TEORIA SISTEMI   LEZIONE 3   11-10-13

Sistemi lineari

Vale il principio di sovrapposizione degli effetti

Conseguente: $(x_0^{(1)}, u^{(1)}(\cdot))$, $(x_0^{(2)}, u^{(2)}(\cdot))$

$$\Upsilon(t, t_0, (\alpha_1 x_0^{(1)} + \alpha_2 x_0^{(2)}), (\alpha_1 u^{(1)} + \alpha_2 u^{(2)})_{[t_0,t)}) =$$

$$= \alpha_1 \Upsilon(t, t_0, x_0^{(1)}, u^{(1)}_{[t_0,t)}) + \alpha_2 \Upsilon(t, t_0, x_0^{(2)}, u^{(2)}_{[t_0,t)})$$

$(x_0, \emptyset_u)$, $(\emptyset_x, u(\cdot))$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ allora

→ vettori di tutti $\emptyset$, dimensionale x

$$\begin{cases} \Upsilon(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}) = \underbrace{\Upsilon(t, t_0, x_0, \emptyset_u)}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\Upsilon(t, t_0, \emptyset_x, u_{[t_0,t)})}_{\text{risposta forzata}} \\ \varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}) = \underbrace{\varphi(t, t_0, x_0, \emptyset_u)} + \underbrace{\varphi(t, t_0, \emptyset_x, u_{[t_0,t)})} \end{cases}$$

La risposta si spezza in due tipi di risposta, nello stato e nell'uscita

E' una proprietà dei sistemi lineari sia TI che TV

Conseguenze:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \\ \eta(t) = \eta(t, x(t), u(t)) \end{cases}$$

Se il sistema è a stato vettore di dimensione finite $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$

Si consideri una base nello spazio, data da vettore linearmente indipendenti:

$$B_x = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \quad e_i \in \mathbb{R}^n$$

$$B_u = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}, \quad v_i \in \mathbb{R}^m$$

$$B_y = \{w_1, w_2, \dots, w_p\}, \quad w_i \in \mathbb{R}^p$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i, \quad x_i = e_1 x_1 + e_2 x_2 + \dots + e_n x_n$$

un generico x

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ è il vettore di coordinate di x nella base B_x

Quindi $x = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \dots e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Lo stesso si può fare per le basi B_u e B_y, usando l' OPERATORE di ESTRAZIONE COORDINATE:

$$[x]_{B_x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad [u]_{B_u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$[y]_{B_y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$$

Tutte le coordinate di ogni base sono state estratte in maniera ordinata

$$[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2]_{B_x} = \alpha_1 [x_1]_{B_x} + \alpha_2 [x_2]_{B_x}$$

Questo operatore è lineare

$f(\cdot, x, u)$

$\eta(\cdot, x, u)$

sono funzioni lineari di x e u

$$\left[f(t, x(t), \emptyset_u)\right]_{B_x} = \left[f(t), \sum_{i=1}^{n} l_i x_i, \emptyset_u\right]_{B_x} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \left[f(t, l_i, \emptyset_u)\right]_{B_x} = \left[v_1(t) \,|\, v_2(t) \,|\, \dots \,|\, v_n(t)\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Allora x può essere scritta come una ma-
trice $= A(t) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$

Lo stesso procedimento si può fare lavoran-
do sulla u invece che sulla x

Questa rappresentazione locale i/s/u può
essere riscritta nella forma seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t) \end{cases}$$

$A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$,
$D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Sistema lineare Tempo-Invariante

$$\gamma(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}) = \gamma(t-t_0, x_0, \emptyset_u) + \gamma(t-t_0, \emptyset_x, u_{[t_0,t)})$$

