TDS LEZIONE 7 23-10-18

$$\begin{cases} x_{k+1} = A x_k + B u_k, & x_{k_0} = x_0 \\ y_k = C x_k + D u_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_k = W_{xu}(z)\, u_k, \quad W_{xu}(z) = (zI-A)^{-1}B = \dfrac{\Gamma_1 z^{n-1} + \dots \Gamma_n}{z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots \alpha_n} \\ \quad \text{con } \Gamma_i \in \mathbb{R}^{n \times m} \\ y_k = W_{yu}(z) u_k, \quad W_{yu}(z) = C(zI-A)^{-1}B + D = \\ \qquad = \dfrac{B_0 z^n + \dots + B_n}{z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n} \quad \text{con } B_i \in \mathbb{R}^{p \times m}, \ \alpha_i \in \mathbb{R} \end{cases}$$

z operatore Anticipo Unitario

z^{-1} operatore Ritardo Unitario

$$W_{xu}(z^{-1}) = \Gamma_1 z^{-1} + \dots + \Gamma_1 z^{-n} / 1 + \alpha_1 z_1^{-1} + \dots \alpha_n$$

$$W_{yu}(z^{-1}) = B_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_n z^{-n} / 1 + \alpha_1 z_1^{-1} + \dots \alpha_n z^{-n}$$

$$(z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots \alpha_n) y_k = (B_0 z^n + \dots + B_n) u_k \iff$$

$$(1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots \alpha_n z^{-n}) y_k = (\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots \beta_n z^{-n}) u_k$$

Scanned by CamScanner

$$y_{k+m} + \alpha_1 y_{k+m+1} + \dots \alpha_n y_n = \beta_0 u_{k+m} + \dots \beta_m u_k$$

$$y_0, y_1 \dots y_{m-1}$$

$$y_k + \alpha_1 y_{k-1} + \dots \alpha_m y_{k-m} = \beta_0 u_n + \beta_1 u_{k-1} + \dots \beta_m u_{k-m}$$

$$y_0, y_1, \dots y_{m-1}$$

$W_{yu}(z)$ propria $\iff$ (Σ) sistema causale

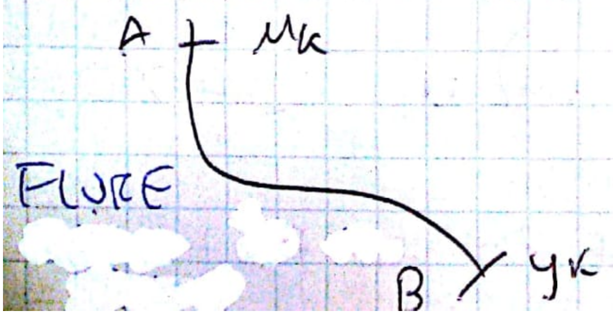
" strettamente propria $\iff$ " strett. causale

$$W_{yu}(z^{-1}) = \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})} \quad W_{yu}(z^{-1})$$ allora se

$$D(z^{-1})\Big|_{z^{-1}=0} \neq 0 \iff \Sigma \text{ causale}$$

tra z e z^{-1} la causalità si studia in modo diverso

Modelli ARMA AutoRegressivi a Media mobile



È l'unione di due classi di modelli

I modelli a media mobile MM:

L'uscita è una media di certe variabili

$$y_k = \beta_0 u_k + \beta_1 u_{k-1} + \dots \beta_m u_{k-m}$$ con m arbitrario

I modelli autoregressivi AR:

il valore dell'uscita al tempo k è una combinazione lineare dei valori che questa variabile aveva nell'istante precedente

$$y_k = \alpha_1 y_{k-1} + \alpha_2 y_{k-2} + \dots \alpha_m y_{k-m},$$ con m arbitrario

Il modello ARMA è l'unione dei due:

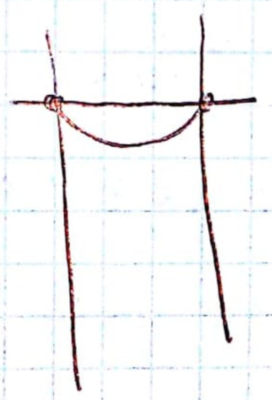
$$y_k = \alpha_1 y_{k-1} + \dots + \alpha_m y_{k-m} + \beta_0 u_k + \dots \beta_m u_{k+m}$$

Si consideri la sezione del fiume:

