$\hat{x}$ punto di equilibrio
1) localmente stabile
2) localmente attrattivo
3) localmente asintoticamente stabile
4) instabile (né attrattivo né stabile)

Criterio di Lyapunov

Funzioni di Lyapunov

$$V(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$V(0_x) = 0$ applicando V allo stato nullo

$V(x) > 0$

$\forall x \in B_\rho(0x)$ $\begin{cases} V(x) \geq 0, & \rho \geq 0 \\ V(x) \leq 0, & \rho \leq 0 \\ V(x) < 0, & \rho < 0 \end{cases}$ altri casi

$\rho > 0$

Criterio di Lyapunov locale

Sia $\dot{x} = f(x)$ e $0x$ un punto di equilibrio

Se esiste $V(x) \in C^1$ tale che

1) $V(x)$ è localmente definita positiva, $V(x) \geq 0 \quad \forall x \in B_\delta(0_x) / 0_x$

2) $\dot{V}(x)$ è localmente semi definita negativa, $\dot{V}(x) \leq 0$
$\forall x \in B_\delta(0_x) / 0_x$

allora 0_x è localmente stabile

se la 2) è sostituita dalla 2')

2') $\dot{V}(x)$ è localmente definita negativa, $\dot{V}(x) < 0$
$\forall x \in B_\delta(0_x) / 0_x$ → tranne

intorno di delta

allora 0_x è localmente asintoticamente stabile

Se la 2) è vera potrebbe essere vera anche 2')

Questo criterio si basa sulla scelta di $V(x)$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1}\dot{x}_1(t) + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2}\dot{x}_2(t) + \dots \frac{\partial V(x)}{\partial x_n}\dot{x}_n(t)$$

