TDS LEZIONE 9 25-10-18

Problema di Realizzazione 2

(caso scalare $m = p = 1$)

$w_k = \{ w_0, w_1, \dots, w_k \}_{k=0}^{\infty}$

1) Può w_k rappresentare una sequenza di Markov?

2) Se sì, qual è l'ordine minimo n del sistema che la realizza?

$\left(\text{realizzare } \Sigma_m \Rightarrow w_k = \begin{cases} D, & k=0 \\ CA^{k-1}B, & k>0 \end{cases} \right)$

Proprietà delle sequenze di Markov

- Proprietà della ricorsività dei campioni delle sequenze di Markov
  (solitamente questi sono la soluzione di un'equazione ricorrente)

I campioni w_k di una sequenza di Markov di un sistema $S(A,B,C,D)$ di ordine n soddisfano una legge ricorrente di ordine n. (Teorema Cayley-Hamilton)

⇒ Teorema di Cayley-Hamilton

Il polinomio caratteristico di A,

$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots \alpha_n$

è un polinomio annullatore di A,

cioè $\chi_A(A) = 0_{n \times n}$

$$CA^{n+k-1}B = C(\alpha_1 A^{n+k-2} - \alpha_2 A^{n+k-3} \dots - \alpha_n A^{k-1})B$$

$$w_{n+k} = -\alpha_1 \underbrace{CA^{n+k-2}}_{w_{n+k-1}} \dots - \alpha_n \underbrace{CA^{k-1}B}_{w_k}$$

$$w_{n+k} = -\alpha_1 w_{n+k-1} \dots - \alpha_n w_k \qquad k \geq 1$$

$$w_{n+1} = -\alpha_1 w_n - \alpha_n w_{n-1} + \dots \alpha_n w_1$$

Matrice di Hankel

$$H_k = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_k \\ w_2 & w_3 & & w_{k+1} \\ \vdots & & & \\ w_k & w_{k+1} & & w_{2k-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

supponiamo ∃ una legge di ricorsività fra i w_k di ordine $k-1$

La condizione che la sequenza data sia la sequenza di Markov è che

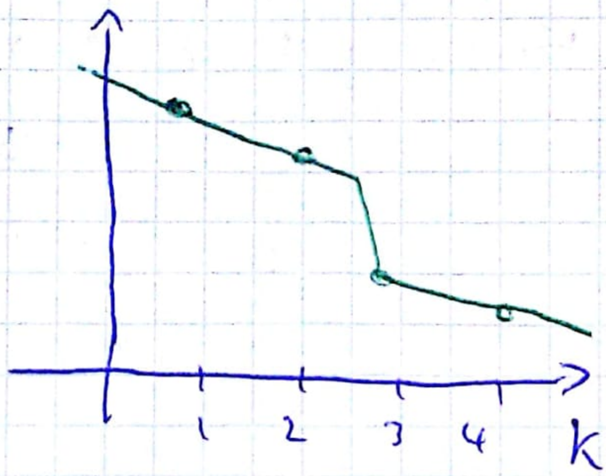
$$\text{rango } H = n < \infty$$

n è la dimensione minima del sistema che realizza la sequenza W_K

Algoritmo di determinazione ordine minimo n:

$\det H_1 \neq 0$, $\det H_2 \neq 0$, $\dots$, $\det H_n \neq 0$,

$\det H_{n+k} = 0 \quad \forall\, k \geq 0$



$$W_k = \{w_0, w_1, \dots w_k\}_k^{\infty}$$

Calcolo dei coefficienti α_i del $\psi_A(\lambda)$

$$\begin{cases} w_{n+1} = -\alpha_1 w_n \dots - \alpha_n w_1 \\ w_{n+2} = -\alpha_1 w_{n+1} \dots - \alpha_n w_2 \\ \vdots \\ w_{2n} = -\alpha_1 w_{2n-1} \dots - \alpha_n w_n \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} w_{n+1} \\ w_{n+2} \\ \vdots \\ w_{2n} \end{bmatrix} = -H_n \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n+1} \\ \vdots \\ \alpha_{2n} \end{bmatrix}$$

Esempio: sequenza di Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ...

$H_1 = 1$ $\qquad$ $\det H_1 \neq 0$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det H_2 \neq 0$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix} \qquad \det H_3 \neq 0$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 13 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

?

