- Criterio di Lyapunov (locale e globale)
- Criterio di Krasovski (locale asintotica stabilità)
- Criterio di Lyapunov ridotto

Sia $\dot{x} = f(x)$, $\bar{x}$ punto di equilibrio (la stabilità del punto di equilibrio è demandata alla stabilità del sistema)

Sia $A = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

1) Se tutti gli autovalori di A, $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$, hanno $Re(\lambda_i) < 0$ allora $\bar{x}$ è localmente asintoticamente stabile
2) Se almeno un autovalore di A ha parte reale $Re(\lambda) > 0$ allora $\bar{x}$ è instabile
3) negli altri casi $(Re(\lambda) = 0)$ non si può concludere nulla

Criterio di Instabilità di Lyapunov

Sia $\dot{x} = f(x)$, 0_x punto di equilibrio

Se $\exists$ $V(x) \in \mathbb{C}^1$:

1) $\dot{V}(x)$ localmente definita positiva
$\dot{V}(x) > 0$

2) $V(0_x) = 0$

3) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in B_\varepsilon(0_x)$ t.c.
$V(x) > 0$ definita positiva

allora 0_x è instabile

Criterio di Instabilità di CETAEV

Sia $\dot{x} = f(x)$, 0_x punto di equilibrio

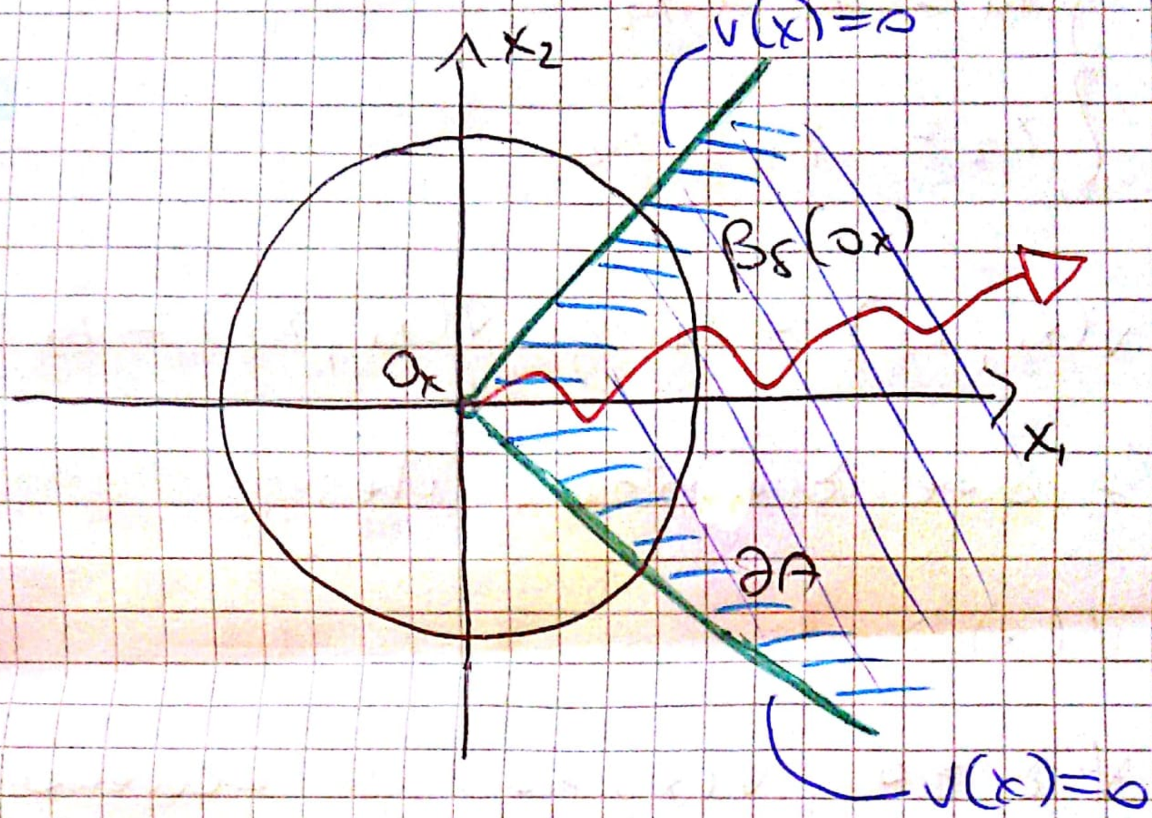
Se $\exists$ $V(x) \in \mathbb{C}^1$ ed un insieme aperto A con $0_x \in \partial A$ tale che:

1) $V(x)$ e $\dot{V}(x)$ sono localmente definite positive in $B_\delta(0_x) \cap A / \{0_x\}$

2) $V(x) = 0$ $\forall x \in B_\delta(0_x) \cap \partial A$

allora O_x è instabile

A è aperto, non vi appartiene la frontiera



Alla frontiera corrisponde $V(x) = 0$ questo ha un ruolo di barriera, impedisce alle traiettorie di uscire dall'intersezione tra B_δ ed A

Rimanendo su questo segmento cresce sempre

Esempio:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

$V(x_1, x_2) = x_1$, $\dot{V}(x_1, x_2) = \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2^2 > 0$

Si deve dimostrare che:

$\dot{V}(x) > 0$

$\forall \varepsilon > 0$, $V(x) > 0$ per almeno un punto in $B_\varepsilon(0_x)$

Esempio:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \\ \dot{x}_2 = x_1^4 \end{cases} \qquad V(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

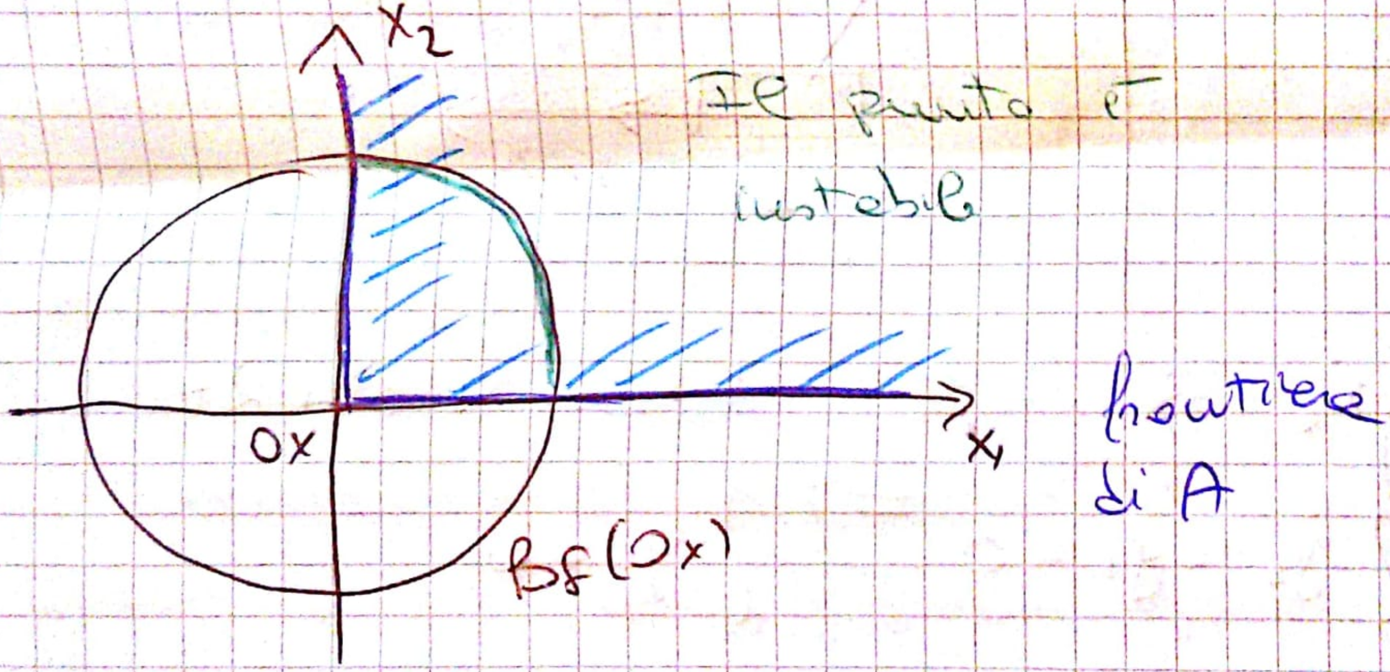
$\dot{V}(x_1, x_2) = \dot{x}_1 x_2 + x_1 \dot{x}_2 = x_2^4 + x_1^5$

