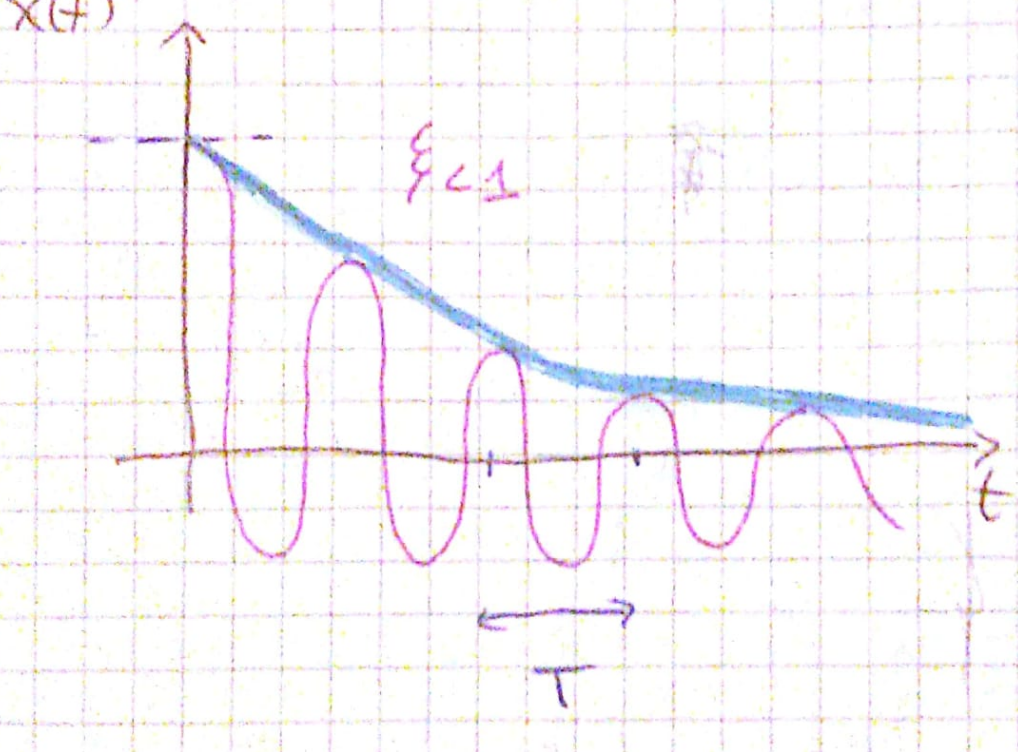
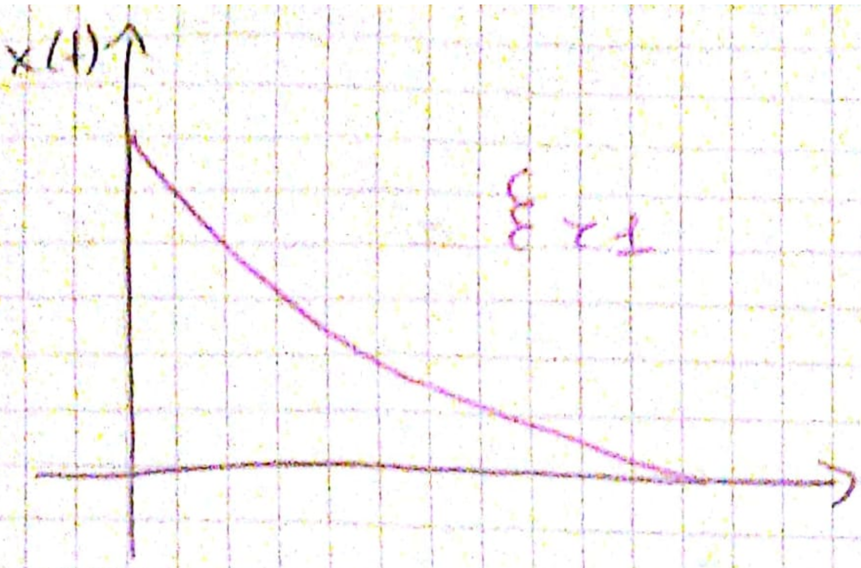
$$m\ddot{x}+c\dot{x}+Kx=f$$

$$\xi \rightarrow \frac{c}{2m\omega_n} \qquad \omega_n \rightarrow \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega_d}$$



l'oscillazione è dovuta alle radici dell'eq. di ξ, quando il discriminante è diverso da zero



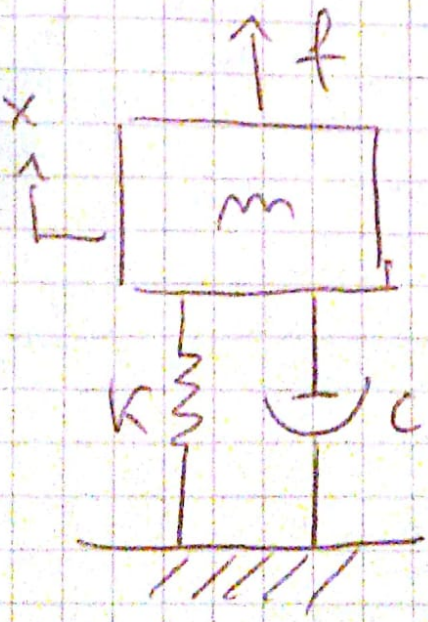
non c'è oscillazione

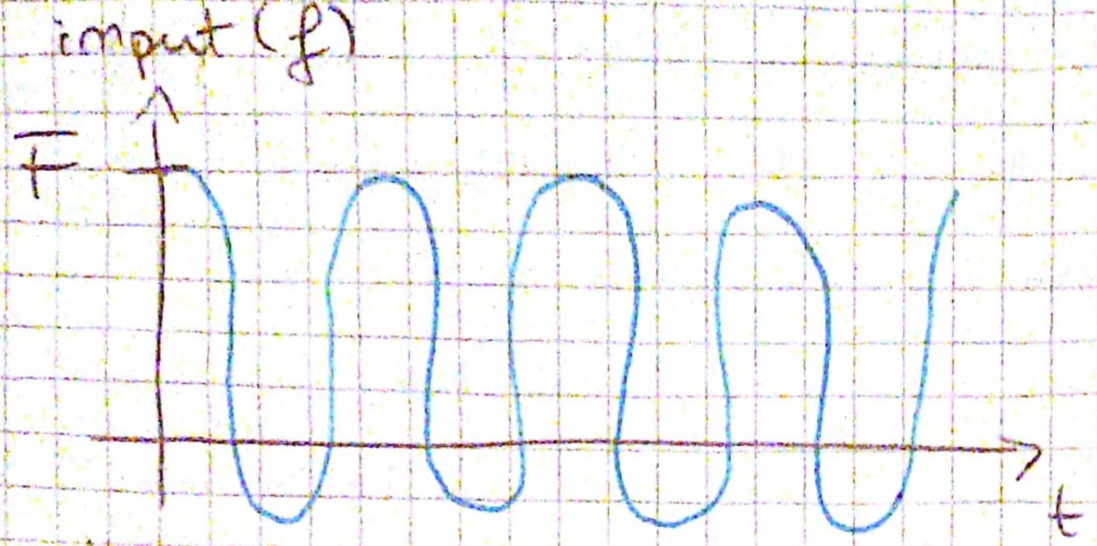
Oscillazioni e Vibrazioni Forzate

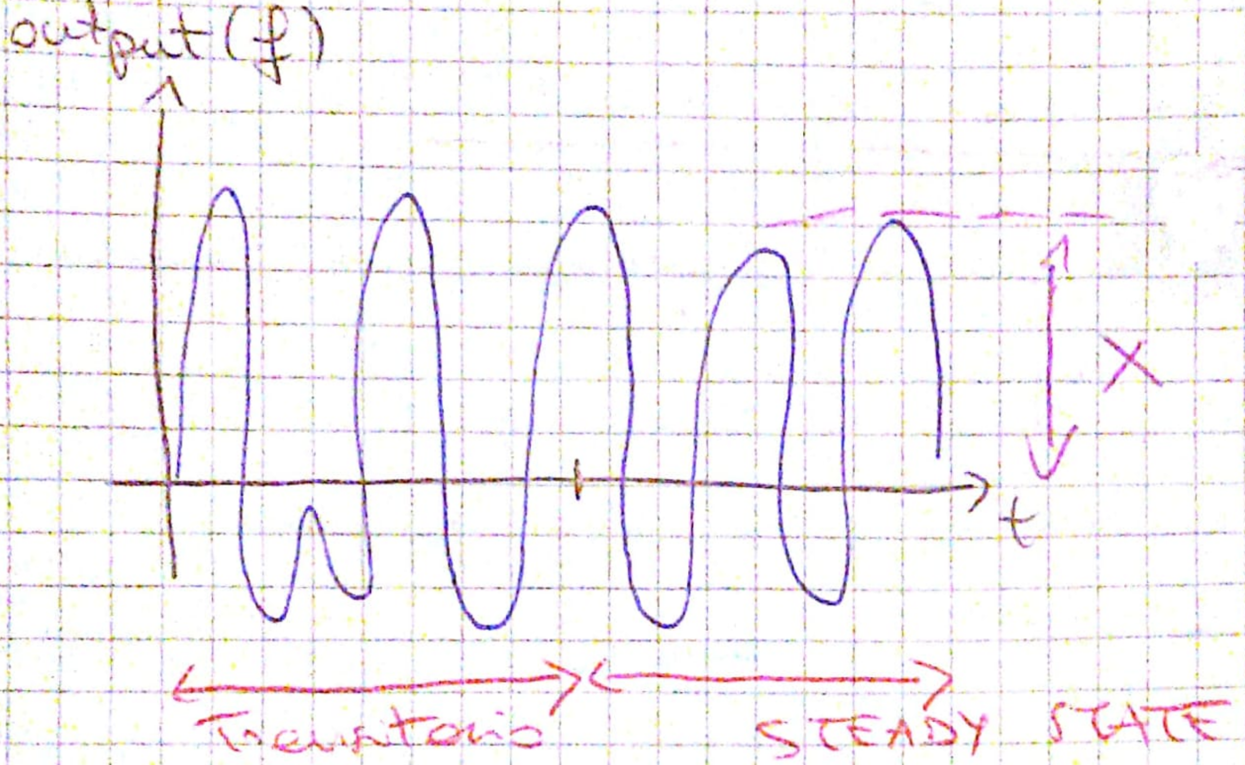
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f = \bar{F}\cos(\omega t)$$

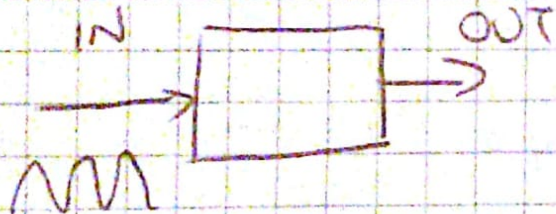
dove la forza f è di tipo armonico, sinusoidale

ω è la frequenza di eccitazione









armonico a regime

L'evoluzione del sistema dipendente dalle condizioni iniziali al transitorio, la risposta non é sinusoidale

Essendo il sistema lineare, la frequenza in uscita sarà esattamente la stessa della frequenza in ingresso, si otterrà una risposta che sarà sfasata ma di tipo: RISPOSTA IN FREQUENZA

$$x(t) = x\cos(\omega t + \varphi)$$

dove x è l'ampiezza dell'armonica, del segnale

Per comodità si passa alla notazione complessa:

$e^{j\vartheta} = \cos\vartheta + j\sin\vartheta$ $\quad Re(e^{j\vartheta})$

Si ipotizza che la forzante F sia la parte reale $f = Re(e^{j\omega t})$ e che

$$x = Re(x e^{j(\omega t+\varphi)})$$

Si lavora con i numeri complessi e solo alla fine si prende la parte reale

$$x = Re(\bar{x}\, e^{j\omega t})$$

$$\bar{x} = x\, e^{j\varphi}$$

Si sostituisce quello che si è ottenuto nell'equazione che descrive il sistema:

$$-m\omega^2 \bar{x}\, \cancel{e^{j\omega t}} + c j\omega \bar{x}\, \cancel{e^{j\omega t}} + k \bar{x}\, \cancel{e^{j\omega t}} = \bar{F}\, \cancel{e^{j\omega t}}$$

Si elimina $e^{j\omega t}$ e si ottiene:

$$(-m\omega^2 + c j\omega + k)\,\bar{x} = \bar{F}$$

$$\frac{\bar{x}}{\bar{F}} = \frac{1}{-m\omega^2 + c j\omega + k} \qquad \text{FRF}$$

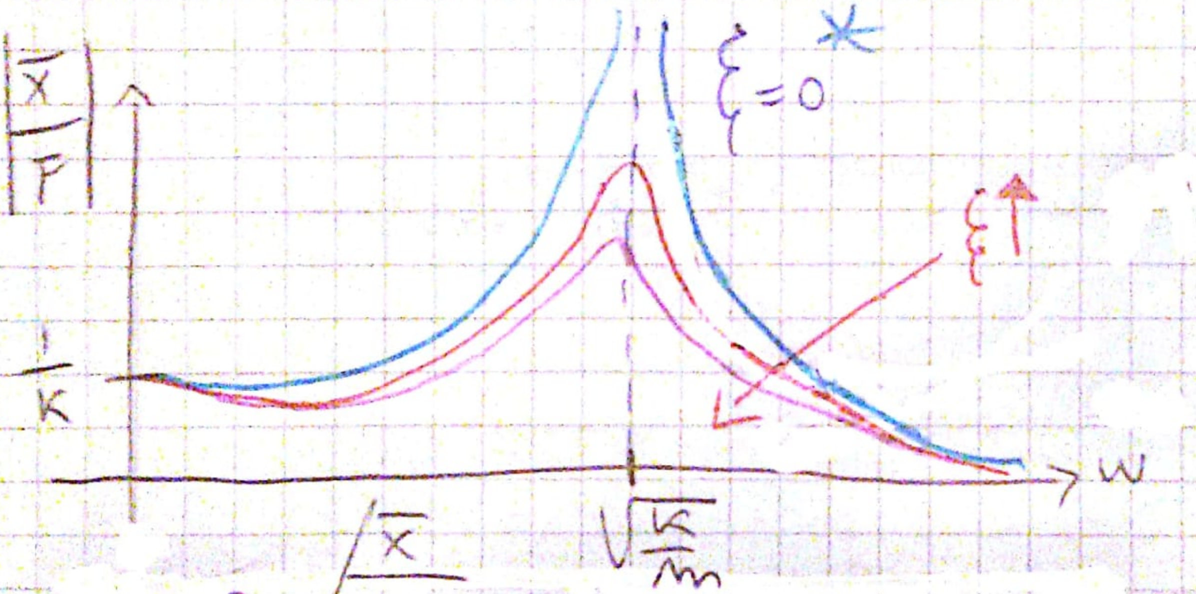
il rapporto tra input e output è costante per un sistema lineare

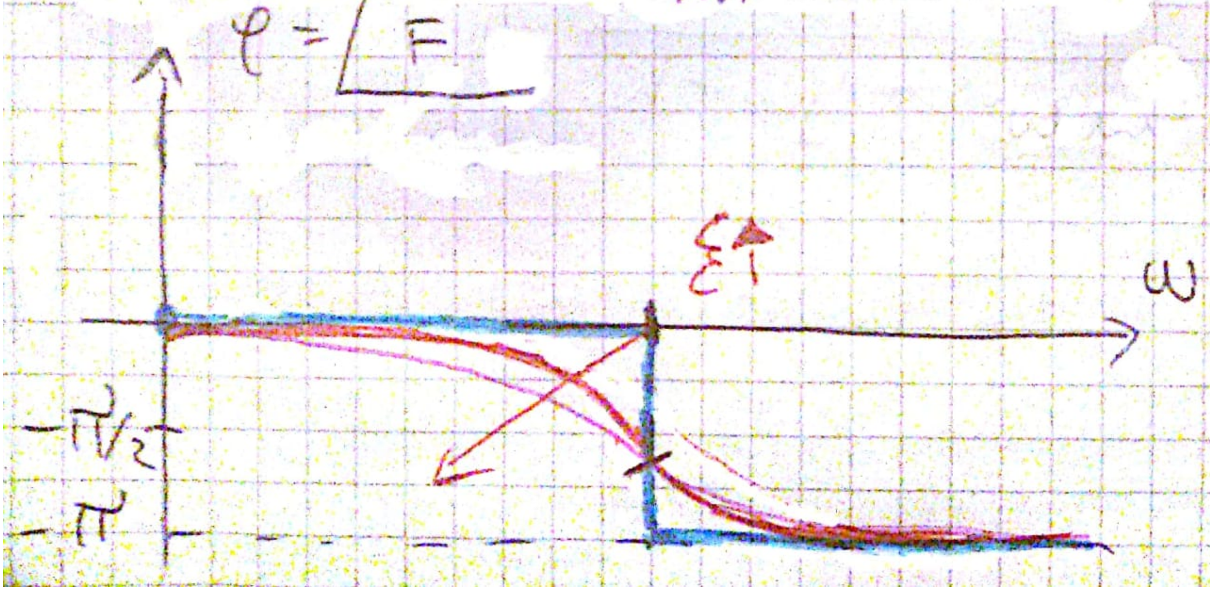
$$\left| \frac{\bar{X}}{\bar{F}} \right| = \frac{1}{\sqrt{(-m\omega^2+K)^2+c^2\omega^2}}$$

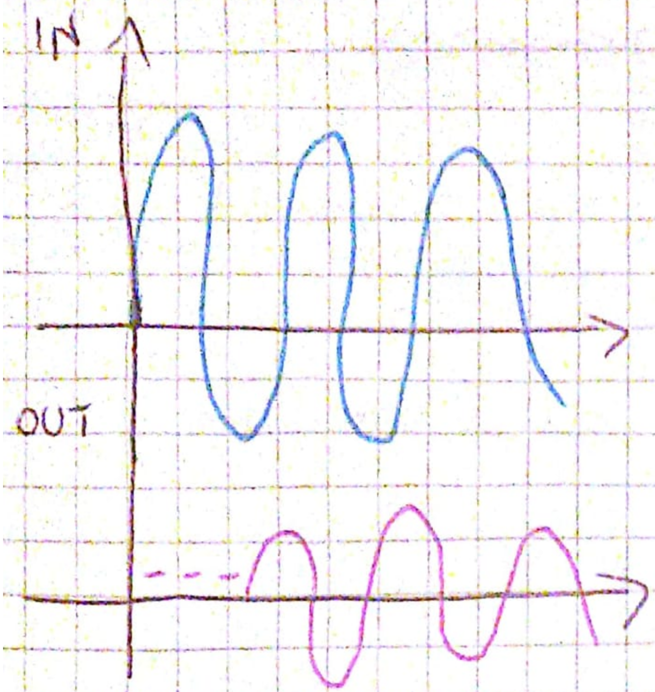
per quanto riguarda il modulo

$$\angle \frac{\bar{X}}{\bar{F}} = -\mathrm{a\,tan}\,\frac{c\omega}{-m\omega^2+K}$$

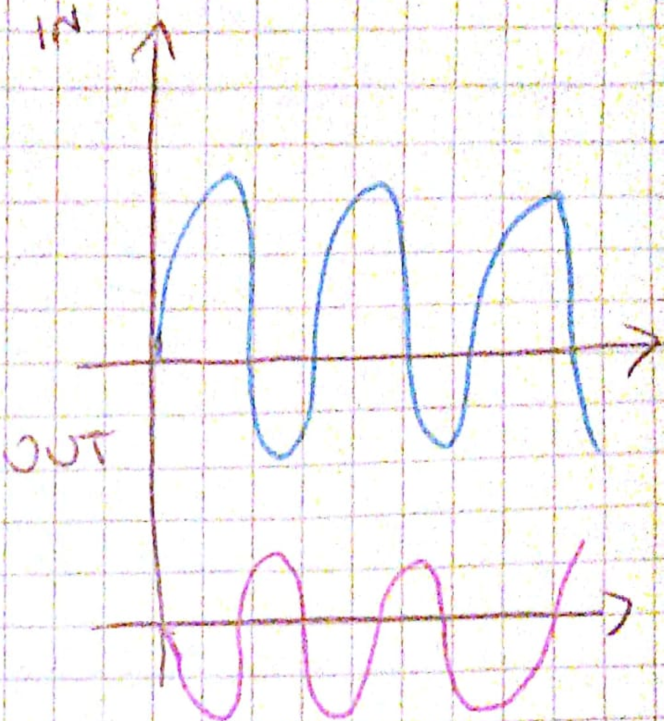
per quanto riguarda la fase







$\omega < \omega_n$



$\omega > \omega_n$

Per il caso particolare $c = 0$ *

Per il caso $c \neq 0$ *

non ci sarà più il fenomeno per cui il modulo andrà all'infinito e la risposta in termini di fase sarà più soft, più dolce, al crescere del rapporto di smorzamento (si abbassa il valore del picco)

Alla frequenza di risonanza la risposta del sistema è amplificata, raggiunge il massimo

ω^* frequenza di risonanza

$$0 = \frac{\partial}{\partial \omega} \left| \frac{X}{F} \right| \longrightarrow \omega^* = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

risposta naturale
del sistema smorzato

Quando $\xi \ll 1 \Rightarrow \omega^* \sim \omega_d \sim \omega_n$

la risposta dinamica, fino alla frequenza di risonanza, è sempre più alta di quella statica

Esistono sistemi che, invece di dissipare energia con lo smorzatore, la vanno a recuperare

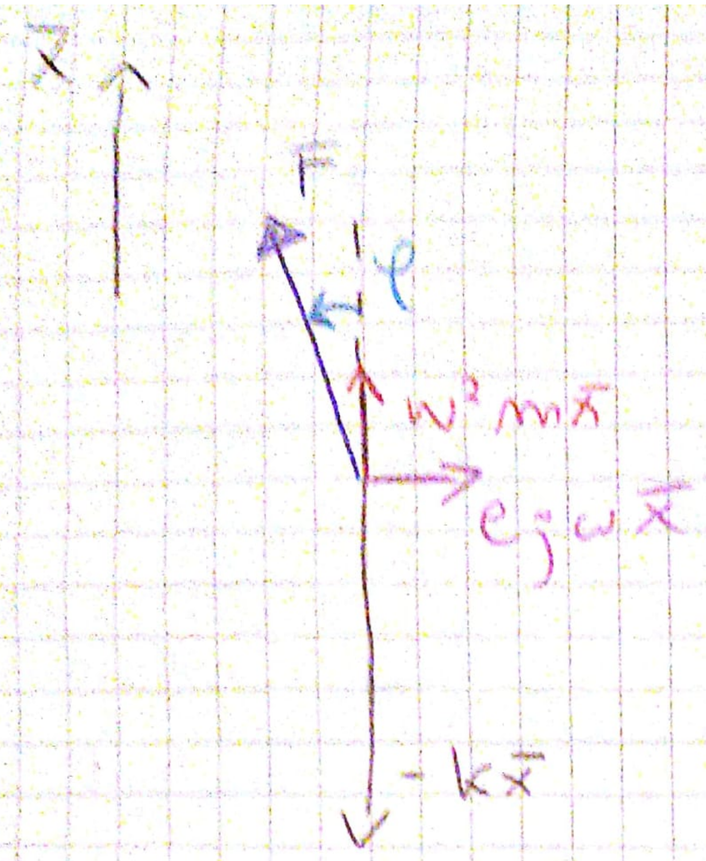
$$\omega^* = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} \xrightarrow{\xi \ll 1} \left.\frac{\bar{X}}{\bar{F}}\right|_{\omega=\omega^*} = \frac{1}{2\xi K}$$

La risposta al picco è inversamente proporzionale allo smorzamento

$$\underbrace{-\omega^2 m \bar{X}}_{\text{FORZA DI INERZIA}} + \underbrace{C j \omega \bar{X}}_{\text{FORZA VISCOSA}} + \underbrace{K \bar{X}}_{\text{FORZA ELASTICA}} = \underbrace{\bar{F}}_{\text{FORZA DI ECCITAZIONE}}$$

In realtà ogni fattore di questa espressione sarebbe moltiplicato per il fasore (vettore rotante) $e^{j\omega t}$

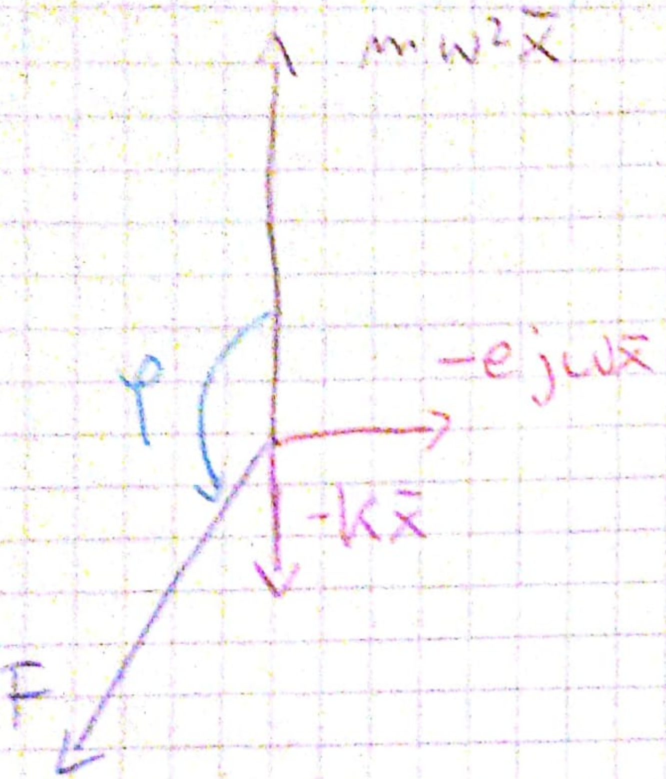
ω_n è un valore critico che va a distinguere comportamenti diversi

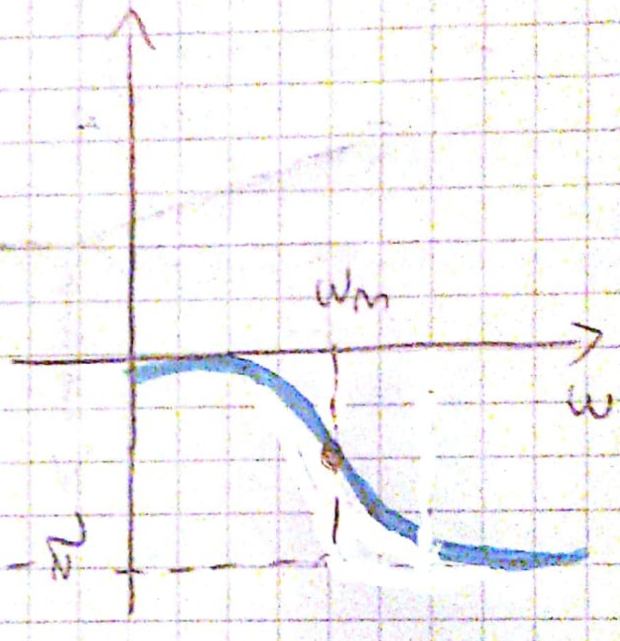


F è sfasato di φ rispetto ad $\bar{x}$, che è ora il riferimento.
Quindi si considera lo sfasamento dell'input rispetto alla risposta (invece che il contrario)

A bassa frequenza il sistema è dominato dalla rigidezza $\omega \ll \omega_n$
dalla forza elastica
A $\omega \gg \omega_n$ è la forza di

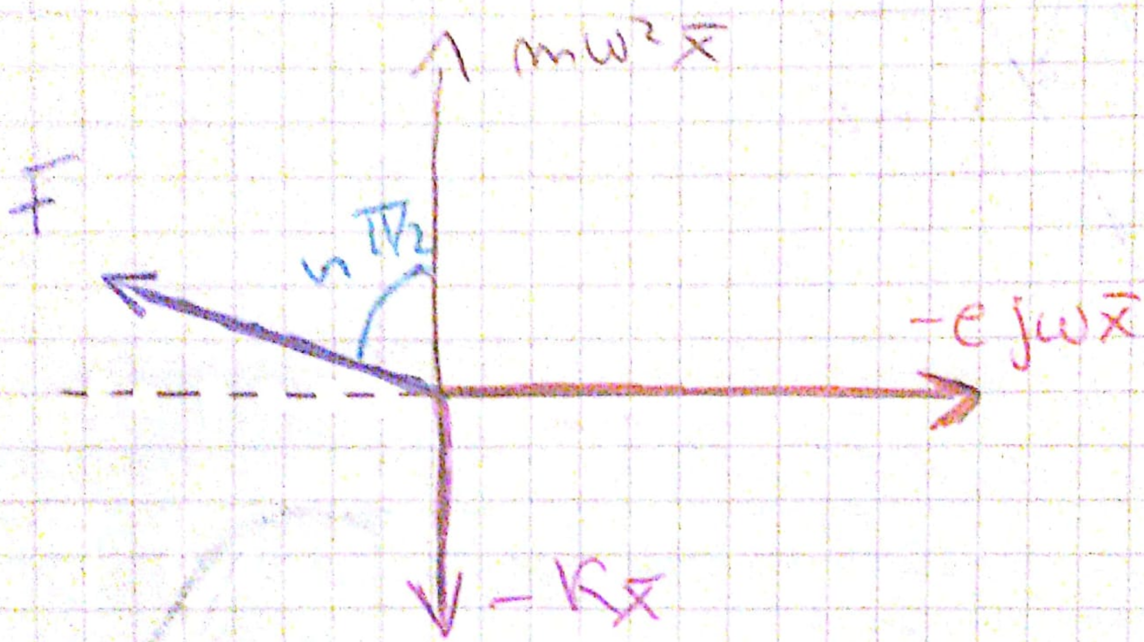
inerzia ad essere preponderante





Alle alte frequenze, se si vuole cambiare la dinamica, si deve agire su m perché è l'inerzia che domina alle alte frequenze.

Per $\omega \vee \omega_n$ la forza che va a calibrare l'eccitazione è quella viscosa. Nella zona di risonanza il ruolo determinante nella risposta del sistema è svolto da c (damp)



Esempio di script su Matlab:

"sdof_force"

```
m = 1;
c = 2;
K = 100;
wn = sqrt(K/m);
zeta = c/2/m/wn;
```

wn = 10

zeta = 0.1

il sistema oscilla in risposta libera

```
w = linspace(0, 20, n);
```

n = 100;

w è il vettore di supporto

```
FRF = abs(1./(-m.*w.^2 + c.*1i.*w + K));
plot(w, FRF)
```

il grafico parte dal valore statico $\frac{1}{K}$

Il valore del picco è 1/2/zeta/k

come struma

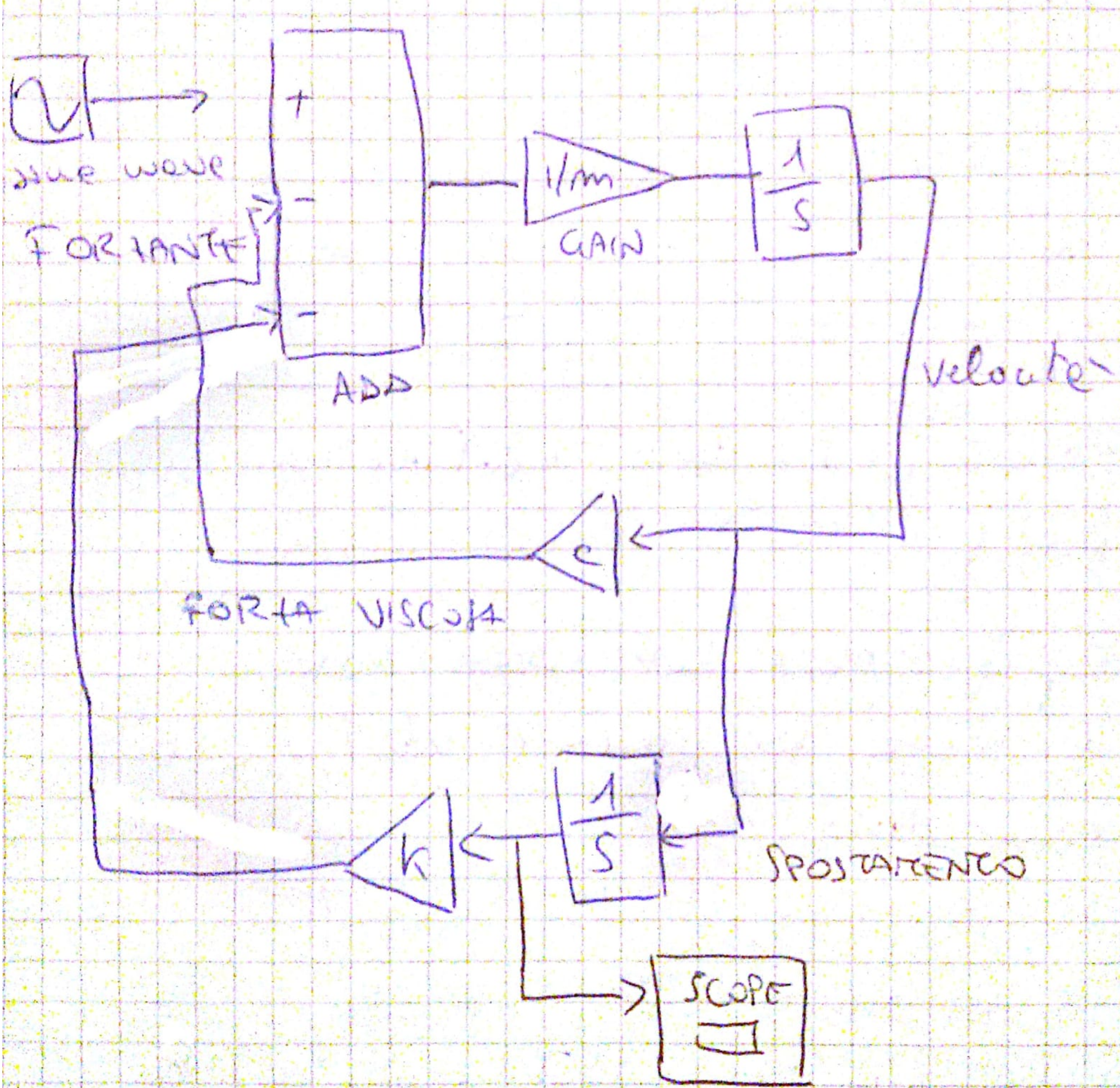
Si vede come cambia il grafico aumentando lo smorzamento c = 4

```
plot(w, FRF, 'r')
```

dopo hold on per sovrapporlo al precedente

Si crea un modello di Simulink, scrivendo l'eq del moto $m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = f$ nel modo seguente:

$$\ddot{x} = \frac{f - c\dot{x} - Kx}{m}$$



Nel workspace:

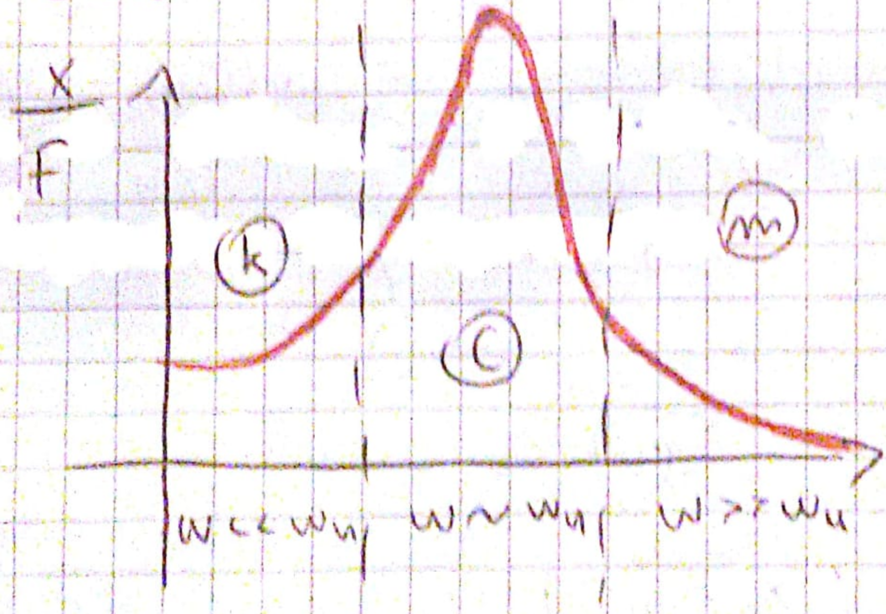
>> F = 1

>> ws = lo molto vicino alla frequenza di risonanza

(max step size 1e-4)

☐ Limit data point to last (History)

la risposta solo a regime è sinusoidale



data → t [ ]
→ x [ ]
dopo la simulazione

time = data.time // come struttura
x = data.signals.values

plot (t, x) dopo figure

si applica la fft su questo segnale

$X = abs(fft(x) * 2 / nnn)$;

per come è strutturata la fft

nnn = length (time);

si deve fare abs() cioè il valore assoluto perché è un numero complesso

frequenze da ∅ a 500

wf = linspace (0, 1000 ,nnn)

*2*pi

→ frequenze

frequenti

frequenza di Nyquist

figure; plot (X, wf)

frequenza di campionamento (il massimo è 1e-4).

Sample time st (Scope) = 1e-4

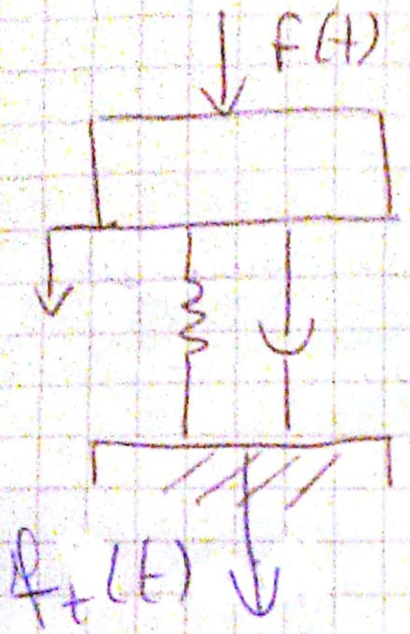
1/st è la f di campionamento in Hz

Come prefisso si deve ottenere una linea che descrive il contenuto in frequenza del segnale perchè si deve considerare il valore di transitorio (e non quello di regime)

un picco 10 // frequenza naturale

un picco 5 // frequenza di eccitazione

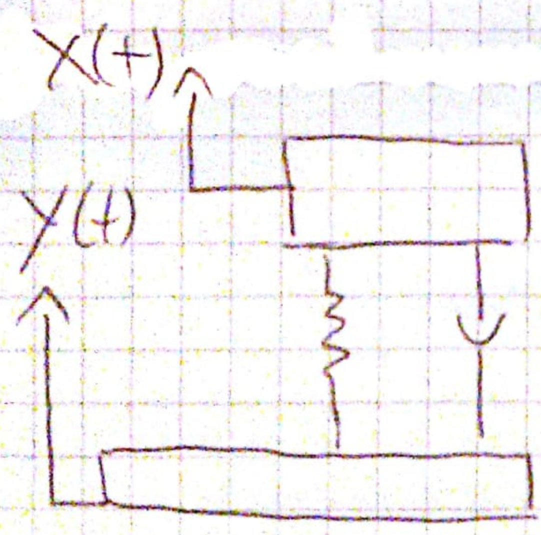
ISOLAMENTO delle VIBRAZIONI



limitare la forza (A)

MASSA SOSPESA

Si ha una forza che sollecita il sistema massa-molla-smorzatore.
Il sistema è eccitato da una massa sospesa e si vogliono limitare le forze trasmesse al telaio, al basamento (Esempio: rumore di un macchinario)



ECCITAZIONE BASE

L'eccitazione proviene dal basamento, a cui è imposta una legge di spostamento (non una forza)

limitare lo spostamento (B)

(Esempio: sospensioni di un auto)

ECCITAZIONE
MASSA SOSPESA

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$$

$$\downarrow \quad f = F\cos(\omega t)$$

$$(-m\omega^2 + cj\omega + k)\,\bar{x} = \bar{F}$$

$$T_F = \frac{\bar{F}_t}{\bar{F}}$$

Come varia l'ampiezza della forza trasmessa in funzione dell'input

$\bar{F}_t$ FORZA TRASMESSA

$$\bar{F}_t = (cj\omega + k)\,\bar{x}$$

La forza trasmessa al telaio ha una fase complessa, rispetto alla forzante, perché è una risposta

La forza trasmessa al telaio (che non si muove) è uguale ed opposta a quella delle due componenti (molla) e (smorzatore)

La Trasmissibilità del sistema è:

$$T_F = \frac{F_t}{F} = \frac{cj\omega + K}{-m\omega^2 + cj\omega + K}$$ (A)

ECCITAZIONE BASE (B)

la deformazione della molla, in questo caso dipende da x e y

La molla si deforma se $x \neq y$

$$m\ddot{x} + K(x-y) + c(\dot{x}-\dot{y}) = 0$$

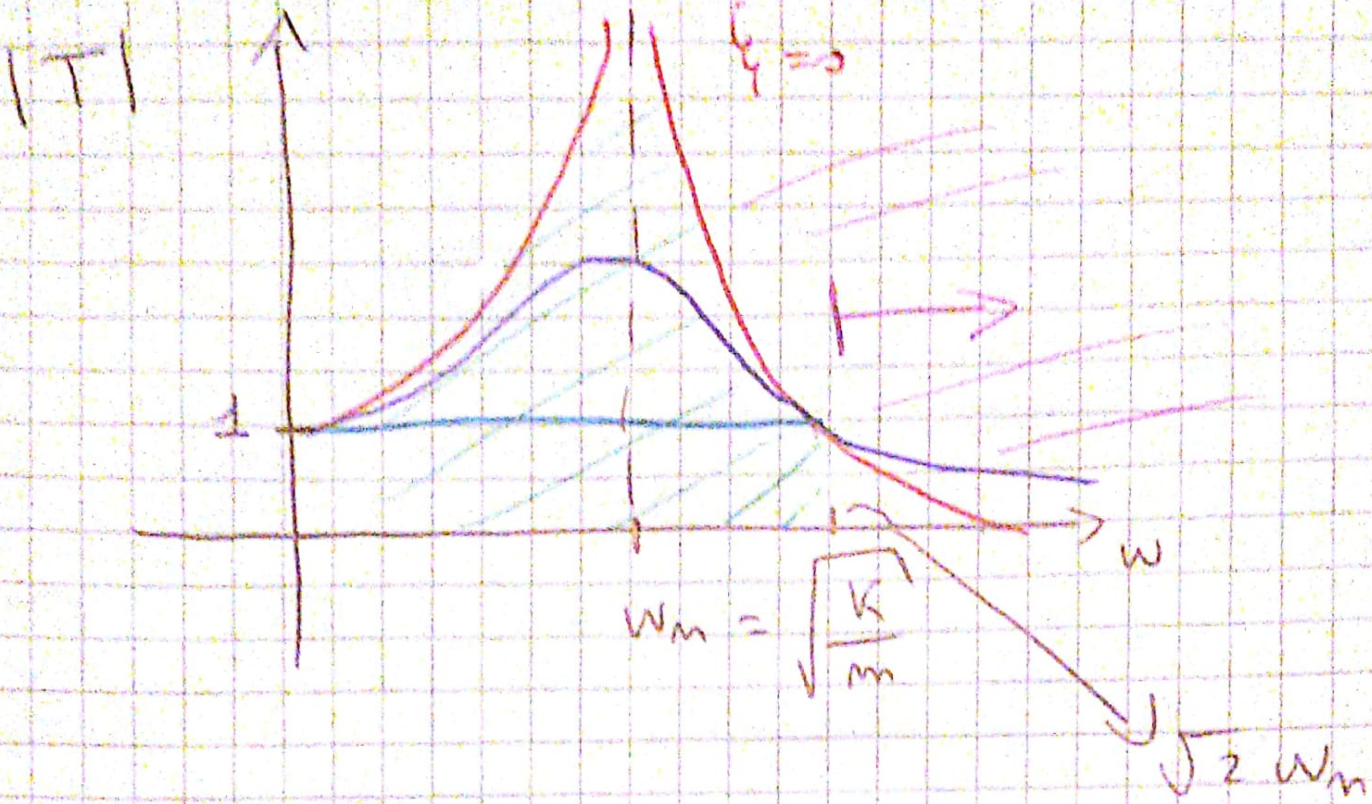
non c'è nessun'altra forza nel sistema

$$m\omega^2\bar{x} + cj\omega(x-y) + K(x-y) = 0$$

I termini noti sono quelli della legge imposta y

trasmissibilità

$$\frac{\bar{X}}{Y} = T_D = \frac{cj\omega + K}{-m\omega^2 + cj\omega + K}$$



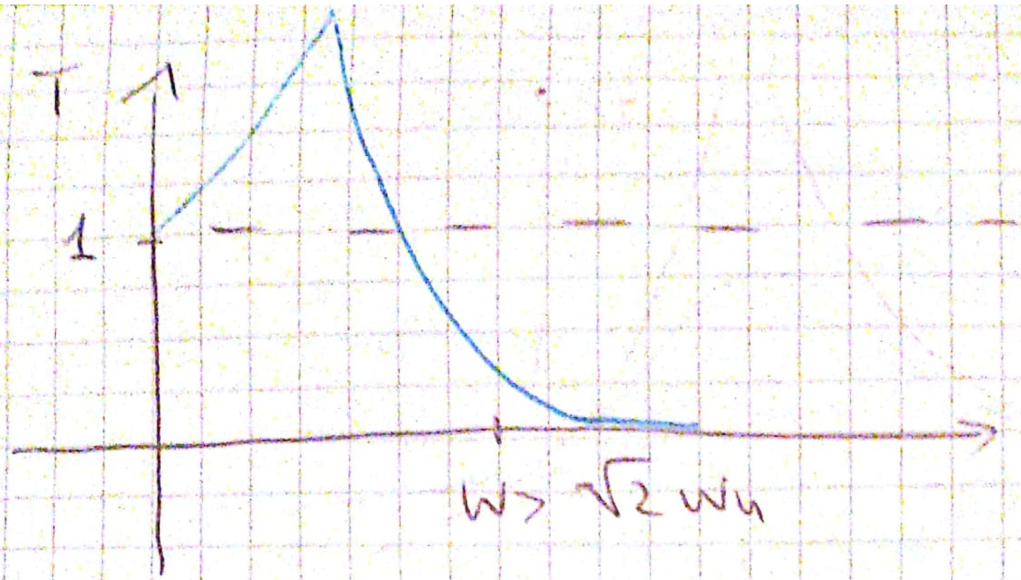
$T_F = T_D = T$

$\omega = 0$ caso statico

la forza trasmessa è > 1 in questa regione (la risposta è amplificata)

per $\omega > \sqrt{2}\,\omega_n$ si ha un peggioramento dell'isolamento

Per avere isolamento e non amplificazione allora $\omega > \sqrt{2}\,\omega_n$



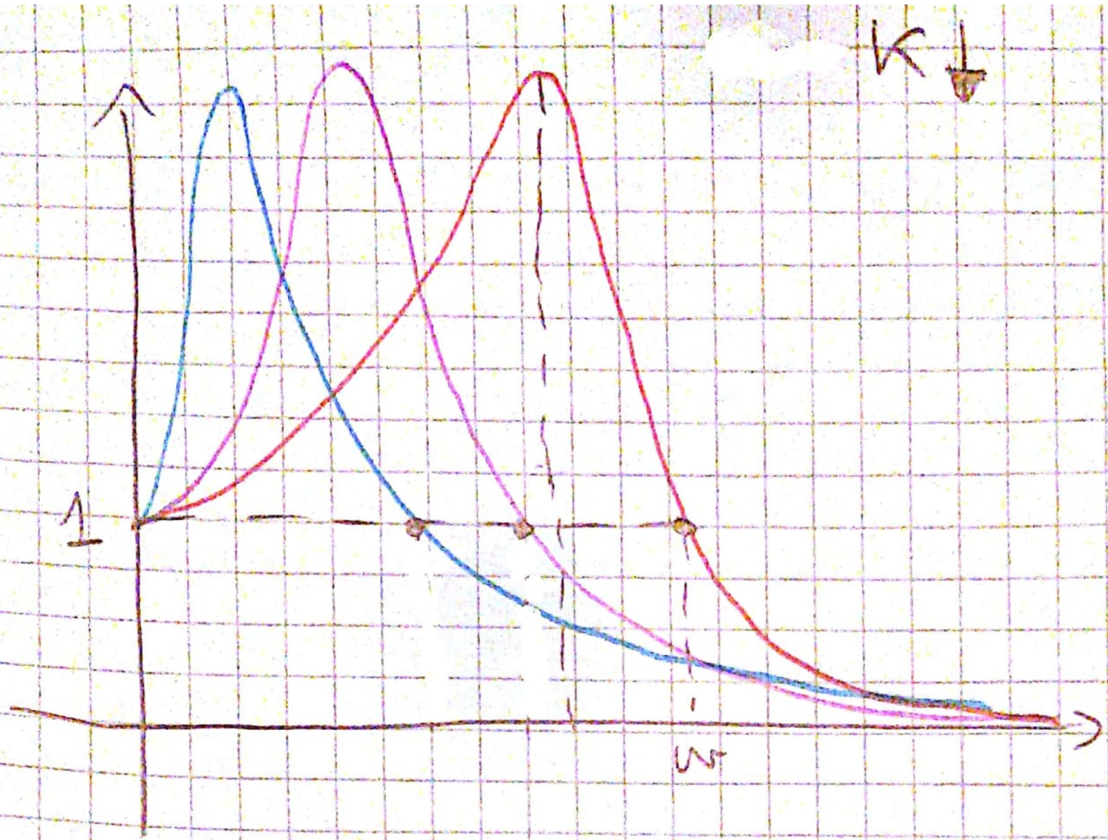
$\downarrow w$ $\uparrow$ isolamento

e poiché di meno $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$ si deve agire su K

Se K $\downarrow$ molto bene, $\omega_n \downarrow$ e si aumenta la probabilità che alle frequenze di lavoro si rientra nella regione di isolamento $\longleftrightarrow$

Se la molla è molto rigida, è come se il sistema fosse un blocco unico

Se la molla è molto cedevole, non trasmette niente



La nella funzione da filtro, più è celerale più conviene dal punto di vista dinamico.

Lo svantaggio è nel caso statico.