Risposta forzata TD

$$\begin{cases} x_{k+1} = A x_k + B u_k, \; x_0 \\ y_k = C x_k + D u_k \end{cases}$$

$$W_{yu}(z) = C(zI - A)^{-1} B + D$$

$$\begin{cases} x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u_i \\ y_k = C A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} C A^{k-i-1} B u_i + D u_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_k^f = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u_i \\ y_k^f = \sum_{i=0}^{k} w_{k-i} u_i \end{cases}$$

risposta forzata nello stato e nell'uscita

$(x_0 = 0)$

$$w_k = \begin{cases} D \\ C A^{k-1} B, \; k > 0 \end{cases} \Rightarrow y_k = C A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k} W_{k-i} u_i$$

risposta impulsiva

$$Z(y_k^f) = Z\left(\sum^{k} W_{k-i} u_i\right)$$

$y^f(z) = W_{yu}(z)\, u(z)$

N.B.

$\mathcal{Z}(\omega_k) = W_{yu}(z)$

sequenza della risposta impulsiva

*

1) Calcolo di $\mathcal{Z}(u_k) = u(z)$

2) $y^f(z) = W_{yu}(z)\, u(z)$

3) $y^f_k = \mathcal{Z}^{-1}(W_{yu}(z)\, u(z))$

procedure che viene applicata

Risposta ai segnali modali TD

sono ingressi del tipo

$u_k = u\, \lambda^k \quad , \quad u \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} x(z) = z(zI-A)^{-1}x_0 + (zI-A)^{-1}B\, u(z) \\ y(z) = zC(zI-A)^{-1}x_0 + [C(zI-A)^{-1}B+D]\cdot u(z) \end{cases}$$

nello stato

nell'uscita

La trasformata zeta è $\boxed{\mathcal{Z}(u_k) = \dfrac{u}{z-\lambda}\, z}$

Allora ad $u(z)$ si sostituisce il valore di questa trasformata e si ottiene:

$$\begin{cases} x(z) = z(zI-A)^{-1}x_0 + (zI-A)^{-1}B\dfrac{u}{z-\lambda} \\ y(z) = zC(zI-A)^{-1} + [C(zI-A)^{-1}B+D]\dfrac{u}{z-\lambda} \end{cases}$$

Usando il trucco tecnico:

$$\begin{cases} x(z) = z(zI-A)^{-1}[x_0-x_f] + (\lambda I-A)^{-1}B\dfrac{u}{z-\lambda} \\ y(z) = zC(zI-A)^{-1}[x_0-x_f] + [C(\lambda I-A^{-1})B + D]\dfrac{u}{z-\lambda} \end{cases}$$

dove $x_f = (\lambda I - A)^{-1}Bu$

Facendo l'antitrasformata si trova che:

$$\begin{cases} x_k = A^k[x_0-x_f] + W_{xu}(\lambda)\, u\, \lambda^k \\ y_k = CA^k[x_0-x_f] + W_{yu}(\lambda)\, u\, \lambda^k \end{cases}$$

*

Scanned by CamScanner

$$W_{xu}(\lambda) = (zI - A)^{-1}B \Big|_{z=\lambda}$$

$$W_{yu}(\lambda) = C(zI-A)^{-1}B + D \Big|_{z=\lambda}$$

Si calcola la risposta al gradino:

$$u_k = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \iff u_k = u\lambda^k$$

con $u = 1$, $\lambda = 1$

$$x_f = (I-A)^{-1}B$$

risposta in regime permanente

$$x_k = A^k[x_0 - x_f] + \underbrace{W_{xu}(1) \cdot 1}$$

$$y_k = CA^k[x_0 - x_f] + \underbrace{W_{yu}(1) \cdot 1}$$

A tempo discreto, i guadagni in continua si calcolano sostituendo 1 a z

$$\left.\begin{array}{l} W_{xu}(1) \\ W_{yu}(1) \end{array}\right\} \text{guadagni in continua}$$

u costante $\rightarrow$ y costante

Analogia con sistemi TC

$$y_k^f = \underbrace{-CA^k x_f}_{} + \underbrace{W_{yu}(\lambda)\, u\, \lambda^k}_{}$$