Non si può applicare il criterio di

instabilità di Lyapunov perché non esiste un intorno completo $B_\varepsilon(0x)$ dove $\dot{V}(x_1, x_2) > 0$

(non deve esistere nemmeno un punto in cui la funzione sia negativa, per avere questo criterio)

Si prova ad applicare Cetaev



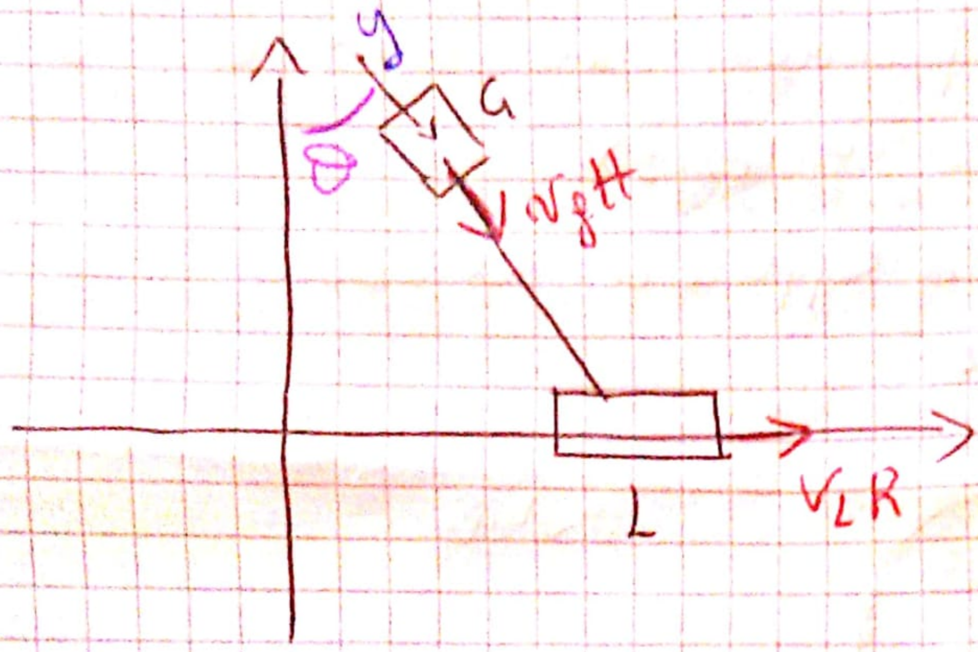
1) $V(x_1, x_2) > 0 \quad \forall x \in B_\delta(0x) \cap A$

$\dot{V}(x_1, x_2) > 0 \quad \forall x \in B_\delta(0x) \cap A$

2) $V(x_1, x_2) = 0 \quad \forall x \in B_\delta(0x) \cap A$

cioè $x_1 = 0$ oppure $x_2 = 0$

Problema di inseguimento →
"Guardie e Ladri" →
Si può formulare come studio di un punto di equilibrio



θ fornisce informazioni sulla tangente

$$\begin{cases} \dot{x}_L = R & \text{velocità} \\ \dot{y}_L = y_L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_L = x_L(0) + Rt \\ y_L = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_g^2 + \dot{x}_g^2 = H^2 \\ \dot{y}_g / \dot{x}_g = y_g - y_L / x_g - x_L \end{cases}$$

Il vettore velocità è orientato come il vettore che unisce le posizioni

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_g^2 + \dot{x}_g^2 = H^2 \\ \dot{y}_g = -k(y_g - \underbrace{y_L}_{=0 \text{ per definizione}}) \quad e \\ \dot{x}_g = -k(x_g - x_L) \Rightarrow k = \dfrac{-\dot{x}_g}{(x_g - x_L)} \end{cases}$$

