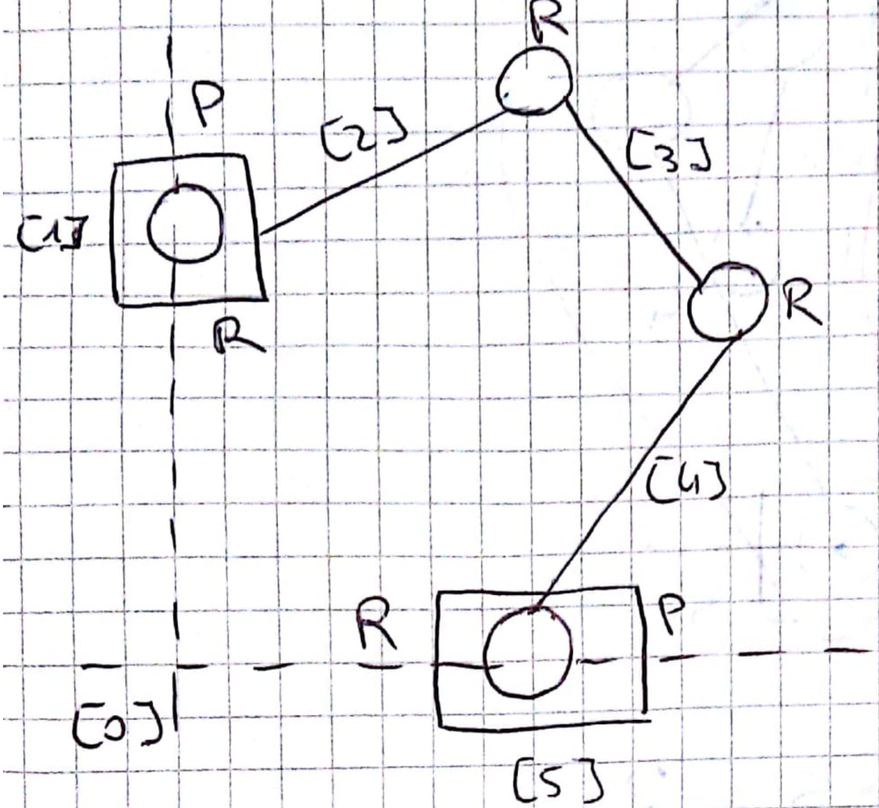
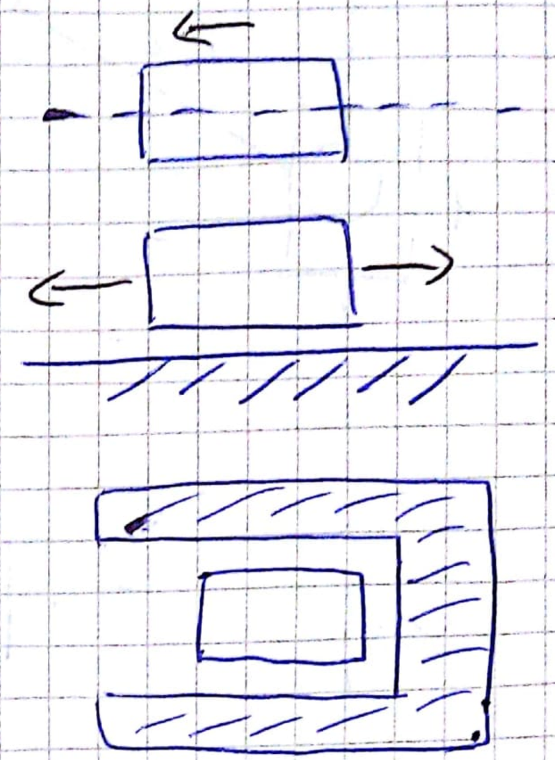
Esercizio 1



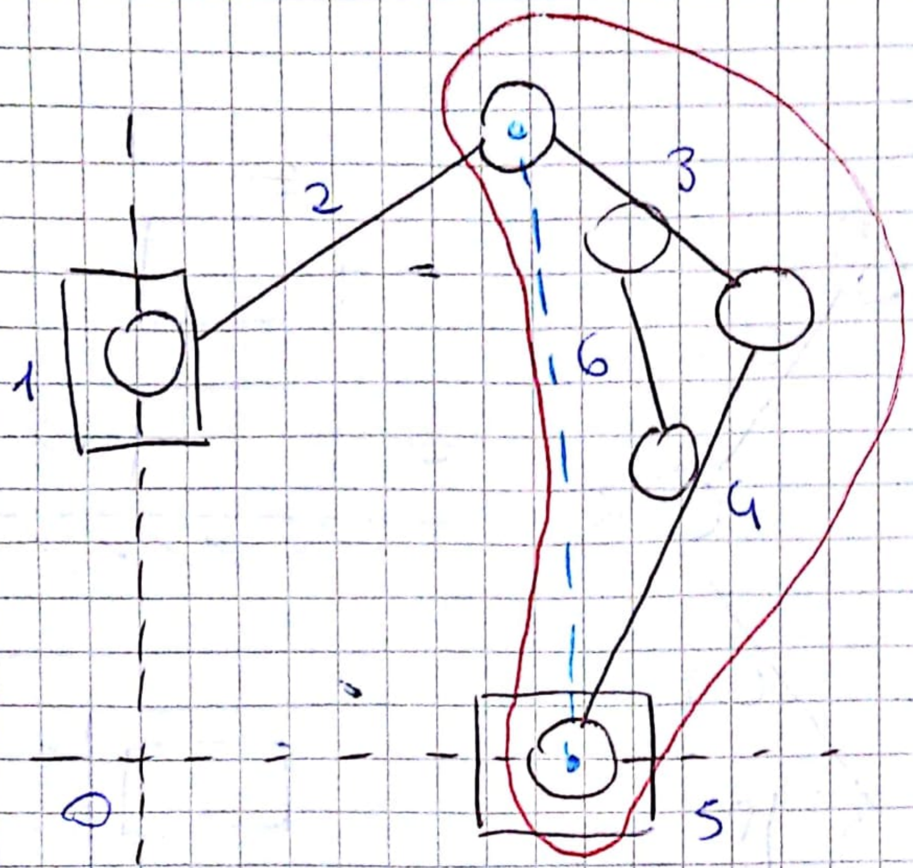


cilindro e pistone

$$N = 3(6-1) - 2 \cdot 6 = 3$$

Ci devono essere 3 attuatori, affinché il meccanismo sia univocamente determinato (altrimenti sarebbe libero di muoversi, assumendo infinite configurazioni)

