Trasferibilità ad energia minima /
Trasferibilità in tempo minimo

$$x_0 \longmapsto x_T \quad \text{con } \min \sum_{i=0}^{T-1} u_i^2$$

Si dimostra che $J_T = \min_{u_i} \sum_{i=0}^{T-1} u_i^2$ è monotonicamente decrescente,

$J_T \geq J_{T+1}$, $\forall T$ $\quad (x_{k+1} = A x_k + B u_k, x_0)$

Condizioni necessarie sufficienti $\quad X^r = \mathbb{R}^n$

$\exists\ u_{T-1}, u_{T-2}, \dots, u_0$ t.c. $x_T = A^T x_0 + R_T \begin{bmatrix} u_{T-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$

Il problema di raggiungibilità in x_0 è equivalente al raggiungere un nuovo stato x.

$$\Longleftrightarrow \underbrace{x_T - A^T x_0}_{x} = R_T \begin{bmatrix} u_{T-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}$$

Se $X_T^r = \mathbb{R}^n$, $T \geq n$

Se $X^r = \mathbb{R}^n$ allora $X_T^r = \mathbb{R}^n$ $\forall T \geq n$, allora il sistema è completamente soddisfatto. Quindi il sistema ha infinite soluzioni e si sceglie quella minima

$$\mathcal{R}_T = {}^{n}[B \;\; AB \;\; \ldots \;\; A^{T-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times Tm}, \quad T \geq n$$

Siccome è completamente raggiungibile, rang $\mathcal{R}_T = n$

$$\mathcal{R}_T^T \mathcal{R}_T \in \mathbb{R}^{Tm \times Tm}$$

non è invertibile perché non è di rango pieno

$$\mathcal{R}_T \mathcal{R}_T^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

allora si definisce un nuovo ingresso η per cui:

$$\mathcal{R}_T^T \eta = \begin{bmatrix} u_{T-1} \\ u_{T-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}$$

allora si ottiene

$$x_T - A^T x_0 = \underbrace{\mathcal{R}_T \mathcal{R}_T^T}_{\mathbb{R}^{n \times n}} \eta$$

che è invertibile

Quindi la soluzione ottima è:

$$\eta^* = (R_T R_T^{T*})^{-1}(x_T - A^T x_0) \Longrightarrow \begin{bmatrix} u^*_{T-1} \\ u^*_{T-2} \\ \vdots \\ u^*_0 \end{bmatrix} =$$

$$= R_T^T (R_T R_T^T)^{-1} (x_T - A^T x_0)$$

che è la sequenza di ingressi da applicare ad energia minima

Allora:

$$J_T = [u^*_{T-1} \dots u^*_0] \begin{bmatrix} u^*_{T-1} \\ u^*_{T-2} \\ \vdots \\ u^*_0 \end{bmatrix} =$$

è il costo minimo ottimo

$$= (x_T - A^T x_0)(R_T R_T^T)^{-1} \cancel{(R_T R_T^T)} \cancel{(R_T R_T^T)^{-1}} (x_T - A^T x_0)$$

$$= (x_T - A^T x_0)(R_T R_T^T)^{-1}(x_T - A^T x_0)$$

$$\begin{bmatrix} u^*_{T-1} \\ \vdots \\ u^*_0 \end{bmatrix} = R_T^T (R_T R_T^T)^{-1} (x_T - A^T x_0), \quad T \geq n$$

rango $R_T = n$

Scanned by CamScanner

Esempio: Gestione di un parco Taxi

x_k^{12} - macchine con meno di un anno di vita

x_n^2 - macchine con più di un anno di vita

p - probabilità di non avere guasti irre= parabili

u_k - macchine nuove acquistate nell'anno K

$x_{k+1}^1 = p\, u_k$ macchine che rimangono funzionanti

$x_{k+1}^2 = p(x_k^1 + x_k^2)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{2 anni}]{} \begin{bmatrix} 20 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Si vuole minimizzare il numero di macchi=

ne acquistate per ottenere questo risultato

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p & p \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p^2 \end{bmatrix} \qquad R_3 = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p^2 & p^3 \end{bmatrix}$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^2 & p^3 & p^4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1^* \\ u_0^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & p^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 20 \\ 80 \end{bmatrix}$$

l'inversa è

$$\begin{bmatrix} p^{-2} & 0 \\ 0 & p^{-4} \end{bmatrix}$$

Il prodotto che si ottiene è:

$$\begin{bmatrix} 20 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & p^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{p} \\ \frac{80}{p^2} \end{bmatrix}$$

Quindi la soluzione ad energia minima è:

