TDS LEZIONE 4 16-10-18

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $x(t_0) = x_0$

$y(t) = Cx(t) + Du(t)$

$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & \\ & b_{ij} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} +$$

sistema di n eq. differenziali del I ordine →

eq. algebriche

$$+ \begin{bmatrix} & & \\ & ?_{ij} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = a\,x(t) + b\,u(t), & x(t_0) = x_0 \\ y = c\,x(t) + d\,u(t) \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Ipotesi

Si ipotizza che questa sia la soluzione

$$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)} b\, u(\tau)\, d\tau$$

Dimostrazione

Si utilizza un lemma

Lemma: Derivazione sotto il segno di integrale

$$\frac{d}{dt}\left\{ \int_{a(t)}^{b(t)} f(t,\tau)\, d\tau \right\} =$$

$$= f(t, b(t)) \frac{db(t)}{dt} - f(t, a(t)) \frac{da(t)}{dt} + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{d}{dt} f(t,\tau)\, d\tau$$

gli estremi di integrazione possono essere sia costanti (quindi le derivate si annullano) sia in funzione del tempo

Allora :

$$\dot{x}(t) = a x_0 e^{a(t-t_0)} + \frac{d}{dt}\left\{\int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)} \cdot b u(\tau)\, d\tau\right\}$$

$f(t,\tau)$

Nello specifico :

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)} b u(\tau)\, d\tau\right. + b u(t) \int_{t_0}^{t} a e^{a(t-\tau)} b u(\tau)\, d\tau$$

$$\Longrightarrow \dot{x}(t) = a x_0 e^{a(t-t_0)} + b u(t) + a \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)} b u(\tau)\, d\tau$$

$$\dot{x}(t) = a\left[x_0 e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)} b u(\tau)\, d\tau\right] +$$

$$+ b u(t) = a x(t) + b u(t)$$

Dove

$$x(t_0) = x_0 e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-t_0)} b u(\tau)\, d\tau = x_0$$

Quindi:

$$\begin{cases} x(t) = x_0\, e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}\, b\, u(\tau)\, d\tau \\ y(t) = c\, x_0\, e^{a(t-t_0)} + c \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}\, b\, u(\tau)\, d\tau + d\, u(t) \end{cases}$$

$*$ $*$

Rappresentazione globale i/s/u versione scalare

$*$ risposta libera, dipende dalle condizioni iniziali.

$*$ risposta forzata

Si consideri di nuovo il sistema di partenza:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}$$

Ipotesi

$*$ $x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau$

Io voglio dimostrare che sia la soluzione di matrice $n \times n$

Compare un esponenziale di matrice, cioè

$e^{A(t-t_0)}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con elementi dipendenti dal tempo.

Si considera lo sviluppo di Taylor dello esponenziale semplice:

$$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \dots + \frac{a^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^k}{k!}$$

Per analogia:

$$e^{At} \triangleq I + At + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

È la definizione dell'esponenziale di matrice ma non si usa perché si otterrebbe il calcolo in maniera approssimata

Proprietà ①

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$$

Dimostrazione

$$\frac{de^{At}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I + At + \dots \frac{A^k t^k}{k!}\right) =$$

$$= 0 + A + \underbrace{A^2 t}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{A^2t^2}{2}\right)} + \dots + \cancel{k} t^{k-1} \frac{A^k}{\underset{(k-1)!}{\cancel{k!}}} =$$

$$= A + A^2 t + \dots + \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= A\left(I + At + \dots + A^{(k-1)} \frac{t^{(k-1)}}{(k-1)!}\right) =$$

$$= A e^{At}$$

Quindi:

$$A e^{At} = e^{At} \cdot A$$

Proprietà ②

$$\left[e^{At}\right]^{-1} = e^{-At}$$

l'inversa esiste sempre

$$e^{At} \cdot e^{-At} = I$$

$$* \; e^{-At}\dot{x} = e^{-At}A\,x(t) + e^{-At}Bu(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{-At}\right)x(t) + e^{-At}\dot{x}(t) =$$

$$= -e^{-At}Ax(t) + e^{-At}\dot{x}(t)$$

si ottiene sfruttando la proprietà ①

* si sposta di membro il primo termine a destra e si ottiene:

$$e^{-At}\dot{x} - e^{-At}Ax(t) = e^{-At}Bu(t)$$

Quindi:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x(t)\right) = e^{-At}Bu(t)$$

Integrando:

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x(t)\right) = \int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow \left[e^{-At} x(t) - e^{-At_0} x(t_0) \right] =$$

$$= \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau$$

Si vuole una soluzione del tipo: *

$$e^{At} [\;\;] = e^{At} \cdot \int_{t_0}^{t} [\;]$$

Quindi:

$$x(t) - e^{A(t-t_0)} x_0 = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Siccome l'esponenziale matrice gode delle proprietà ① e ②, si può ottenere

$$x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)} x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau}_{\text{risposta forzata nello stato}}$$

$$y(t) = \underbrace{C e^{A(t-t_0)} x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} C e^{A(t-\tau)} \cdot B u(\tau) d\tau + D u(t)}_{\text{risposta forzata nell'uscita}}$$

Questa è la rappresentazione globale i/s/u

Un integrale di matrice è un integrale calcolato componente per componente

Proprietà Esponenziale di Matrice

1) $e^{A(t+\tau)} = e^{At} e^{A\tau}$

2) $e^{(A+B)t} \neq e^{At} \cdot e^{AB}$

vale solo se $AB = BA$
cioè se commutano

3) $\left[e^{At} \right]^{-1} = e^{-At}$

4) $A e^{At} = e^{At} \cdot A$

5) $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$

6) sia (λ, v) una coppia autovalore/autovettore di A tale che

$$A v = \lambda v$$

allora $$e^{At} v = e^{\lambda t} v$$

$$\left[I + At + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} \right] v = \left[v + tAv + \dots + \frac{t^k A^k v}{k!} + \dots \right] =$$

Perché
$A^k v = A^{k-1}(\lambda v) = \lambda A^{k-1} v = \lambda^2 A^{k-2} v = \lambda^k v$

$$\left[v + t\lambda v + \dots + \frac{t^k}{k!} \lambda^k v \right] = \left[1 + \lambda t + \frac{\lambda^k t^k}{k!} \right] v =$$

$e^{\lambda t} v$

Scanned by CamScanner

) Siano $(\lambda_1, v_1), (\lambda_2, v_2), \dots, (\lambda_m, v_m)$ le m coppie autovalori / autovettori di A con $v_1, v_2, \dots, v_m$ linearmente indipendenti

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

invertibile ($\exists\, T^{-1}$)

A è diagonalizzabile se questi m vettori sono linearmente indipendenti

Si sfrutta la

<u>proprietà delle matrici simili</u>

Due matrici sono simili $\Rightarrow$ le due matrici hanno gli stessi autovalori. $A, B \in \mathbb{R}^{m \times m}$

(A, B) sono simili se $\exists\, T \in \mathbb{R}^{m \times m}$, T invertibile, tale che

$$\boxed{A = T^{-1} B T} \iff \boxed{B = T A T^{-1}}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

Si dimostra che $A v_i = \lambda_i v_i$, $\forall i = 1, \dots, m$
(vale per tutte le coppie)

$$A \left[v_1 \,\middle|\, v_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, v_m \right] = \left[\lambda_1 v_1 \,\middle|\, \lambda_2 v_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \lambda_m v_m \right] =$$

$$= \left[v_1 \,\middle|\, v_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, v_m \right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

$$(A T)^{-1} = (T \Delta) T^{-1}$$

$$A = T \Delta T^{-1} \iff \Delta = T^{-1} A T$$

3) A diagonalizzabile, (λ_i, v_i) coppie autovalore/autovettore di A

$$T = \left[\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{array}\right] \qquad \Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$A = T \Delta T^{-1} \qquad e^{\Delta t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{e^{At} = T e^{\Delta t} T^{-1}}$$

Si dimostra applicando la definizione:

$$e^{At} = e^{(T\Delta T^{-1})t} = \sum_{k=0}^{\infty} (T\Delta T^{-1})^k \frac{t^k}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (T\Delta^k T^{-1}) \frac{t^k}{k!} = T\left(\sum \frac{\Delta^k t^k}{k!}\right) T^{-1} =$$

$$= T e^{\Delta t} T^{-1}$$

$$e^{\Delta t} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_m \end{bmatrix}^k \frac{t^k}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} d_1^k & & & \\ & d_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_m^k \end{bmatrix} \frac{t^k}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} d_1^k \cdot \frac{t^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & d_m^k \frac{t^k}{k!} \end{bmatrix} =$$

Siccome $\sum_{k=0}^{\infty} d_i^k \frac{t^k}{k!} = e^{d_i t}$, $\forall i = 1, \dots, m$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} e^{d_1 t} & & \phi \\ & \ddots & \\ \phi & & e^{d_m t} \end{bmatrix}$$