Esempio: Calcolo stato iniziale x_0 o x_T

$y_0, y_1, \dots y_T$

Modello a classi di età di popolazioni

$$\begin{cases} x^1_{k+1} = \alpha_1 x^1_k + \alpha_2 x^2_k \\ x^2_{k+1} = \beta_1 x^1_k \\ x^3_{k+1} = \beta_2 x^2_k \end{cases}$$

α_1, α_2 coefficienti di natalità

β_1, β_2, tassi di passaggio di classe

$$y_k = [1 \ 0 \ 0] x_k$$

$0 \le \alpha_1, \alpha_2$

$\beta_1, \beta_2 \le 1$

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{bmatrix}$$

È possibile calcolare lo stato iniziale senza ambiguità?

Sì se il sistema è osservabile e si può calcolare lo stato iniziale al tempo zero.

P1. Calcolo di $x_0 \iff$ Completa osservabilità

P2. Calcolo di $x_T \iff$ Completa ricostruibilità (in T-passi)

$$\Theta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

la matrice A non è invertibile, allora la osservabilità e la ricostruibilità sono due concetti distinti
(Infatti la completa osservabilità $\Rightarrow$ completa ricostruibilità solo se A è invertibile)

Quindi:

$$A^2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1^2 + \alpha_2 \beta_1 & \alpha_1 \alpha_2 & 0 \\ \alpha_1 \beta_1 & \alpha_2 \beta_1 & 0 \\ \beta_1 \beta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Allora:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ (\alpha_1^2 + \alpha_2\beta_1) & \alpha_1\alpha_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det \mathcal{O} = 0$ rango $\mathcal{O} = 2$

le colonne linearmente indipendenti sono solo due

Questo vuol dire che il sistema non è completamente osservabile

Inoltre, se non lo è in 3 passi, non ha senso fare la verifica per 2 passi oppure 1 passo

Quali sono gli stati non osservati?

$X^{\bar{o}} = \ker \mathcal{O}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ (\alpha_1^2 + \alpha_2\beta_1) & \alpha_1\alpha_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 0$

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$

allora anche $x_2 = 0$

x_3 non compare mai in gioco, quindi può assumere qualsiasi valore

$(\alpha_1^2 + \alpha_2 \beta_1) x_1 + \alpha_1 \alpha_2 x_2 = 0$

$$X^0 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right. \qquad x = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quando si vanno a calcolare le uscite si prende come stato iniziale il seguente

$$x_0' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad x_0'' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

α generico

Sia che si usi x_0' che x_0'' come stato iniziale, le uscite saranno identiche

$y_k = CA^k x_0$

$$y_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = 0$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = 0$$

dà un vettore di zeri

dà sempre zero

$$y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = 0$$

Siccome le y_i danno sempre zero, non si può decidere quale sia lo stato iniziale tra x_0' e x_0''.

Questo succede perché non è completamente osservabile il sistema.

Si spera che almeno sia completamente ricostruibile

Ricostruibilità

$$X^{\bar{r}} = \{0\} \iff \operatorname{Ker} A^n \supseteq X^{\bar{o}}$$

In questo caso $n = 3$, perciò $A^n = A^3$

$$A^3 = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1^2+\alpha_2\beta_2 & \alpha_1\alpha_2 & 0 \\ \alpha_1\beta_1 & \alpha_2\beta_1 & 0 \\ \beta_1\beta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A^2}$$

$$= \begin{bmatrix} \overset{\delta_{11}}{\alpha_1(\alpha_1^2+\alpha_2\beta_2)+\alpha_1\alpha_2\beta_1} & \overset{\delta_{12}}{\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_2^2\beta_1} & 0 \\ \overset{\delta_{21}}{\beta_1(\alpha_1^2+\alpha_2\beta_2)} & \overset{\delta_{22}}{\beta_1\alpha_1\alpha_2} & 0 \\ \alpha_1\beta_1\beta_2^{\,\delta_{31}} & \overset{\delta_{32}}{\alpha_2\beta_1\beta_2} & 0 \end{bmatrix}$$

