

RAPPORT DE PROJET

Conception et Optimisation d'un Lanceur Spatial

Optimisation Non-Linéaire Sous Contraintes (NLPC)

Ivo Douliery
Alexis Marzolin

Année universitaire 2025–2026

Introduction

L'objectif de ce projet est de concevoir un lanceur spatial optimal capable de placer une charge utile de $m_u = 1000$ kg sur une orbite circulaire basse d'altitude $H_c = 200$ km. La performance du lanceur est mesurée par sa masse totale au décollage M_0 , que nous cherchons à minimiser.

Contexte et Enjeux

La mise en orbite d'une charge utile constitue un défi d'ingénierie majeur. Le lanceur doit fournir suffisamment d'énergie pour atteindre la vitesse orbitale $V_c = \sqrt{\mu/R_c} \approx 7784$ m/s tout en minimisant les pertes (traînées atmosphériques, pertes gravitationnelles). La vitesse propulsive V_p requise est donc supérieure à V_c .

Approche de Résolution

La complexité du problème réside dans le couplage fort entre le dimensionnement du lanceur (masses d'ergols, structure) et sa mécanique du vol (trajectoire atmosphérique). Une approche monolithique étant difficilement envisageable, nous avons opté pour une stratégie de **découplage itérative** :

1. **Problème d'Étagement (PE)** : Dimensionnement statique pour une vitesse propulsive V_p donnée, minimisant le ratio masse totale / charge utile.
2. **Problème de Trajectoire (PT)** : Optimisation dynamique de la loi de commande (angles de poussée) pour maximiser la vitesse finale réelle V_f sous contraintes d'injection.
3. **Itération externe** : Ajustement de V_p jusqu'à ce que $V_f = V_c$ (vitesse orbitale requise).

Plan du Rapport

Ce rapport suit strictement le plan de travail imposé :

- **Chapitre 1** : Démarche d'ensemble du projet (2 pages)
- **Chapitre 2** : Résolution analytique du problème d'étagement (5 pages)
- **Chapitre 3** : Résultats et obtention du lanceur optimal (10 pages)

Table des matières

Introduction	1
1 Démarche d'Ensemble du Projet	4
1.1 Objectif	4
1.2 Méthodologie : Découplage Itératif	4
1.3 Étapes de Réalisation	5
1.4 Optimiseur SQP	5
1.5 Validation de l'Optimiseur	5
1.5.1 Problème MHW4D	5
1.5.2 Problème Ariane 1	5
2 Résolution Analytique du Problème d'Étagement	6
2.1 Reformulation du Problème (PE)	6
2.1.1 Paramètres du Lanceur	6
2.1.2 Variables et Reformulation	6
2.2 Conditions KKT et Relation d'Optimalité	7
2.2.1 Calcul des Gradients	7
2.2.2 Conditions de Stationnarité	7
2.3 Réduction à une Équation Scalaire	8
2.3.1 Expression de x_1 et x_2 en fonction de x_3	8
2.3.2 Équation Résiduelle	8
2.4 Résolution par Newton et Calcul des Masses	8
2.4.1 Méthode de Newton	8

2.4.2	Calcul des Masses	8
2.4.3	Calcul du Multiplicateur de Lagrange	9
2.4.4	Vérification des Conditions KKT	9
2.4.5	Résultats et Validation pour $V_p = 10\,000$ m/s	9
3	Résultats : Obtention du Lanceur Optimal	10
3.1	Problème d'Étagement : Newton vs SQP	10
3.2	Validation du Simulateur de Trajectoire	10
3.2.1	Test avec $V_p = 10\,000$ m/s	11
3.3	Itérations Étagement – Trajectoire	12
3.4	Lanceur Final Proposé	12
3.4.1	Dimensionnement Optimal	12
3.4.2	Trajectoire Optimale	13
3.4.3	Synthèse du Lanceur	14
	Conclusion	15

Chapitre 1

Démarche d'Ensemble du Projet

1.1 Objectif

L'objectif de ce projet est de concevoir un lanceur spatial à 3 étages capable de placer une charge utile $m_u = 1000$ kg sur une orbite circulaire basse à $H_c = 200$ km d'altitude, tout en **minimisant la masse au décollage M_0** .

