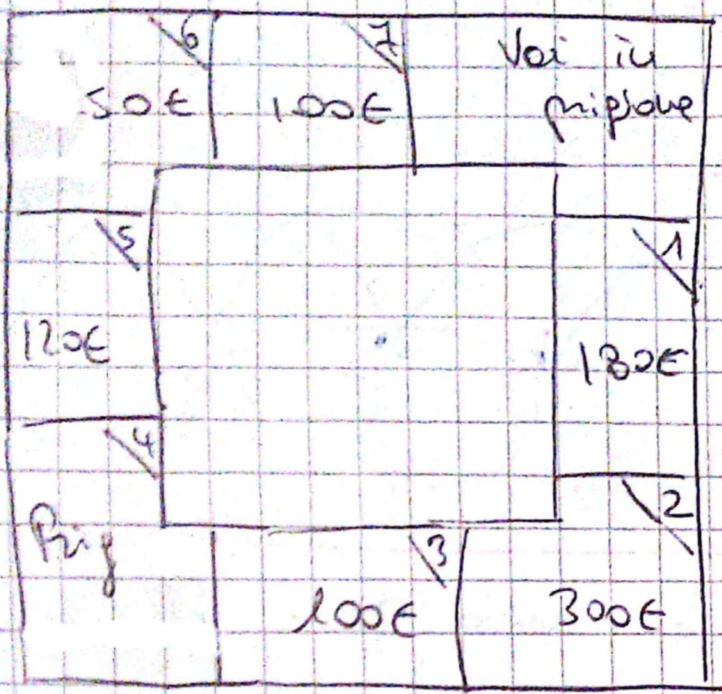
TDS LEZIONE 14 13-11-19

Autovalore / autovettore dominante

TD $|\lambda_1| > |\lambda_2| \dots > |\lambda_n|$

Monopoli (semplificato)



Dato $\{1,2\}$

δ_K

x_K^i probabilità di stare nella casella i @ K

$i = \{1, \dots, 7\}$

$$\sum_{i=1}^{7} x_K^i = 1, \quad \forall K$$

Catene di Markov

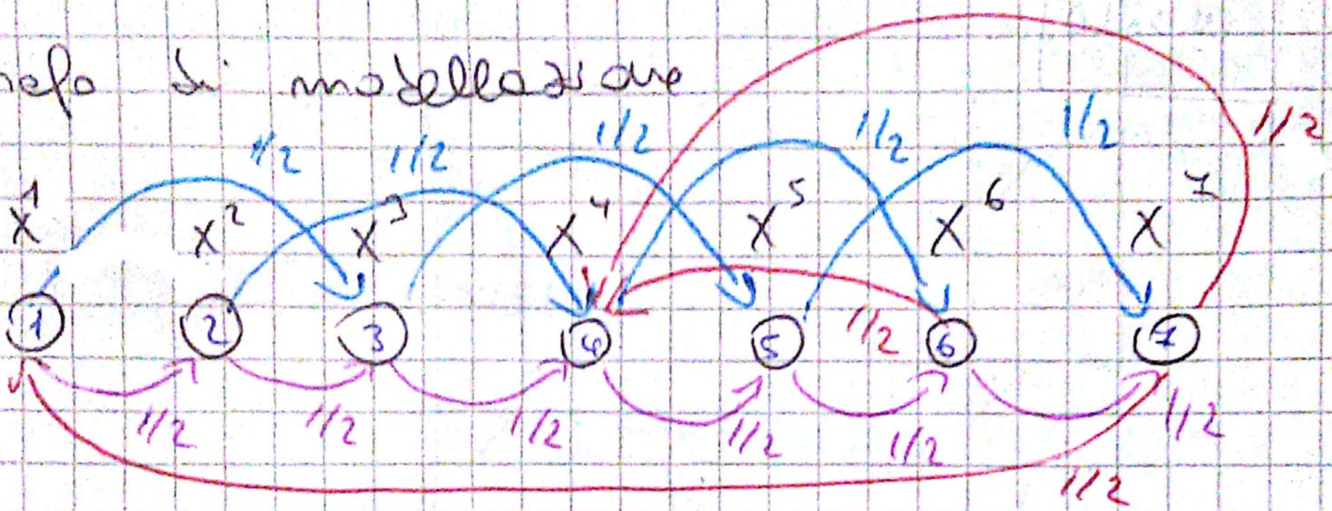
esempio sistema positivo (TD)

$$x_k = \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \\ \vdots \\ x_k^7 \end{bmatrix} \qquad x_{k+1} = f(x_k, \delta_k)$$

non dipende da

$x_{k-1}, x_{k-2}, \dots x_0$

Grafo di modellazione



Il passaggio da uno stato al successivo dipende dal lancio del dado

Se si volesse scrivere l'evoluzione della catena:

$$\begin{bmatrix} x^1_{k+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ x^7_{k+7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1_k \\ \vdots \\ \vdots \\ x^7_k \end{bmatrix} \Bigg| \begin{bmatrix} x^1_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ x^7_0 \end{bmatrix}$$

* La matrice si calcola a partire dal grafo di influenza

Per $x_K \xrightarrow[K\infty]{} x^\infty$ K che va ad infinito

$$x^\infty = \begin{bmatrix} x^1_\infty \\ \vdots \\ x^7_\infty \end{bmatrix}$$ è l'autovettore dominante del sistema

In certe condizioni, l'autovettore dominante esiste, è unico ed è positivo, così come l'autovalore dominante

La matrice è chiamata MATRICE *(A) STOCASTICA

In realtà nelle catene di Markov si lavora con i vettori riga. $x_H^T = x_K^T \cdot A$

Una matrice che ha tutti gli elementi >0 è detta positiva e TD.

Somma di colonne pari ad 1

$z_k^1 = (w_1^T x_0) 1^k v_1 = z_0^1 v_1 \quad \forall k$

$z_0^1 = x_0^1 + x_0^2 + \dots x_0^n = w_1^T x_0$

la somma delle componenti di x si conserva, cioè se all'istante iniziale la somma delle probabilità valeva uno, allora continuerà a valere uno.

Teorema (Perron - Frobenius)

Sia $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $a_{ij} \geq 0$ e se $\rho = \max_i |\lambda_i|$ (raggio spettrale di A)

1) $\exists$ un autovalore di A t.c. $\lambda = \rho$ ($\exists \lambda > 0, \lambda \in \mathbb{R}$)

2) $\exists$ un autovettore di A con componenti non negative associato a λ

3) Se la matrice A è "irriducibile" allora $\lambda > 0$, $v > 0$ e (λ, v) sono unici

Definizione:
Una matrice positiva si dice "RIDUCIBILE" se $\exists$ una trasformazione di stato T tale che $T^{-1}AT = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline \emptyset & A_{22} \end{array}\right]$

dove A_{11}, A_{22} quadrate

$x = Tz$

$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \hline z_2 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} z_{1\,k+1} \\ z_{2\,k+1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline & A_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} z_{1k} \\ z_{2k} \end{bmatrix} =$

Questo vuol dire che il grafo non è connesso (non esiste un percorso che consente di passare da uno stato a tutti gli altri)

Il sistema è riducibile se il grafo di influenza non è connesso

Il sistema è irriducibile se il grafo di influenza è connesso

$$= \begin{cases} z_{1\,k+1} = A_{11} z_{1k} + A_{12} z_{2k} \\ z_{2\,k+1} = A_{22} z_{2k} \end{cases}$$

Da z_1 non si può arrivare a z_2 (non si influenzano a vicenda gli stati)

Nell'esempio del monopoli, il grafo è connesso, esiste un cammino di lunghezza finita (n nodi → mezzi $=$ mo n passi) che permette di arrivare a un nodo, partendo da qualsiasi altro)

Scanned by CamScanner

Test:

Un sistema positivo è "irriducibile" se il suo grafo di influenza è connesso. Cioè da ogni stato si può arrivare in qualsiasi altro stato con un cammino di al più "n" passi.

Sia $A^{\#} = [a^{\#}_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$a^{\#}_{ij} = \begin{cases} 1 & a_{ij} > 0 \\ 0 & a_{ij} = 0 \end{cases}$$

$A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $a_{ij} \geq 0$

$A^{\#}$ ricavato da A

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0.3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{\#} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A irriducibile $\iff$

$$I + A^{\#} + A^{\#2} \ldots A^{\# n-1} \gg 0$$

Monopoli

$$\lambda_F = 1, \quad v_F = \begin{bmatrix} 0.03 \\ 0.045 \\ 0.068 \\ 0.25 \\ 0.1581 \\ 0.2045 \\ 0.18 \end{bmatrix}$$

autovalore dominante

autovettore dominante

si fa la somma e si divide ogni componente per la somma

normalizzato, la somma farà 1

$$\lambda = \{1;\ 0.17 \pm j\,0.58;\ -0.5 \pm j\,0.5;\ \dots\}$$

$$x_k \simeq (w_1^T x_0)\, \lambda_F^k\, v_F \qquad \alpha \qquad v_F$$

x_1 3% (130€) ③, x_2 4.5% (300€) ④, x_3 6.8% (100€) ⑥, x_4 25% prigione

x_5 15.81% ① 120€, x_6 20.45% ⑤ 50€, x_7 18% ⑦ 100€ ← rendite

ordine in cui conviene comprare le caselle in base al ranking

Riferimenti:

- L. Farina, S. Rinaldi - Città Studi
  "I sistemi positivi: Teoria ed Applicazioni"
- Luenberger, Wiley New York, 1979
  "Introduction to Dynamical Systems ..."