Si deve vedere se la condizione $\operatorname{Ker} A^n \supseteq X^{\bar{o}}$ è verificata, cioè se vale $\operatorname{Ker} A^3 \supseteq X^{\bar{o}}$

Allora si deve calcolare:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A^3

Quindi:

$\delta_{11} x_1 + \delta_{21} x_2 = 0$

$\delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2 = 0$

$\delta_{31} x_1 + \delta_{32} x_2 = 0$

x_3 è libero, non entra mai in gioco. Le righe della matrice non è detto che siano linearmente indipendenti, non lo si può stabilire perché dipende dal valore di α_1 e α_2. Sono due parametri in tre equazioni.

$$\mathrm{Ker}\, A^3 = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = X^{\bar{o}}$$

da prima

Perciò è vero che $\operatorname{Ker} A^3 \supseteq \operatorname{span} X^{\bar{0}}$ che è la condizione di completa riconducibilità.

Questo vale in 3 passi.

$$\underbrace{\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}}_{\operatorname{Ker} A^3} \supseteq \underbrace{\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}}_{X^{\bar{0}}}$$

Si vuole vedere se vale anche in 2 passi; quindi deve valere che $\operatorname{Ker} A^2 \supseteq X^{\bar{0}}$

$$\theta_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$x_1 = 0$

$x_2 = 0$

x_3 qualsiasi

$$X^{\bar{r}} = \{0\} \iff \operatorname{Ker} A^2 \supseteq X_2^{\bar{0}}$$

$X_2^{\bar{0}}$ è sottoinsieme di A^2

cioè A^2 contiene $(\supseteq)$ $X_2^{\bar{0}}$

cioè $X_2^{\bar{0}}$ è contenuto $(\subseteq)$ in A^2

A^2 è più grande o uguale ad $X_2^{\bar{0}}$

$$X_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix} X_0 \quad X_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix} X_1$$

$y_2 = x_2^1$, $y_1 = x_1^1$, $y_0 = x_0^1$

Quindi:

$$x_2^1 = \alpha_1 x_1^1 + \alpha_2 x_1^2 \qquad\qquad y_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 x_1^2$$
$$x_2^2 = \beta_1 x_1^1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_2^2 = \beta_1 y_1$$
$$x_2^3 = \beta_2 x_1^2 \qquad\qquad x_2^3 = \beta_2 x_1^2$$

Allora, si vogliono esprimere in funzione degli ingressi:

$x_1^2 = (y_2 - \alpha_1 y_1) / \alpha_2$

$x_2^2 = \beta_1 y_1$

$x_2^3 = \beta_2 x_1^2 = \beta_2^2 (y_2 - \alpha_1 y_1) / \alpha_2$

Si deve calcolare x_2^1 sfruttando i dati già calcolati.

$x_1^1 = \alpha_1 x_0^1 + \alpha_2 x_0^2$

$x_1^2 = \beta_1 x_0^1 = \beta_1 y_0 \leftarrow$ da $x_1 = \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} x_0$

$x_1^3 = \beta_2 x_0^2$

allora $x_2^1 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 \beta_1 y_0$

si può riscrivere $x_1^2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 \beta_1 y_0$

Per calcolare lo stato iniziale, in generale, si usa l'algoritmo ai minimi quadrati.

Algoritmo generale di calcolo di x_0

Sia (A, C) completamente osservabile

$$y_k = CA^k x_0 + R_k \begin{bmatrix} u_{k-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} + D u_k$$

$$y_k^l \triangleq y_k - R_k \begin{bmatrix} u_{k-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} - D u_k$$

$$\begin{bmatrix} y_0^p \\ y_1^p \\ y_2^p \\ \vdots \\ y_T^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^T \end{bmatrix} x_0 = \Theta_T x_0$$

$$\Theta_{n-1} \in \mathbb{R}^{np \times n}$$

rango $\Theta_T = n$
$\forall T \geq n-1$

$$\Theta_n \in \mathbb{R}^{(n+1)p \times n}$$

$T = n-1$

$T = n$

$$\Theta_T^T \begin{bmatrix} y_0^p \\ \vdots \\ y_T^p \end{bmatrix} = \left(\Theta_T^T \Theta_T\right) x_0$$

