Risposta forzata TC

$\dot{x} = Ax + Bu \,, \; x(0) = x_0$

$y = Cx + Du$

$W_{yu}(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$,

$w(t) = Ce^{At}B + D\,\delta(t)$

risposta impulsiva $\quad \mathcal{L}\{w(t)\} = W_{yu}(s)$

$$\begin{cases} x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau \\ y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau + Du(t) \end{cases}$$

Risposta forzata = risposta da condizioni iniziali nulle, per effetto dell'ingresso

$$y_f(t) = \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau + Du(t)$$

$$y_f(t) = \int_0^t \underbrace{w(t-\tau)}_{\text{risposta impulsiva}} u(\tau)\, d\tau \quad \Longleftrightarrow$$

$y_f(s) = W_{yu}(s)\,u(s)$

Procedure di calcolo:

1) $u(s) = \mathcal{L}(u(t))$

2) $y_f(s) = W_{yu}(s)\,u(s)$

3) $y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}(y_f(s))$

Risposte ai segnali modali

$u(t) = U e^{\lambda t}$, $U \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \iff \lambda = 0,\ u = 1$$

$$\text{rampa} = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Si calcola la risposta del segnale modale $u(t)$:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Si applica la trasformata di Laplace:

$$x(s) = (sI-A)^{-1} + (sI-A)^{-1}Bu(s), \quad s \in \mathbb{C}$$

$$y(s) = C(sI-A)^{-1}x_0 + [C(sI-A)^{-1}B + D]$$

dove $W_{xu}(s) = (sI-A)^{-1}B$ e

$$W_{yu}(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$$

Si ricordi che $\mathcal{L}(ue^{\lambda t}) = \dfrac{u}{s-\lambda}$

Lemma tecnico

$$\lambda \notin sp(A) \Rightarrow (sI-A)^{-1}\frac{1}{s-\lambda} =$$

$$= (\lambda I-A)^{-1}\frac{1}{s-\lambda} - (sI-A)^{-1}(sI-A)^{-1}(\lambda I-A)^{-1}$$

$$x(s) = (sI-A)^{-1}x_0 + \left[(sI-A)^{-1}\frac{1}{s-\lambda}\right]Bu =$$

$$= (sI-A)^{-1}x_0 + (\lambda I-A)^{-1}B\frac{u}{s-\lambda} - (sI-A)^{-1}(\lambda I-A)^{-1}Bu$$

$$= (sI-A)^{-1}[x_0 - (\lambda I-A)^{-1}Bu] + (\lambda I-A)^{-1}Bu/s-\lambda$$

$$y(z) = C(\lambda I - A)^{-1}x_0 + C\left[\frac{(zI-A)^{-1}}{z-\lambda}\right]Bu + \frac{Du}{z-\lambda} =$$

$$= C(zI-A)^{-1}x_0 + C\left[(\lambda I - A)^{-1}\frac{1}{z-\lambda} - (zI-A)^{-1} \cdot (\lambda I - A)^{-1}\right]Bu + \frac{Du}{z-\lambda}$$

Allora, si ottiene:

vettore costante

$$x(z) = (zI-A)^{-1}[x_0 - (\lambda I - A)^{-1}\underbrace{Bu}] + (\lambda I - A)^{-1}\frac{Bu}{z-\lambda}$$

$$y(z) = C(zI-A)^{-1}[x_0 - (\lambda I - A)^{-1}Bu] + [C(\lambda I - A)^{-1}B + D]\frac{u}{z-\lambda}$$