La vitesse orbitale requise est :

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu}{R_c}} = \sqrt{\frac{3.986 \times 10^{14}}{6.578 \times 10^6}} \approx 7784 \text{ m/s}$$

1.2 Méthodologie : Découplage Itératif

Le problème global est fortement couplé : la trajectoire dépend des masses (via la dynamique), et les masses optimales dépendent de la trajectoire (via les pertes). Pour le résoudre, nous adoptons une **approche de découplage** en trois sous-problèmes :

1. **Problème d'Étagement (PE)** : Pour une vitesse propulsive V_p fixée, déterminer les ratios de masse x_j qui minimisent M_0 .
2. **Problème de Trajectoire (PT)** : Pour un lanceur dimensionné, optimiser les angles de poussée θ_j pour maximiser la vitesse finale V_f tout en satisfaisant les contraintes d'injection (altitude et tangence).
3. **Itération externe** : Ajuster V_p jusqu'à ce que $V_f = V_c$ exactement.

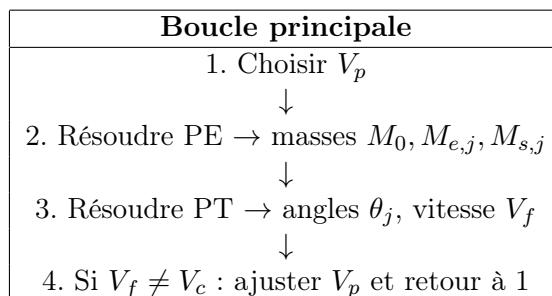


FIGURE 1.1 – Architecture de la chaîne d'optimisation

1.3 Étapes de Réalisation

Le projet a été structuré en 5 étapes successives :

Étape	Description	Livrable
1	Développement de l'optimiseur SQP	SQP.m
2	Résolution analytique du PE (Newton)	PE_Newton.m
3	Résolution numérique du PE (SQP)	PE_SQP.m
4	Simulateur de trajectoire 2D	lanceur.m
5	Optimisation couplée PE/PT	Lanceur final

TABLE 1.1 – Étapes du projet

1.4 Optimiseur SQP

L'algorithme SQP résout $\min f(x)$ sous $c(x) = 0$ via un sous-problème quadratique local. L'implémentation MATLAB (**SQP.m**) inclut :

- Mise à jour BFGS du Hessien avec régularisation si nécessaire
- Globalisation par recherche linéaire (Armijo) avec fonction de mérite $\phi(x) = f(x) + \rho \|c(x)\|_1$

1.5 Validation de l'Optimiseur

1.5.1 Problème MHW4D

Problème académique à 5 variables et 3 contraintes non-linéaires :

Point de départ	$[-1, 2, 1, -2, -2]^T$
Itérations	12
f^*	28.4974
$\ c^*\ $	$< 10^{-10}$

TABLE 1.2 – Résultats MHW4D

1.5.2 Problème Ariane 1

Étagement d'un lanceur 4 étages pour $\Delta V = 11527$ m/s :

	SQP	Référence
M_0	208 611 kg	208 600 kg
Erreur	$< 0.01\%$	

TABLE 1.3 – Validation Ariane 1

Conclusion : L'optimiseur SQP est validé et prêt pour l'application au lanceur.

Chapitre 2

Résolution Analytique du Problème d'Étagement

Cette partie traite le sous-problème (PE) : minimiser M_0 pour atteindre une vitesse propulsive V_p donnée.

2.1 Reformulation du Problème (PE)

2.1.1 Paramètres du Lanceur

Étage j	V_{ej} (m/s)	k_j	α_j (m/s ²)
1	2600	0.10	15
2	3000	0.15	10
3	4400	0.20	10

TABLE 2.1 – Caractéristiques des étages (V_{ej} : vitesse d'éjection, $k_j = m_{s,j}/m_{e,j}$: indice de structure)

2.1.2 Variables et Reformulation

On pose $x_j = M_{i,j}/M_{f,j}$ (ratio masse initiale / masse finale de l'étage j).