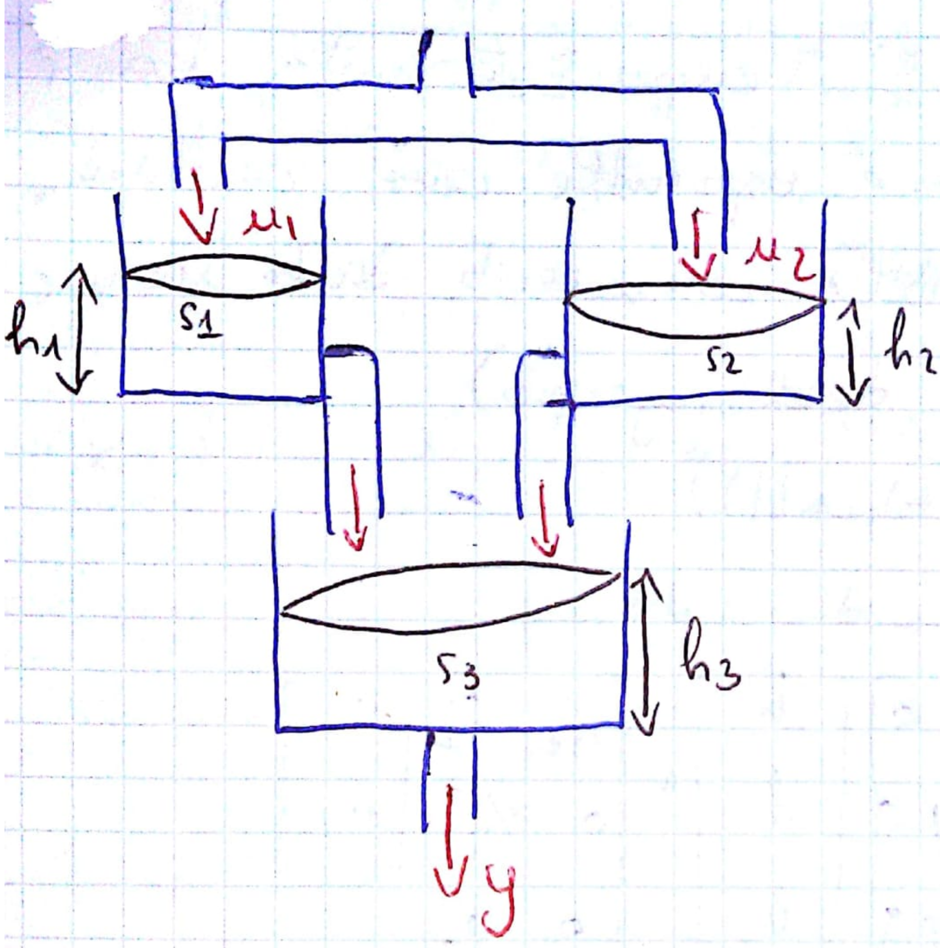
$$\varphi(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t]}) = \varphi(t-t_0, x_0, \emptyset_u) + \varphi(t-t_0, \emptyset_x, u_{[t_0,t]})$$

Senza perdita di generalità $t_0 = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}$$

dove A, B, C e D sono matrici costanti

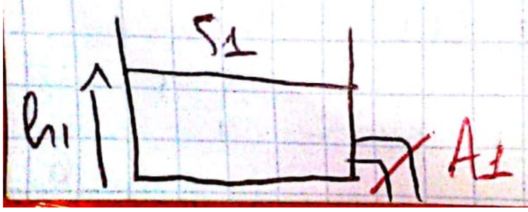
Esempio: modellazione di una rete di serbatoi



- S_1, S_2, S_3 sezioni di area S_i, dei serbatoi cilindrici
- u_1, u_2 portate acqua in ingresso
- y portata acqua in uscita

$$V_i(t) = S_i h_i(t)$$

Legge Torricelli



$$p = A_1 \sqrt{2 g h_1}$$ portata in uscita

$$
\begin{cases}
\cancel{S_1}\,\dot{h}_1(t) = \left(-\dfrac{A_1}{S_1}\sqrt{2g}\right) h_1(t) + \dfrac{1}{S_1} u_1(t) \\[2ex]
\cancel{S_2}\,\dot{h}_2(t) = \left(-\dfrac{A_2}{S_2}\sqrt{2g}\right) h_2(t) + \dfrac{1}{S_2} u_2(t) \\[2ex]
\cancel{S_3}\,\dot{h}_3(t) = \left(\dfrac{A_1}{S_3}\sqrt{2g}\right) h_1(t) + \left(\dfrac{A_2}{S_3}\sqrt{2g}\right) h_2(t) \left(-\dfrac{A_3}{S_3}\sqrt{2g}\right) h_3(t)
\end{cases}
$$

Questo sistema è Tempo Invariante, non è lineare (f non è esprimibile come combinazione lineare delle componenti dello stato e delle componenti dell'ingresso)