$\Theta_T^T \Theta_T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è invertibile, rango $\Theta_T = n$ $\forall T \geq n-1$

Allora si trova la seguente espressione dello stato iniziale x_0 :

$$x_0 = (\Theta_T^T \Theta_T)^{-1} \Theta_T^T \begin{bmatrix} -y_0^p \\ y_1^p \\ \vdots \\ y_T^p \end{bmatrix}$$

$T \geq n-1$

Algoritmo ai minimi quadrati → analogo alla stima della trasferibilità di energia minima

$(\Theta^T\Theta)^{-1} = \Theta^{-1}\cancel{(\Theta^{-1})^{-1}\Theta^T}$ $\qquad x_0 = \Theta^{-1}\begin{bmatrix} y_0^p \\ \vdots \\ y_T^p \end{bmatrix}$

caso particolare

se Θ^T quadrata

Stabilità interna asintotica

Tutti gli autovalori di A danno luogo a modi convergenti

T.C. $Re(\lambda_i) < 0$

T.D. $|\lambda_i| < 1$ $\quad \forall \lambda_i \in sp(A)$

Stabilità esterna (BIBO stabilità)

Tutti i poli di $W_{yu}(\lambda)$ devono essere asintoticamente stabili

T.C. $Re(p_i) < 0$

T.D. $|p_i| < 1$

$\forall\, p_i \in$ poli di $W_{yu}(\lambda)$, cioè le radici del denominatore

Stabilità interna $\Rightarrow$ Stabilità esterna

Stabilità esterna

$+$

(A, B, C) completamente raggiungibile e osservabile $\Rightarrow$ Stabilità interna

Sintesi di leggi di controllo in feedback

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

leggi di controllo

TD $u_k = K x_k$

TC $u(t) = K x(t)$

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases}$$

$K \in \mathbb{R}^{m \times n}$

retroazione statica dallo stato

Problemi di regolazione

TD $u_k = K_1 x_k + K_2 r_k$

r_k è il segnale di riferimento

TC $u(t) = K_1 x(t) + K_2 r(t)$ $\quad r(t)$ " "

Problemi di inseguimento (tracking)

$y_k \approx r_k$

Un'altra legge di controllo sono le relazioni statiche dell'uscita

Problemi di regolazione

TD $u_k = K y_k$

$K \in \mathbb{R}^{m \times p}$

TC $u(t) = K y(t)$

$y_k \simeq 0$

Lo stato è informativo di quello che fa il sistema, si può stabilizzare il sistema. Invece la retroazione statica dell'uscita non la garantisce

---

Retroazioni dinamiche dello stato

$u(t) = K(s)\, x(t)$

$K(s)$ come fdt in $s \triangleq \frac{d}{dt}$, $K(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times n}$

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A_K \xi(t) + B_K\, x(t) \\ u(t) = C_K\, \xi(t) + D_K\, x(t) \end{cases}$$

con $K(s) = C_K (sI - A_K)^{-1} B + D_K$

K_1
Retroazione dinamica dell'uscita

$K_1 \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $K_2 \in \mathbb{R}^{m \times p}$

$u(t) = K_1(s)\, y(t) + K_2(s)\, r(t)$ * $K(s) \in \mathbb{R}^{m \times p}(s)$

$\dot{\xi}(t) = A_K\, \xi(t) + B_K\, y(t)$

$u(t) = C_K \xi(t) + D_K y(t)$,

con $K(s) = C_K (sI - A_K)^{-1} B_K + D_K$

richiede raggiungibilità ed osservabilità

* se si vogliono risolvere problemi di inseguimento (aumento dei gradi di libertà)

