TDS LEZIONE 12 07-11-18

Risposta libera LTI

$\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$ $(u(t)=0)$

$y(t) = Cx(t)$

$$\begin{cases} x(t) = e^{At} x_0 \\ y(t) = C e^{At} x_0 \end{cases}$$

Caso I : Autovalori di A reali e distinti

Siano $\lambda_1, \lambda_2 .. \lambda_n \in \mathbb{R}$ autovalori di A e

$v_1, v_2 ... v_n \in \mathbb{R}^n$ autovettori destri

associati ai precedenti autovalori

Se $\Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ $Av_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, 2, ... n$

$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$A = T \Delta T^{-1}$ invertibile

$T^{-1} = \begin{bmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile

$w_1, w_2, ..., w_n \in \mathbb{R}^n$

linearmente indipendenti

Si dimostra che $w_1, w_2, ... w_n$ sono gli

autovettori sinistri di A associati agli autovalori di $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ cioè $A^T w_i = \lambda_i w_i$
$\iff w_i^T A = \lambda_i w_i^T$, $i = 1, 2, \dots n$

Proprietà di ortogonalità degli autovettori destri e sinistri

$$w_i^T v_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$x(t) = e^{(T\Delta T^{-1})t} x_0 = T e^{\Delta t} T^{-1} x_0 =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}_{e^{\Delta t}} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}}_{x(0)}$$

$$e^{(T\Delta T^{-1})t} = T e^{\Delta t} T^{-1}$$ prodotti

$$e^{(T\Delta T^{-1})t} = \sum_{k=0}^{\infty} (T\Delta T^{-1})^k \frac{t^k}{k!} = T\left(\sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k \frac{t^k}{k!}\right) T^{-1}$$

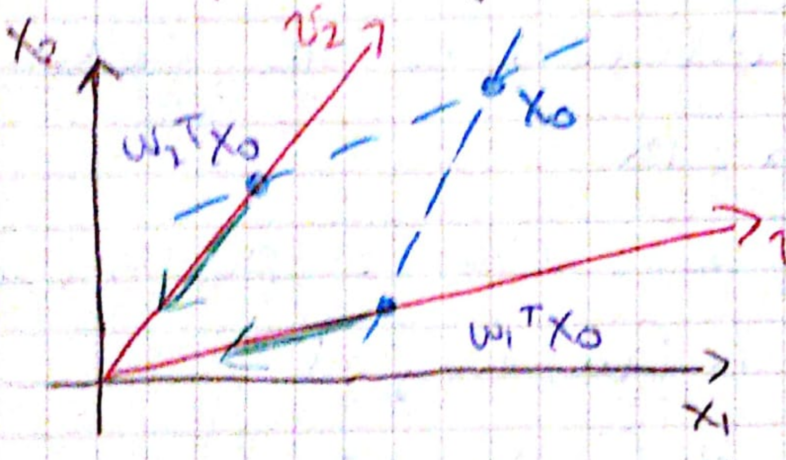
Quindi, svolgendo i prodotti tra matrici, si ottiene:

Scanned by CamScanner

$x(t) = w_1^T x_0 e^{\lambda_1 t} v_1 + w_2^T x_0 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + w_n^T x_0 e^{\lambda_n t} v_n$ vettori

è la forma in cui si può scrivere lo stato nelle sue componenti

1) L'evoluzione libera dello stato può essere visto come la somma vettoriale di n evoluzioni elementari che avvengono lungo le direzioni definite dagli autovettori destri



Il moto in cui x_0 va a zero dipende dalla velocità dei due moti elementari $w_2^T x_0$ e $w_1^T x_0$ lungo le due direzioni (quelle lungo cui si decompone il moto)
aspetto geometrico

2) L'evoluzione temporale dei moti elementari è definita solo dagli autovalori di A
$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t} \dots e^{\lambda_n t}$

le funzioni $e^{\lambda_i t}$ sono dette modi di evoluzione del sistema

3) L'effetto delle condizioni iniziali sulla risposta dipende dagli autovettori sinistri. In particolare entrano in gioco le proprietà di ortogonalità tra gli autovettori destri e sinistri

Si suppone x_0 allineato con v_1, allora $x_0 = \alpha v_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Le conseguenze sono che si può scrivere

* $w_1^T x_0$ come $\alpha (w_1^T v_1) = 1$,

$w_2^T x_0$ come $\alpha (w_2^T v_2) = 0$ ...