Linearizzazione dei sistemi dinamici

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, $x(0) = x_0$

$y(t) = \eta(x(t), u(t))$

Data una soluzione nominale

$\hat{x}_0, \hat{u}(t) \longmapsto \hat{x}(t), \hat{y}(t)$

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + u, \quad x(0) = x_0 \\ y = x \end{cases}$$

Equilibrio $\quad f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$

$\bar{x}^2 = -u$

$\forall \bar{u} < 0 \qquad \bar{x} = \sqrt{\bar{u}}$

$\bar{u} = -1 \qquad \hat{x}_0 = 1 \qquad \hat{x}(t) = 1 \quad \forall t$

$\bar{x} = 1 \qquad \bar{u} = -1 \longmapsto \hat{y}(t) = 1 \quad \forall t$

(Si potrebbe decidere di avere come soluzione anche una condizione che non sia d'equilibrio)

Soluzione perturbata

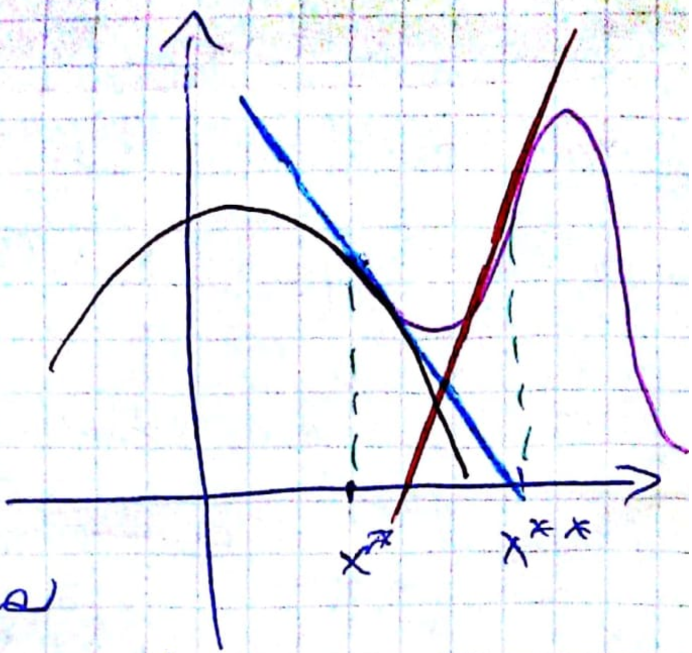
$x_0, u(t) \longmapsto x(t), y(t)$

$\tilde{x}_0 = x_0 - \hat{x}_0$

$\tilde{u}(t) = u(t) - \hat{u}(t)$

$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

$\tilde{y}(t) = y(t) - \hat{y}(t)$



linearizzare il sistema non lineare all'intorno della soluzione nominale

$$f(x,u) = f(\hat{x}+\tilde{x}, \hat{u}+\tilde{u}) \simeq f(\hat{x},\hat{u}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\right|_{\substack{x=\hat{x}\\ u=\hat{u}}} \tilde{x}$$

$$+ \left.\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\right|_{\substack{x=\hat{x}\\ u=\hat{u}}} \tilde{u} + \cancel{\vartheta(\tilde{x},\tilde{u})}$$

$$\eta(x,u) = \eta(\hat{x}+\tilde{x}, \hat{u}+\tilde{u}) \simeq \eta(\hat{x},\hat{u}) + \left.\frac{\partial \eta}{\partial x}(x,u)\right|_{\substack{x=\hat{x}\\ u=\hat{u}}} \tilde{x}$$

$$+ \cancel{\vartheta(\tilde{\eta},\tilde{u})}$$

Sviluppo di Taylor

$$\cancel{\dot{\hat{x}}(t)} + \dot{\tilde{x}}(t) = \cancel{f(\hat{x}(t), \hat{u}(t))} + \frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=\hat{x}(t)\\ u=\hat{u}(t)}} \tilde{x}(t) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial u}(x,u)\bigg|_{\substack{x=\hat{x}(t)\\ u=\hat{u}(t)}} \tilde{u}(t) \quad , \quad x_0 = \cancel{\hat{x}_0} + \tilde{x}_0$$

$$\boxed{\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) \, , \, \hat{x}(0) = \hat{x}_0}$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \tilde{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \tilde{u}(t) , \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$$

$$\cancel{\hat{y}(t)} + \tilde{y}(t) = \cancel{\eta(\hat{x}(t), \hat{u}(t))} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=\hat{x}(t)\\ u=\hat{u}(t)}} +$$

$$+ \frac{\partial \eta}{\partial u}\bigg|_{\substack{x=\hat{x}(t)\\ u=\hat{u}(t)}} \tilde{u}(t)$$