Retroazione dinamica dello stato

TD

$$u_k = F_1(z)\, x_k + F_2(z)\, r_k$$

con z operatore di anticipo

$$\begin{cases} \xi_{k+1} = A_{F_1} \xi_k + B_{F_1} x_k \\ u_k = C_{F_1} \xi_k + D_{F_1} x_k \end{cases}$$

con $F_1(z) = C_{F_1} (zI - A_{F_1}) B_{F_1} + D_{F_1}$

Retroazione dinamica dell'uscita

TD

$$u_k = F_1(z)\, y_k + F_2(z)\, r_k$$

$$\xi_{k+1} = A_{F_1} \xi_k + B_{F_1} y_k$$

$$u_k = C_{F_1} \xi_k + D_{F_1} y_k$$

con $F_1(z) = C_{F_1} (zI - A_{F_1})^{-1} B_{F_1} + D_{F_1}$

Sintesi di leggi di controllo in feedback

$$\Sigma_0 \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad , \ \ni_x \text{ equilibrio}$$

$$u(t) = K_1\, x(t) + K_2\, r(t)$$

$$\Sigma_c \begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BK_1)\, x(t) + BK_2\, r(t) \\ y(t) = (C + DK_1)\, x(t) + DK_2\, r(t) \end{cases}$$

$$r \equiv 0 \qquad \Sigma_c \begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BK_1)\, x(t) \ , \ni_x \\ y(t) = (C + DK_1)\, y(t) \end{cases}$$

Il progetto di K_1 consiste nel determinare uno o più valori di K_1 per cui il sistema sia asintoticamente stabile $\rightarrow$ sintesi modale

Teorema

Se X_e^r lo spazio di raggiungibilità di Σ_a e X_c^r quello di Σ_c

$\Sigma_a = S(A, B, C, D)$

sistema ad anello aperto

$\Sigma_c = S(A+BK_1, BK_2, C+DK_1, DK_2)$

sistema ad anello chiuso

allora $X_e^r = X_c^r$

Dimostrazione

$X_e^r \rightarrow$ più piccolo sottospazio A-invariante che contiene Im B (l'immagine di B)

$$(A+BK_1)X_e^r \subset AX_e^r + \mathrm{Im}(B) \subset X_e^r$$

$\Rightarrow X_e^r$ è $(A+BK_1)$ invariante

X_c^r è il più piccolo (set) sottospazio $(A+BK_1)$ invariante che contiene $\mathrm{Im}(B)$

Siccome è il più piccolo set:

$$X_c^r \subseteq (A+BK_1)\, X_e^r \subset X_e^r$$

$$X_c^r \subseteq X_e^r$$

$$X_e^r \subseteq X_c^r$$

Una retroazione statica dello stato garantisce la raggiungibilità ma si può perdere l'osservabilità (?)

Corollario

Σ_a completamente raggiungibile e completamente osservabile allora Σ_c è completamente raggiungibile ma non necessariamente completamente osservabile

Dimostrazione

Si mette il sistema nella forma RCR1

$$A = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & & I_{m-1} & & \\ \vdots & & & & \\ \hline -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & \dots & & -\alpha_1 \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ \hline 1 \end{array}\right]$$

$$C = [b_m \; b_{m-1} \; \dots \; b_1] \qquad D = B_0$$

caso scalare $\longrightarrow K_1 = [K'_m \; K'_{m-1} \dots K'_1]$

è una matrice riga $\in \mathbb{R}^{1 \times m}$

$$A + BK_1 = ? \quad \text{con} \quad BK_1 = \left[\begin{array}{c} \emptyset \\ \hline K'_m \; K'_{m-1} \dots \end{array}\right]$$

Allora:

$$A+BK_1 = \left[\begin{array}{c|ccc} \emptyset & & I_{n-1} & \\ \hline -\alpha_n + k'_{n} & -\alpha_{n-1} + k'_{n-1} & \cdots & -\alpha_1 + k'_1 \end{array}\right]$$

$$W_{yu}(\lambda) = (C + DK_1)\left(\lambda I - (A+BK_1)\right)^{-1} B + D$$

dipende da K_1

perciò è fdt del sistema a ciclo chiuso

Teorema di allocazione

$$\begin{array}{l} \dot{x} \\ x_{k+1} \end{array} \left\{ Ax + Bu \ , \quad u = Kx \ , \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n} \right.$$

