LEZIONE 6

$$(zI-A)^{-1} = \frac{Adj(zI-A)}{det(zI-A)} = \frac{A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_m}{z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \ldots + \alpha_m} =$$

$\in \mathbb{R}^{n \times m}(z)$

$\mathbb{R}^{n \times m}(z)$ spazio delle matrici a elementi razionali di dimensione $n \times m$

$$W_{xu}(z) = (zI-A)^{-1} B = \frac{A_1 B z^{m-1} + A_2 B z^{m-2} + \ldots + A_m B}{z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \ldots + \alpha_m}$$

$$W_{yu}(z) = C(zI-A)^{-1}B + D =$$

$$= \frac{CA_1 B z^{m-1} + CA_2 B z^{m-2} + \ldots + CA_m B}{*} + \frac{D(z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \ldots \alpha_m)}{* \; z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \ldots \alpha_m} =$$

$$= \frac{Dz^n + (CA_1 B + \alpha_1 D) z^{n-1} + \ldots + (CA_m B + \alpha_m D)}{z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \ldots + \alpha_m}$$

$A_i B = \Gamma_i \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad \forall i = 1 \ldots m$

$$\begin{cases} B_0 = D \in \mathbb{R}^{p \times m} \\ B_i = CA_i B + \alpha_i D \in \mathbb{R}^{p \times m} \end{cases}$$

$$W_{xu}(z) = \frac{\Gamma_1 z^{n-1} + \Gamma_2 z^{n-2} + \dots + \Gamma_n}{z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots \alpha_n} \in \mathbb{R}^{n \times m}(z)$$

$$W_{yu}(z) = \frac{\beta_0 z^n + \beta_1 z^{n-1} + \dots \beta_n}{z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots \alpha_n} \in \mathbb{R}^{p \times m}(z)$$

$W(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ si dice proprio se $\partial D(z) = \partial N(z)$

$W(z)$ si dice strettamente proprio se $\partial D(z) > \partial N(z)$

$W(z)$ proprio $\iff$ se $\partial D(z) > \partial N(z)$

Dove ∂ denota il grado di un polinomio

Se $W_{yu}(z)$ proprio $\iff$ sistema causale con $D \neq 0$

Se $W_{yu}(z)$ strettamente proprio $\iff$ sistema strettamente causale

$$y(t) = W_{yu}(z)\, u(t) = \frac{\beta_0 z^n + \dots + \beta_n}{z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n}\, u(t)$$

$$y(\sigma) = W_{yu}(\sigma)\, u(\sigma)$$

$$(z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots \alpha_n)\, y(t) = (\beta_0 z^n + \beta_1 z^{n-1} + \dots + \beta_n)\, u(t)$$

$$y^n(t) + \alpha_1 y^{n-1}(t) + \dots + \alpha_n y(t) = \beta_0 u^n(t) + \beta_1 u^{n-1} + \dots \beta_n u(t)$$

$$\boxed{y^n(t) = -\alpha_1 y^{n-1}(t) - \alpha_2 y^{n-2}(t) - \dots - \alpha_n y(t) + \beta_0 u^n(t) + \dots + \beta_n u(t)}$$

$$y^{n-1}(0),\ y^{n-2}(0),\ \dots,\ y(0)$$

rappresentazione ottenuta a partire da una rappresentazione di stato: la sua i/u

Si effettua la stessa cosa per lo stato:

$$x(t) = W_{xu}(z)\, u(t) \implies$$

$$(z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n)\, x(t) = (\Gamma_1 z^{n-1} + \dots + \Gamma_n)\, u(t)$$

Esempio

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$W_{xu}(z) = (\ I - A)^{-1} B$$

Dove $sI - A$ è la seguente matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}$$

La sua inversa è $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$W_{xu}(s) = (sI - A)^{-1} B = \frac{\begin{bmatrix} s+2 \\ 1 \end{bmatrix}}{s^2 + 3s + 1}$$

Allora:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} u(t)$$

è la matrice di trasferimento tra l'ingresso e le due componenti dello stato

Quindi:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$W_{yu}(s) = C(sI - A)^{-1} B = \frac{C \begin{bmatrix} s+2 \\ 1 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 \\ 1 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} = \begin{bmatrix} s+3 \\ s+2 \end{bmatrix} \Big/ (s+1)(s+2)$$

Quindi $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{s+2}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} u(t)$

$$x_1(t) = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} u(t)$$

$$x_2(t) = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} u(t)$$

$$y_1(t) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} u(t)$$

$$y_2(t) = \frac{(s+2)}{(s+1)(s+2)} u(t)$$

Dove $(s+1)(s+2) = s^2+3s+2$

La $y_1(t)$ si può scrivere come:

- $(s^2+3s+2)\, y_1(t) = (s+3)\, u(t) \Longrightarrow$

$$\ddot{y}_1(t) + 3\dot{y}_1(t) + 2y_1(t) = \dot{u}(t) + 3u(t)$$

E la $y_2(t)$ come:

- $(s^2+3s+2)\, y_2(t) = (s+2)\, u(t) \Longrightarrow$

$$\ddot{y}_2(t) + 3\dot{y}_2(t) + 2y_2(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

Nella forma standard:

$$\ddot{y}_1(t) = -3\dot{y}_1(t) - 2y(t) + \dot{u}(t) + 3u(t)$$

$$\dot{y}_1(0),\ y_1(0)$$

Dalla rappresentazione di stato si trova la rappresentazione locale i/u

[Non si effettuano cancellazioni, nel caso soltanto radici stabili, per evitare perdite strutturali, informazioni sulle dinamiche]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$y(t) = w\left(u_{(-\infty, t]}\right)$$

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + Du(t)$$

$$\lim_{t \to -\infty} y(t) =$$

$$= \lim_{t_0 \to -\infty} \cancel{e^{A(t-t_0)}x_0} + \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + Du(t)$$

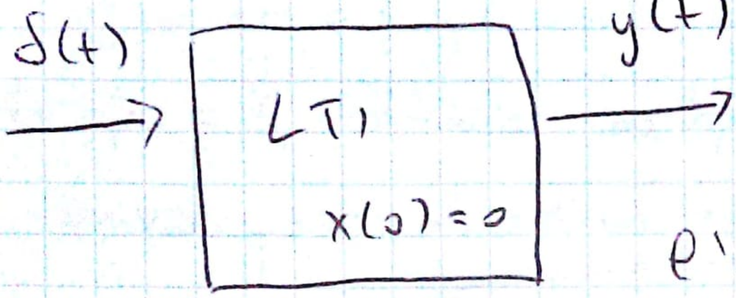
Op

vale $\emptyset$ se $x_0 = 0$, o $Re\{\lambda_i(A)\} < 0$

Scanned by CamScanner

di quali allora è ridotta a sistemi asintoticamente stabili e alla sola risposta forzata (si parte da $-\infty$, quindi non si ha lo stato)

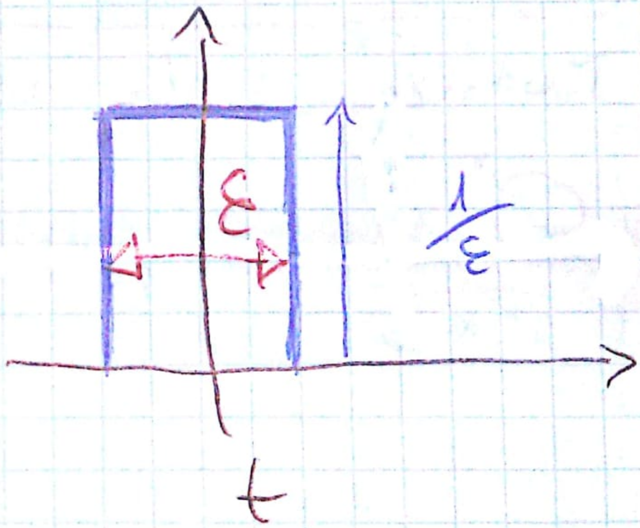
Risposta Impulsiva



Al sistema viene applicato l'impulso di Dirac definito come:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) = \delta(t)$$

impulso reale



stimolo da dare al sistema di larghezza infinitesima

Quando si applica $\delta(t)$ il sistema evolve e fornisce la risposta impulsiva

È come se questo tipo di impulso valesse sempre ∅ e poi infinito nell'istante t, cioè