$w_n^T x_0$ come $\alpha (w_n^T v_n) = 0$

Quindi il moto avviene soltanto lungo una direzione *

$$x(t) = z_1(t) v_1 + z_2(t) v_2 + \ldots + z_n(t) v_n$$

$$\begin{cases} z_i(t) = (w_i^T x_0)\, e^{\lambda_i t} \\ z_i(0) = w_i^T x_0 \end{cases}$$

autospazio i-esimo del sistema

$$\Downarrow$$

$$\boxed{z_i(t) = w_i^T x(t)}$$

$$\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix} = T^{-1}\, x(t)$$

$$z_i(t) = z_i(0), \ \forall t$$

La quantità di poltrone che si conserva nel sistema viene fuori da un autovalore che è proprio uguale a zero.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_i = 1/2, 2, 2$

si vede se la matrice è diagonalizzabile

$$(2I - A) = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 0,\ y \text{ arbitrario},\ z \text{ arbitrario}$$

$$v_2 \in \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ autovettori destri

span: tutte le combinazioni lineare definite da vettori (sono una base)

In questo caso la molteplicità geometrica è 2, perchè la base ha due componenti

$$\frac{1}{2}I - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3/2 & 0 \\ -3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si ottengono due equazioni:

$$3x - \frac{3}{2}y = 0 \implies y = 2x$$ con x fissato

$$-\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}z = 0 \implies z = -x$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Delta = \begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{bmatrix} \qquad x(t) = \sum_{i=1}^{n} (w_i^T x_0)\, e^{\lambda_i t}\, v_i$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{bmatrix} \right) e^{\frac{1}{2}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{bmatrix} \right) e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{bmatrix} \right) e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$x(t) = \underbrace{x_{01}}_{\cancel{\emptyset}\ \emptyset}\, e^{\frac{1}{2}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \underbrace{(-2x_{01} + x_{02})}_{\cancel{\alpha}\ \emptyset}\, e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \underbrace{(x_{01} + x_{03})}_{\cancel{\times}\ \cancel{\emptyset}\ \alpha}\, e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

n modi per una matrice A di dimensione n

$x_1(t) = x_{01} e^{1/2 t}$

$x_2(t) = 2x_{01} e^{1/2 t} + (-2x_{01} + x_{02}) e^{2t}$

$x_3(t) = -x_{01} e^{1/2 t} + (x_{01} + x_{03}) e^{2t}$

Ecco gli autospazi:

$z_1(t) = x_1(t)$

$z_2(t) = -2x_1(t) + x_2(t)$

$z_3(t) = x_1(t) + x_3(t)$

$* \; x_0 = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Se x_0 fosse allineato con l'uno o l'altro autovettore

$* \; x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Caso $\overline{\text{II}}$: A diagonalizzabile, autovalori complessi e coniugati distinti

Autovalori di A: $\{ \lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2 \dots \lambda_c, \bar{\lambda}_c, \lambda_{2c+1}, \dots \lambda_n \}$

$\lambda_{2c+1}, \dots \lambda_m \in \mathbb{R}$

$\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \dots \lambda_c, \bar{\lambda}_c \in \mathbb{C}$

$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i \quad , \quad \bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$

Autovettori destri:

$\{v_1, \bar{v}_1, v_2, \bar{v}_2, \dots v_c, \bar{v}_c, v_{2c+1}, \dots v_m\}$

$v_{2c+1}, \dots v_m \in \mathbb{R}^m ; v_1, \bar{v}_1, \dots v_c, \bar{v}_c \in \mathbb{C}^m$

