TDS LEZIONE 13 08-11-18

Risposta libera TD

$$\begin{cases} x_{k+1} = A x_k, \ x_0 \\ y_k = C x_k \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x_k = A^k x_0 \\ y_k = C A^k x_0 \end{matrix}$$

Caso I

A diagonalizzabile e autovalori reali distinti:

$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ autovalori di A

$v_1, v_2, \dots v_n \in \mathbb{R}^n$ autovettori destri di A

$w_1, w_2, \dots w_n \in \mathbb{R}^n$ autovettori sinistri di A

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ invertibile} \qquad T \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ invertibile}$$

$$x_k = (T \Lambda T^{-1})^k x_0 = T \Lambda^k T^{-1} x_0 =$$
$$= (w_1^T x_0) \lambda_1^k v_1 + \dots + (w_n^T x_0) \lambda_n^k v_n$$

Scanned by CamScanner

La relazione tra gli z e gli x è un cambio di coordinate

$$\begin{cases} z_k^1 = (w_1^T x_0)\lambda_1^k \\ z_0^1 = w_1^T x_0 \end{cases} \dots \begin{cases} z_{k_n}^n = (w_n^T x_0)\lambda_n^k \\ z_0^n = w_n^T x_0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} z_k^1 \\ z_k^2 \\ \vdots \\ z_k^n \end{bmatrix} = T^{-1} x_k$$

Caso II

A diagonalizzabile e autovalori complessi e coniugati

Si scrivono gli autovalori in forma polare

$\lambda = \rho e^{j\vartheta}$. $\bar{\lambda} = \rho e^{-j\vartheta}$.

$\{\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \dots \lambda_c, \bar{\lambda}_c, \lambda_{2c+1}, \dots \lambda_n\} \in \mathbb{C}$

$\{v_1, \bar{v}_1, \dots v_c, \bar{v}_c, v_{2c+1}, \dots v_n\} \in \mathbb{C}^n$

$\{w_1, \bar{w}_1, \dots w_c, \bar{w}_c, w_{2c+1}, \dots w_n\} \in \mathbb{C}^n$

$$Re(v) = \frac{v+\bar{v}}{2} \qquad Im(v) = \frac{v-\bar{v}}{2}.$$

$$A = T_R \Delta_R T_R^{-1} \qquad \text{de} \qquad A = T \Delta T^{-1}$$

$$T_R = \begin{bmatrix} Re(v_1) & Im(v_1) & \ldots & Re(v_c) & Re(v_c) & \ldots & v_m \end{bmatrix}$$

$$T_R \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

$$T_R^{-1} = \begin{bmatrix} Re(w_1)^T \\ (w\ )^T \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \qquad \Delta_R = \begin{bmatrix} \rho_1 \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 \end{bmatrix} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \rho_c \begin{bmatrix} c\theta_c & s\theta_c \\ -s\theta_c & c\theta_c \end{bmatrix} & & \\ & & & \lambda_{2c+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

$$\Delta_R \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

$$x_k = \left(T_R \Delta_R T_R^{-1}\right)^k x_0 = T_R \Delta_R^k T_R^{-1} x_0$$

$$\Delta_R^k = \begin{bmatrix} \rho_1^k \begin{bmatrix} c\theta_1 k & s\theta_1 k \\ -s\theta_1 k & c\theta_1 k \end{bmatrix} & & & \\ & \ddots & & \\ \rho_k^k c\theta_1 k & & \ddots & \\ \rho_k^k s\theta_1 k & & & \lambda_{2c+1}^k \\ & & & & \ddots & \lambda_M^k \end{bmatrix}$$

sono i modi reali ma compromati

Caso III

A difettiva, autovalori reali

$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ autovalori reali distinti

$m.a.(\lambda_i) = n_i \qquad \sum_{i=1}^{k} n_i = n$

$A = T_J J T_J^{-1}$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \emptyset \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \emptyset & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$J_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i} \qquad J^k = \begin{bmatrix} J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_r^k \end{bmatrix}$