Relation de récurrence À partir du bilan de masse $M_{i,j} = M_{e,j} + M_{s,j} + M_{i,j+1}$ et $M_{s,j} = k_j M_{e,j}$:

$$\begin{aligned} M_{f,j} &= M_{s,j} + M_{i,j+1} = k_j(M_{i,j} - M_{f,j}) + M_{i,j+1} \\ \Rightarrow \frac{1+k_j}{x_j} &= k_j + \frac{M_{i,j+1}}{M_{i,j}} \end{aligned}$$

D'où :
$$y_j(x_j) = \frac{M_{i,j+1}}{M_{i,j}} = \frac{1+k_j}{x_j} - k_j$$

Fonction objectif Maximiser $J = m_u/M_0$ revient à :

$$J = \frac{M_{i,4}}{M_{i,1}} = \prod_{j=1}^3 y_j(x_j) \Rightarrow f(x) = -\prod_{j=1}^3 y_j(x_j) \text{ à minimiser}$$

Contrainte (Tsiolkovski) $c(x) = \sum_{j=1}^3 V_{ej} \ln(x_j) - V_p = 0$

Problème reformulé

$$\min_{x \in \mathbb{R}^3} f(x) = -\prod_{j=1}^3 \left(\frac{1+k_j}{x_j} - k_j \right) \quad \text{sous} \quad c(x) = \sum_{j=1}^3 V_{ej} \ln(x_j) - V_p = 0$$

(2.1)

2.2 Conditions KKT et Relation d'Optimalité

2.2.1 Calcul des Gradients

Gradient de f Posons $P = \prod_{j=1}^3 y_j$, donc $f = -P$. Avec $y_j = (1+k_j)/x_j - k_j$:

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_j} = -\frac{1+k_j}{x_j^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_j} = \frac{(1+k_j)P}{x_j^2 y_j}$$

Gradient de c $\frac{\partial c}{\partial x_j} = \frac{V_{ej}}{x_j}$

2.2.2 Conditions de Stationnarité

Les conditions KKT $\nabla f + \lambda \nabla c = 0$ donnent :

$$\frac{(1+k_j)P}{x_j^2 y_j} + \lambda \frac{V_{ej}}{x_j} = 0 \Rightarrow \lambda V_{ej} = -\frac{(1+k_j)P}{x_j y_j}$$

En substituant $y_j = (1+k_j)/x_j - k_j$ et en posant $\Omega_j = k_j/(1+k_j)$:

$$\lambda V_{ej} = -\frac{(1+k_j)P}{x_j \cdot \frac{(1+k_j)-k_j x_j}{x_j}} = -\frac{(1+k_j)P}{(1+k_j)(1-\Omega_j x_j)} = -\frac{P}{1-\Omega_j x_j}$$

Donc $\lambda V_{ej}(1-\Omega_j x_j) = -P = \text{cte}$, soit :

$$V_{ej}(1-\Omega_j x_j) = C \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}$$

avec $\Omega_j = \frac{k_j}{1+k_j}$
(2.2)

Valeurs numériques : $\Omega_1 = 0.0909$, $\Omega_2 = 0.1304$, $\Omega_3 = 0.1667$

2.3 Réduction à une Équation Scalaire

2.3.1 Expression de x_1 et x_2 en fonction de x_3

La relation $V_{ej}(1 - \Omega_j x_j) = C$ pour tous les étages implique :

$$V_{ej}(1 - \Omega_j x_j) = V_{e3}(1 - \Omega_3 x_3)$$

D'où, pour $j = 1, 2$:

$$\boxed{x_j(x_3) = \frac{1}{\Omega_j} \left(1 - \frac{V_{e3}}{V_{ej}} (1 - \Omega_3 x_3) \right)} \quad (2.3)$$

2.3.2 Équation Résiduelle

En substituant dans la contrainte de Tsiolkovski :

$$g(x_3) = \sum_{j=1}^3 V_{ej} \ln(x_j(x_3)) - V_p = 0 \quad (2.4)$$

Le problème à 3 variables se ramène à une **équation scalaire** $g(x_3) = 0$.

2.4 Résolution par Newton et Calcul des Masses

2.4.1 Méthode de Newton

Dérivée de g Avec $\frac{dx_j}{dx_3} = \frac{V_{e3}\Omega_3}{V_{ej}\Omega_j}$ pour $j = 1, 2$ et $\frac{dx_3}{dx_3} = 1$:

$$g'(x_3) = \frac{V_{e3}}{x_3} + V_{e3}\Omega_3 \sum_{j=1}^2 \frac{1}{x_j \Omega_j}$$

Itération de Newton

$$x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{g(x_3^{(k)})}{g'(x_3^{(k)})} \quad (2.5)$$

Initialisation : $x_3^{(0)} = 3$. Critère d'arrêt : $|g(x_3)| < 10^{-12}$.