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$$

Rappresentazione di stato:

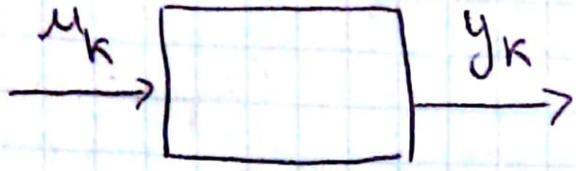
$$
\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
-\dfrac{A_1\sqrt{2g}}{S_1} & 0 & 0 \\
0 & -\dfrac{A_2\sqrt{2g}}{S_2} & 0 \\
\dfrac{A_1\sqrt{2g}}{S_1} & \dfrac{A_2\sqrt{2g}}{S_3} & -\dfrac{A_3}{S_3}\sqrt{2g}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} +
\begin{bmatrix} 1/S_1 & 0 \\ 0 & 1/S_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}
$$

Se si considera una semplificazione del sistema che lo renda lineare, cioè del tipo

$$\dot{h}_i(t) = \underbrace{\left(-\frac{A_i}{S_i}\sqrt{2g}\right)}_{\to \text{ costante}} h_i(t) + \frac{1}{S_i} u_i(t) \quad \to \text{ senza } \sqrt{\ }$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_3\sqrt{2g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

A Tempo discreto si lavora con seguente:



$$y_k = w(k, u_{(-\infty, k]})$$

$$u_k = \{ u_0, u_1, \dots, u_k \}_{k=-\infty}^{\infty} \qquad u_k \in \mathbb{R}^m$$

$$y_k = \{ y_0, y_1, \dots, y_k \}_{k=-\infty}^{\infty} \qquad y_k \in \mathbb{R}^p$$

$$x_k = \{ x_0, x_1, \dots, x_k \}_{k=-\infty}^{\infty} \qquad x_k \in \mathbb{R}^n$$

Stato: una sequenza di campioni

$x_k = \varphi(k, u_{(-\infty, k)})$. Proprietà:

1) $x_k = \varphi(k, k_0, x_0, u_{[k_0, k)})$ $\quad k \geq k_0$

legge di aggiornamento dello stato

2) $y_k = \eta(k, x_k, u_k)$

Da cui si possono ottenere due rappresentazioni, una locale ed una globale:

$$\begin{cases} x_k = \psi\left(k, k_0, x_0, u_{[k_0,k)}\right) \\ y_k = \varphi\left(k, k_0, x_0, u_{[k_0,k]}\right) \end{cases} \quad \forall\, k \geq k_0$$

rappresentazione globale i/s/u

*

$$\begin{cases} \boxed{x_{k+1} = f(k, x_k, u_k)}, \quad x(k_0) = x_0 \\ y_k = \eta(k, x_k, u_k), \quad \forall\, k \geq k_0 \end{cases}$$

rappresentazione locale i/s/u

* equazione alle ricorrenze

Rappresentazione locale i/u

$$\left\{ y_k = f\left(k, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-n}, u_k, u_{k-1}, \dots, u_{k-m}\right) \right.$$

y_0 = costante
y_1 = costante
⋮
y_{n-1} = costante

questi primi n valori devono essere fissati per trovare il valore da n in poi queste rappresentano alla le condizioni iniziali

n è la dimensione dello stato,

m è libero

Rappresentazione globale i/u

$$y_k = w\left(k, u_{(-\infty, k]}\right)$$

Nei sistemi a Tempo invariante:

$$\begin{cases} x_k = \psi(\underbrace{k-k_0}, x_0, u_{[k_0,k)}) \\ y_k = \varphi(k-k_0, x_0, u_{[k_0,k]}) \end{cases} \quad \forall k \geq k_0$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k) \\ y_k = \eta(x_k, u_k) \end{cases}$$

$$y_k = w(u_{(-\infty,k]})$$

$$y_k = f(y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-n}, u_k, u_{k-1}, \dots u_{k-m})$$

Proprietà di linearità:

1) $\psi(k, k_0, x_0, u_{[k_0,k)}) = \psi(k, k_0, x_0, 0_u) +$ risposta libera

$+ \psi(k, k_0, 0_x, u_{[k_0,k)})$ risposta forzata

$\varphi(k, k_0, x_0, u_{[k_0,k]}) = \varphi(k, k_0, x_0, 0_u) +$ risposta libera

