TdS 11-11-18

LEZIONE 22

Osservabilità e Ricostruibilità

Osservabilità in T-passi

$X_T^{\bar{o}} = \text{Ker}\, \Theta_T$

completa osservabilità in T passi $X_T^{\bar{o}} = \{0_x\}$

$$\Theta_T = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^T \end{bmatrix}$$ matrice di osservabilità in T passi

$X_T^{\bar{o}} = \{0_x\} \iff$ rango $\Theta_T = n$

Osservabilità $X^{\bar{o}} = \text{Ker}\, \Theta$,

$$\Theta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$ matrice di osservabilità

Condizione di completa osservabilità:

$X^{\bar{o}} = \{0_x\} \iff$ rango $\Theta = n$

$\{X_T^{\bar{o}} \supset X_{T+1}^{\bar{o}} \ldots \supset X_{n-1}^{\bar{o}} = X_{n+i}^{\bar{o}}\} \; \forall i \geq -1$

all'aumentare di T i set di non oss. si riducono

Ricostruibilità in T passi

è una condizione più debole della raggiungibilità

$$X_T^{\overline{ri}} = \{ x \in X_T^{\bar{o}} \text{ e } x \notin \ker A^T \}$$

stati non ricostruibili in T passi

Completa ricostruibilità in T passi

$$\ker A^T \supset X_T^{\bar{o}} \iff X_T^{\overline{ri}} = \{0_x\}$$

non esistono x che non stanno nel $\ker A^T$, l'unico elemento che non sta nel $\ker A^T$ è $0_x$ (zero)

$$X_T^{\overline{ri}} \overset{?}{\subseteq} X_T^{\bar{o}}$$

$$X_1^{\overline{ri}} \supset X_{T+1}^{\overline{ri}} \dots X_n^{\overline{ri}} = X_{n+1}^{\overline{ri}} \,,\ \forall i \geq 0$$

Ricostruibilità

$$X^{\overline{ri}} = \{ x \in X^{\bar{o}} \text{ e } x \notin \ker A^n \}$$

$$X^{\overline{ri}} = X_n^{\overline{ri}}$$

Condizione di completa Ricostruibilità

$X^{\bar{r}} = \{0_X\} \iff \ker A^n \supset X^{\bar{o}}$

Relazioni fra completa osservabilità e ricostruibilità

$(A, C)$ completamente Osservabile $\Longrightarrow$ completamente Ricostruibile

$X^{\bar{o}} = \{0_X\}$ $\qquad\qquad$ $\ker A^n \supset X^{\bar{o}}$

$(\iff X^{\bar{r}} = \{0_X\})$

Se non ci sono stati non osservabili allora non ci sono stati non ricostruibili. Non è vero il viceversa

$(A, C)$ completamente Ricostruibile $\Longrightarrow$

$+$

$A$ invertibile

$(A, C)$ completamente osservabile

Dimostrazione

$A$ invertibile $\Rightarrow$ $A^n$ invertibile $\Rightarrow$

$\ker A^n = \{0_x\}$

Quindi $\ker A^n \supset X^{\bar{o}}$

$\{0_x\}$ $\{0_x\}$

Proprietà Rappresentazione sistemi LTI - TC (invarianti, tempo continuo)

$$y(T) = C e^{AT} x_0 + \int_0^T C e^{A(T-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(T)$$

L'uscita, nei primi istanti da 0 e T è indistinguibile dallo stato iniziale $x_0$, è sempre nulla?

Si consideri la risposta libera

$$\underbrace{y(\tau) - \int_0^{\tau} C e^{A(\tau-\tau)} B u(\tau)\, d\tau + D u(\tau)}_{\text{quantità note}} = C e^{A\tau} x_0$$

Si utilizza lo sviluppo di Sylvester

$$= C\left(B_0(\tau) I + B_1(\tau) A + \dots + B_{n-1}(\tau) A^{n-1}\right) x_0 =$$

con $B_i$ scalari

$$= \left[B_0(\tau) \dots B_{n-1}(\tau)\right] \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0$$

* matrice di osservabilità

$x_0$ è indistinguibile da $\emptyset$, se il Ker di questa matrice* è nullo

Nel caso di tempo continuo, non si parla di osservabilità in un intervallo, perché se vale l'osservabilità, allora vale per qualsiasi intervallo di tempo (non solo in T passi)

1) Non si parla di osservabilità in un intervallo

2) Condizione di completa osservabilità

$$\text{rango}\ \mathcal{O} = n$$

3) Ricostruibilità $\Longleftarrow$ Osservabilità
s.T.C.