$u_0^* = 80/p_2$ e $u_1^* = 20/p$

Se si vuole arrivare ad avere questo parco macchine in 3 anni:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{3 anni}]{} \begin{bmatrix} 20 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Si usa sempre la formula:

$$\begin{bmatrix} u^*_{T-1} \\ \vdots \\ u_0^* \end{bmatrix} = \underbrace{R_T^T}\left(R_T R_T^T\right)^{-1}\left(x_T - A^T x_0\right)$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} u_2^* \\ u_1^* \\ u_0^* \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p^2 & p^3 \end{bmatrix}^T}_{R_3} \underbrace{\left(\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p^2 & p^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p^2 \\ 0 & p^3 \end{bmatrix}\right)^{-1}} \begin{bmatrix} 20 \\ 80 \end{bmatrix}$$

perché in 3 anni

$$\begin{bmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & p^4+p^6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{p^4+p^6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2^* \\ u_1^* \\ u_0^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p^2 \\ 0 & p^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{p^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{p^4+p^6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 80 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & \frac{p^2}{p^4+p^6} \\ 0 & \frac{p^3}{p^4+p^6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20/p \\ 80 \; p^2/p^4+p^6 \\ 80 \; p^3/p^4+p^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20/p \\ 80/p^2+p^4 \\ 80/p+p^3 \end{bmatrix}$$

Questa legge di controllo non è in feed-back, è a catena aperta perché ogni uno non si aggiusta lo stato in base ai valori reali

PBH Test di raggiungibilità

(nel caso in cui non si volesse calcolare la matrice di raggiungibilità)

Matrice PBH di raggiungibilità

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & m \end{array} \\ n & \left[\lambda I - A \;\vdots\; B\right] \end{array}$$

<u>Teorema</u>

$$\text{rango}\left[\lambda I - A \;\vdots\; B\right] = n \quad \text{se e solo se} \quad \lambda \in sp(A_{\bar{r}})$$

Se per qualcuno degli autovalori di $A_{\bar{r}}$ si ha una perdita, in rango, di questa matrice PBH allora il sistema considerato non è completamente raggiungibile (se rango $< n$)

<u>Dimostrazione</u>

Ci si mette in coordinate canoniche di raggiungibilità alla Kalman:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c|c} A_r & A_{r\bar{r}} \\ \hline 0 & A_{\bar{r}} \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{c} B_r \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

$$\text{rango} \left[\begin{array}{c|cc} \lambda I - A_r & A_{r\bar{r}} & B_r \\ \hline 0 & \lambda I - A_{\bar{r}} & 0 \end{array}\right] = n$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda I - A_r & B_r & A_{r\bar{r}} \\ \hline 0 & 0 & \lambda I - A_{\bar{r}} \end{array}\right]$$

$\lambda I - A_{\bar{r}}$ non è invertibile se $\lambda \in sp(A_{\bar{r}})$

L'OSSERVABILITÀ è il duale della raggiungibilità

La RICOSTRUIBILITÀ è il duale della controllabilità

OSSERVABILITÀ in T passi (TD)

Date la sequenza di ingressi $u_0, u_1, \dots u_{T-1}$ e la sequenza di uscite $y_0, y_1, \dots y_T$, si conosce il modello.

Quando è possibile calcolare univocamente, senza ambiguità, lo stato iniziale?

$$x_T = A^T x_0 + R_T \begin{bmatrix} u_{T-1} \\ u_{T-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}, \quad T \text{ generico}$$

$$y_T = CA^T x_0 + CR_T \begin{bmatrix} u_{T-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} + Du_T$$

Indistinguibilità nel futuro in T passi

$x', x'' \in \mathbb{R}^n$ stati iniziali

si dice x' e x'' indistinguibili nel fu=

Scanned by CamScanner

turo in T passi se le corrispondenti usci-te sono uguali

$$y'_k - C R_k \begin{bmatrix} u_{k-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} - D u_k = C A^k x'$$

$$y''_k - C R_k \begin{bmatrix} u_{k-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} - D u_k = C A^k x''$$

Quindi x' e x'' indistinguibili nel fu-turo in T passi $\Longleftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} C(x'-x'') = 0 \\ CA(x'-x'') = 0 \\ \vdots \\ CA^T(x'-x'') = 0 \end{array}\right\}$$

le risposte libere sono tutte nulle

Allora $\underline{\mathcal{O}_T (x'-x'') = 0}$

matrice di osservabi-lità in T passi

$$\mathcal{O}_T = \begin{array}{c} n \\ \left[\begin{array}{c} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^T \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \}p \\ \}p \\ \\ \}p \end{array} \in \mathbb{R}^{Tp \times n}$$

Questa ha più righe che colonne

x è non Osservabile in T-passi se è non distinguibile nel futuro in T passi dello stato $0x$

x è non Osservabile in T passi se è indistinguibile nel futuro in T passi dello stato $0x$. Quindi

$$\mathcal{O}_T x = 0 \iff$$

$$x \in \operatorname{Ker} \mathcal{O}_T \triangleq \underline{X_T^{\bar{o}}}$$

$\bar{o}$ negato

set di non osservabilità in T passi

Relazione tra $X_T^{\bar{o}}$ al variare di T

$$X_T^{\bar{o}} \supseteq X_{T+1}^{\bar{o}} \supseteq X_{T+2}^{\bar{o}} \supseteq X_{n-1}^{\bar{o}} = X_{n-1+i}^{\bar{o}}$$