risposta forzata in regime transitorio

risposta forzata in regime permanente

Segnali sinusoidali

$\lambda_1 = e^{j\omega}$, $\lambda_2 = e^{-j\omega}$

$$u_k = \frac{u\lambda_1^k - u\lambda_2^k}{2j} = u \cdot \text{sen}(\omega_k)$$

Dove:

$$e^{j\omega k} = \cos(\omega k) + j\,\text{sen}(\omega k)$$

$$e^{-j\omega k} = \cos(\omega_k) - j\,\text{sen}(\omega_k)$$

$$\begin{cases} x_k = A^k[x_0 - x_f] + W_{xu}(\lambda)\, u\, \lambda^k \\ y_k = CA^k[x_0 - x_f] + W_{yu}(\lambda)\, u\, \lambda^k \end{cases}$$

$$y_k = CA^k\left[x_0 - W_{xu}(e^{j\omega})\frac{u}{2j} - W_{xu}(e^{-j\omega})\frac{(-u)}{2j}\right] + W_{yu}(e^{j\omega})\frac{u}{2j}e^{j\omega k} + W_{yu}(e^{-j\omega})\left(\frac{-u}{2j}\right)e^{-j\omega k}$$

$$= CA^k [x_0 - \underbrace{|W_{xu}(e^{j\omega})| \, u \, sen(\angle W_{xu}(e^{-j\omega}))}_{x_p} +$$

$$|W_{yu}(e^{j\omega})| \, u \, sen(\omega k + \angle W_{yu}(e^{j\omega}))$$

Quindi:

$$e^{j\omega k} = \cos(\omega k) + j \, sen(\omega k)$$

$$e^{-j\omega k} = \cos(\omega k) - j \, sen(\omega k)$$

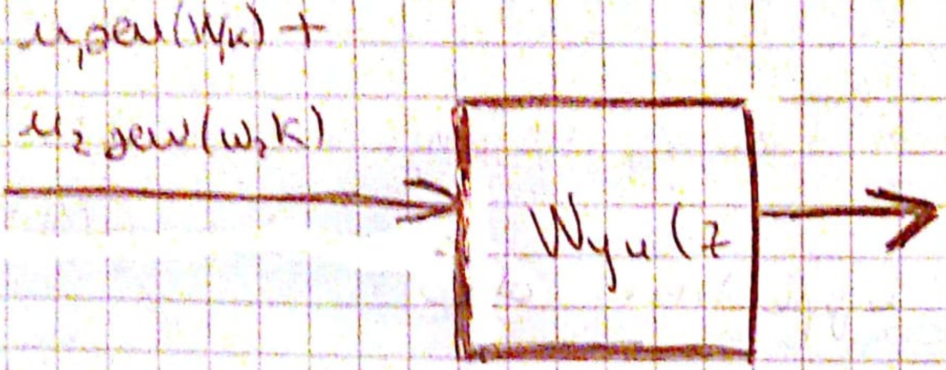
N.B. periodi di periodo 2π

$W_{yu}(e^{j\omega})$ guadagno in frequenza TD

$|W_{yu}(e^{j\omega})|$ modulo del guadagno in frequenza

$\angle W_y(e^{j\omega})$ fase del guadagno in frequenza

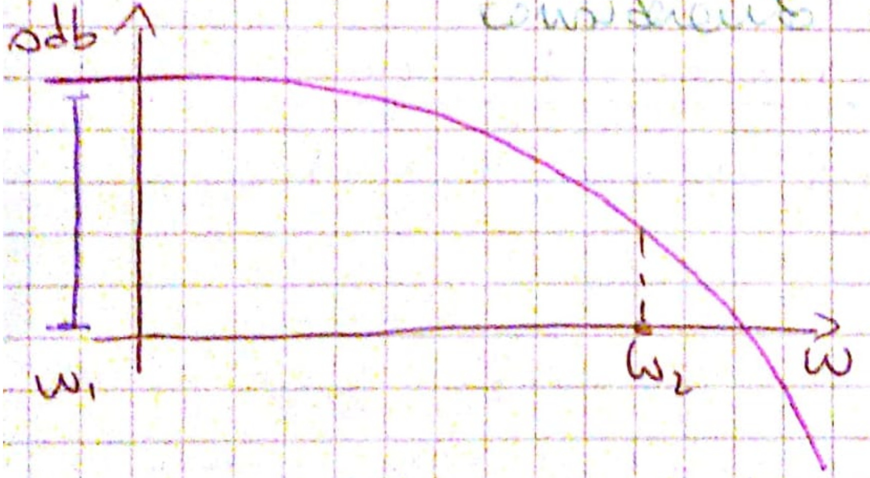
$$u \, sen \, \omega k \longrightarrow \boxed{W(z)} \longrightarrow u \, |W(e^{j\omega})| \, sen(\omega k + \angle W(e^{j\omega}))$$