Se il sistema è osservabile, è anche ricostruibile

La condizione è legata non ad A ma ad $e^{AT}$

Invarianza Osservabilità rispetto a cambiamenti della base nello stato

$$(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}) = (T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)$$

sistema in cui si è effettuato un cambio di coordinate

$$\bar{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CT \\ C\cancel{T}(\cancel{T^{-1}}AT) \\ \vdots \\ C\cancel{T}(\cancel{T^{-1}}AT)^{n-1} \\ (\cancel{T^{-1}}A^{n-1}T) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} CT \\ CAT \\ \vdots \\ CA^{n-1}T \end{bmatrix} = \mathcal{O}T$$

T è una matrice di cambiamento di coordinate, perciò è a rango pieno

Rappresentazioni canoniche di osservabilità alla Kalman

$x = Tz$ cambio di coordinate

$$z = \begin{bmatrix} x^o \\ \hline x^{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, n-p \\ \}\, p \end{matrix} \qquad \dim x^{\bar{o}} = p$$

rango $\vartheta = n - p$

$$T = [\overbrace{B_o}^{n-p} \mid \overbrace{B_{\bar{o}}}^{p}]$$ $B_{\bar{o}}$ è una base di $X^{\bar{o}}$

Proprietà di $X^{\bar{o}}$ (x noto)

1) $X^{\bar{o}}$ è A-invariante

2) $X^{\bar{o}}$ Ker C ($\forall x \in X^{\bar{o}}$, $Cx = 0x$)

$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$

$$\bar{A} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} n-p & n-p \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c|c} A_o & 0 \\ \hline A_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}} \end{array}\right] & \begin{array}{c} n-p \\ p \end{array} \\ \begin{array}{cc} & p \end{array} & \end{array} \qquad \bar{B} = \left[\begin{array}{c} B_o \\ \hline B_{\bar{o}} \end{array}\right]$$

$$\bar{C} = [\ ? \ \vdots \ ?\ ] \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline x \end{array}\right] = [C_o \ \vdots \ \emptyset]$$

$\bar{D} = D_o$

Quindi:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c|c} A_o & 0 \\ \hline A_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline \alpha \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline A_{\bar{o}}\alpha \end{array}\right]$$

Per quanto riguarda la matrice di osservabilità:

$$\bar{O} = \left[\begin{array}{c} [C_o \mid 0] \\ [C_o \mid 0]\left[\begin{array}{c|c} A_o & 0 \\ \hline A_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}} \end{array}\right] \\ \vdots \\ [C_o \mid 0]\left[\begin{array}{c|c} A_o^{n-1} & 0 \\ \hline A^{*}_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}}^{n-1} \end{array}\right] \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} C_o & 0 \\ C_o A_o & 0 \\ \vdots & \vdots \\ C_o A_o^{n-1} & 0 \end{array}\right]$$

Condizione di completa ricostruibilità TD richiede che:

$\ker A^m \supseteq X^{\bar{o}}$

$$\ker \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ A^*_{o\bar{o}} & A_{\bar{o}} \end{bmatrix}^m \supset \ker \begin{bmatrix} \overbrace{C_o}^{n-p} & \overbrace{0}^{p} \\ C_o A_o & \\ \vdots & \\ C_o A_o^{n-1} & \end{bmatrix}$$

$A_{\bar{o}} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ con $p < m$

$\bar{o}$ nil-potente $\Longrightarrow A_{\bar{o}}^m = 0_{p \times p}$

autovalori uguali a $\emptyset$

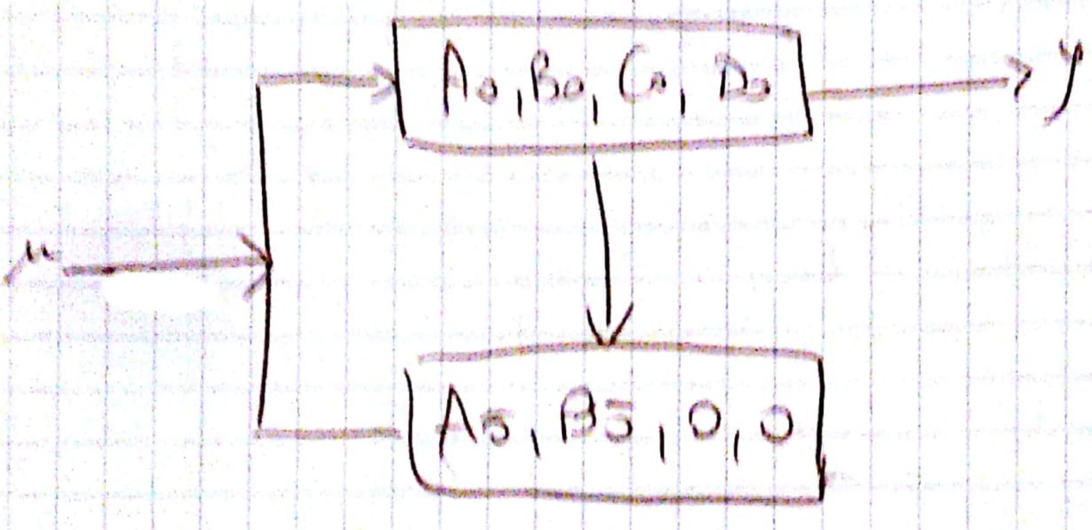
$$\overline{W_{yu}}(\lambda) = [C_o \,|\, 0] \begin{bmatrix} (\lambda I - A_o)^{-1} & 0 \\ - A^*_{o\bar{o}} & (\lambda I - A)^{-1} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} B_o \\ \bar{B}_o \end{bmatrix} + D_o =$$

$$= \left[ C(\lambda I - A_o)^{-1} \quad 0 \right] \begin{bmatrix} B_o \\ \vdots \\ B_{\bar{o}} \end{bmatrix} + D_o =$$

$$= C_o(\lambda I - A_o)^{-1} B_o + D_o$$

Sistema osservabile / non osservabile




Decomposizione canonica alla Kalman

vettori linearmente ind.