Dove:

$$(\lambda I - A)^{-1}B = N_{xu}(z)\Big|_{z=\lambda}$$

Scanned by CamScanner

$$C(\lambda I - A)^{-1}B + D = W_{yu}(s)\Big|_{s=\lambda}$$

Quindi:

$$x(t) = e^{At}(x_0 - x_f) + W_{xu}(\lambda)\, u\, e^{\lambda t}$$

$$y(t) = Ce^{At}(x_0 - x_f) + W_{yu}(\lambda)\, u\, e^{\lambda t}$$

con $x_f = (\lambda I - A)^{-1} B u$, $u \in \mathbb{R}^m$

In conclusione:

$$y_f(t) = \underbrace{-Ce^{At} x_f}_{\text{risposta in regime transitorio}} + \underbrace{W_{yu}(\lambda)\, u\, e^{\lambda t}}_{\text{risposta in regime permanente, } u \neq 0 \text{ in permanenza}}$$

Risposta al gradino

$u = 1$, $\lambda = 0$

$x_f = -A^{-1}B$ (A non deve avere autovalori in zero)

Tutto questo ha senso se il sistema è asintoticamente stabile (se così non fosse la risposta andrebbe ad infinito)

$y(t) = C e^{At}[x_0 - x_f] + W_{yu}(0) \cdot \eta(t)$

$x(t) = e^{At}[x_0 - x_f] + W_{xu}(0) \cdot \eta(t)$

$W_{yu}(0)$ = guadagno in continua del sistema.

Sotto l'ipotesi di stabilità la parte transitoria tende a zero. Quindi:
se il sistema è stabile:

$C e^{At}[x_0 - x_f] \to 0$ per $t \to \infty$

$y(t) \to W_{yu}(0) \cdot 1$

$y(t) \to W_{yu}(0) \cdot u$ se $u \neq 1$

$W_{yu}(0) \triangleq \frac{Y}{U}$ guadagno in continua costante quindi modello d'equilibrio, è un modello statico del sistema.

Esempio:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\alpha x + bu \\ y = x \end{cases} , \quad \alpha, b > 0 \quad x_0$$

$u(t) = \eta(t)$, $U = 1$, $\lambda = 0$

$W_{yu}(s) = \dfrac{b}{s+\alpha}$ $\qquad W_{yu}(0) = \dfrac{b}{\alpha}$

$x_f = \dfrac{b}{\alpha}$ $\qquad \left.\dfrac{b}{s+\alpha}\right|_{s=0} = \left.(sI-A)^{-1}Bu\right|_{s=0} = x_f$

$$y(t) = e^{-\alpha t}\left[x_0 - \frac{b}{\alpha}\right] + \frac{b}{\alpha} \cdot 1$$

Scanned by CamScanner

Risposta in frequenza

$u(t) = U \operatorname{sen}(\omega t)$

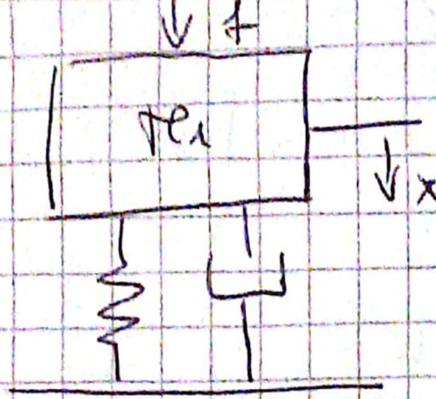
$$u(t) = \frac{U e^{J\omega t} - U e^{-J\omega t}}{2J} = \operatorname{Im}(U e^{J\omega t})$$

$$U e^{J\omega t} = U \cos(\omega t) + J U \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$U e^{-J\omega t} = U \cos(\omega t) - J U \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$\frac{U e^{J\omega t} - U e^{-J\omega t}}{2J} = \frac{2J}{2J} U \operatorname{sen}(\omega t)$$

Progettazione di Assorbitore Dinamico



$$M\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = f$$

$$y = b\dot{x} + Kx$$

$$f = F \sin(\omega t)$$

Il fenomeno di risonanza è legato all'instabilità del sistema

$$\mathcal{L}(M\ddot{x} + b\dot{x} + Kx) = \mathcal{L}(f) \Rightarrow$$

$$M s\, x(s) + b s\, x(s) + K x(s) = f(s)$$

$$y(s) = b s\, x(s) + K x(s) =$$

$$= (bs + K)\, x(s)$$

$$x(s) = \frac{1}{Ms^2 + bs + K} f(s)$$

$$W_{yu}(s) = \frac{bs + K}{Ms^2 + bs + K}$$

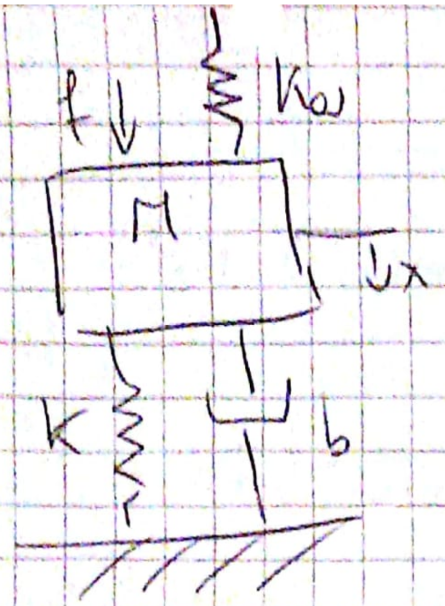
$$\left|W_{yu}(s)\right|_{s=j\omega} = \left|\frac{bs+k}{Ms^2+bs+k}\right|_{s=j\omega}$$

$$\left|W_{yu}(j\omega)\right| = \frac{|bj\omega+k|}{|M(j\omega)^2+bj\omega+k|} =$$

$$= \frac{\sqrt{k^2+b^2\omega}}{\sqrt{(k-M\omega^2)^2+b^2\omega^2}}$$

$$\left|W_{yu}(j\omega)\right|_{b=0} = \frac{k}{|(k-M\omega^2)|}$$

questo guadagno va ad infinito quando il denominatore è zero, quindi per $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$ si ha una pulsazione critica, che annulla il denominatore



eccitatore dinamico, $\downarrow z$ con massa m per ridurre le oscillazioni (dovute alla risonanza)

$$m\ddot{z} + K_a(z - x) = 0$$

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + K\dot{x} + K_a(x - z) = f$$

$$y = b\dot{x} + kx$$

è il nuovo modello

$$W_{yu}(s) = \frac{(Ms^2 + K_a)(bs + k)}{(Ms^2 + bs + k + K_a)(ms^2 + K_a) - K_a^2}$$

$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{K}{M}}$ frequenza critica

Si calcola il modulo di $W_{yu}(s)$ per $s = j\omega$ e si ottiene, per $b = 0$:

$$\frac{|(k_e - m\omega^2)k|}{|(k+k_e - M\omega^2)(k_e - m\omega^2) - k_e^2|}$$

Si vuole che $|(k_e - m\bar{\omega}^2)| = 0$
cioè che il guadagno sia nullo, la forza in uscita è zero

Si deve scegliere $\bar{\omega} = \sqrt{\frac{k_e}{M}}$

$$\frac{k_e}{m} = \frac{k}{M}$$

Si ha un altro grado di libertà, sulla scelta di m e k_e
Si sceglie così l'ampiezza delle vibrazioni (di quanto si sposta la molla per consumare l'energia del sistema)

Quindi si definisce una nuova uscita

$y = z - x \quad , \quad z - x = W_{z-x,f}(s)\, f$

$$W_{z-x,f}(s)\Big|_{b=0} = \frac{ms^2}{(Ms^2+K+Ke)(ms^2+Ke)-Ke^2}$$

$$\left|W_{z-x,f}(j\omega)\right|_{\omega=\bar{\omega}} = \frac{|m\bar{\omega}^2|}{|-Ke^2|} =$$

$$= \frac{\cancel{m}\,\frac{Ke}{\cancel{m}}}{Ke^2} = \frac{1}{Ke} \quad \grave{e}$$

l'ampiezza massima