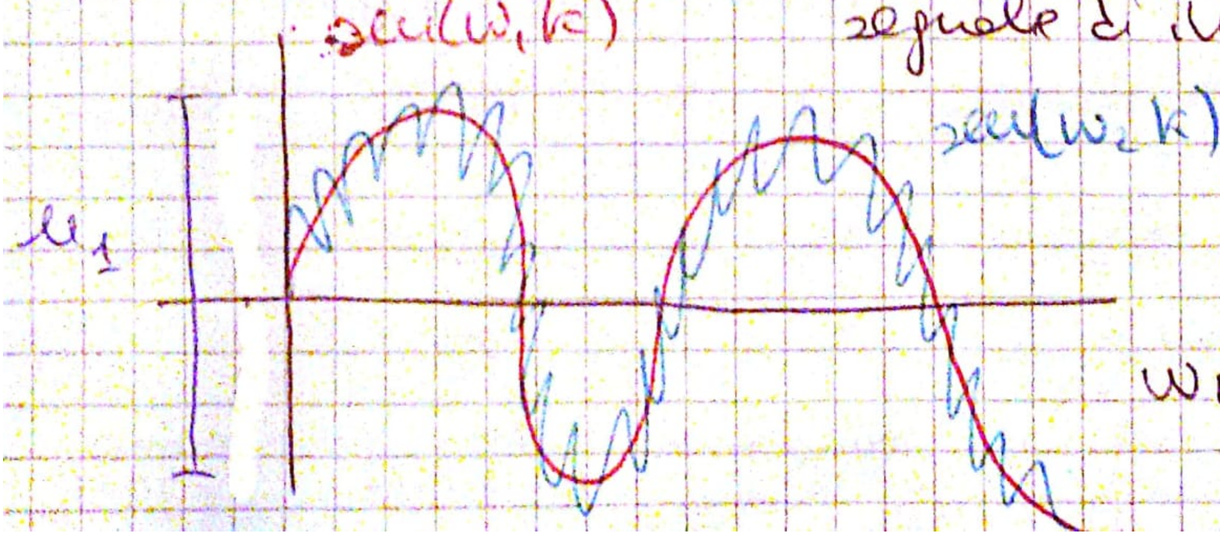
$$\overbrace{|W_{yu}(e^{jw_1})|}^{1}\, u_1 \sin(w_1 k + \angle W_{yu}(e^{jw_1})) +$$

$$\overbrace{|W_{yu}(e^{jw_2})|}^{0.01}\, u_2 \sin(w_2 k + \angle W_{yu_2}(e^{jw_2})$$

considerando un filtro passa-basso



w_2 è considerato un disturbo, rispetto a w_1, che è il segnale di interesse



$w_1 << w_2$

TD:

$$y_k = CA^k[x_0 - x_f] + W_{yu}(\lambda)\, u\, \lambda^k$$

$$\lambda \in \rho(A)$$

spettro

TC:

$$y(t) = Ce^{At}[x_0 - x_f] + W_{yu}(\lambda)\, u\, e^{\lambda t}$$

λ non appartiene allo spettro di A, quindi non può essere un polo del sistema. E' uno zero?

$$W_{yu}(z) = \frac{(z-z_1)(\ -z_2)\dots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_n)}$$

z_i sono gli zeri del sistema, sono i valori a cui corrispondono gli ingressi modali che danno luogo a risposta nulla

In un sistema che ha m zeri, esistono m INGRESSI NASCOSTI $u\, e^{z_i t}$

questi ingressi modali non producono

ci porta lontano perché si annullano con gli zeri del sistema

STABILITA' DEI SISTEMI DINAMICI

(spiegazione per sistemi a tempo continuo, differenze con quelli a tempo discreto)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \quad , x(0) = x_0 \\ y = \eta(x, u) \end{cases}$$

