. gli autovalori di $(A+LC)$ siano tutti nulli, cioè

$\det(\lambda I - (A+LC)) = \lambda^n$

Teorema

$\exists$ un osservatore dead-beat se e solo se (A,C) completamente Ricostruibile

Dim

(A,C) Ricostruibile $\iff \operatorname{Ker} A^n \supseteq X^{\bar{o}}$

(A,C) non completamente Osservabile

$\iff \quad \bar{A} = \left[\begin{array}{c|c} A_o & 0 \\ \hline A_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}} \end{array}\right] \qquad \bar{C} = [C_o \,\vdots\, 0]$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C_0 & 0 \\ C_0 A_0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ C_0 A_0^{m-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$[- \; - \; -]$

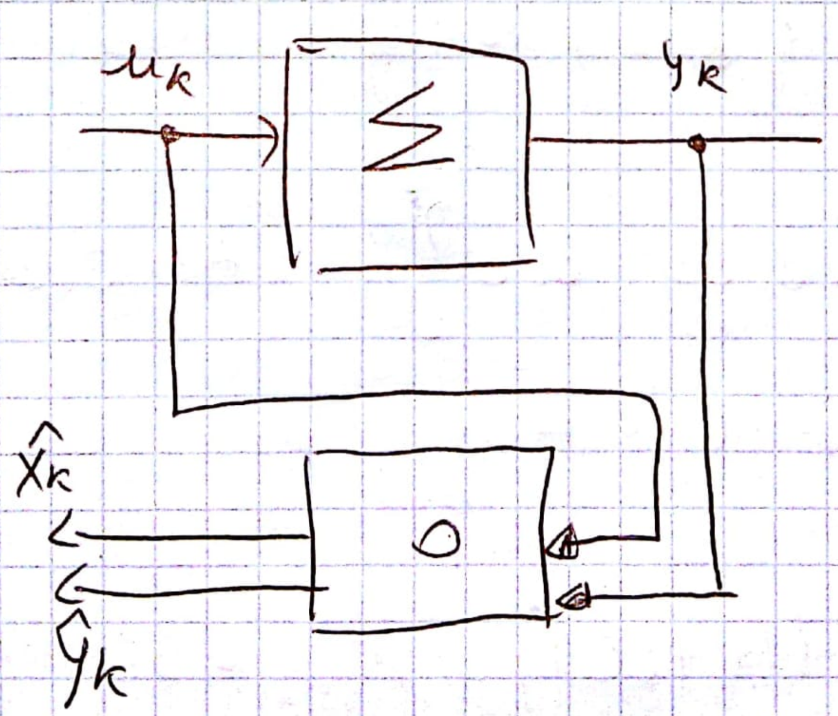
$A_0^{m} = 0 \iff$ nilpotente

(?)

Esercizio

$$\begin{cases} x_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix}}_{(A)} x_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{(B)} u_k \\ y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{(C)} x_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + L(\hat{y}_k - y_k) \\ y_k = C\hat{x}_k \end{cases}$$



$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + L(\underbrace{\hat{y}_k}_{C\hat{x}_k + Du_k} - y_k) \\ y_k = C\hat{x}_k + Du_k \end{cases}$$

Riscrivendo:

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = (A+LC)\hat{x}_k + (B+LD)u_k - Ly_k = \\ \qquad = [A+LC]\,\hat{x}_k + [B+LD \,\vdots\, -L]\begin{bmatrix} u_k \\ y_k \end{bmatrix} \\ \hat{y}_k = C\hat{x}_k + Du_k \end{cases}$$

Forma da usare per l'implementazione

$$\sigma(A) = \{0.5,\ 0.1\}$$

$$\phi(\lambda) = \{0.05,\ 0.01\} = (\lambda - 0.05)(\lambda - 0.01)$$

$$= \lambda^2 - 0.06\lambda + 0.0005$$

$$\det(\lambda I - (A+LC)) = \lambda^2 - 0.06\lambda + 0.0005$$

$$\vartheta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad \det \vartheta \neq 0$$

$$A+LC = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 \\ l_1 \end{bmatrix} [1 \quad 1] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 + l_2 & l_2 \\ 1 + l_1 & 0.1 + l_1 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - (0,5+l_2) & -l_2 \\ -(1+l_1) & \lambda - (0,1+l_1) \end{bmatrix} =$$

$$= [\lambda - (0,5+l_2)][\lambda - (0.1+l_1)] - (1+l_1) l_2 =$$

$$= \lambda^2 - [0.5+l_2+0.1+l_1]\lambda + (0.5+l_2)(0.1+l_1)$$
$$- l_2 - l_1 l_2 \quad =$$

$= \lambda^2 - [0.6 + l_1 + l_2]\lambda + 0.05 + 0.5 l_1$
$+ 0.1 l_2 + \cancel{l_1 l_2} - l_2 - \cancel{l_1 l_2}$
area $(0.05 - 0.9 l_2 + 0.5 l_1)$

$(0.6 + l_1 + l_2) = 0.06 \Rightarrow$

$l_1 + l_2 = -0.6 + 0.06 = -0.54 \Rightarrow$
$l_1 = -l_2 - 0.54$

$0.05 + 0.5 l_1 - 0.9 l_2 = 0.0005 \Rightarrow$

$0.05 + 0.5(-l_2 - 0.54) - 0.9 l_2 = 0.0005$

$\Rightarrow 0.05 - 0.5 l_2 - \underbrace{\frac{0.54}{2}}_{-0.27} - 0.9 l_2 =$

$0.0005 \Rightarrow$

$-1.4 l_2 = 0.0005 + 0.27 - 0.05$

$\Rightarrow l_2 = \frac{-0.2205}{1.4} = -0.16$

$\Rightarrow l_1 + l_2 \Rightarrow l_1 = 0.16 - 0.54$

Formula di Ackerman

A^*, B^*, k^* $\quad p(\lambda)$

$K^* = [0 \dots 0\ 1]\ (R^{*})^{-1} p(A^*)$,

$L = K^{*T}$

$A^* = A^T \quad B^* = C^T$