$+ \varphi(k, k_0, 0_x, u_{[k_0,k]})$ risposta forzata

Allora:
$$\begin{cases} x_{k+1} = A x_k + B u_k, & x_{k_0} = x_0 \\ y_k = C x_k + D u_k \end{cases}$$

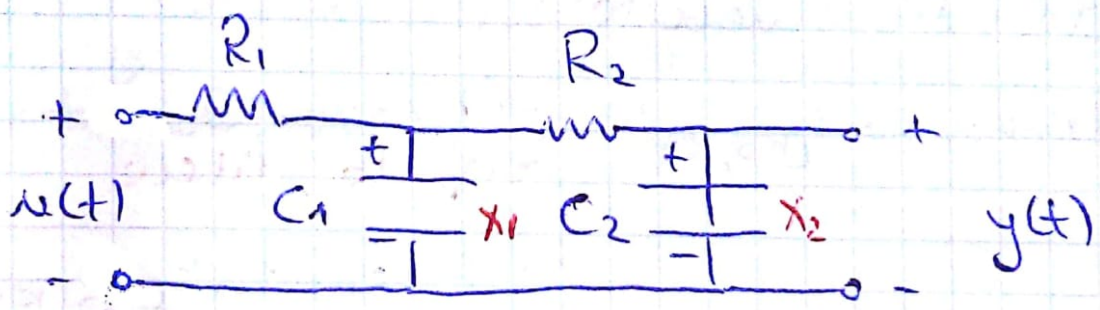
caso LTI $\quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \; B \in \mathbb{R}^{n\times m}$

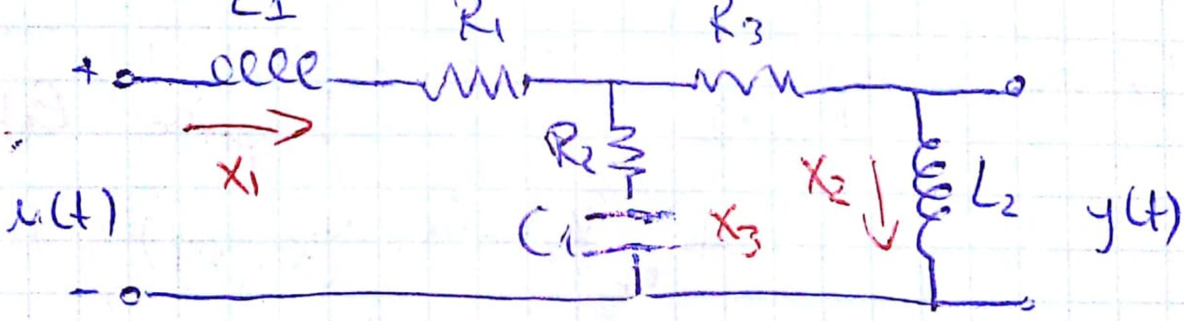
$\quad C \in \mathbb{R}^{p\times n}, \; D \in \mathbb{R}^{p\times m}$

$$y_k = \alpha_1 y_{k-1} + \alpha_2 y_{k-2} + \dots + \alpha_n y_{k-n} + \beta_0 u_k + \beta_1 u_{k-1} + \dots + \beta_n u_{k-n}$$

Esercizi:

1) Trovare una rappresentazione di stato delle seguenti reti elettriche:





$u(t)$ tensione in ingresso

$y(t)$ tensione in uscita

sei dati sono tensioni ai capi dei condensatori e correnti che scorrono nelle bobine

Esempio: Previsione di diplomati scuola media

u_k : nuovi iscritti all'anno @ k in prima

$x_k^{(1)}$: studenti in prima @ k, γ_1 tasso bocciature in 1°

$x_k^{(2)}$: studenti in seconda @ k, γ_2 " in 2°

$x_k^{(3)}$: studenti in terza @ k, γ_3 " in 3°

y_k : diplomati @ k

$$x_{k+1}^{(1)} = \overbrace{\gamma_1 x_k^{(1)}}^{\text{bocciati in 1°}} + \underbrace{u_k}_{} \quad \text{nuovi iscritti}$$

$$x_{k+1}^{(2)} = \underbrace{(1-\gamma_1)x_k^{(1)}}_{\text{promossi in prima}} + \overbrace{\gamma_2}^{} x_k^{(2)} \quad \text{bocciati in seconda}$$

$$x_{k+1}^{(3)} = (1-\gamma_2)x_k^{(2)} + \gamma_3 x_k^{(3)}$$

$$y_k = (1-\gamma_3)x_k^{(3)}$$

Sistema lineare, a tempo invariante (i parametri $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sono costanti)