1) STABILITA' INTERNA

(stabilità della soluzione nominale rispetto a perturbazioni dello stato iniziale)

$\hat{x}(t) = \varphi(t, x(0), \hat{u}_{[0,t)})$

è la soluzione nominale

si perturba la condizione iniziale

$x(t) = \varphi(t, \hat{x}(0) + \varepsilon, \hat{u}_{[0,t)})$

è la soluzione perturbata $\rightarrow$

studio della stabilità interna

2) STABILITÀ ESTERNA

(stabilità della soluzione nominale rispetto a perturbazioni dell'ingresso)

$x(t) = \gamma(t, \hat{x}(0), \hat{u}(t) + \tilde{u}(t))$

è la soluzione perturbata che si vuole studiare

si perturba l'ingresso

Stabilità interna ($u(t) = 0$)

sistemi autonomi

$\dot{x} = f(x)$, $\hat{x}(0)$ $\qquad \hat{x}(0) \longrightarrow \hat{x}(t)$ $\quad \forall t \geq 0$

moto del sistema

PUNTI DI EQUILIBRIO

$\dot{x} = f(x) \Rightarrow \bar{x}$ t.c. $f(\bar{x}) = \emptyset_x$

a tempo continuo i punti di eq. sono tutti gli stati costanti, in cui la derivata è nulla

$\hat{x}(0) = \bar{x} \Rightarrow \hat{x}(t) \equiv \bar{x} \quad \forall t \geq 0$

a tempo discreto

$x_{k+1} = f(x_k)$ eq. alle differenze

i punti di eq. sono tutti i punti

$\bar{x}$ t.c. $f(\bar{x}) = \bar{x}$ $\Rightarrow$

$x_0 = \bar{x} \Rightarrow x_k \equiv \bar{x}, \quad \forall k \geq 0$

Soluzioni periodiche

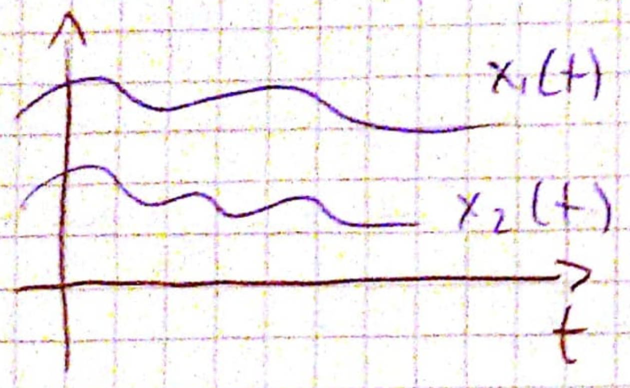
$\varphi(t, \hat{x}_0) = \varphi(t + T, \hat{x}_0)$

in cui T è il più piccolo reale per cui vale questa equazione è detto periodo del moto

moto: $x(t) = \varphi(t, \hat{x}_0)$

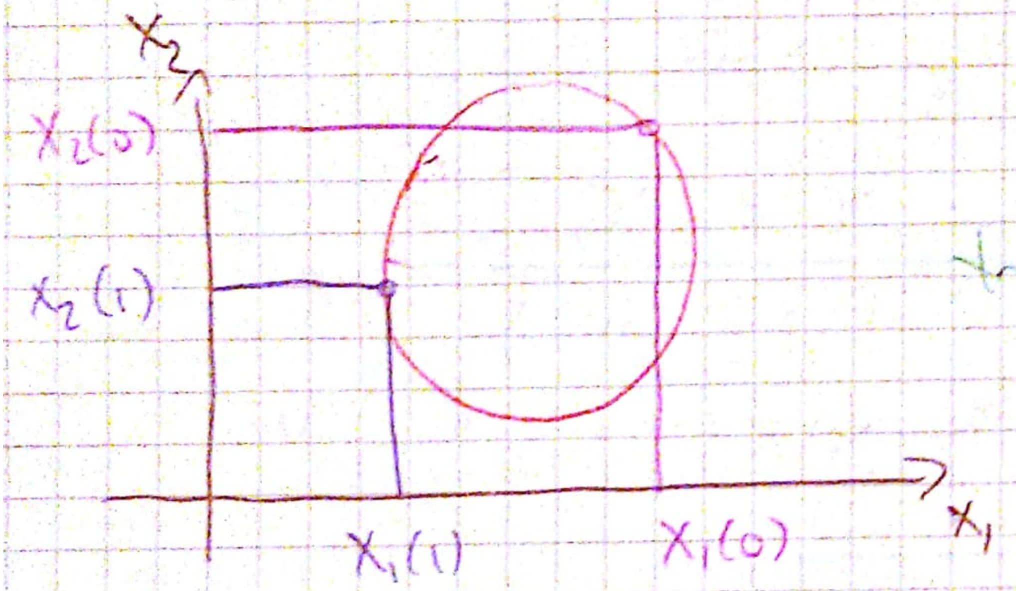
traiettoria: proiezione del moto sul piano delle fasi