$\forall i \geq 0$

$$X_{n-1}^{\bar{o}} = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad X_n^{\bar{o}} = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \\ CA^n \end{bmatrix}_R$$

$$CA^n = C(-\alpha_1 A^{n-1} - \alpha_2 A^{n-1} \ldots - \alpha_n I)$$

$CA^n X = 0$

$Cx = 0$

$CAx = 0$

Il Ker non $CA^{n-1}x = 0$

restringe più nello, dopo $n-1$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$ Matrice di osservabilità

$X^{\bar{o}} = \ker \mathcal{O}$ spazio di non osservabilità

X non osservabile $\iff x \in X^{\bar{o}}$

Per osservabilità si intende in $T-1$ passi

Si ha completa osservabilità $\iff$

$X^{\bar{o}} = \{0_X\} = \ker \mathcal{O} = \{0_X\}$

questo set contiene solo $\emptyset$, non c'è nessuno stato

$\iff$ rango $\mathcal{O} = n$

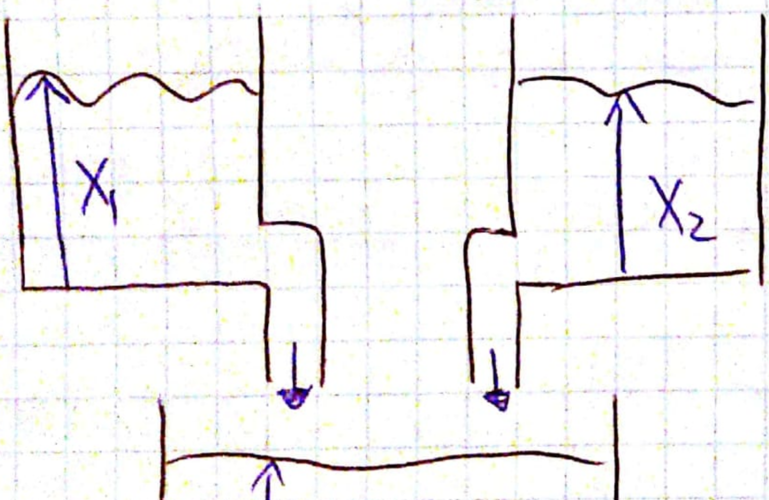
$\vartheta \in \mathbb{R}^{n \times (p \times n)}$

per $p = 1$, $\det \vartheta \neq 0$

poiché $\vartheta \, (n \times n)$

È importante che il Ker sia nullo, perché altrimenti ci sono infiniti stati che danno le stesse uscite.

Esempio: serbatoio



In questo sistema non ci sono ingressi

$x_{1,k+1} = x_{1,k} - \alpha_1 x_{1,k} = (1-\alpha_1)\, x_{1,k}$

$x_{2,k+1} = x_{2,k} - \alpha_2 x_{2,k} = (1-\alpha_2)\, x_{2,k}$

I serbatoi si stanno svuotando

Ci serviamo delle condizioni iniziali

$x_{1,0}$ e $x_{2,0}$

$$y_k = \alpha_1 x_{1,k} + \alpha_2 x_{2,k} \qquad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$$

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} (1-\alpha_1) & 0 \\ 0 & (1-\alpha_2) \end{bmatrix} x_k , \; x_0 \qquad \mathcal{O} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$y_k = [\alpha_1 \quad \alpha_2] \, x_k$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1(1-\alpha_1) & \alpha_2(1-\alpha_2) \end{bmatrix}$$

$$\det \mathcal{O} = \alpha_1 \alpha_2 \Big((1-\alpha_2) - (1-\alpha_1) \Big) = \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)$$

Il det può essere uguale a zero

se $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ o $\alpha_1 = \alpha_2$

Se $\alpha_1 = \alpha_2$, $X^{\bar{o}} = \ker \mathcal{O}$

Se $\det \mathcal{O} \neq 0$, $X^{\bar{o}} = \{0_x\}$ e si può calcolare lo stato iniziale

$$\begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha(1-\alpha) & \alpha(1-\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

per $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

$$\alpha(x_1 + x_2) = 0$$

$$x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha(1-\alpha)(x_1 + x_2) = 0$$

x_0 e $x_0 + x^{\bar{0}}$ sono indistinguibili

$$x_0 + x^{\bar{0}} \iff x_0 + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \forall \alpha$$

$$x_{1,k} = (1-\alpha)^k x_{1,0}$$

$$x_{2,k} = (1-\alpha)^k x_{2,0}$$

$$y_k = \alpha \left[(1-\alpha)^k (x_{10} + x_{20}) \right]$$

$$y_k = \alpha \left[(1-\alpha)^k (x_{10} + \alpha + x_{20} - \alpha) \right]$$

non si riesce a capire dalle misure, da y quale sia il valore dello stato perché il sistema non è completamente osservabile

$x_0 + X^{\bar{o}} \Longleftrightarrow x_0 + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \forall \alpha$

Se non si riesce a determinare lo stato iniziale si è commesso un errore nella scelta del sensore.