Esercizio 2



$$N = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2$$

Considerando il corpo unico

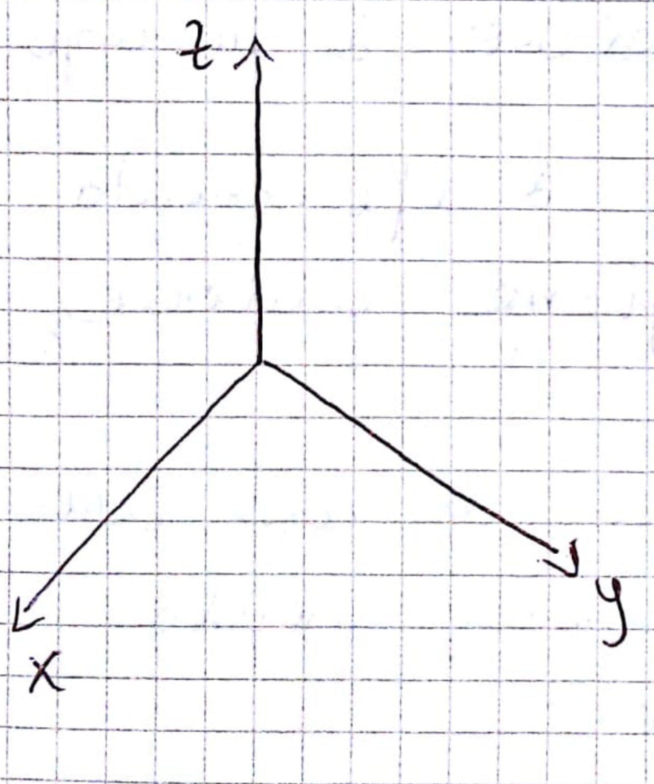
$$N = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 8 = 18 - 16 = 2$$

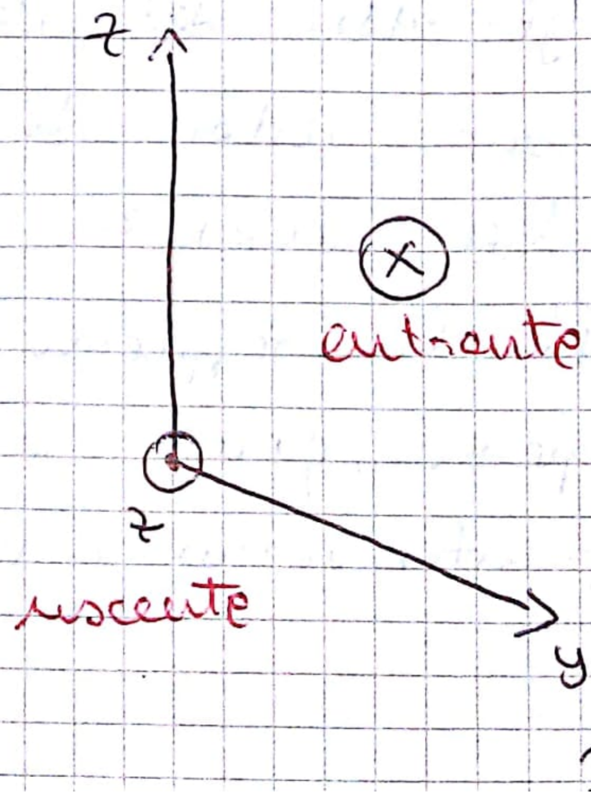
Considerando quello come corpo unico, la distanza punto-punto tra i due giunti è costante

Si ha bisogno di meno attuatori rispetto al numero di gradi di libertà, se si riesce ad identificare un grado di libertà che non influisce sul moto, la cui variazione non modifica il meccanismo. In genere, questo si verifica nei meccanismi spaziali.

Rappresentazione dei corpi nello spazio

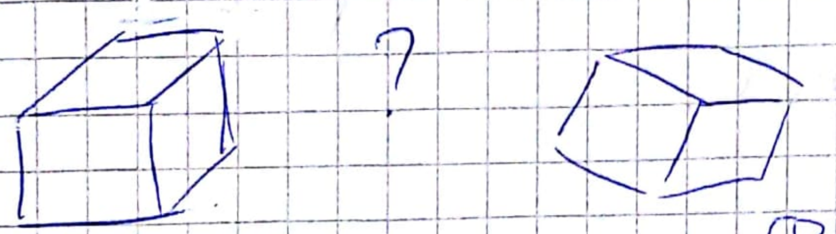
3D





Sistemi DESTRORSI: seguono la regola della mano destra (si mettono pollice indice e medio spostati di 90° l'uno dall'altro) (usati nel corso)

Sistemi SINISTRORSI

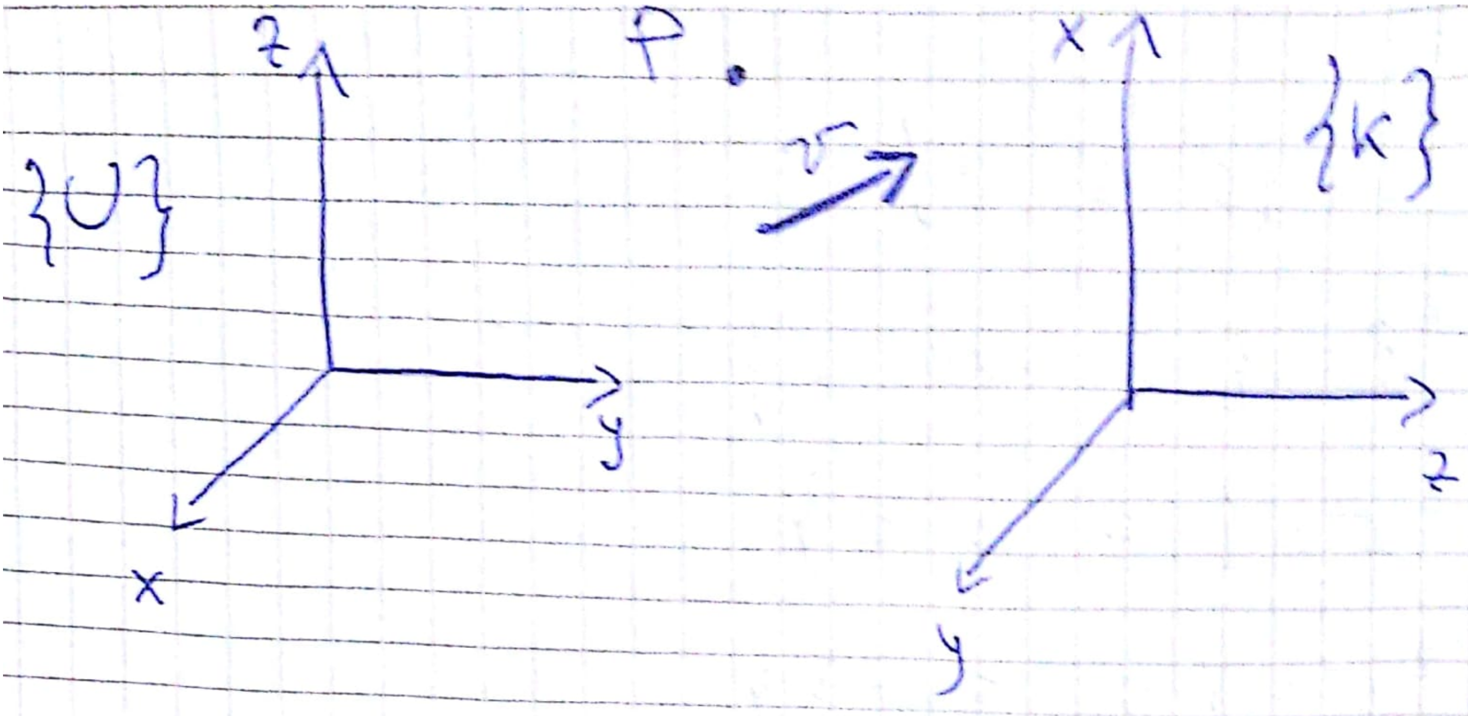


[A] [B]

La POSA è l'insieme della POSIZIONE e dell'ORIENTAZIONE di un corpo

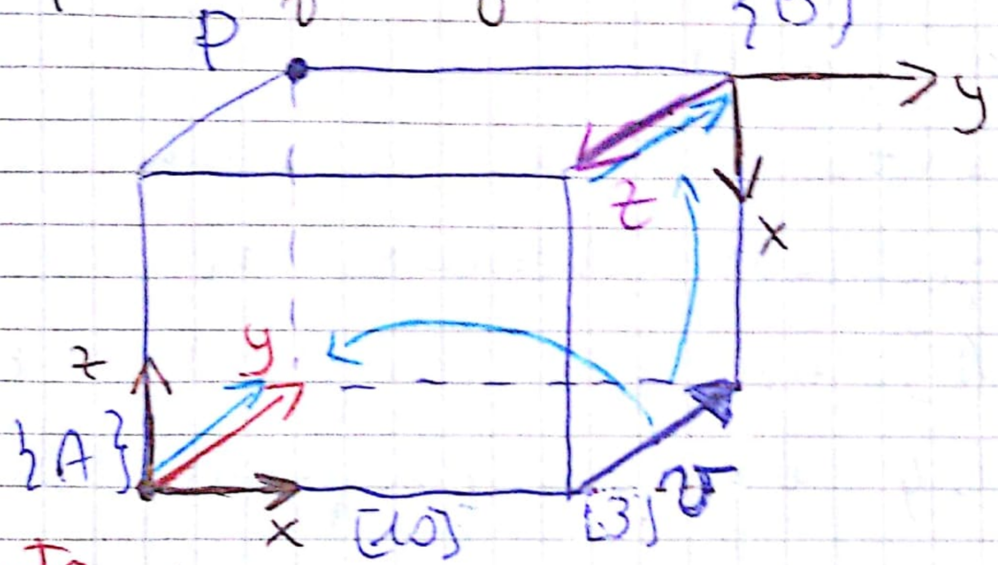
Gli ASSI del sistema di riferimento sono vettori di lunghezza unitaria, detti VERSORI

Per la rappresentazione dei corpi nello spazio, quindi, si descrivono usando punti, vettori e versori



Dati i due sistemi di riferimento {U} e {K}, si vogliono rappresentare P, v rispetto ad entrambi i sistemi.

${}^{U}P$ ${}^{K}P$ ${}^{K}v$ ${}^{U}v$



y entrante
(regola della mano destra)
z uscente

$^{A}P = \{0 \quad 3 \quad 7\}$

$^{B}P = \{0 \quad -10 \quad 0\}$

$^{A}v = \{0 \quad 3 \quad 0\}$

$^{B}v = \{0 \quad 0 \quad -3\}$

v è un vettore libero, che può essere rappresentato in qualunque punto dello spazio, dipende solo dal verso e dalla direzione, non dal punto in cui è applicato

Si proietta v su entrambi i sistemi di riferimento, ottenendo che:

in $\{A\}$ ha solo componente lungo y

in $\{B\}$ ha solo componente lungo z

Si passa dalle COORDINATE CARTESIANE alle COORDINATE OMOGENEE

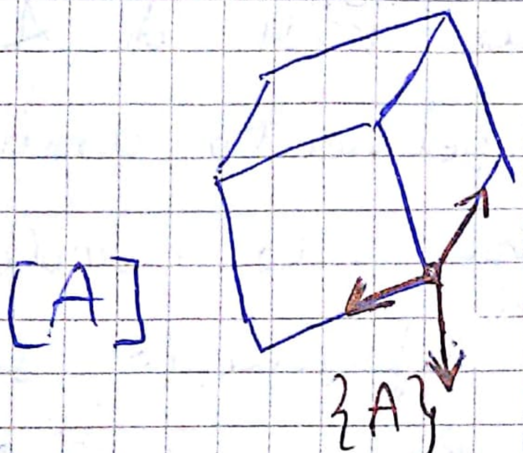
$^{A}P = \{0 \quad 3 \quad 7 \quad 1\}$

$^{A}V = \{0 \quad 3 \quad 0 \quad 0\}$.

Se si ha come quarta componente, nelle coordinate OMOGENEE, il valore 1 allora si tratta di un PUNTO, se Ø allora si tratta di un VETTORE

I CORPI sono considerati RIGIDI

Ad ogni corpo si attacca, si colloca un sistema di riferimento.



Esiste una relazione univoca tra corpo - sistema di riferimento e viceversa, perché essendo un corpo rigido, quando si muove il punto dietro il sistema di riferimento

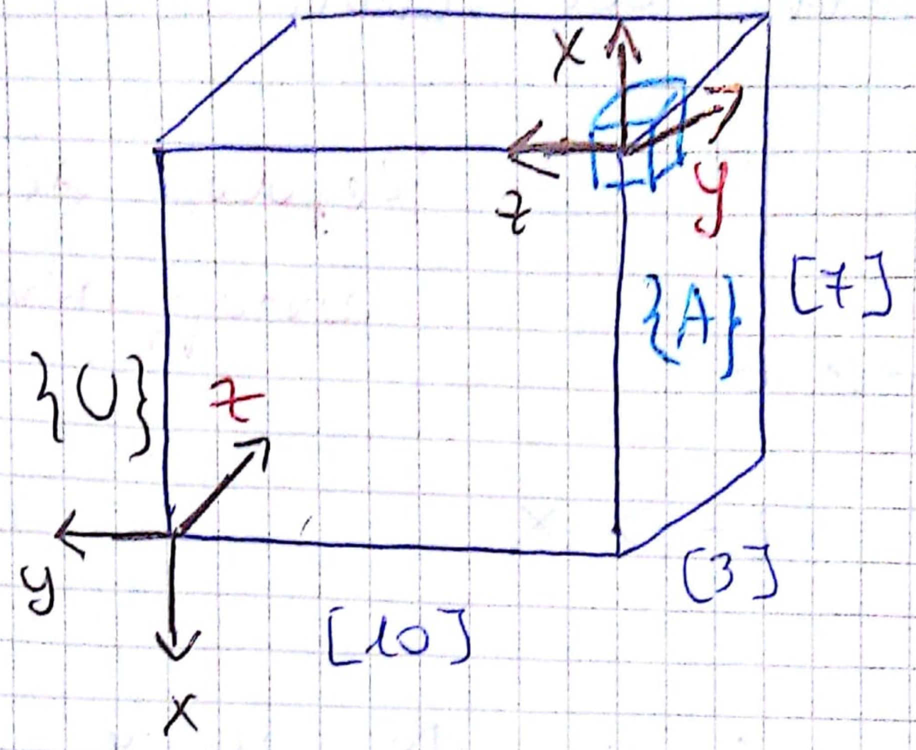
FRAME $\begin{cases} 1 \text{ origine} \\ 3 \text{ versori} \end{cases}$

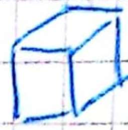
Si usa per la descrizione del frame, una matrice, di dimensione 4x4, visto che si utilizzano le coordinate omogenee

$$\begin{array}{cccc} {}^{U}\hat{X}_A & {}^{U}\hat{Y}_A & {}^{U}\hat{Z}_A & {}^{U}\bar{O}_A \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Se si vuole rappresentare la posa di A rispetto al sistema di riferimento assoluto si indica quello che si vuole calcolare, cioè A, rispetto al riferimento su cui si vuole determinare la posa, cioè U

Il sistema relativo del corpo è indicato come pedice, quello assoluto rispetto a cui calcolare la posa come apice idea delle stanze, del volume





rappresenta il corpo

{A} sistema di riferimento relativo, del corpo A, da cui si osserva

{U} sistema di riferimento assoluto quello che si osserva

$$T_{UA} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} {}^U\hat{X}_A & {}^U\hat{Y}_A & {}^U\hat{Z}_A & {}^U\bar{O}_A \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

da U ad A

matrice di rotazione 3×3

posizione

Posa di A rispetto ad {U}

T è una matrice di trasformazione

{A} OSSERVATORE, {U} OSSERVATO

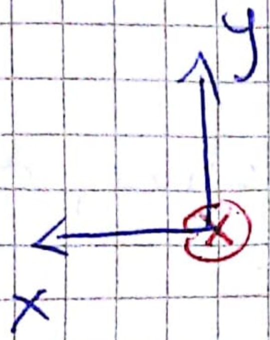
Sovrapposizione dei vettori

x —> y

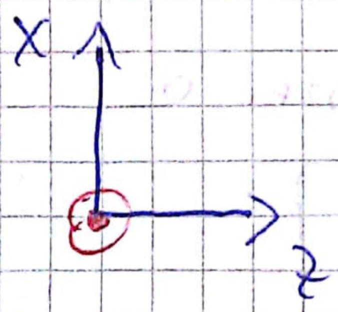
y —> z

z —> x

Regola di sovrapposizione



x si porta su y
e z è entrante

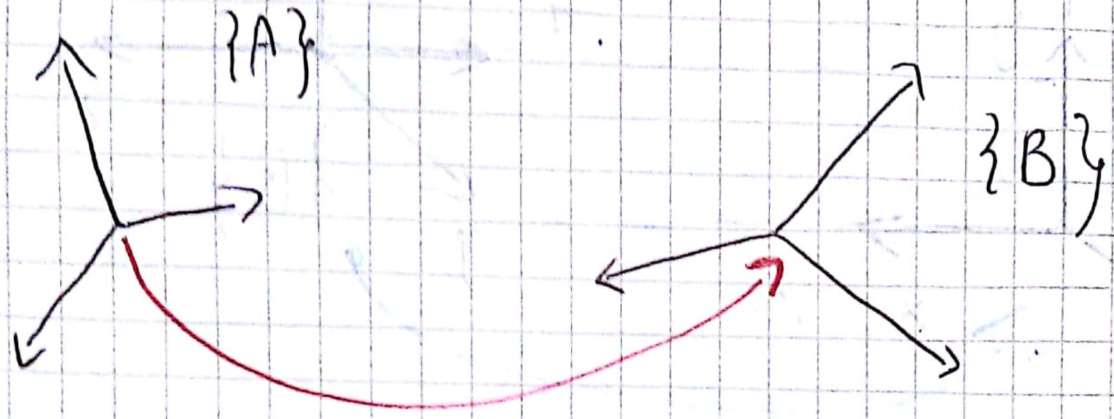


z si porta su y
e z è uscente

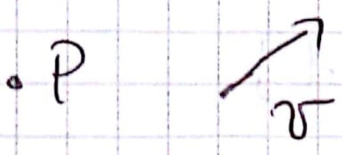
TUA matrice di rototraslazione

$^{A}P = T_{AB}\, {}^{B}P \quad , \quad o \quad {}^{A}v = T_{AB}\, {}^{B}v$ *

I sistemi di riferimento sono attaccati ai corpi, anche se non si rappresentano ogni volta.

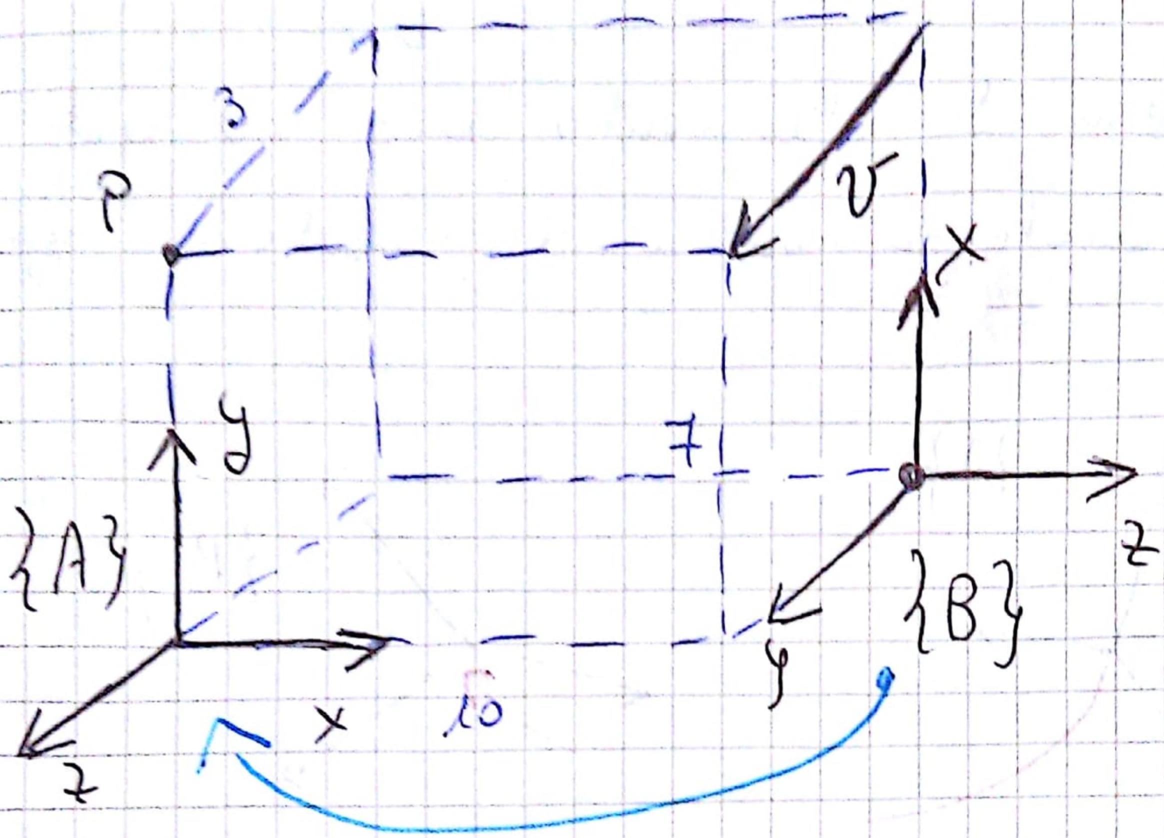


POSA RELATIVA tra {A} e {B}



* per come è stato definito, quei due indici si affacciano

Si possono descrivere allora P e v, partendo da {A} e visti da {B}, se nota la posa relativa di {A} rispetto a {B}



$${}^{A}p = T_{AB}\,{}^{B}p \qquad {}^{A}v = T_{AB}\,{}^{B}v$$

$${}^{B}p = [7 \quad 3 \quad -10 \quad 1]$$

$$\begin{array}{cccc}
{}^{A}\hat{X}_B & {}^{A}\hat{Y}_B & {}^{A}\hat{Z}_B & {}^{A}\bar{O}_B \\
\end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

origine B visto su A

$^{A}P = [\,0 \quad 7 \quad 0 \quad 1\,]$ perché è un punto

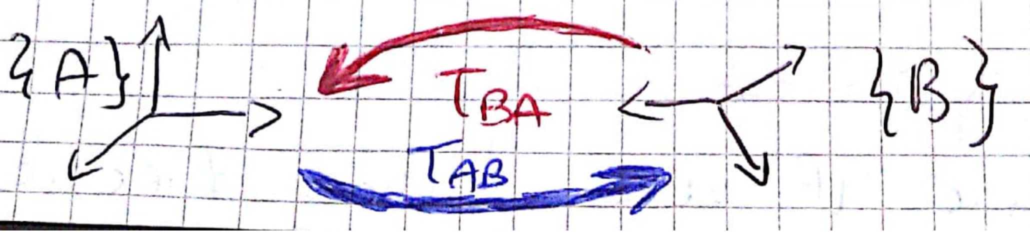
da B ad A

$$P_A = T_{AB} \cdot {}^{B}P = \begin{bmatrix} & & \\ & T_{AB} & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

applicazione della matrice T per trasformare le coordinate di un punto o un vettore da un sistema di riferimento ad un altro

Nota la posa di A rispetto a B, è nota, per reciprocità la posa di B rispetto ad A.

$T_{AB} \Rightarrow T_{BA} = T_{AB}^{-1}$ matrice inversa



Si dimostra la proprietà di INVERSIONE

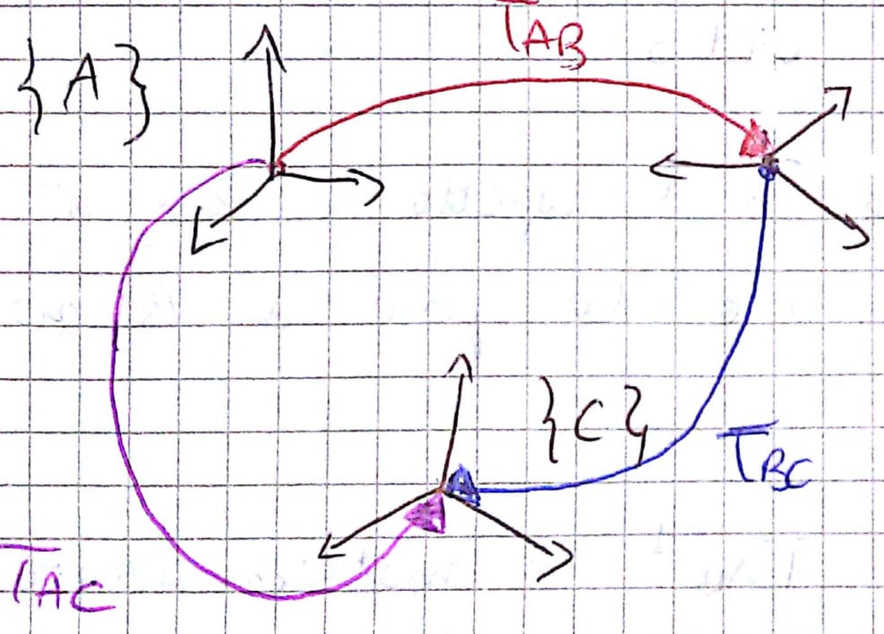
$$^{A}p = T_{AB} \cdot {}^{B}p = \underbrace{T_{AB} \cdot T_{BA}}_{I \text{ matrice identità}} \cdot {}^{A}p$$

dove $^{B}p = T_{BA} \, {}^{A}p$

p è un punto d'appoggio

$$T_{AC} = T_{AB} \cdot T_{BC}$$

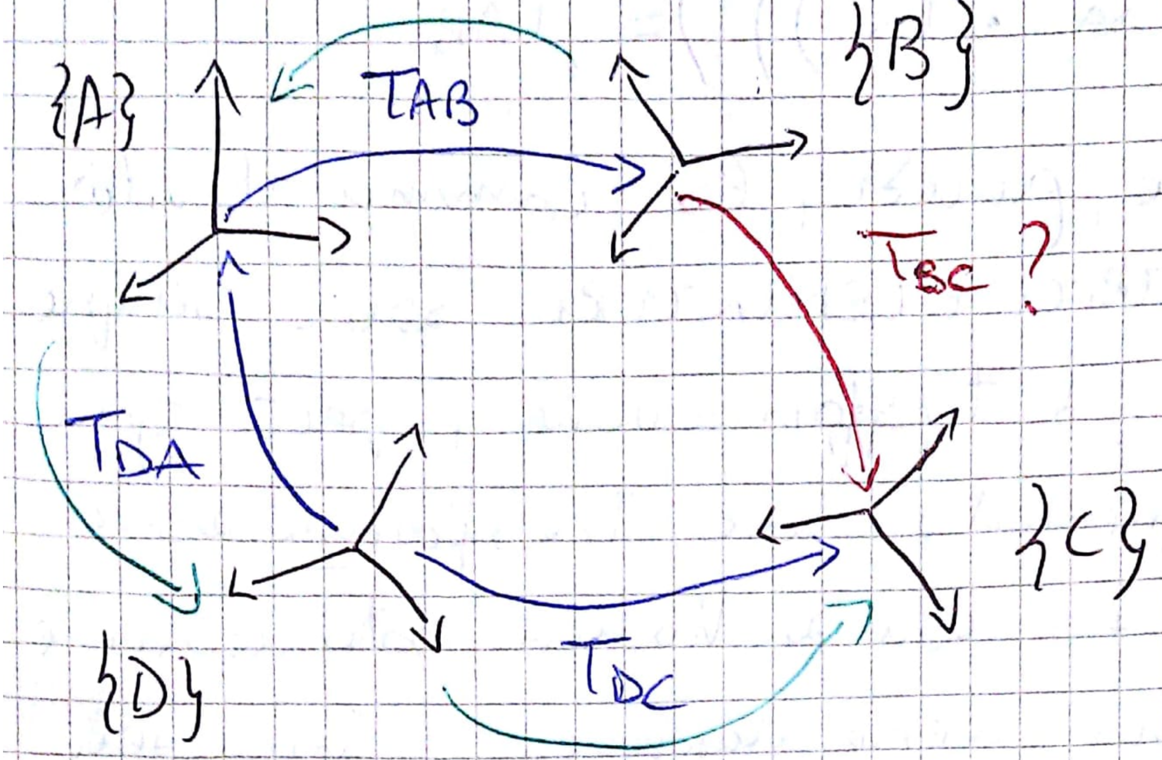
È la proprietà di CONCATENAZIONE
(moltiplicazione tra matrici)



posa di C rispetto ad A

si può seguire il verso della freccia

Concatenazione tra più sistemi di riferimento:



Si deve costruire un anello e seguire il verso delle frecce ed utilizzare concatenazione ed inversione; note le matrici T_{AB}, T_{DA} e T_{DC}, ad esempio:

$$\underline{T_{BC}} = T_{AB}^{-1} \, T_{DA}^{-1} \, T_{DC}$$

Si vuole calcolare matematicamente T_{AB}, cioè moltiplicando e post-moltiplicando dei termini, così:

$$T_{BC}\,(T_{DA}^{-1}\cdot T_{DC})^{-1} = T_{AB}^{-1}$$

$$\left(T_{BC}\cdot(T_{DA}^{-1}\cdot T_{DC})\right)^{-1} = T_{AB}$$

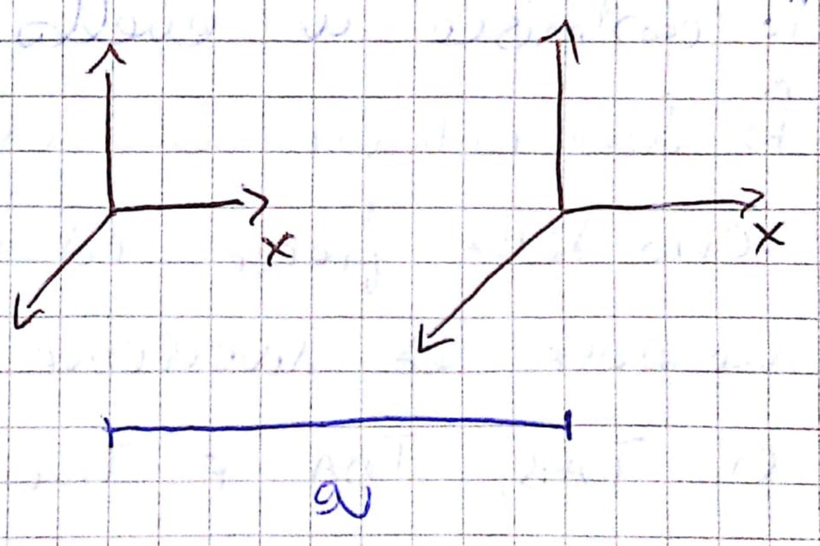
Non vale, quindi, la commutatività. Le MATRICI ELEMENTARI sono sempre matrici di trasformazione, però ognuna ne rappresenta una trasformazione elementare, non si hanno rotazioni e traslazioni messe insieme. Sono sei

Traslazione

$D_x(a)$

$D_y(b)$

$D_z(c)$

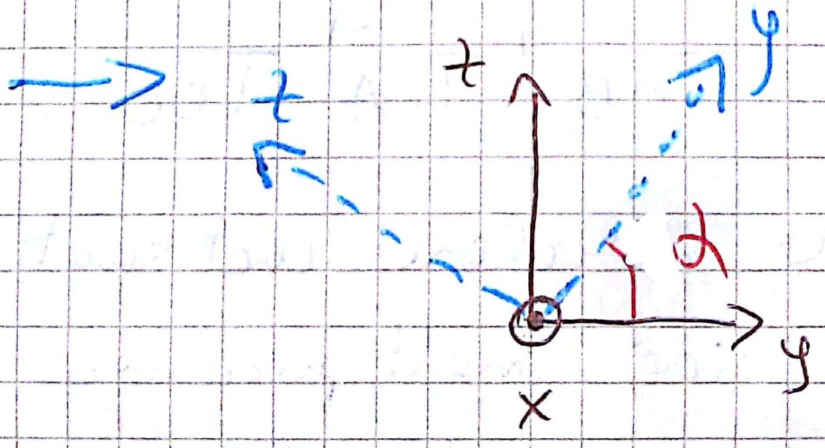


Rotazione

$R_x(\alpha)$

$R_y(\beta)$

$R_z(\gamma)$



Con la regola della mano destra si punta il pollice nell'asse in cui stiamo ruotando, la rotazione delle dita indica se positiva o negativa.

L'assenza di rotazioni significa che gli assi non mutano, perciò:

$$D_x(\alpha) = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix}$$

la sottomatrice è una matrice identità

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha & 0 \\ 0 & s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I colonna

orientazione del sistema tratteggiato rispetto a quello solido

II colonna

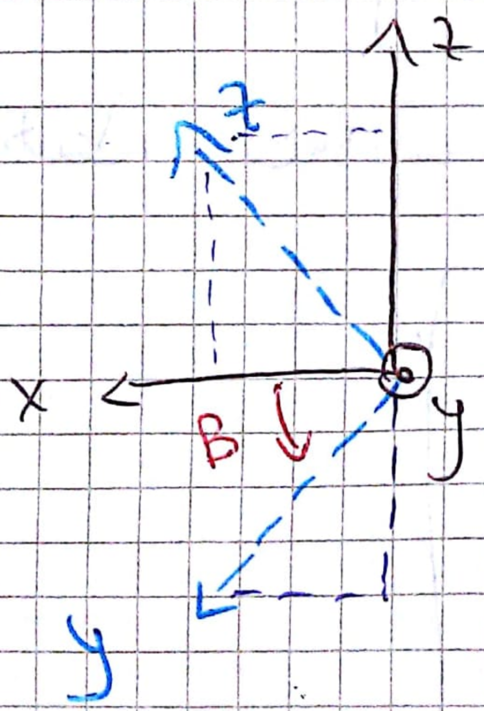
componenti del versore y trasformato lungo il sistema solido

III colonna

componenti del versore z, lungo il sistema solido

IV colonna : posizione

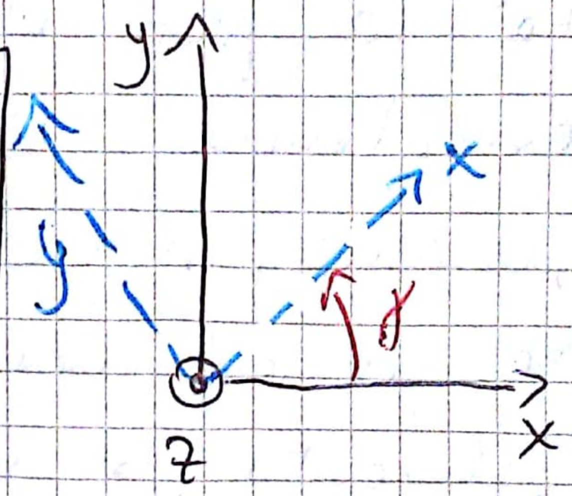
Conviene avere y, con la superficie di scrittura, uscente



$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

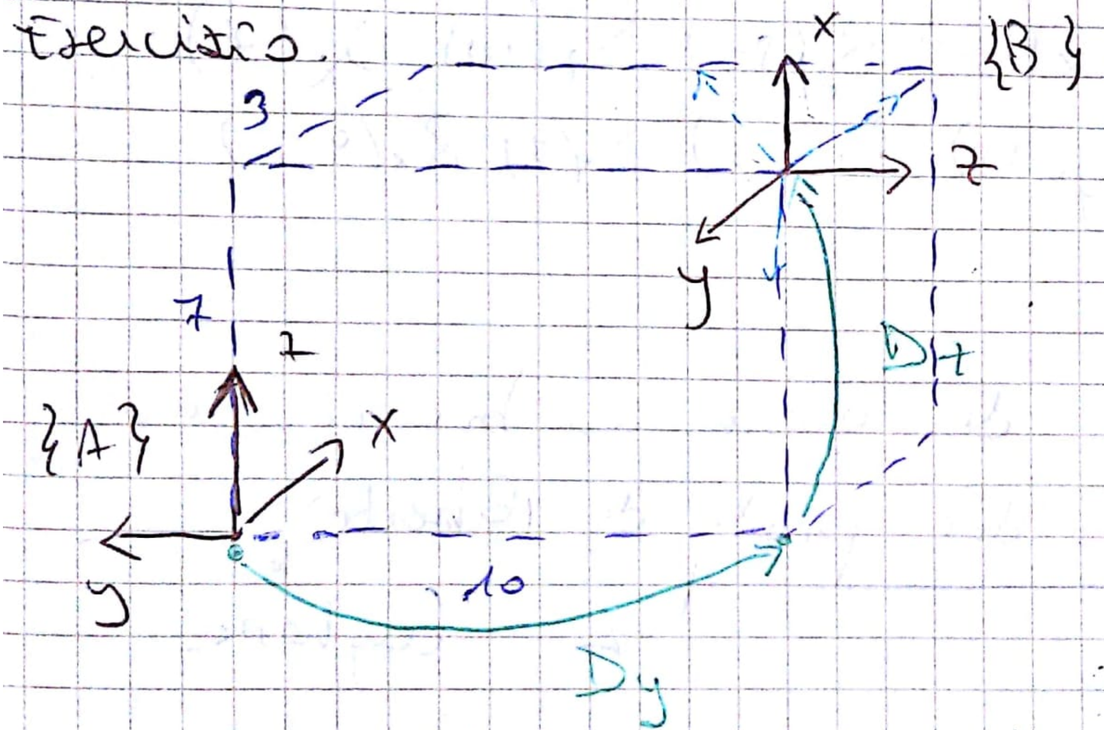
matrice 4x4 per la caratterizzazione anche se rotazione 3 x 3

$$R_z(\gamma) = \left[\begin{array}{ccc|c} c\gamma & -s\gamma & 0 & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$



Quindi la posa di un sistema di riferimento può essere rappresentato sfruttando la posa di matrici elementari.

Esercizio

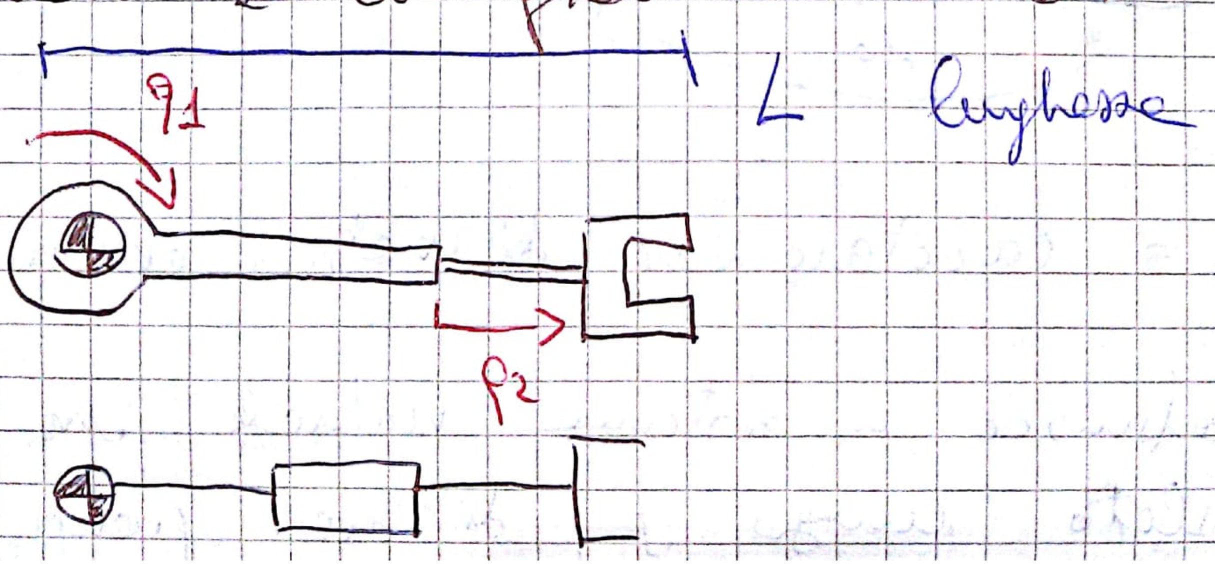


T_{AB} = concatenazione di matrici elementari

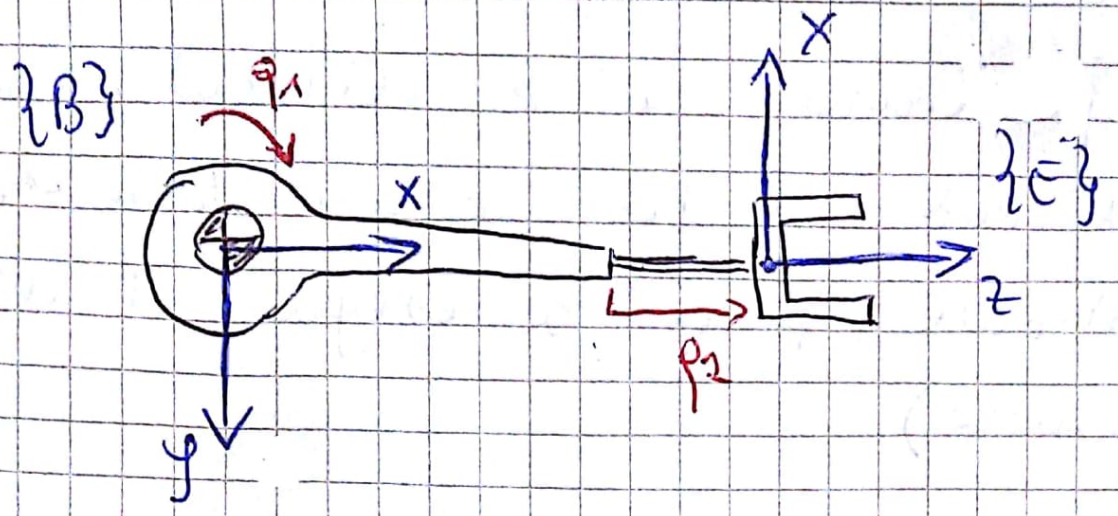
Si definisce un sistema virtuale che è traslato lungo y, di 10 quindi tà 10 fino al sistema che si vuole considerare. Dopo di che, dopo due traslazioni, si può eseguire una rotazione per allineare gli assi. (Se uno è allineato, se sono destrorsi, basta una sola rotazione).

$$T_{AB} = D_y(-10)\, D_z(7)\, R_x(90^\circ)\, R_z(90^\circ)$$
$$= \;\; '' \qquad '' \;\; R_y(-90^\circ)\, R_x(90^\circ)$$
$$= R_x(90^\circ)\, R_z(90^\circ)\, D_z(10)\, D_x(7)$$
$$= D_y(-10)\, R_y(90^\circ)\, D_x(7)\, R_x(90^\circ)$$

Si suppone di avere un braccio motorizzato a due gradi di libertà:



Per i sistemi seriali, il numero di attuatori coincide con il numero di giunti.



z è entrante

Si vuole calcolare la posa dell'end-effector (la pinza) rispetto alla base, in funzione degli angoli dei giunti

$$T_{BE}(\bar{q}) = \overbrace{\underbrace{R_z(-90°)}\, R_z(q_1)}^{R_z(-90°+q_1)}$$

* per allineare la x, si ruota su z

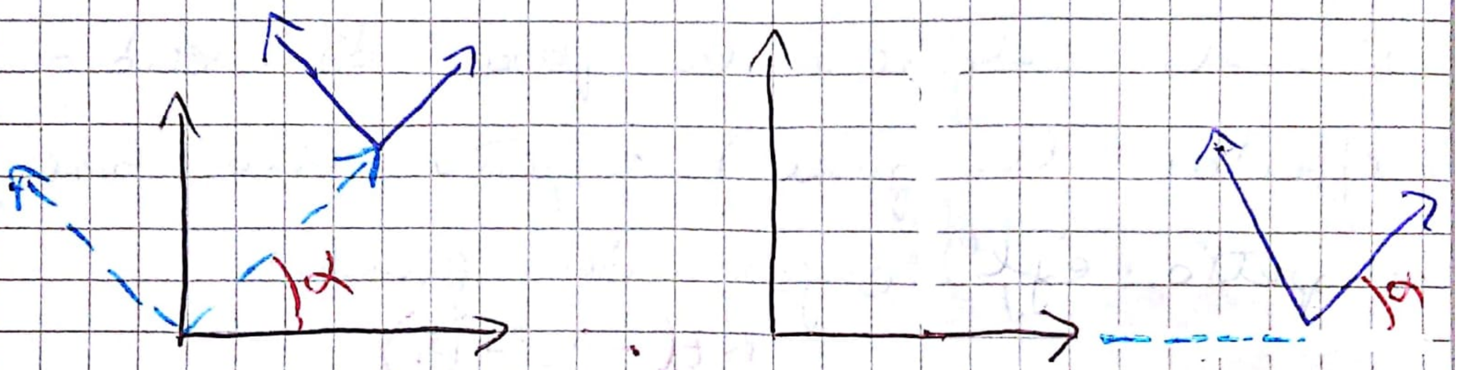
Configurazione zero: q_1 e q_2 pari a $\emptyset$

Dopo aver ruotato anche intorno al giunto, cioè intorno a q_1 si può traslare fino all'end-effector

$T_{BE}(p) = R_z(-90° + p_1)\, D_y(L + p_2)\, R_z(-90°)$

Dopo la traslazione si ha un sistema di riferimento che è allineato con quello dell'end-effector, se non fosse che t è entrante, perciò si esegue l'ultima rotazione)

$R_z \cdot D_x \neq D_x \cdot R_z$



I casi in cui la commutatività vale per queste matrici elementari sono quelli in cui c'è solo la traslazione, perché non si modifica l'orientamento degli assi. Altri casi sono quelli in cui ci si trova sullo stesso asse e si effettu??

tua una traslazione e poi una rota=
zione o viceversa, perché l'asse rimane lo
stesso e quindi l'ordine è indifferente.