1) Velocità nelle sezioni costante

Tempo τ ore

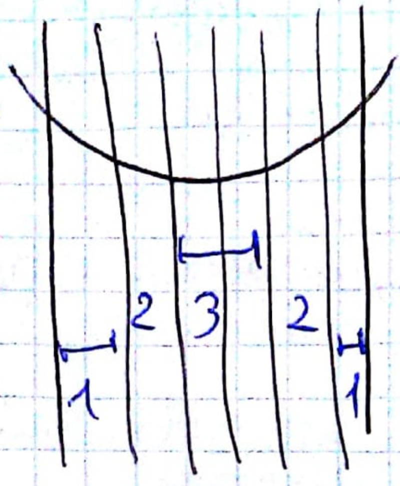
$$y_k = u_{k-\tau}$$



2) Velocità nelle sezioni non costante

Scanned by CamScanner

Si fa un profilo della velocità, dividendo il fiume in tre parti



#3 $\tau - 1$, β_3

#2 τ, β_2

#1 $\tau + 1$, β_1

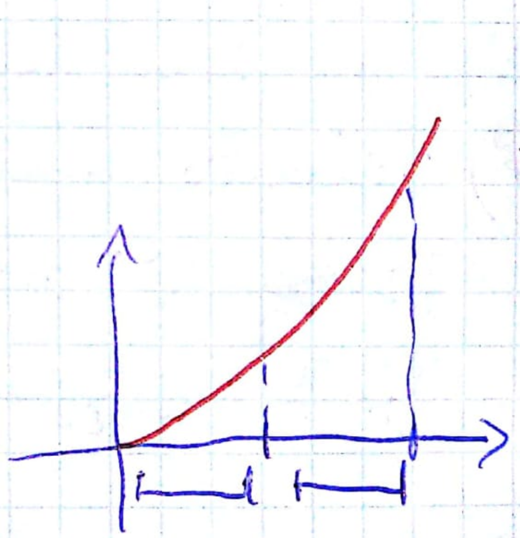
dove questo è il tempo complessivo che impiega l'acqua per arrivare (nella zona centrale è più veloce)

$$y_k = \beta_3 u_{k-\tau+1} + \beta_2 u_{k-\tau} + \beta_1 u_{k-\tau-1}$$

dove $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$, cioè la loro somma è normalizzata

3) Portata costante

$$y_k - y_{k-1} = y_{k-1} - y_{k-2}$$



conservazione del flusso (della quantità d'acqua)

$$y_k = 2y_{k-1} - y_{k-2}$$

Scanned by CamScanner

$$y_k = \alpha\left[2y_{k-1} - y_{k-2}\right] + (1-\alpha)\left[\beta_3 u_{k-1} + \beta_2 u_{k-2} + \beta_1 u_{k-3}\right]$$

Per $\tau = 2$ con $\alpha \in [0,1]$ che è il valore di credibilità (specifica di quale delle due parti di rappresentazione ci si fida di più)

Il modello ARMA è equivalente ad una rappresentazione di stato, da uno si può ricavare l'altro e viceversa

$$\begin{cases} x_k = W_{xu}(z)\, u_k \\ y_k = W_{yu}(z)\, u_k \end{cases} \iff \begin{cases} x(z) = W_{xu}(z)\, u(z) \\ y(z) = W_{yu}(z)\, u(z) \end{cases}$$

Modello ARMA — Trasformata Z

dove la trasformata Z è:

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} u_k \qquad u_k = \{u_0, u_1, \dots, u_k\}_{k=0}^{\infty}$$

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} y_k$$

Scanned by CamScanner

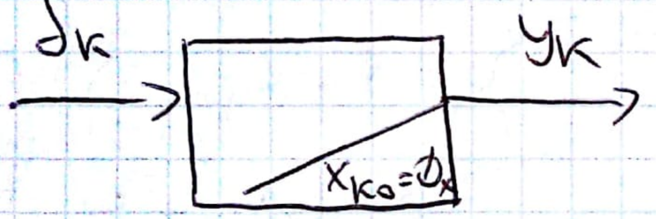
$$y_k = w\left(u_{(-\infty,k]}\right) \quad *$$

$$y_k = CA^{(k-k_0)}x_{k_0} + \sum_{i=k_0}^{k-1} CA^{(k-i-1)} B u_i + D_{k-1} u_k$$

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to-\infty} CA^{(k-k_0)} x_{k_0} + \sum_{i=-\infty}^{k-1} CA^{(k-i-1)} B u_i + D u_k$$

quindi $\; * \Longleftrightarrow y_k = \sum_{i=-\infty}^{k-1} CA^{(k-i-1)} B u_i + D u_k$

Risposta Impulsiva



@ $k_0 = 0$, $x_{k_0} = 0_x$ si applica un impulso unitario

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$ Indice di KRONECKER

L'uscita corrispondente è chiamata "risposta impulsiva" $\{y_0, y_1, \dots y_m\}_{k=0}^{\infty}$

Scanned by CamScanner

Allora $y_k = \sum_{i=0}^{k-1} CA^{(k-i-1)} B \delta_i + D\delta_k$

$y_0 = D, \; y_1 = CB, \; \dots, \; y_k = CA^{k-1}B$
con ogni matrice $\in \mathbb{R}^{p \times m}$

Sequenza di Markov

È definita sia per sistemi TC che TD
$S = S(A, B, C, D)$

$$w_k = \begin{cases} D, & k=0 \\ CA^{k-1}B, & k>0 \end{cases} \quad , \quad w_k \in \mathbb{R}^{p \times m} \quad \forall k$$