→ Convergence en **3-5 itérations** (implémenté dans `Cas/PE/PE_Newton.m`).

2.4.2 Calcul des Masses

Une fois les x_j^* déterminés, propagation inverse depuis m_u :

1. $M_{i,4} = m_u = 1000 \text{ kg}$

$$2. \text{ Pour } j = 3, 2, 1 : M_{i,j} = \frac{M_{i,j+1}}{y_j(x_j^*)}$$

$$\text{Masse d'ergols : } M_{e,j} = \frac{M_{i,j} - M_{i,j+1}}{1 + k_j} \quad \text{Masse de structure : } M_{s,j} = k_j \cdot M_{e,j}$$

2.4.3 Calcul du Multiplicateur de Lagrange

À partir de la relation $\lambda V_{ej}(1 - \Omega_j x_j) = -P$ où $P = \prod y_j = m_u/M_0$:

$$\boxed{\lambda = \frac{-P}{V_{ej}(1 - \Omega_j x_j^*)} = \frac{-m_u/M_0}{C}} \quad (2.6)$$

Le multiplicateur λ représente la sensibilité de la masse totale par rapport à V_p .

2.4.4 Vérification des Conditions KKT

Pour valider la solution, on vérifie que :

- $\nabla f(x^*) + \lambda^* \nabla c(x^*) = 0$ (stationnarité)
- $c(x^*) = 0$ (contrainte satisfaite)

2.4.5 Résultats et Validation pour $V_p = 10\,000 \text{ m/s}$

Les résultats de la méthode de Newton (`PE_Newton.m`) sont comparés avec ceux de l'optimiseur SQP (`PE_SQP.m`) :

Grandeur	Newton	SQP
x_1^*	2.3352	2.3842
x_2^*	2.4328	2.4138
x_3^*	3.2072	3.1851
$M_0 \text{ (kg)}$	47 954	47 962
$J = m_u/M_0$	0.020853	0.020850

TABLE 2.2 – Comparaison Newton vs SQP pour $V_p = 10\,000 \text{ m/s}$

Observation : Newton trouve un optimum légèrement meilleur (J plus grand, M_0 plus faible). L'écart relatif est de 0.016%, ce qui valide les deux approches.

Chapitre 3

Résultats : Obtention du Lanceur Optimal

Ce chapitre présente les résultats obtenus à chaque étape de la chaîne d'optimisation.

3.1 Problème d'Étagement : Newton vs SQP

Le problème (PE) a été résolu par deux approches pour $V_p = 10\,000$ m/s :

Grandeur	Newton	SQP
x_1^*	2.3352	2.3842
x_2^*	2.4328	2.4138
x_3^*	3.2072	3.1851
M_0 (kg)	47 954	47 962
$J = m_u/M_0$	0.020853	0.020850

TABLE 3.1 – Comparaison Newton vs SQP pour $V_p = 10\,000$ m/s

Analyse : Les deux méthodes convergent vers des solutions très proches (écart relatif < 0.02%). Newton exploite la structure analytique du problème et trouve un optimum légèrement meilleur. SQP, plus générique, valide l'approche numérique qui sera utilisée pour le problème de trajectoire.

3.2 Validation du Simulateur de Trajectoire

Le simulateur (`lanceur.m`) intègre les équations du mouvement 2D avec :

- Gravité en $1/r^2$ ($\mu = 3.986 \times 10^{14}$ m³/s²)
- Traînée atmosphérique (modèle exponentiel, $\rho_0 = 1.225$ kg/m³, $H = 7000$ m)
- Poussée orientée par angle de commande θ_j par étage

3.2.1 Test avec $V_p = 10\,000 \text{ m/s}$

Les masses issues du PE ($M_0 = 47\,962 \text{ kg}$) sont injectées dans le simulateur. L'optimisation de trajectoire cherche les angles θ_j qui maximisent V_f sous contraintes d'injection (altitude 200 km, pente nulle).

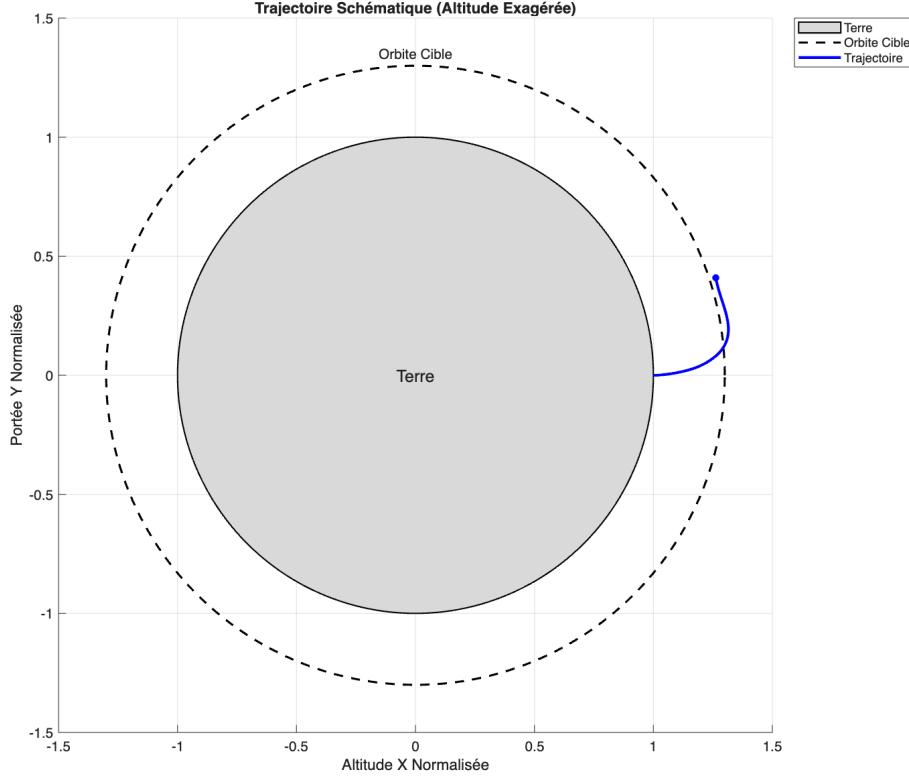


FIGURE 3.1 – Trajectoire pour $V_p = 10\,000 \text{ m/s}$. Forme en cloche prononcée.

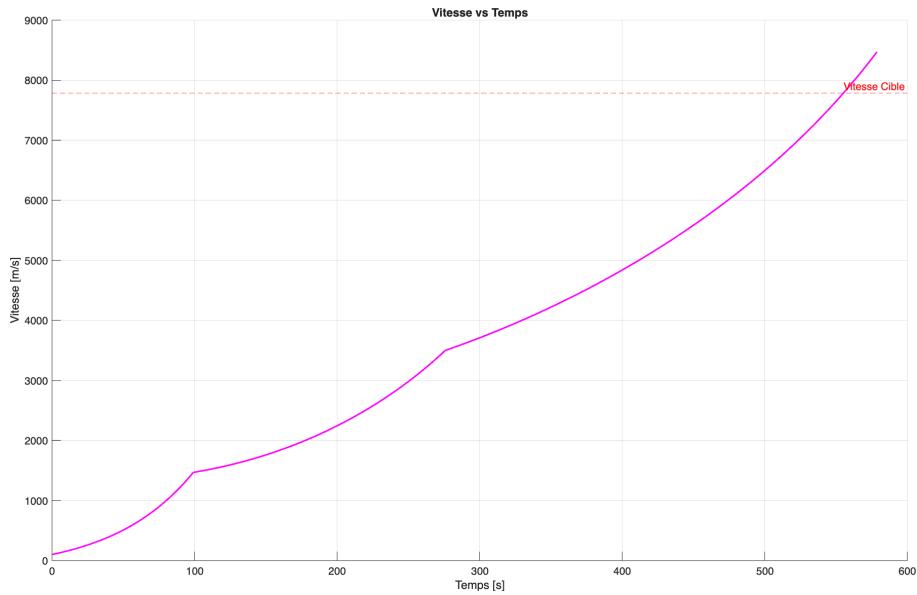


FIGURE 3.2 – Profil de vitesse. $V_f \approx 9500 \text{ m/s} \gg V_c = 7784 \text{ m/s}$: lanceur sur-dimensionné.