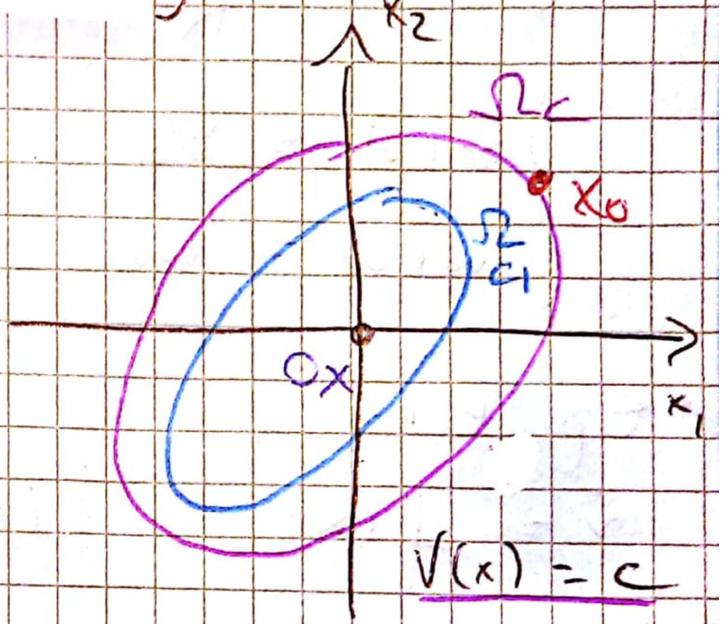
Dimostrazione

$$\Omega_c(x) = \{x : V(x) \leq c\}$$

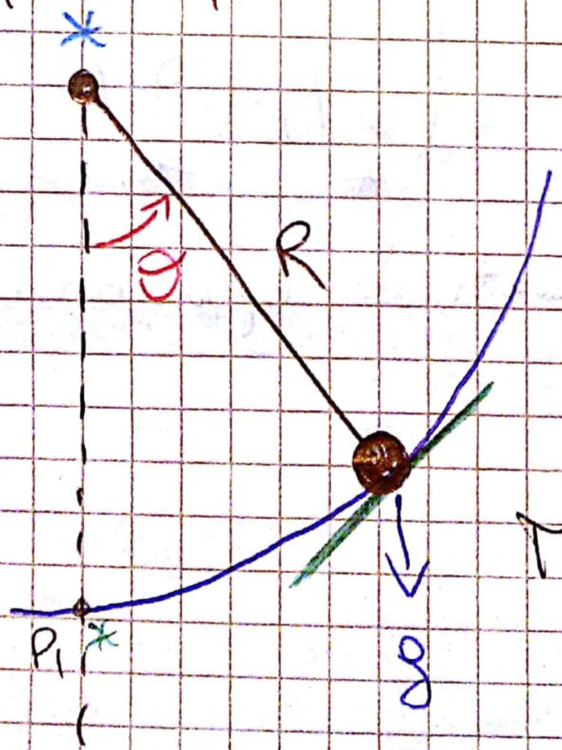
per cui

In due dimensioni:
→ forma una curva di livello

$V(x) = c_1$, $c_1 < c$



Esempio: pendolo



bilancio delle forze tangenziali

$$MR\ddot{\theta} = -Mg\sin\theta - Mk\dot{\theta}$$

Rappresentazione di stato

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = \omega \\ \ddot{\vartheta} = -\frac{g}{R} \operatorname{sen}\vartheta - \frac{K}{R}\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vartheta(0) = \vartheta_0 \\ \omega(0) = \omega_0 \end{cases}$$

Equilibri

$\dot{x} = f(x) \qquad f(x_0) = 0_x$

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ -\frac{g}{R} \operatorname{sen}(\vartheta) = 0 \end{cases} \qquad \underset{\times}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{*}{\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}} \text{ in verticale}$$

sono i due punti di equilibrio del pendolo

Senza attrito ($k=0$)

$$V(\vartheta, \omega) = \frac{1}{2} MR^2\omega^2 + MgR(1-\cos\vartheta)$$

↳ 0 parte all'equilibrio P_1, questo fattore è sempre >0 per tutti gli altri punti $\forall\, \omega$, $\forall\, \vartheta \in (-\pi, \pi)$

$$\dot{V}(\vartheta,\omega) = MR^2\omega\dot{\omega} + MgR\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\dot{\vartheta}$$
$$= MR^2\omega\left(-\frac{g}{R}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\right) + MgR\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\omega$$
$$= 0$$ sempre

Senza attrito il punto P_1 è stabile il moto si conserva (È un punto di stabilità locale, ma in questo caso anche globale) il pendolo non si arresta

Con attrito

$$\dot{V}(\vartheta,\omega) = MR^2\omega\dot{\omega} + MgR\,\text{sen}\,\vartheta\,\dot{\vartheta} =$$

$$= MR^2\omega\left(-\frac{g}{R}\,\text{sen}\,\vartheta - \frac{K\omega}{R}\right)$$

$$+ MgR\,\text{sen}\,\vartheta\,\omega = -MR\omega^2K^*$$

sempre ≤ 0

(Con attrito e senza attrito per $\vartheta = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$)

Questo perchè la funzione di Lyap. deve valere $\emptyset$ nel punto di equilibrio che si sta analizzando.

* è zero quando $\omega = 0$

È soltanto stabile e non asintoticamente stabile perchè la $V()$ scelta non è buona.

Criterio di Krasowski:

si usa quando si vuole analizzare la ASINTOTICA STABILITÀ locale

Sia $\dot{x} = f(x)$ e 0_x punto di equilibrio

Se $\exists\ V(x) \in C^1$ tale che

1) $V(x)$ è localmente definita positiva $\forall x \in B_\delta(0_x) / 0_x$

2) $\dot{V}(x)$ è localmente semidefinita negativa $\forall\ x \in B_\delta(0_x) / 0_x$

3) l'insieme $V = \{x \mid \dot{V}(x) = 0\}$ non contiene completamente traiettorie perturbate perturbate tranne che $x(t) = 0_x, \forall t$ (la soluzione nominale)

Allora 0_x è localmente asintoticamente stabile.