In forma matriciale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} x_0^{(1)} \\ x_0^{(2)} \\ x_0^{(3)} \end{bmatrix} = ? \quad \text{condizioni iniziali}$$

è la sequenza in ingresso

$$
\begin{bmatrix} x_{k+1}^{(1)} \\ x_{k+1}^{(2)} \\ x_{k+1}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ (1-\gamma_1) & \gamma_2 & 0 \\ 0 & (1-\gamma_2) & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} \\ x_k^{(3)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_k
$$

$$
y_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (1-\gamma_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} \\ x_k^{(3)} \end{bmatrix} + [0]\, u_k
$$

Il k ha un significato temporale

Esempio: Rovina del giocatore

(qui il k non avrà significato temporale)

Probabilità di vincere giocando rosso/nero

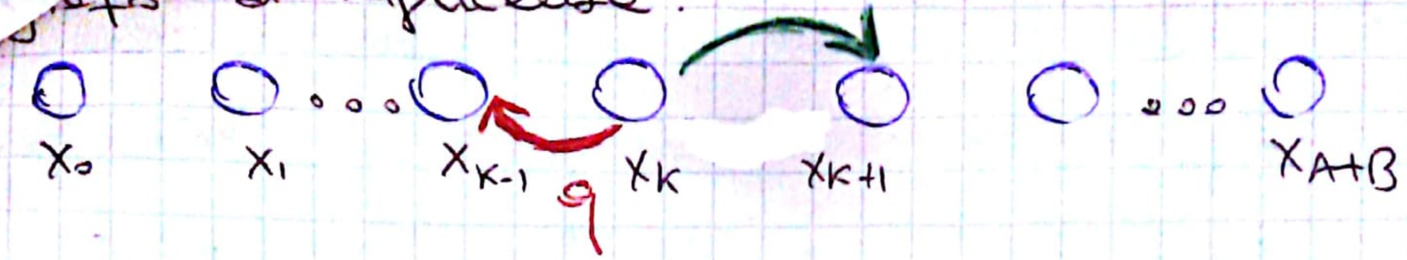
Giocatore: Ha A gettoni

Banco: Ha B gettoni

P: probabilità di vincita del giocatore

$q = (1-P)$ probabilità di vincita del banco

x_k: probabilità che il giocatore, avendo k gettoni, "sbanchi" (vinca tutti i gettoni del banco) grafo di influenza:



lanciando il dado, o si vince o si perde (le due probabilità, sommate, danno probabilità 1 -> sono uguali ed opposte)

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_{A+B} = 1 & \text{il giocatore sbanca} \\ X_K = p\,X_{K+1} + q\,X_{K-1} \end{cases}$$

uguaglianza delle probabilità: bilanciamento è soddisfatto ad ogni lancio del dado

alla vittoria la probabilità di sbancare aumenta

al fallimento la probabilità di sbancare diminuisce

$$\Rightarrow \quad X_{K+1} = \frac{1}{p} X_K - \frac{q}{p} X_{K-1}$$

Non è una rappresentazione di stato del tipo $X_{K+1} = f(x_K)$ ma del tipo:

$X_{K+1} = f(X_K, X_{K-1})$ cioè una eq.

ricorrente di ordine 2.. Si deve ricavare la rappresentazione corrispondente, partendo dal fatto che questa sia locale. $u=0$

Somiglia a questa forma:

$$\underbrace{y_{k+1}}_{z_{k+1}} = f(y_k, \underbrace{y_{k-1}}_{z_k}, \dots, y_{k-n+1}, u_k, \dots)$$

$u_k \to 0$

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/p & -q/p \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{bmatrix}$$

da definire

$$z_{k+1} = A z_k$$

$$y_k = C z_k$$

$$y_k = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{bmatrix} \qquad z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{bmatrix}$$