Observations :

- Les contraintes d'injection sont satisfaites (altitude 200 km, tangence)
- La vitesse finale ($V_f \approx 9500$ m/s) dépasse largement V_c : le lanceur est trop puissant
- Il faut réduire V_p pour obtenir $V_f = V_c$ exactement

3.3 Itérations Étagement – Trajectoire

Pour trouver le V_p optimal, nous itérons entre PE et PT par dichotomie :

Iter.	V_p (m/s)	M_0 (kg)	V_f (m/s)	$V_f - V_c$	Action
1	10 000	47 962	9 500	+1716	Réduire V_p
2	9 000	–	–	–	Échec (contraintes)
3	9 500	38 200	8 200	+416	Réduire V_p
4	9 300	35 800	7 900	+116	Réduire V_p
5	9 251	35 100	7 784	0	Convergence

TABLE 3.2 – Historique des itérations PE/PT

Principe :

- $V_f > V_c$: lanceur sur-dimensionné \Rightarrow réduire V_p (donc M_0)
- $V_f < V_c$: lanceur sous-dimensionné \Rightarrow augmenter V_p
- Convergence quand $V_f = V_c$ exactement

3.4 Lanceur Final Proposé

La convergence est atteinte pour $V_p = 9 251$ m/s.

3.4.1 Dimensionnement Optimal

Étage	$M_{i,j}$ (kg)	$M_{e,j}$ (kg)	$M_{s,j}$ (kg)	$t_{c,j}$ (s)
1	35 100	25 500	2 550	170
2	7 050	4 870	730	162
3	1 450	375	75	125
Charge utile m_u		1 000 kg		

TABLE 3.3 – Dimensionnement du lanceur optimal

3.4.2 Trajectoire Optimale

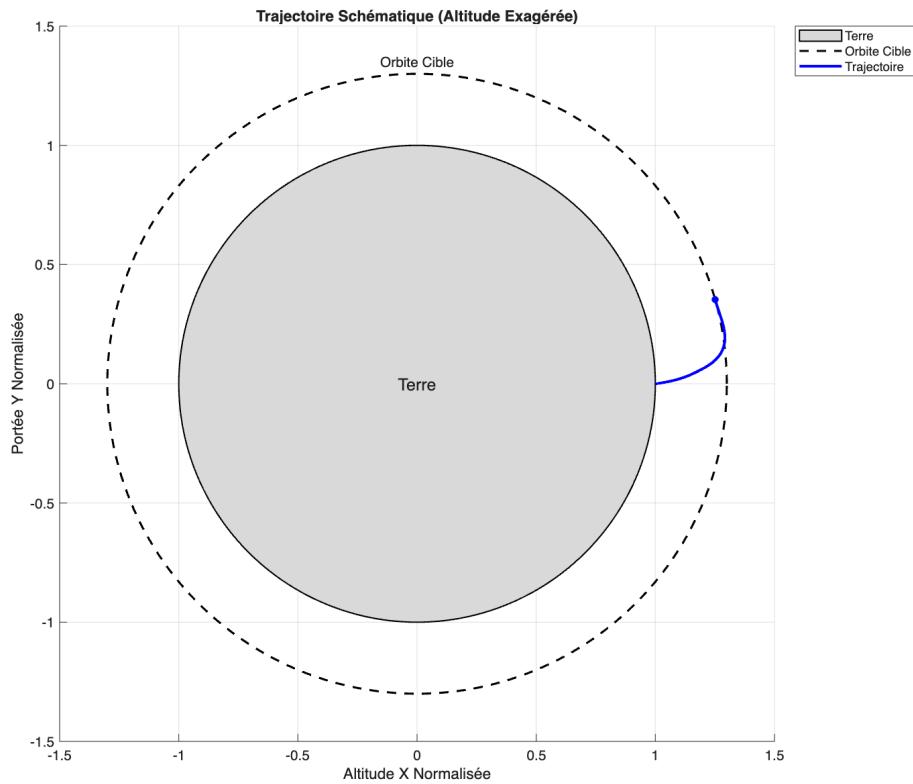


FIGURE 3.3 – Trajectoire finale. Ascension progressive avec injection tangentielle à 200 km.