$$z = \begin{bmatrix} x_{ro} \\ x_{r\bar{o}} \\ x_{\bar{r}o} \\ x_{\bar{r}\bar{o}} \end{bmatrix} \qquad T = \left[ B_{ro}, B_{r\bar{o}}, B_{\bar{r}o}, B_{\bar{r}\bar{o}} \right]$$

si ricava per completamento, noti gli altri

$B_{r\bar o}$ è una base di $X^r \cap X^{\bar o}$

$B_{ro} \cup B_{r\bar o}$ è una base di $X^r$

$B_{r\bar o} \cup B_{\bar r \bar o}$ è una base di $X^{\bar o}$

$B_{\bar r o}$ si trova facendo sì che $T$ sia invertibile

$$\bar A = \left[\begin{array}{cc|cc} A_{ro} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{o\bar o} & A_{r\bar o} & A_{23} & A_{24} \\ \hline 0 & 0 & A_{\bar r o} & 0 \\ 0 & 0 & A_{\bar r o \bar o} & A_{\bar r \bar o} \end{array}\right] \qquad \bar B = \left[\begin{array}{c} B_{ro} \\ B_{r\bar o} \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

$$\bar C = \left[\begin{array}{cc|cc} C_{ro} & 0 & C_{\bar r o} & 0 \end{array}\right]$$

$$D = D_{ro}$$

$$W_{yu}(\lambda) = \left[ C_{ro} \;\vdots\; 0 \;\vdots\; C_{r\bar{o}} \;\vdots\; 0 \right] \cdot \begin{bmatrix} (\lambda I - A_{ro}) & 0 & -A_{13}^{*} & 0^{*} \\ -A_{ro\bar{o}}^{*} & (\lambda I - A_{r\bar{o}}) & -A_{23}^{*} & -A_{24}^{*} \\ 0 & 0 & (\lambda I - A_{\bar{r}o}) & 0 \\ 0 & 0 & -A_{\bar{r}o\bar{o}} & (\lambda I - A_{\bar{r}\bar{o}}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_{ro} \\ B_{r\bar{o}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + D_{ro} =$$

* si trasformano in qualche modo

$$= \left[ C_{ro} \;\vdots\; 0 \;\vdots\; C_{r\bar{o}} \;\vdots\; 0 \right] \begin{bmatrix} (\lambda I - A_{ro})^{-1} B_{ro} \\ * \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + D_{ro} =$$

$$= C_{ro}(\lambda I - A_{ro})^{-1} B_{ro} + D_{ro}$$

Nel sistema, nella f.d.t. tutti gli autovalori non osservabili e non raggiungibili si cancellano

PBH test di osservabilità

$$\text{rango}\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n$$

$\forall \lambda \; sp(A) \iff (A, C)$ completamente osservabile

$$\text{rango}\left[\begin{array}{c} \lambda I - A \\ \hline C \end{array}\right] < n$$

$\forall \lambda \; sp(A\bar{o})$ $\qquad sp =$ spettro

Raggiungibilità

rango $R = n$

Osservabilità

rango $\mathcal{O} = n$

Controllabilità

$\text{Im}\ A^n \supseteq X^r$

Ricostruibilità

$\text{Ker}\ A^n \supset X^{\bar{o}}$

dualità

$S = S\ (A, B, C, D)$

$S^* = S(A^T, C^T, B^T, D^T)$

$$R^* = [B^* \ B^*A \ldots B^*A^{n-1}] =$$

$$= [C^T \ A^TC^T \ldots A^{T^{n-1}}C^T] =$$

$$= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^T = \mathcal{O}^T$$

rango $R^* =$ rango $\mathcal{O}^T$

$$\mathcal{O}^* = \begin{bmatrix} C^* \\ C^*A^* \\ C^*A^{*\,n-1} \end{bmatrix} = R^T$$

$$\operatorname{Im}(A^*)^n \subset \operatorname{Im} R^* \iff \operatorname{Im}(A^T)^n \subset \operatorname{Im} \mathcal{O}^T$$

$$\iff \quad [\operatorname{Im}(A^n)]^\perp = \operatorname{Ker}[A^n]^T$$

$$[\operatorname{Im} R]^\perp = \operatorname{Ker} R^T$$

Quindi:

$$\operatorname{Im}(A^*)^n \subset \operatorname{Im} R^* \iff$$

$$\operatorname{Im}(A^T)^n \subset \operatorname{Im} \mathcal{O}^T \iff$$

$$[\operatorname{Im}(A^n)^T] \supset [\operatorname{Im} \mathcal{O}^T]^\perp$$

$$\operatorname{Ker} A^n \supset \operatorname{Ker} \mathcal{O}$$