$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ sono le coordinate del moto nel tempo (diagramma temporale)



moto

Nel piano delle fasi:



traiettoria

La traiettoria non dipende dal tempo
È il luogo percorso nel piano delle fasi.
I moti periodici danno luogo a traiet=torie chiuse, detti <u>cicli</u>
Si può studiare la stabilità dei moti e delle traiettorie

Si consideri il seguente sistema:

$\dot{x} = f(x)$, $x(0) = \hat{x}_0$

Se $\hat{x}_0$ un punto di equilibrio di f

<u>stabilità di un punto di equilibrio</u>

$\hat{x}_0$ è stabile se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\hat{x}_0, \varepsilon)$ t.c. $\|x_0 - \hat{x}_0\| < \delta \Rightarrow \| x(t) - \hat{x}_0 \| < \varepsilon$ $\forall t \geq 0$

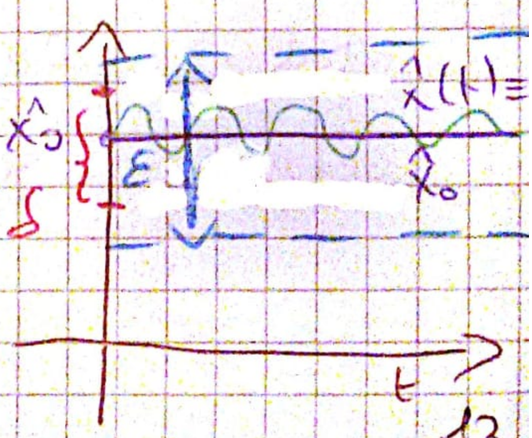
(ε è scelto piccolo a piacere)

$x_0 - \hat{x}_0$ è la perturbazione sulla condizione iniziale.

Se la soluzione perturbata non si scosta troppo dalla soluzione di equilibrio, allora il punto di equilibrio è stabile

$\hat{x}_0 \longmapsto \hat{x}(t) \equiv \hat{x}_0$

$x_0 \longmapsto x(t)$



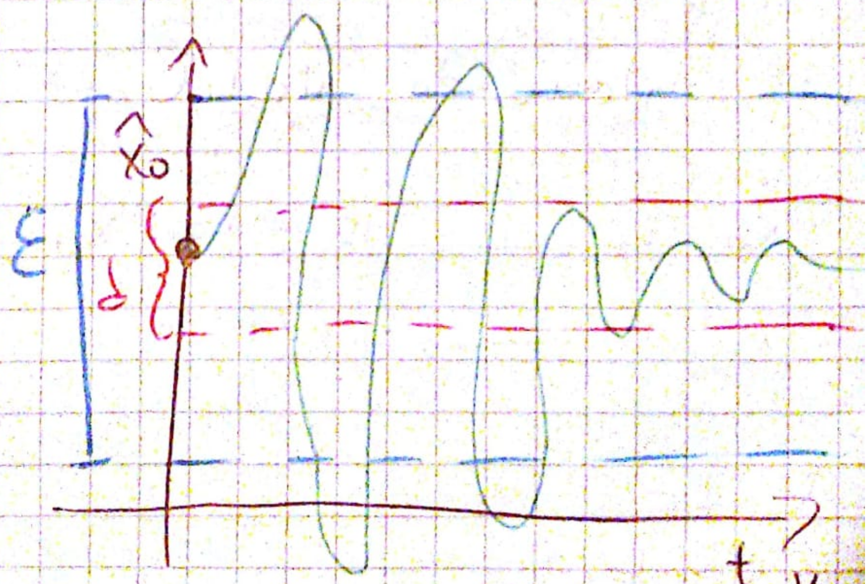
δ intorno della condizione iniziale

E' un tipo di stabilità locale, perché la perturbazione della condizione iniziale non può avvenire dovunque, ma nell'intervallo descritto da ε.
Tanto più si riduce la perturbazione δ sullo stato iniziale, più si riduce la perturbazione sulla soluzione.