Proprietà geometriche

1) $X^{\bar{o}}$ è A invariante $\quad x \in X^{\bar{o}} \Longrightarrow$
$Ax \in X^{\bar{o}}$

2) $X^{\bar{o}} \subset \text{Ker}\, C$

$x \in X^{\bar{o}}$

$Cx = 0$

$CAx = 0$

$\vdots$

$CA^{n-1}x = 0$

$Ax \in X^{\bar{o}}$?

$CAx = 0$

$CA^2x = 0$

$\vdots$

$CA^n x = 0$

$CA^n x = C(\alpha_1 A^{n-1} \ldots \alpha_n I) = 0$

$\forall x \in X^{\bar{o}}$ ma si ha $Cx = 0$? si

Infatti $x \in X^{\bar{o}} \iff$

$$\begin{aligned} Cx &= 0 \\ CAx &= 0 \\ &\vdots \\ CA^{n-1}x &= 0 \end{aligned}$$

ed in particolare $Cx = 0$

quindi $x \in \ker C$

Ricostruibilità in T passi

$$x_k = A^k(x_0 + x^{\bar{o}}) + R_k \begin{bmatrix} u_{k-1} \\ u_{k-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}$$

$$0 \leq k \leq T$$

$$y_k = CA^k(x_0 + x^{\bar{o}}) + \bar{R}_k \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix} + Du_k$$

Dati $u_0, u_1, \dots u_T$, $y_0, y_1 \dots y_T$ è possibile ricostruire x_T senza ambiguità.

Se sì, si dice che x_T è ricostruibile in T passi: $y_k = CA^k x_0 + CA^k x^{\bar{o}}$

$X^{\bar{o}}$ è A-invariante

$$x \in X^{\bar{o}} \Rightarrow Ax \in X^{\bar{o}} \Rightarrow A^k x \in X^{\bar{o}}$$

$$y_k = CA^k x_0 + \underbrace{\cancel{CA^k x^{\bar{o}}}}_{=0}$$

Condizione di ricostruibilità in T passi

$X^{\bar{o}} \subset \ker C$

$$x_T = A^T x_0 + A^T x^{\bar{o}} + R_T \begin{bmatrix} u_{T-1} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}$$

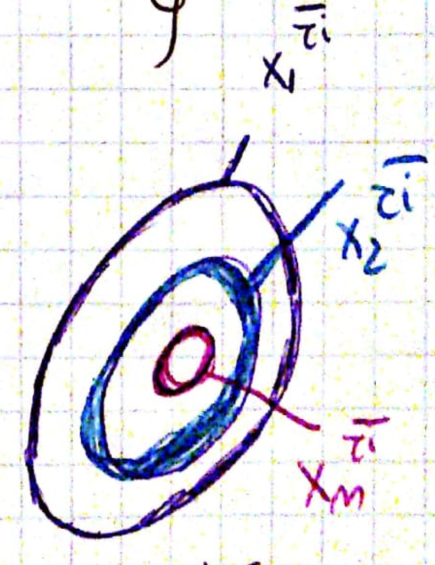
x_T è ricostruibile in T passi se $A^T x = 0 \quad \forall x \in X^{\bar{o}}$ $\quad \boxed{\ker A^T \supset X^{\bar{o}}}$

$$X_T^{\bar{ri}} = \{ x \in X^{\bar{o}} \text{ e } : x \notin \ker A^T \}$$

Relazione fra $X^{\bar{ri}}$ e $X_T^{\bar{o}}$

$$X_T^{\bar{ri}} \subset X_T^{\bar{o}}$$

Relazione fra $X_T^{\bar{ri}}$ e $X_T^{\bar{ri}}$



$$X_T^{\bar{ri}} \supseteq X_{T+1}^{\bar{ri}} \ldots \supseteq X_n^{\bar{ri}} = X_{n+i}^{\bar{ri}} \quad \forall i \geq 0$$

Allora il set, lo spazio, degli stati non raggiungibili è:

$$X^{\overline{ri}} = \{ x \in X^{0} \text{ e } x \in \ker A^{n} \}$$

Condizione di completa ricostruibilità

$$X^{\overline{ri}} = \{ 0_x \} \iff \ker A^{n} \supset X^{0}$$