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \qquad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), & x(0) = x_0 \\ y(t) = \eta(x(t), u(t)) \end{cases}$$

$$\hat{x_0}, \hat{u}(t) \longmapsto \hat{x}(t), \hat{y}(t)$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A(t)\,\tilde{x}(t) + B(t)\,\tilde{u}(t), \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x_0}$$

$$\tilde{y}(t) = C(t)\,\tilde{x}(t) + D(t)\,\tilde{u}(t)$$

$$\begin{matrix} \tilde{x_0} = 0 \\ \tilde{u}(t) = 0 \end{matrix} \longmapsto \begin{matrix} \tilde{x}(t) = 0 \\ \tilde{y}(t) = 0 \end{matrix}$$

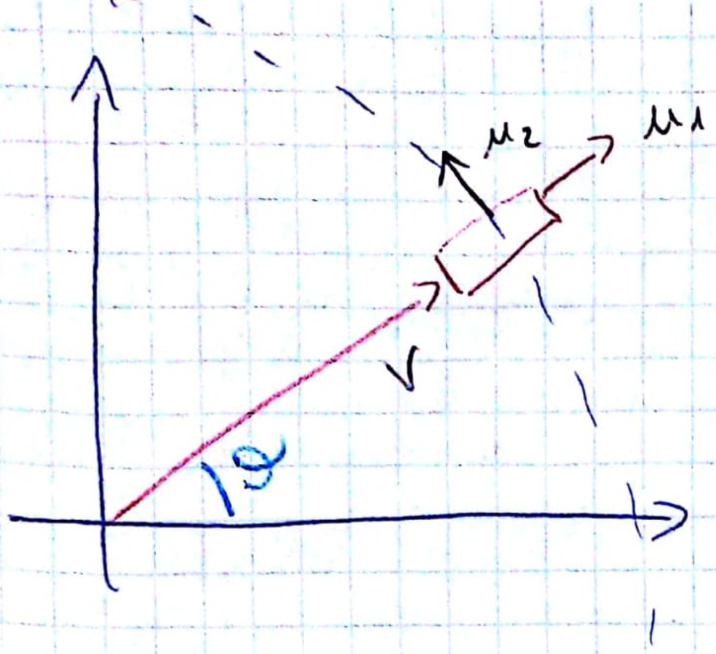
$$x_{k+1} = f(x_k, u_k), \quad x_0 = x_0$$

$$y_k = \eta(x_k, u_k)$$

$$\hat{x_0}, \hat{u}_k \longmapsto \hat{x}_k, \hat{y}_k$$

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = A_k \tilde{x}_k + B_k \tilde{u}_k, & \tilde{x_0} = x_0 \\ \tilde{y}_k = C_k \tilde{x}_k + D_k \tilde{u}_k \end{cases}$$

Esempio : satellite artificiale



$$\ddot{r}(t) = r(t)\dot{\vartheta}^2(t) - \frac{k}{r^2(t)} + u_1(t)$$

$$\ddot{\vartheta}(t) = -2\dot{\vartheta}(t)\dot{r}(t) + \frac{1}{r(t)}u_2(t)$$

Orbita geostazionaria

$r(t) \equiv R$, $\dot{\vartheta}(t) \equiv \omega$, $R^3\omega^2 = K$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \vartheta \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 x_4^2 - \frac{K}{x_1^2} + u_1 \\ x_4 \\ -\frac{2x_4x_2}{x_1} + \frac{u_2}{x_1} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \hat{x}_1 = R, & \hat{x}_3 = \omega t \\ \hat{x}_2 = 0, & \hat{x}_4 = \omega \end{matrix}\right] \text{soluzione nominale}$$

Ora si devono fare le derivate

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \left(x_4^2 + \frac{2K}{x_1^3}\right) & 0 & 0 & 2x_1x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \left(\frac{2x_4x_2}{x_1^2} - \frac{u_1}{x_1^2}\right) & -\frac{2x_4}{x_1} & 0 & -\frac{2x_2}{x_1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \omega^2 + \frac{2K}{R^3} & 0 & 0 & 2\omega_1 R \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\omega}{R} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Allora

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \vartheta \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ \omega t \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{w^2+2K}{R^3} & 0 & 0 & 2wR \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2w}{R} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{01} \\ \tilde{x}_{02} \\ \tilde{x}_{03} \\ \tilde{x}_{04} \end{bmatrix}$$

quando $\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ il satellite è nell'orbita