<u>Attrattività di un punto di equilibrio</u>

$\hat{x}_0$ è localmente attrattivo se
$\exists\ \delta(\hat{x}_0) > 0$, t.c. $\|x_0 - \hat{x}_0\| < \delta \Rightarrow$
$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - \hat{x}_0\| = 0$

asintoticamente, converge a zero



L'attrattività e la stabilità di un punto di equilibrio sono due proprietà differenti: un punto di ep. può essere stabile ma non attrattivo o viceversa.
Se un punto di equilibrio è sia stabile che attrattivo allora si dice localmente asintoticamente stabile.

$\hat{x}_0$ globalmente attrattivo

$\hat{x}_0$ globalmente asintoticamente stabile

$\hat{x}_0$ globalmente stabile

Se qualsiasi punto torna comunque al valore nominale si dice globalmente attrattivo.
Nei sistemi lineari le proprietà sono globali.

STABILITÀ QUADRATICA

$x(t) \longmapsto 0_x$ quadraticamente

$$x(t) < 1/t^2$$

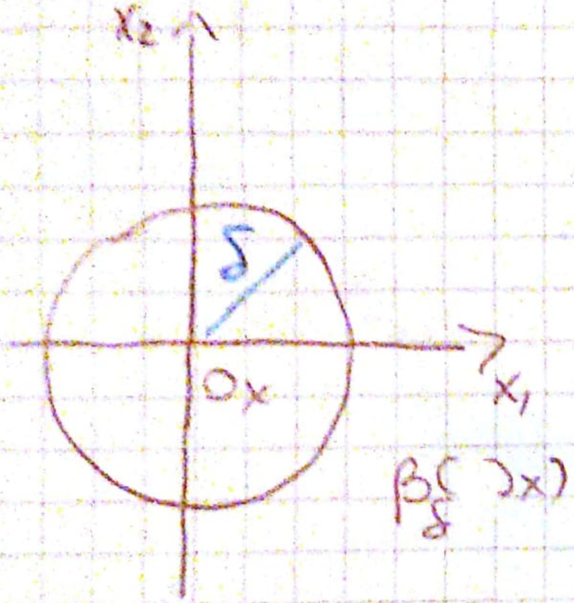
STABILITA' ESPONENZIALE

$x(t) \longrightarrow 0_x$

esponenzialmente $x(t) < e^{-\alpha t}$

CRITERI DI STABILITA' LOCALE di 0_x

Criterio di LYAPUNOV



Funzioni di Lyapunov

$V(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

continue e con derivate continue

Esempio $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longrightarrow V(x) = x_1^2 + V(x)\, x_1^2$

Dà un valore positivo (come se misurasse la distanza da 0)

$V(0_x) = 0_x$ e $V(x)$ è semidefinita positiva in $B_\delta(0_x)$

Quindi $\begin{cases} V(0_x) = 0 \\ V(x) \geq 0 \quad \forall x \in B_\delta(0_x) \end{cases}$

$V(x)$ è definita positiva in $B_\delta(0x)$

se $\begin{cases} V(0x) = 0 \\ V(x) > 0 \quad \forall x \in B_\delta(0x) \end{cases}$

(vale anche per i negativi)

VALIDITA' LOCALE

vale in un intorno $B_\delta(0x)$

VALIDITA' GLOBALE

Funzione di Lyapunov quadratica

$V(x) = x^T P x \qquad P = P^T$

$V(x)$ globalmente definita positiva

$P > 0$ (tutti gli autovalori > 0)

$V(x)$ globalmente semidefinita positiva

$P \geq 0$

(vale per i negativi $<$ e ≤ 0)

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2$$