TDS — LEZIONE 11 — 06-11-18

Tecnica dei modelli ARMA

$\{u_0, u_1, u_2 \dots u_T\}$ ingressi — serie storiche

$\{y_0, y_1, y_2 \dots y_T\}$ uscite

$$y_k = \alpha_1 y_{k-1} + \alpha_2 y_{k-2} + \dots + \alpha_n y_{k-n} + \beta_0 u_k + \beta_1 u_{k-1} + \dots + \beta_m u_{k-m}$$

Trovo $n, m$, $\alpha_i, \beta_j$ — Determino il modello dalle serie storiche e lo uso per calcolare $y_k$, $k > T$, dato $u_k$

Scelto $n, m$

1) Metodi statistici basati sulla AUTOCORRELAZIONE di $y_k$ e $E[y_k \, y_{k+\tau}]$

$\tau > 0$ anticipo

Modelli AR

cross correlazione

1

Errore di modello

$$y_k = \hat{\alpha}_1 y_{k-1} + \dots \hat{\alpha}_n y_{k-n} + \hat{\beta}_0 u_k + \dots + \hat{\beta}_m u_{k-m} + \varepsilon_k$$

^ indica la stima

$k = T \quad \dots \quad k = n$

$$y_T = \hat{\alpha}_1 y_{T-1} + \dots \hat{\alpha}_n y_{T-n} + \hat{\beta}_0 u_T + \dots \hat{\beta}_m u_{T-m} + \varepsilon_T$$

dove $\varepsilon_T$ è l'errore di modello, di quanto la stima si discosta dal valore reale

$\vdots$

$$y_n = \hat{\alpha}_1 y_{n-1} + \dots \hat{\alpha}_n y_0 + \hat{\beta}_0 u_n + \dots \hat{\beta}_m u_{n-m} + \varepsilon_n$$

$T > n$

$$E_{n,m} = \sum_{i=n}^{T} \varepsilon_i^2$$ errore di modello, di verosimiglianza

Più variabili si hanno in gioco, più si descrivono meglio i legami ingresso-uscita



Scanned by CamScanner

Tecnica di minimi quadrati $(n = m)$

$$\begin{bmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n-1} & \dots & y_0 & u_n & \dots & u_0 \\ y_n & \dots & y_1 & u_{n+1} & \dots & u_1 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ y_{T-1} & & y_{T-n} & u_T & \dots & u_{T-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_{n+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{bmatrix}$$

$$Y \qquad H \qquad B \qquad E$$

$(T-n) \times 2m+1 \qquad H \in \mathbb{R}$

In genere $T-n > 2m+1$

N. righe > N. colonne

$$Y = HB + E \Rightarrow E = Y - HB$$

$$E^T E = \sum_{i=n}^{T} \varepsilon_i^2$$

$$\hat{B}_{(n,m)} = \arg\min E^T E = \arg\min_B (Y - HB)^T (Y - HB)$$

$$J_{n,m} = \min_B E^T E$$



Scanned by CamScanner

$$\frac{\partial}{\partial B}\left(y^T y - B^T H^T y - y^T H B + B^T H^T H B\right) = 0$$

$$-2H^T y + 2H^T H B = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial B}\left(-2H^T y + 2H^T H B\right) \qquad H^T H \geq 0$$

$\Rightarrow \hat{\beta} = (H^T H)^{-1} H^T y$ è un minimo locale

$H \in \mathbb{R}^{r \times c}$

$H^T \in \mathbb{R}^{c \times r}$ $\qquad H^T H \in \mathbb{R}^{c \times c}$, H è invertibile se ha rango

$$E_{n,m} = \underbrace{(y - H\hat{B})^T (y - H\hat{B})}_{\text{valori del costo}}$$

Modello di Leslie: Popolazione a fasce d'età (studio l'evoluzione della popolazione)

$x_i$ = numero di individui nella fascia d'età i-esima

$Y = HB + E$

Loqnonneg $(B \geq 0)$

Loq lin $(B \geq 0,\ QB \leq C)$



Scanned by CamScanner