Allora trovo K tale che

$\det(\lambda I - (A+BK)) =$

$= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_n)$ con $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ arbitrari in $\mathbb{C}$ ha soluzione se e solo se (A, B) è completamente raggiungibile

Dimostrazione (parte necessaria)

K è dato con $\sigma_p(A+BK)$ assegnato $\Rightarrow$ necessariamente (A, B) completamente raggiungibile

Si ragiona per assurdo

Suppongo sistema non completamente raggiungibile

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c|c} A_r & A_{r\bar{r}} \\ \hline 0 & A_{\bar{r}} \end{array}\right] \qquad \bar{B} = \left[\begin{array}{c} B_r \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

$\bar{K} = [K_r \mid K_{\bar{r}}]$ ...

$$\det(\lambda I - (\bar{A} + \bar{B}\bar{K})) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \lambda I - (A_2 + B_2 K_2) & -A_{2\bar{2}} - B_2 K_{\bar{2}} \\ \emptyset & \lambda I - A_{\bar{2}} \end{bmatrix} =$$

$$= \det(\underbrace{\lambda I - (A_2 + B_2 K_2)}_{n-p}) \det(\underbrace{\lambda I - A_{\bar{2}}}_{p})$$

se $A_{\bar{2}} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e $A_2 \in \mathbb{R}^{(n-p)\times(n-p)}$

* grado dei due polinomi

dimostrazione (parte sufficiente)

(A, B) completamente raggiungibile
$\forall p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_n)$
(un certo polinomio di grado n)
assegnato

$\exists K$ t.c. $\det(\lambda I - (A + BK)) = p(\lambda)$

Scrivo il sistema nella forma RCRI
(caso scalare) ...

$$p(\lambda) = \lambda^n + \beta_1 \lambda^{n-1} + \dots \beta_n$$

$$\alpha_1 - k_1 = \beta_1 \implies k_1 = \beta_1 - \alpha_1$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$\alpha_n - k_n = \beta_n \implies k_n = \beta_n - \alpha_n$$

$$\bar{k} = [k_n \; k_{n-1} \dots k_1]$$

$$\bar{k} = kT \implies k = [k_n \dots k_1]T^{-1}$$

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \in sp(A) = \{-1, -1\}$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$ anello aperto

$$p(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda+3) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$$ anello chiuso

$K = [K_2 \quad K_1]$ poiché l'ingresso è scalare

$$A + BK = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_2 & K_1 \\ K_2 & K_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+K_2 & 1+K_1 \\ K_2 & -1+K_1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - (A+BK)) = \det \begin{bmatrix} \lambda - (-1+K_2) & -(1+K_1) \\ -K_2 & \lambda - (-1+K_1) \end{bmatrix} =$$

$$= [\lambda - (-1+K_2)][\lambda - (-1+K_1)] - K_2(1+K_1)$$

Calcoli:

$$= \lambda^2 + \left[(-1+k_2) - (-1+k_1)\right]\lambda + (-1+k_1)(-1+k_2) +$$

$$-k_2(1+k_1) = \lambda^2 - (k_1+k_2-2)\lambda +$$

$$+ (1-k_1-2k_2) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$$

si può fare l'eguagliazione

$$\begin{cases} k_1 + k_2 - 2 = -5 & \quad k_1 + k_2 = -3 \\ 1 - k_1 - 2k_2 = 6 & \quad k_1 + 2k_2 = -5 \end{cases}$$

Allora $k_1 = -3 - k_2$ $\quad k_1 = -1$

$k_2 = -2$

$K = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}$ legge di controllo

$u(t) = -2\, x_1(t) + x_2(t)$

ad anello chiuso il sistema ha modi di evoluzione -2 e 1