Quindi:

$$k^2(y_g - y_L)^2 + (k^2(x_g - x_L)^2 = H^2 \Rightarrow$$

$$k^2 = \frac{H^2}{(y_g - y_L)^2 + (x_g - x_L)^2} \Rightarrow$$

$$k = \frac{H}{\sqrt{(x_g - x_L)^2 + y_g^2}} \quad \text{perché } y_L = 0$$

In conclusione, le equazioni di moto delle due macchine, G e L, sono le seguenti:

$$\dot{y}_f = \frac{-y_f H}{\sqrt{(x_f - x_L)^2 + y_f^2}}$$

$$\dot{x}_f = \frac{-(x_f - x_L) H}{\sqrt{(x_f - x_L) + y_f^2}}$$

Allora:

$$\begin{aligned} x &= x_f - x_L \\ y &= y_f \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^* \text{ è un punto di equilibrio?}$$

Le guardie riescono a raggiungere i ladri

$$\dot{y} = \frac{-y H}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ scelto come punto di equilibrio

$$\dot{x} = \frac{-x H}{\sqrt{x^2 + y^2}} - R$$

$*\quad \dot{x} = \dot{x}_f - \dot{x}_L = \dot{x}_f - R$

$\dot{y} = \dot{y}_f - \dot{y}_L \Rightarrow \dot{y} = \dot{y}_f$

$H > R$ le guardie raggiungono i ladri

velocità lungo la tangente che unisce le due auto → GUARDIE

velocità lungo l'asse orizzontale → LADRI

$$V(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\dot{V}(x,y) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y}$$

$$\dot{V}(x,y) = -2\sqrt{x^2+y^2}\,H - 2Rx$$

$y=0$, $x<0$ $\quad -2|x|H + 2R|x| = 2|x|\sqrt{(R-H)}$

È solo stabile

Criteri di stabilità locale e globale (II)

$x_{k+1} = f(x_k)$, 0_x punto di equilibrio

Criterio di Lyapunov locale

Se $\exists\, V(x) \in C^0$ t.c.

1) $V(x)$ è localmente definito positivo
$V(x) > 0 \quad \forall x \in B_\delta(0_x) / \{0_x\}$

2) $\Delta V(x) \equiv V(f(x)) - V(x)$ è localmente semidefinito negativo
$\Delta V(x) \leq 0 \quad \forall x \in B_\delta(0_x) / \{0_x\}$

allora 0_x è localmente stabile

se la 2) è sostituita dalla 2')

2') $\Delta V(x)$ è localmente definita negative, $\Delta V(x) < 0 \quad \forall x \in B_\delta(0_x) / \{0_x\}$

allora 0_x è asintoticamente stabile

Criterio di Lyapunov globale

Se $\exists$ $V(x) \in \mathbb{C}^0$ t.c.

1) $V(x)$ è globalmente definita positiva
$V(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n / \{0x\}$

2) $\Delta V(x)$ è globalmente semidefinita negativa, $\Delta V(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n / \{0x\}$

3) $V(x)$ è radialmente illimitata
$$\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = \infty$$

allora $0x$ è globalmente stabile.

Se la 2) è sostituita da 2')

2') $\Delta V(x)$ è globalmente definita negativa, $\Delta V(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n / \{0x\}$

Criterio di asintotica stabilità locale di Krasowski

Se $\exists\ V(x) \in C^0$ t.c.

1) $V(x)$ è localmente definita positiva
$V(x) > 0 \quad \forall x \in B_\delta(0_x) / \{0_x\}$

2) $\Delta V(x)$ è localmente semidefinita negativa $\Delta V(x) \leq 0 \quad \forall x \in B_\delta(0_x)/\{0_x\}$

3) $V = \{x : \Delta V(x) = 0\}$ non contiene completamente traiettorie perturbate

allora 0_x è localmente asintoticamente stabile.

Criterio di Lyapunov Ridotto

$x_{k+1} = f(x_k) \qquad 0_x$ equilibrio

Se $A = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{x = 0_x}$

Se

1) tutti gli autovalori di A, cioè

$\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m$ hanno modulo $|\lambda_i| < 1$ allora $\bar{x}$ è localmente asintoticamente stabile