$x_k = (T_J J T_J^{-1})^k x_0 = T_J J^k T_J^{-1} x_0$

dove $(\Delta + N)^k = \left(\begin{bmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \right)^k$

matrice Nilpotente

$$\binom{k}{r} \lambda^{k-r} = \frac{\lambda^{-r}}{r!} k(k-1)\ldots(k-r+1)\lambda^k$$

	λ diagonalizzabile m.a.(λ) = m.g.(λ)	λ difettivo m.a.(λ) > m.g.(λ)
$\lambda \in \mathbb{R}$	λ^k	$k^r \lambda^k$ $r = 0, 1, \ldots$
$\lambda, \bar{\lambda}$ $\lambda = \rho e^{j\theta}$ $\bar{\lambda} = \rho e^{-j\theta}$	$\rho^k \cos(\theta k)$ $\rho^k \sin(\theta k)$	$k^r \rho^k \cos(\theta k)$ $k^r \rho^k \sin(\theta k)$ $r = 0, 1, \ldots$

- modo m_k convergente se

$$\lim_{k \to \infty} m_k = 0$$

- modo m_k limitato se

$$\exists M > 0 \text{ tale che } |m_k| < M, \ \forall k$$

• Modo non divergente se non è né limitato né convergente

Convergenza $\iff |\lambda| < 1$

Limitatezza $\iff |\lambda| = 1$ e
m.a.(λ) m.g.(λ)

Divergenza $\iff \begin{cases} |\lambda| = 1 & \text{m.a.}(\lambda) > \text{m.g.}(\lambda) \text{ (debole)} \\ |\lambda| > 1 & \text{(forte)} \end{cases}$

Autovalore / Autovettore dominante
$(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

TC − $Re(\lambda_1) > Re(\lambda_2) \dots > Re(\lambda_n) \implies$
λ_1 è detto autovalore dominante

TD − $|\lambda_1| > |\lambda_2| \dots |\lambda_n| \implies$
λ_1 è detto autovalore dominante

$$x(t) = (w_1^T x_0) e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots (w_n^T x_0) e^{\lambda_n t} v_n =$$

$$= e^{\lambda_1 t} \left[(w_1^T x_0) v_1 + \dots + (w_n^T x_0) e^{(\lambda_n - \lambda_1) t} v_n \right]$$

Modelli compartimentali

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = -\alpha_i x_i(t) + v_i(t) \\ y_i(t) = \beta_i x_i(t) \end{cases} \qquad \alpha_i, \beta_i > 0$$

$\alpha_i = \beta_i$ il serbatoio si dice senza perdite

$\alpha_i > \beta_i$ il serbatoio si dice con perdite

Connessioni

$$v_i(t) = \sum_{j=1}^{m} d_{ij} \, y_j(t) + b_i u(t)$$

b_i frazione di $u(t)$ che alimenta il serbatoio i $\qquad 0 \le b_i \le 1$

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = 1$$

d_{ij} frazione del j deflusso che alimenta l'i-esimo compartimento $\qquad 0 \le d_{ij} \le 1$

"senza perdite" $\sum_{i=1}^{m} d_{ij} = 1$

"con perdite" $\sum_{i=1}^{m} d_{ij} < 1$

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha_1 + \beta_1 d_{11} & d_{12}\beta_2 & \cdots & d_{1m}\beta_m \\ d_{21}\beta_1 & -\alpha_2 + \beta_2 d_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ d_{m1}\beta_1 & & & -\alpha_m + \beta_m d_{mm} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

La matrice di METZLER rappresenta l'evoluzione libera di un sistema positivo

Un sistema è positivo $\dot{x} = Ax + Bu$ quando A è in forma di Metzler

Proprietà delle evoluzioni libere

x_0 positivo $\left(\begin{array}{c} \text{tutte le sue} \\ \text{componenti} \\ \geq 0 \end{array} \right) \longmapsto$