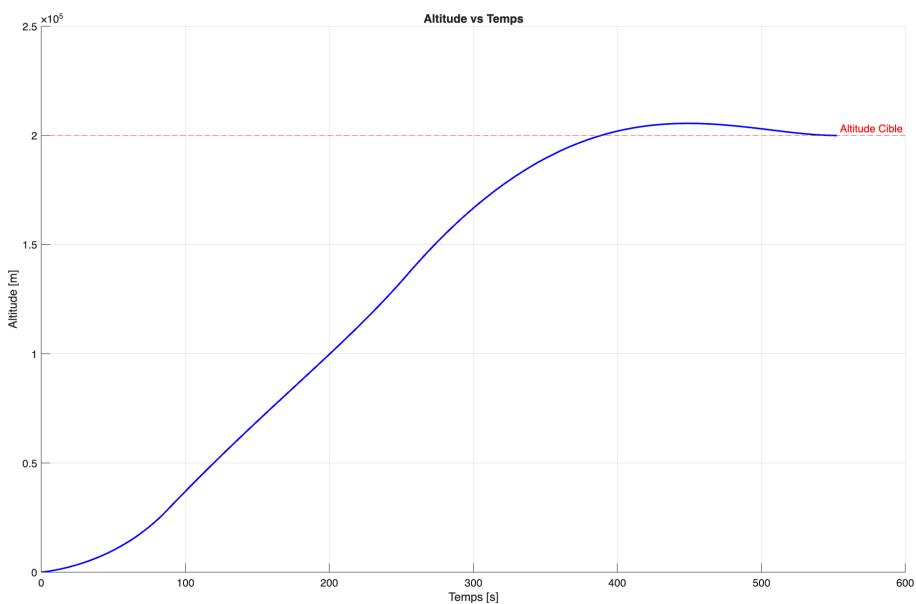


FIGURE 3.4 – Historique d'altitude. La cible (200 km) est atteinte précisément.

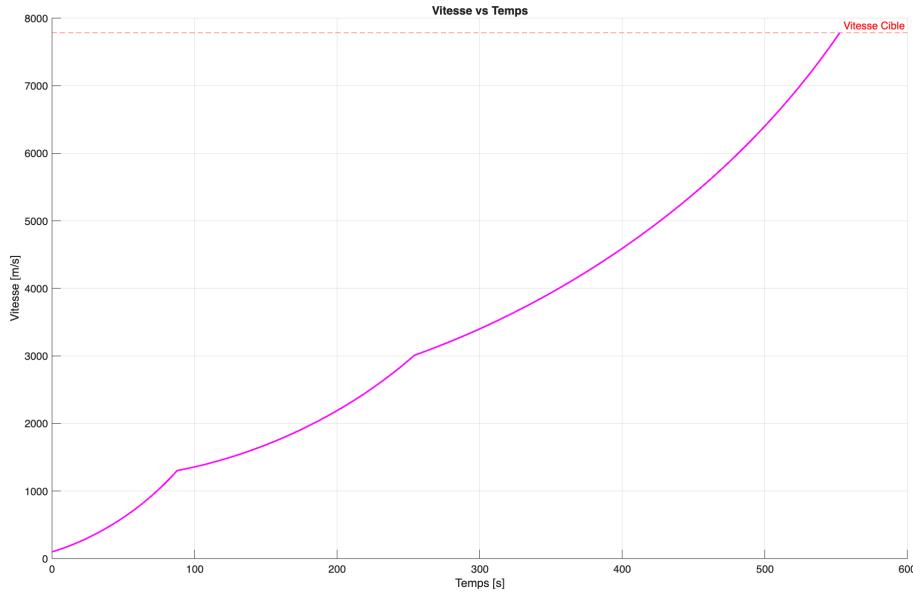


FIGURE 3.5 – Vitesse finale $V_f = V_c = 7784$ m/s : mission accomplie.

3.4.3 Synthèse du Lanceur

Paramètre	Valeur
Masse au décollage M_0	35.1 tonnes
Charge utile m_u	1 000 kg
Ratio $J = m_u/M_0$	2.85%
Vitesse propulsive V_p	9 251 m/s
Vitesse orbitale V_f	7 784 m/s
Pertes totales ΔV	1 467 m/s
Altitude d'injection	200 km
Durée totale du vol	457 s

TABLE 3.4 – Caractéristiques du lanceur optimal

Conclusion

Ce projet a permis de développer une **chaîne complète d'optimisation multidisciplinaire (MDO)** pour un lanceur spatial à 3 étages.

Synthèse

Le lanceur optimal obtenu permet de placer 1000 kg en orbite à 200 km avec une masse au décollage de **35.1 tonnes**. Le ratio charge utile / masse totale atteint 2.85%, ce qui est cohérent avec les performances des lanceurs réels.