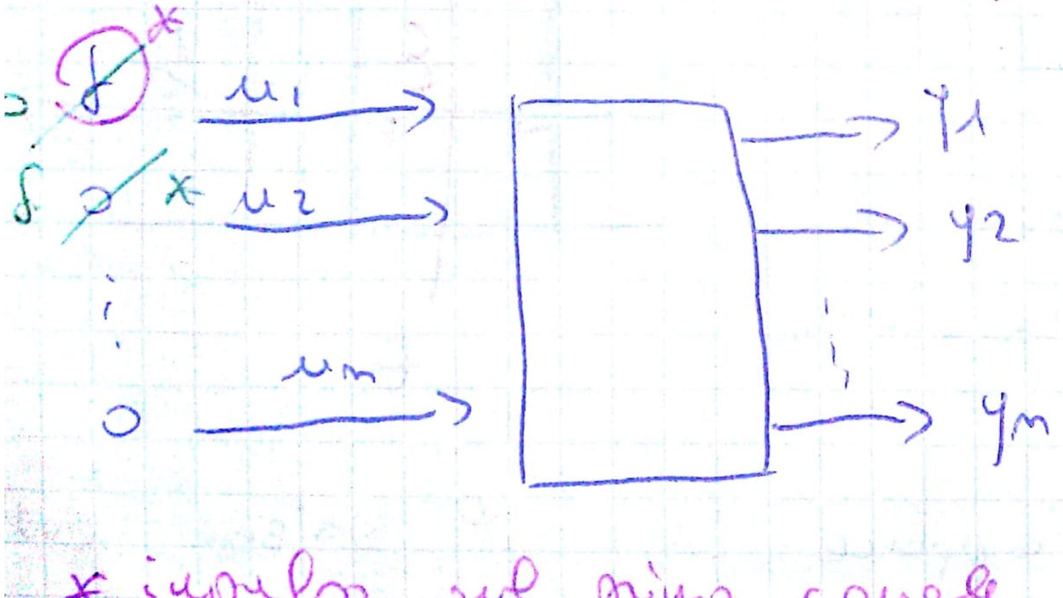
$$\int_a^b f(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = \begin{cases} f(t), & a \le t \le c \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B\,\delta(\tau)\,d\tau + D\,\delta(t) \quad *$$

l'impulso si applica quando $\tau = 0$, che è compreso nell'intervallo di integrazione

$$\boxed{w(t) = C e^{At} B + D\,\delta(t) \qquad t \ge 0} \qquad w(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

Matrice delle risposte impulsive



* impulso sul primo canale
* impulso sul secondo canale

$$\tilde{W}(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) & w_2(t) & \dots & w_m(t) \end{bmatrix}$$ per ottenere questa matrice

La risposta impulsiva è un modo per modellare il sistema

Si può conoscere l'uscita, se nota la risposta impulsiva, a partire dall'ingresso

Si vuole riscrivere * $y(t)$ nel modo seguente

$$y(t) = \int_0^t w(t-\tau)u(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^t \left[Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau) \right] u(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + \int_0^t Du(\tau)\underline{\delta(t-\tau)}\,d\tau$$

l'impulso è applicato

quando il suo argomento è $\emptyset$, cioè $t = \tau$

$Du(t)$

$$y(t) = \int_0^t w(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^\infty w(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$ è detto integrale di convoluzione

La risposta impulsiva è nulla per $t<0$ per causalità. (quando $\tau > t$ l'esponente diventa negativo)

La risposta impulsiva dice quanta memoria richiede il sistema negli ingressi passati (è un parametro significativo del sistema)

$$\begin{cases} x(t) = W_{xu}(s)\, u(t) \\ y(t) = W_{yu}(s)\, u(t) \end{cases}$$ locale i/s/u

$$\begin{cases} x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^\infty e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau \\ y(t) = C e^{At} x_0 + \int_0^\infty C e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau + D\, u(t) \end{cases}$$

globale i/s/u

$$y(t) = \int_0^t W(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

$$W(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$$ risposta impulsiva

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, & x_{k_0} = x_0 \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases}$$

$$u_k = \{u_{k_0}, u_{k_0+1} \dots\}_{k=k_0}^{-\infty}$$

$$x_{k_0+1} = Ax_{k_0} + Bu_{k_0}$$

$$x^e_{k_0+2} = Ax_{k_0+1} + Bu_{k_0+1} = A(Ax_{k_0} + Bu_{k_0}) + Bu_{k_0+1} =$$

$$= A^2 x_{k_0} + AB_{u_{k_0}} + B_{k_0+1}$$

$\vdots$

$$x_{k_0+\tau} = A^{\tau} x_{k_0} + A^{\tau-1} Bu_{k_0} + A^{\tau-2} Bu_{k_0+1} + \dots Bu_{k_0+\tau-1}$$

$$K = K_0 + \tau \Rightarrow \tau = K - K_0$$

$$x_k = A^{(k-k_0)} x_{k_0} + \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{(k-i-1)} u_k \qquad k \geq k_0$$

$$\sum_{i=k_0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu_i = A^{(k-k_0-1)} Bu_{k_0} + A^{k-k_0-2} Bu_{k_0+1} + \dots + Bu_{k-1}$$

$$\begin{cases} x_k = A^{(k-k_0)} x_{k_0} + \sum_{i=k_0}^{k-1} A^{(k-i-1)} B u_i \\ y_k = C A^{(k-k_0)} x_{k_0} + \sum_{i=k_0}^{k-1} C A^{(k-i-1)} B u_i + D u_k \end{cases} \quad \forall k \geq k_0$$

rappresentazione globale i/s/u

Esempio

Calcolo Tasso di ammortamento di un mutuo:

D ammontare mutuo, I interesse annuale, B rata annuale, x_k debito residuo @ k

$$\begin{cases} x_{k+1} = (\overbrace{1 + I}^{A}) x_k - B \\ x_0 = D \end{cases}$$

si vuole estinguere il mutuo in N anni

$x_N = 0$

$$x_N = (1+I)^N D + \sum_{i=0}^{N-1} (1+I)^{N-i-1} (-B) = 0$$

$$\frac{(1+I)^N D}{B} = \sum_{i=0}^{N-1} (1+I)^{N-i-1}$$

... u è costante

$$\sum_{i=0}^{N-1} (1+I)^{N-i-1} = \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} (1+I)^{i}}_{\text{serie geometrica}} =$$

sommatoria di convoluzione

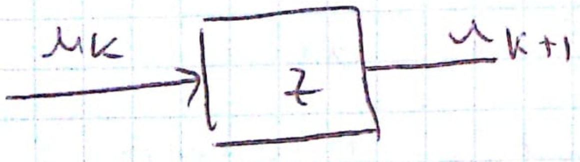
$$= \frac{1-(1+I)^N}{1-(1+I)}$$

$$\frac{(1+I)^N D}{B} = \frac{1-(1+I)^N}{-I} \Rightarrow B = \frac{(1+I)^N D I}{1-(1+I)^N} =$$

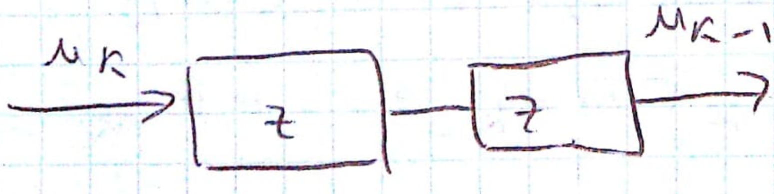
$$= \frac{(1+I)^N D}{(1+I)^N - 1} = \frac{DI}{1-(1+I)^{-N}}$$

Quindi $\boxed{B = \dfrac{DI}{1-(1+I)^{-N}}}$

OPERATORE ANTICIPO z



$u_k^{-1} z = u_{k-1}$



$u_k z^{-\tau} = u_{k-\tau}$

OPERATORE RITARDO z^{-1}

$$zI x_k = A x_k \; B u_k \Rightarrow$$

$$(zI - A) x_k = B u_k \Rightarrow x_k = (zI - A)^{-1} B u_k$$

$$y_k = C x_k + D u_k$$

$$y_k = \left[C (zI - A)^{-1} B + D \right] u_k$$

$$W_{xu}(z) \triangleq (zI - A)^{-1} B \in \mathbb{R}^{n \times m}(z)$$

Si dimostra

$$W_{xu}(z) = \frac{\Gamma_1 z^{n-1} + \Gamma_2 z^{n-2} + \dots + \Gamma_n}{z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n}$$

$$W_{yu}(z) = \frac{\beta_0 z^n + \beta_1 z^{n-1} + \dots + \beta_n}{z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n}$$

Quindi $\quad y_k = \dfrac{\beta_0 z_1^n + \dots + \beta_n}{z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots \alpha_n}$

$$(z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n)\, y_k = (\beta_0 z^n + \dots + \beta_n)\, u_k$$

$$y_{k+n} + \alpha_1 y_{k+n-1} + \dots + \alpha_n y_k = \beta_0 u_{k+n} + \dots + \beta_n u_k$$

$$y_{k+n} = -\alpha_1 y_{k+n-1} - \dots - \alpha_n y_k + \beta_0 u_{k+m} + \dots + \beta_m u_k$$

$$y_k = -\alpha_1 y_{k-1} - \alpha_2 y_{k-2} - \dots - \alpha_n y_k + \beta_0 u_k + \dots + \beta_m u_{k-m}$$

è analoga alla precedente, ma soltanto traslata, perché tempo invariante non c'è differenza.