Calcolo V

$\dot{V}(\theta, \omega) = -MRK\omega^2 \Rightarrow$

$V = \{\theta, \omega$ t.c. θ arbitrario, $\omega = 0\}$

L'unico moto con velocità nulla è il punto di equilibrio stesso.
L'unico moto contenuto in $\bar{V}$ è quello nominale, quindi $0x$ è asintoticamente stabile
Se questo criterio non è verificato, allora non si può dire nulla, soltanto che è stabile (condizione sufficiente)

Criterio di Lyapunov globale
Sia $\dot{x} = f(x)$, $0x$ punto di equilibrio
Se $\exists$ $V(x) \in C^1$ tale che

1) $V(x)$ globalmente definita positiva, $V(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n / 0x$
2) $\dot{V}(x)$ globalmente semidefinita negativa, $\dot{V}(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n / 0x$

3) $V(x)$ radialmente illimitata

cioè $\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = \infty$

allora 0_x è globalmente stabile

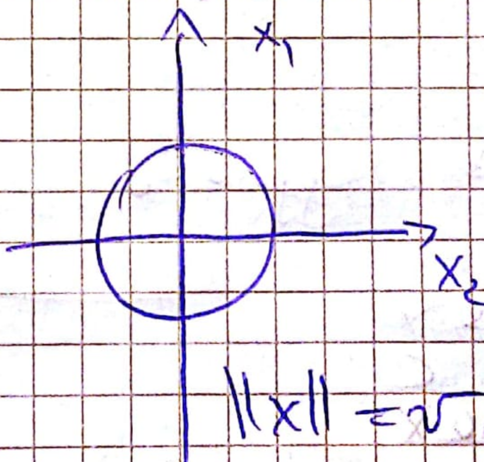
se 2) è sostituita da 2')

2') $\dot{V}(x)$ globalmente definita negativa

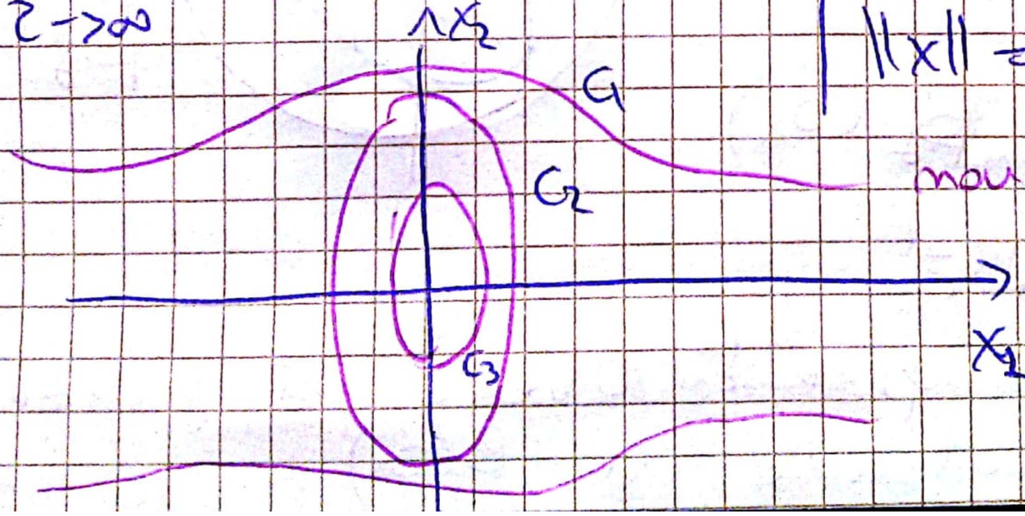
$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n / 0_x$

allora 0_x globalmente asintoticamente stabile

Se non vale la 3) si perde la condizione sulla chiusura delle curve di livello



$\lim_{r \to \infty} V(x) = \infty$

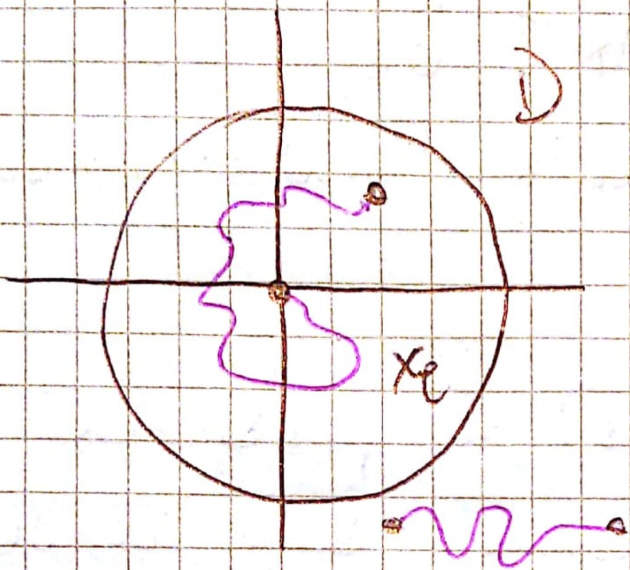


non è chiusa

$V(x)$ non è rad. ill.

Dominio di attrazione (stime)

D è detto dominio di attrazione di un punto di equilibrio x_e localmente asintoticamente stabile se $x(0) \in D$ il moto perturbato converge a x_e

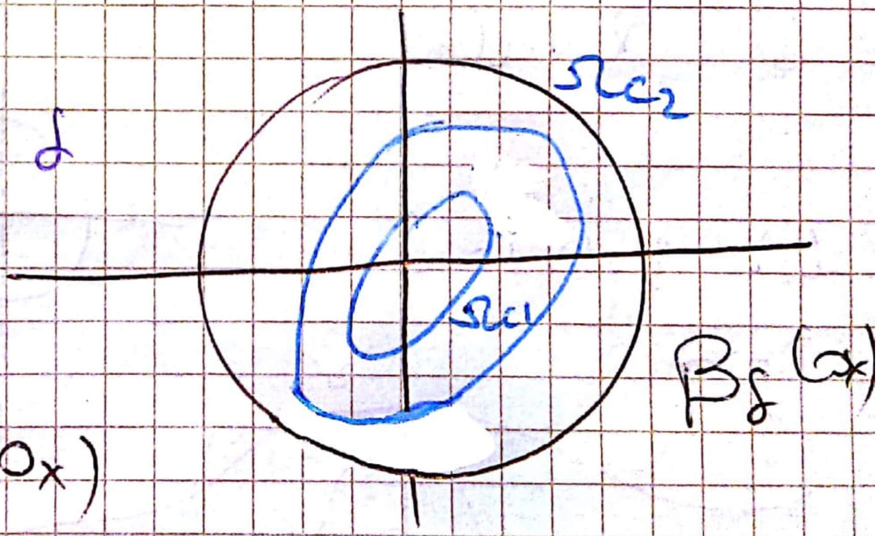


$\Omega_c = \{ x : V(x) \leq c \}$

$V(x) > 0$ in $B_\delta(0_x)$

$\dot{V}(x) < 0$ in $B_\delta(0_x)$

sfera di raggio δ



$$\begin{cases} \bar{c} = \max_c \\ \Omega_c \subset B_\delta(0_x) \\ D = \Omega_{\bar{c}} \end{cases}$$

↳ superficie di livello più grande contenuta in $B_\delta(0_x)$

Se un sistema ha due punti di equilibrio abbiamo due domini di attrazione, quindi nessuno dei due può coincidere con $\mathbb{R}^n$, sono entrambi locali. Uno solo può essere asintoticamente stabile (come nel pendolo)