1) Risposta impulsiva di un sistema LTI − TD coincide con la sequenza di Markov

2) Nel caso TC vale
$$Ce^{At}B = C\left(I + At + \dots + \frac{A^k t^k}{k!}\right)B =$$
$$= CB + CABt + \dots CA^kB\frac{t^k}{k!} = W_c(t)$$

Scanned by CamScanner

Nello specifico:

$W_c(s) = CB$ dove $w_c(t) =$

$= Ce^{At}B + D\delta(t)$

$$\frac{d\, w_c(t)}{dt} = CAB$$

$$\frac{d\, w_c(t)}{dt^k} = CA^{k-1}B \quad *$$

sono i coefficienti di Taylor della risposta impulsiva nell'intorno $t=0$ $\to$ TD

$$w_c(t) = w_1 + w_2 t + w_3 \cdot \frac{t^2}{2} + \dots + w_{k+1} \frac{t^k}{k!}$$

$\to$ TC

dove w_0, w_1 -- sono i coefficienti della risposta impulsiva, cioè quelli della sequenza di Markov. Li usiamo perché serve dell'informazione minima per descrivere la risposta impulsiva

$$* \frac{d^k}{dt^k}\left(CA^{k-1} \frac{Bt^{k-1}}{(k-1)!} \right) = (k-1)!\, CA^{k-1} \frac{B}{(k-1)!}$$

Scanned by CamScanner

$$y_k = \sum_{i=-\infty}^{k} W_{k-i}\, u_i$$

nella sequenza di Markov

$$W_k = \begin{cases} D, & k=0 \\ CA^{k-1}B, & k>0 \end{cases}$$

$W_k = 0_{p \times m}$ per la causalità

$$W_{k-i} = \begin{cases} D, & i=k \\ CA^{k-i-1}B, & i<k, \quad k-i>0 \end{cases}$$

$$\boxed{y_k = \sum_{i=-\infty}^{k-1} \underbrace{W_{k-i}}\, u_i + \underbrace{D u_k}}$$

serie di convoluzione

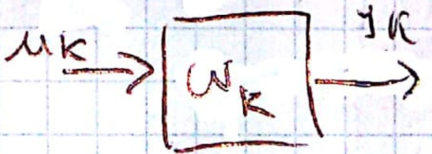
Per analogia:

$$y_k = \sum_{i=-\infty}^{k-1} \underbrace{CA^{(k-i-1)} B}\, u_i + \underbrace{D u_i}$$

Quindi:

$$u_k = \{u_0, u_1, \dots u_k\}_{k=0}^{\infty}$$

$$w_k = \{w_0, w_1, \dots w_k\}_{k=0}^{\infty}$$



$y_0 = w_0 u_0, \quad y_1 = w_1 u_0 + w_0 u_1,$

$y_k = w_k u_0 + w_{k-1} u_1 + \dots w_0 u_k$

Scanned by CamScanner

Questa rappresentazione è utilizzata per implementare leggi di controllo e filtri

Legame tra f.d.t. e sequenza di Markov:

$$W_{yu}(\lambda) = \frac{\beta_0 \lambda^n + \beta_1 \lambda^{n-1} + \dots \beta_m}{\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots \alpha_m} \qquad \lambda = \{s, z\}$$

$$\frac{\beta_0 \lambda^n + \beta_1 \lambda^{n-1} + \dots \beta_m}{\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots \alpha_m} = \sum_{k=0}^{\infty} w_k \lambda^{-k}$$

$$w_k = \begin{cases} D & k=0 \\ CA^{k-1}B & k>0 \end{cases}$$

Dimostrazione:

Tramite meccanismo di lunga divisione

Esempio:

$$\begin{array}{r|l} \lambda+1 & \lambda+2 \\ \hline -(\lambda+2) & 1 - \lambda^{-1} + 2\lambda^{-2} + 4\lambda^{-3} \\ \hline -1 & \\ -(-1-2\lambda^{-1}) & \\ \hline 2\lambda^{-1} & \\ [\dots] & \end{array}$$

Quindi $\frac{\lambda+1}{\lambda+2} = 1 - \lambda^{-1} + 2\lambda^{-2} + \dots$

Scanned by CamScanner

Esercizio:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \,, \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} \\ \\ y_k = [1 \quad 1]\, x_k + \emptyset u_k \end{cases}$$

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{(k-i-1)} B u_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix}^{k-i-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_i$$

$$y_k = CA^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{(k-i-1)} B u_i + D u_k \Rightarrow$$

$$y_k = x_{1k} + x_{2k}$$

$$T = \begin{bmatrix} v_1 \,|\, v_2 \end{bmatrix} \qquad A = T \Delta T^{-1} \qquad \Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$A^k = (T \Delta T^{-1})^k \qquad \Delta^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0,5)^k \end{bmatrix}$$

Si calcolano v_1 e v_2

$$(\lambda I - A) v = 0$$

$$I - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0,5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad -x + 0,5y = 0$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

si sono ricavati gli autovettori

$$\left(1; \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \quad \left(0,5; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(coppia autovalore autovettore)

ottenuta facendo $(0,5I - A) = \begin{bmatrix} -0,5 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner