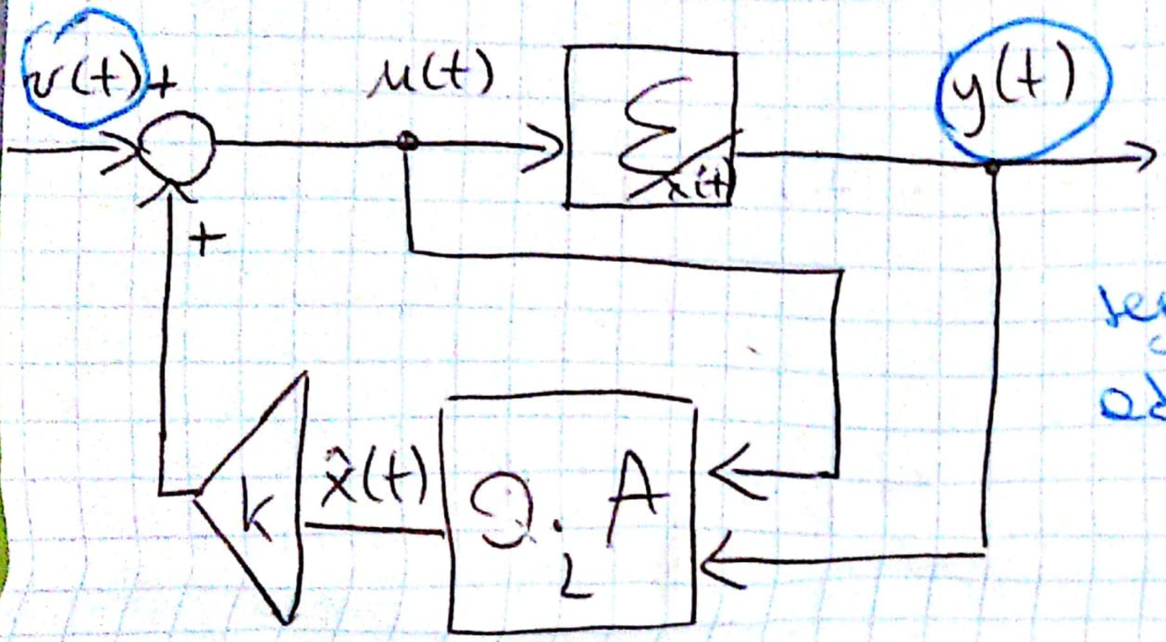
TDS LEZIONE 25 19-12-18

Compensatore Dinamico

Realizza la retroazione dinamica dell'uscita



segnali esogeni ad anello chiuso

In questo loop di controllo, al posto di x, si usa la stima di questa, cioè $\hat{x}(t)$

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$u(t) = K\,\hat{x}(t) + v(t)$$

$$\text{O.A.}\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B\overbrace{u(t)}^{(K\hat{x}+v)} + L\left(\hat{y}(t) - y(t)\right), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + \underbrace{Du(t)}_{(K\hat{x}+v)} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A & BK \\ \hline -LC & A+BK+LC \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} B \\ \hline B \end{array}\right] v(t)$$

$$y(t) = \left[\begin{array}{c;{2pt/2pt}c} C & DK \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \left[D\right] v(t)$$

$$\Sigma_{cl}\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\hat{x} + Bv \\ y = Cx + DK\hat{x} + Dv \end{cases}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BK\hat{x} + Bv + L\hat{y} - Ly$$
$$\hat{y} = C\hat{x} + DK\hat{x} + Dv$$

$$\dot{\hat{x}} = (A + BK + LC)\hat{x} - LCx + Bv$$

Si vuole studiare il sistema in questa base $z = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$, con $e = x - \hat{x}$ l'errore di inseguimento

$$\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline I & -I \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix}$$

Si considera che:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c:c} A & BK \\ -LC & (A+BK+LC \end{array}\right] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A+LC \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ \hline B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ \hline 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & BK \\ A+LC & BK + \underbrace{(A+BK+LC}_{-(A+LC)} \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C & DK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C+DK & -DK \end{bmatrix}$$

$$\bar{D} = D$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} (A+BK) & -BK \\ \hline 0 & A+LC \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C+DK & -DK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hline e \end{bmatrix} + [D]\, v(t)$$

E' il sistema ad anello chiuso

Questo dipende da K e da L, i cui valori, rispettivamente dipendenti da K e da L, sono separati gli uni dagli altri

1) Stabilità Asintotica

Si ottiene se:

si determina K t.c. sp(A+BK) ha tutti gli autovalori asintoticamente stabili e L t.c. sp(A+LC) ha tutti gli autovalori as. stabili

In particolare, $\forall\ P_K(\lambda), P_L(\lambda)$ polinomi di grado n arbitrari, devo risolvere due problemi separati (uno di retroazione stabili ed uno di sintesi di regolazione asintotica. Quindi il progetto del compensatore si separa in due sotto-problemi → vale il principio di separazione nella sintesi del compensatore dinamico)

$$\exists\ K \text{ t.c. } \det(\lambda I - (A+BK)) = P_K(\lambda)$$

$$\exists\ L \text{ t.c. } \det(\lambda I - (A+LC)) = P_L(\lambda)$$

Si può fare se (A, B, C) è completamente raggiungibile e osservabile

2)

$\dot{x} = (A+BK)x + BKe + Bv, \quad x(0) = x_0$

$\dot{e} = (A+LC)e, \quad e(0)$ l'evoluzione di e non dipende da $v(t)$

Principio di separazione

3) $W_{yr}(\lambda) = [C+DK \quad -DK] \cdot$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} (\lambda I-(A+BK)) & BK \\ \hline 0 & (\lambda I-(A+LC)) \end{array}\right]}\left[\begin{array}{c} B \\ \hline 0 \end{array}\right] + D$$

L'inversa di questa matrice regolare a blocchi è la seguente

$$\left[\begin{array}{c|c} (\lambda I-(A+BK))^{-1} & BK^{*} \\ \hline 0 & (\lambda I-(A+LC))^{-1} \end{array}\right]$$

→ diversa da prima, non è di interesse la sua forma

Riscrivendo, allora, si ottiene:

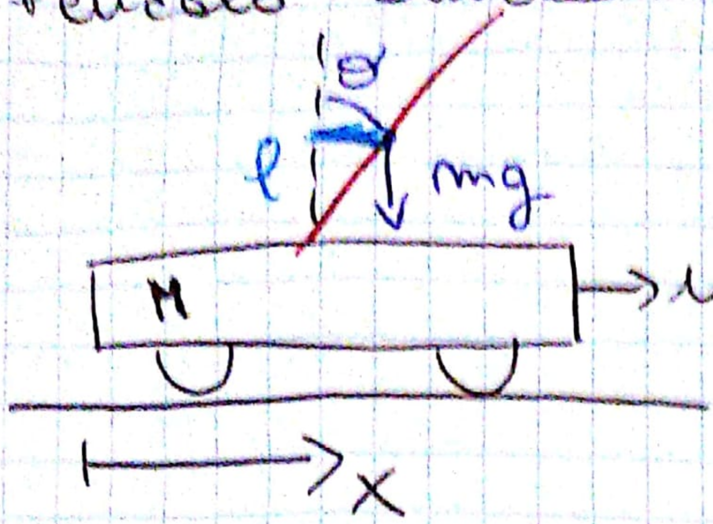
$$= \begin{bmatrix} C+DK & -DK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\lambda I-(A+BK))^{-1} B \\ 0 \end{bmatrix} + D =$$

$$= (C+DK)(\lambda I-(A+BK))^{-1}B + D$$

la parte non raggiungibile si cancella

Il sistema si comporta come se si fosse fatta una retroazione statica dello stato

Pendolo Inverso



masse $M \gg m$

carrello

pendolo

sensore su θ

Si considerano gli accoppiamenti come trascurabili

$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

L lunghezza dell'asta

$$l = \frac{L}{2}$$

$$(J + ml^2)\ddot{\theta} - mgl \operatorname{sen}\theta + ml\underset{u/M}{\ddot{x}} \cos\theta = 0$$

J momento di inerzia dell'asta rispetto all'asse ortogonale

Quando le due masse sono molto diverse, si possono studiare i due sistemi come separati, perché la massa dell'uno non condiziona l'altro.

$$M\dot{x} = u \Rightarrow \ddot{x} = \frac{u}{M}$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vartheta \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = \dfrac{-g m l}{(J + m l^2)} \operatorname{sen} z_1 - \dfrac{m l \cos z_1}{M(J + m l^2)} u \end{cases}$$

Si è eliminato il moto del carrello nella sua forma esplicita
Si è ottenuta una rappresentazione di stato, però non lineare

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(z, u) \\ f_2(z, u) \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0,\, u=0}$$

$$B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x=0,\, u=0}$$

Quindi:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{gm\ell}{J+m\ell^2} & 0 \end{bmatrix}_{*} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{-m\ell}{r\ell(J+m\ell^2)} \end{bmatrix}$$

Quindi il modello linearizzato è il seguente:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx \,, \quad C = [1 \;\; 0] \,, \quad D = 0$$

Il sensore non dipende da u

$* \; x_1 = 0,\; x_2 = 0,\; u = 0$

$$u = Ky = KCz$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{z} = A + BKCz$$

Dove:

$$A+BKC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{mgl}{(J+ml^2)} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{-ml}{M(J+ml^2)} \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} k & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{mgl(1-k)}{M(J+ml^2)} & 0 \end{bmatrix}$$

Si usa un compensatore dinamico perché quello statico non funziona

Ora si vede se è possibile costruirlo o meno:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$= gml^2/(J+ml^2)$

Il sistema è completamente osservabile e raggiungibile

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$$ matrice di raggiungibilità a rango pieno

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ matrice di osservabilità a rango pieno

(Se così non fosse, allora il modello descritto non sarebbe minimale)

Si procede con la sintesi

Si vuole costruire un osservatore in modo che l'errore di ricostruzione scenda $e(t) = e^{-\alpha t} \, \tilde{x}(0)$

$$P_L(\lambda) = (\lambda+\alpha)^2$$

$$\det(\lambda I - (A+LC)) = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \alpha^2$$

$$\det\left[\lambda I - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} l_2 \\ l_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} l_2 & 0 \\ l_1 & 0 \end{bmatrix}}\right)\right] =$$

$$= \det\begin{bmatrix} \lambda - l_2 & -1 \\ -\alpha - l_1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - l_2) - (\alpha + l_1) =$$

$$= \lambda^2 - l_2\lambda - (\alpha + l_1) = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \alpha^2$$

Allora $-l_2 = 2\alpha \Rightarrow l_2 = -2\alpha$

$+l_1 = -\alpha^2 \Rightarrow l_1 = -\alpha^2$

Allora:

$$l_1 = \frac{gm\ell}{(J + m\ell^2)} - \alpha^2$$

$$l_2 = -2\alpha$$

l'errore va a zero con una velocità pari a $e(t) = e^{-\alpha t} \, \tilde{x}(0)$

$\Rightarrow$ scegliamo:

$$P_L(\lambda) = (\lambda + \alpha)^2$$

$$P_K(\lambda) = (\lambda + \beta_1)(\lambda + \beta_2) =$$

$$= \lambda^2 + (\beta_1 + \beta_2)\lambda + \beta_1\beta_2$$

$$\det(\lambda I - (A + BK)) = \det\left[\lambda I - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_2 & K_1 \end{bmatrix}\right)\right]$$

$$= \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -\alpha - \gamma k_1 & \lambda - \gamma k_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda(\lambda - \gamma k_1) - (\alpha + \gamma k_2) =$$

$$= \lambda^2 - \gamma k_1 \lambda - (\alpha + \gamma k_2) \Longrightarrow$$

$$\beta_1 + \beta_2 = \frac{m\ell}{r(J + m\ell^2)} k_1$$

$$\beta_1 \beta_2 = -\left(\frac{g m \ell}{(J + m\ell^2)} - \frac{m\ell}{r(J + m\ell^2)} k_2 \right)$$

Si prendono k_1, k_2, β_1 e β_2 e si costruisce

Progetto: 1 settimana prima dell'[illegible]

Modellistica, Analisi (→ linearizzazione), Calcolo delle risposte con grafici, sintesi → Retroazione statica dello stato, (compensatore asintotico o dinamico)