Autovettori sinistri:

$\{w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2, \dots w_c, \bar{w}_c, w_{2c+1}, \dots w_m\}$

$w_{2c+1}, \dots w_m \in \mathbb{R}^m , w_1, \bar{w}_1, \dots w_c, \bar{w}_c \in \mathbb{C}^m$

Si utilizza, per comodità, la forma reale di A:

$$Re(v) = \frac{v + \bar{v}}{2} \in \mathbb{R}^m$$

$$Im(v) = \frac{v - \bar{v}}{2j} \in \mathbb{R}^m$$

$$T_R = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} Re(v_1) & Im(v_1) & \cdots & Re(v_c) & Im(v_c) & \cdots & v_m \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

$$T_R^{-1} = \begin{bmatrix} Re(w_1)^T \\ Im(w_1)^T \\ \vdots \\ Re(w_c)^T \\ Im(w_c)^T \\ w_{2c+1}^T \\ \vdots \\ w_m^T \end{bmatrix}$$

$$A = T_R \Delta_R T_R^{-1}$$

$$\Delta_R = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & w_1 \\ -w_1 & \sigma_1 \end{bmatrix} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \begin{bmatrix} \sigma_c & w_c \\ -w_c & \sigma_c \end{bmatrix} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

$$e^{At} x_0 = T_R \, e^{\Delta_R t} \, T_R^{-1} x_0$$

$$A = T \Delta T^{-1}$$

$$\begin{cases} \lambda = \sigma + jw \Rightarrow e^{\sigma t} \operatorname{sen}(wt) \\ \bar{\lambda} = \sigma - jw \Rightarrow e^{\sigma t} \cos(wt) \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

Caso III : Matrice A difettiva

$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ autovalori reali distinti

$m.a(\lambda_i) = m_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} m_i = n$

$v_1, v_2, \dots v_n$ autovettori destri generalizzati di Jordan

$w_1, w_2, \dots w_n$ autovettori sinistri generalizzati di Jordan

$$T_J = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \quad T_J^{-1} = \begin{bmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix}$$

$$T_J \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad , \quad T_J^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$A = T_J J T_J^{-1}$$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$$

$$x(t) = e^{At} x_0 = T_J e^{Jt} T_J^{-1} x_0$$

1)

I modi sono:

λ_i, $m.a(\lambda_i) = m_i$ molteplicità algebrica

$m.g(\lambda_i) = 1$ " geometrica

$e^{\lambda_i t}, t e^{\lambda_i t}, t^2 e^{\lambda_i t} \dots t^{m_i - 1} e^{\lambda_i t}$

Modi TC	λ diagonalizzabili molt = mg (λ)	λ difettivo $ma(\lambda) > mg(\lambda)$
$\lambda \in \mathbb{R}$	$e^{\lambda t}$	$t^k e^{\lambda t}$ $k = 0, 1, \dots$
$\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ $\lambda = \sigma + j\omega$ $\bar{\lambda} = \sigma - j\omega$	$e^{\sigma t} \cos(\omega t)$ $e^{\sigma t} \sin(\omega t)$	$t^k e^{\sigma t} \cos(\omega t)$ $t^k e^{\sigma t} \sin(\omega t)$ $k = 0, 1, \dots$

Proprietà di convergenza dei modi

1) Modo convergente:

$$\lim_{t \to \infty} m(t) = 0$$

2) Modo limitato:

$\exists\, M > 0$ t.c. $|m(t)| < M \quad \forall t$

3) Modo divergente:

se non è né convergente né limitato

Allora: modi nei sistemi TI

stabilità asintotica

1) $Re(\lambda) < 0$ modo convergente

2) $Re(\lambda) = 0$ e $m.a(\lambda) = m.g(\lambda)$

stabilità semplice

3) $\begin{cases} Re(\lambda) = 0 \text{ e } m.a(\lambda) > m.g(\lambda) & \text{divergenza debole} \\ Re(\lambda) > 0 & \text{divergenza forte} \end{cases}$