2) se almeno un autovalore di ha $|\lambda_i| > 1$ allora $\bar{x}$ è instabile

3) In tutti gli altri casi non si conclude nulla

Procedure iterativa per il calcolo della radice di a $(\sqrt{a})$

$x^2 - a = 0 \Rightarrow x = x + a - x^2$

$x_{k+1} = x_k + a - x_k^2$

$z_k = x_k - \sqrt{a} \iff x_k = z_k + \sqrt{a}$

$\pm\sqrt{a}$

Scanned by CamScanner

$$z_{k+1} + \cancel{\sqrt{\alpha}} = z_k + \cancel{\sqrt{\alpha}} + \alpha - (z_k + \sqrt{\alpha})^2$$

$$z_{k+1} = z_k + \cancel{\alpha} - z_k^2 - 2\sqrt{\alpha}\, z_k - \cancel{\alpha}$$

$$(z_k^2 + 2\sqrt{\alpha}\, z_k + \alpha)$$

$$\begin{cases} z_{k+1} = (1 - 2\sqrt{\alpha})\, z_k - z_k^2 \\ z_0 = ? \end{cases}$$

0 è un punto di equilibrio

1) converge globalmente = localmente a

0_x

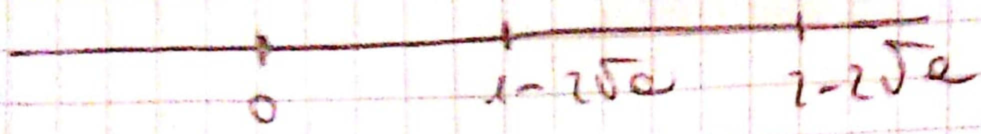
Esempio

$V(z) = z^2 \qquad V(z) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R} / \{0_x\}$

$$\Delta V(z) = \left[(1 - 2\sqrt{\alpha}) z - z^2 \right]^2 - z^2 =$$

$$= z^2 \Big[\underbrace{\left(z - (1 - 2\sqrt{\alpha}) \right)^2 - 1}_{<0} \Big]$$

$[z-(1-2\sqrt{a})]^2 < 1$



$0<a<1$ stabilità asintotica

$\Omega_c = \{z : V(z) < c\}$ dominio di attrazione

$[z-(1-2\sqrt{a})]^2 \iff$

$|z-(1-2\sqrt{a})| \le 1$

$\big||z| - |1-2\sqrt{a}|\big| \le |z-(1-2\sqrt{a})| \le$

$|z| + |(1-2\sqrt{a})| < 1$

?

Stabilità interna dei sistemi lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax & , TC \\ x_{k+1} = A_k & , TD \end{cases}$$

1) Punti di equilibrio

TC - $x_e \in \ker A$ → A invertibile e 0_x è l'unico punto di equilibrio

→ A non è invertibile
qualche autovalore è zero
x_e sono infiniti e formano un sottospazio vettoriale

TD

$x_e \in \ker (I-A)$ → $(I-A)$ invertibile $\Rightarrow x_e = 0_x$ unico

→ $(I-A)$ non invertibile

Proprietà

- L'attrattività di un punto di equilibrio, se c'è, è globale

$x(t) = e^{At} x_0$

attrattività $\iff$ tutti i modi sono convergenti $\Rightarrow \lim_{t \to \infty} e^{At} \cdot x_0 = 0_x \quad \forall x_0$

- l'attrattività implica l'esistenza di un unico punto di equilibrio (ciò può essere se A è invertibile TC o $(I-A)$ invertibile a TD)

- l'attrattività $\Rightarrow$ la stabilità

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$ t.c. $\|x\| < \delta$

$\|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t$

$\hookrightarrow$ evoluzione $x(t)$

se l'evoluzione è $x(t) = e^{At} x_0$

e si calcola lor norme si ottiene

$\|x\| = \|e^{At} x_0\| \leq \pi e^{\lambda t} \|x_0\| \quad \forall t$

Se $0x$ è attrattivo allora necessariamente tutti gli autovalori di A hanno parte reale < 0

Quindi:

$$\forall t \quad \|x(t)\| < M \|x_0\| \quad \forall t$$

$$\|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t$$

$$M\|x_0\| < \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{M}$$

deriva dall'attrattività.

Un equilibrio attrattivo è asintoticamente stabile

Solo lo zero può essere asintoticamente stabile, tutti gli altri, se ci sono infiniti punti di equilibrio non possono esserlo. Nei sistemi non lineari stabilità del sistema $\Rightarrow$ stabilità degli infiniti punti di equilibrio