$x(t)$ positivo $\forall t$

Nota: $a_{ii} = -\alpha_i + \beta_i d_{ii} < 0$

$a_{ij} = d_{ij} \beta_j$

Nei sistemi senza perdite la somma per colonne di una matrice di Metzler è nulla

La somma di ciascuna colonna è

$$-\alpha_i + \beta_i \left(\sum_{j=1}^{n} d_{ji} \right) = 0$$

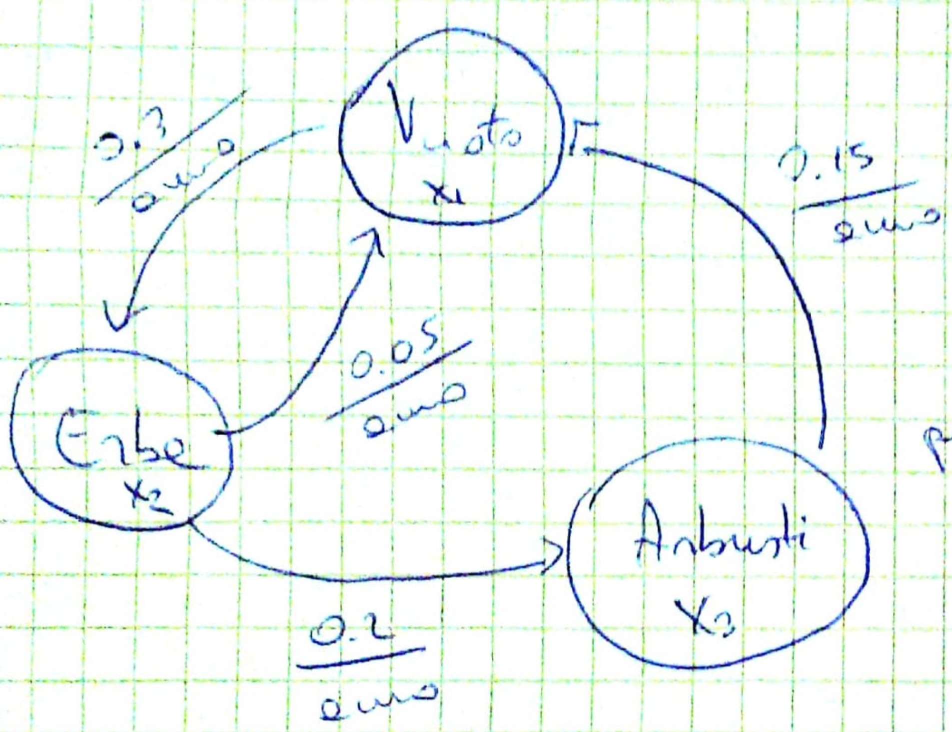
Esempio: Ecosistema senza perdite

Incendio:

x_1 Spazio Vuoto, x_2 Erbe, x_3 Arbusti

(Lo studio come evolve la ricrescita)

Questo può essere pensato come sistema compartimentale



le somme per colonna deve fare $\emptyset$

$$\dot{x} = Ax \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}3 & 0.05 & 0.15 \\ 0.3 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$[T, D] = \text{eig}(A)$

cambio

$\lambda = \{ 0, -0.35 \pm j0.1414 \}$

$T \rightarrow T_R \qquad T_R^{-1}$

$\Delta \rightarrow \Delta_R$

$\dfrac{v - \bar{v}}{2j}$ segno positivo nella matrice

$\sigma = -0,35 \qquad \omega = 0.14$

$x_1(t) = 7.36 e^{\sigma t} \cos(\omega t) - 2.37 e^{\sigma t} \sin(\omega t)$
$+ 2.63$

$x_2(t) = -3.15 e^{\sigma t} \cos(\omega t) + 13.4 e^{\sigma t} \sin(\omega t)$
$+ 3.15$

$x_3(t) = -4.21 e^{\sigma t} \cos(\omega t) - 10.41 e^{\sigma t} \sin(\omega t)$
$+ 4.20$

$$x(t) = T_R \, e^{\Lambda_R t} \, T_R^{-1} \, x_0$$