

# Gaußsche Trapezformel

aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie

Mit Hilfe der **gaußschen Trapezformel** (nach Carl Friedrich Gauß) ist es möglich, die Fläche zwischen mehreren auf eine Messungslinie bezogenen/koordinierten Punkten, also beispielsweise die Fläche eines einfachen Polygons, zu berechnen. Durch die Zerlegung der gesuchten Fläche in einzelne auf die Messungslinie bezogenen Trapeze erfolgt die Berechnung.

Wortformel: Die doppelte Fläche entspricht der Summe des aktuellen Rechtswertes und des darauf folgenden, multipliziert mit der Differenz aus aktuellem Hochwert und folgendem Hochwert.

oder:

Die doppelte Fläche entspricht der Summe des aktuellen Hochwertes und des darauf folgenden, multipliziert mit der Differenz aus folgendem Rechtswert und aktuellem Rechtswert.

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad 2A &= \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1}) \\ \blacksquare \quad 2A &= \sum_{i=1}^n (x_i + x_{i+1})(y_{i+1} - y_i) \end{aligned}$$

wobei die Indizes, die größer als  $n$  sind, immer modulo  $n$  betrachtet werden müssen, d.h. mit  $x_{n+1}$  ist  $x_1$  gemeint.

Wenn die Punkte in der Drehrichtung des Koordinatensystems durchlaufen werden, ist der berechnete Flächeninhalt positiv, sonst negativ.

## Beispiel

Die Fläche des rechtsstehenden Bildes soll mit der Trapezformel berechnet werden. Es wird ein geodätisches Koordinatensystem verwendet, in dem der positive Drehsinn dem Uhrzeigersinn entspricht. Um einen positiven Flächeninhalt zu erhalten, müssen daher die Punkte im Uhrzeigersinn durchlaufen werden.

Die Dokumentation des Rechenweges kann auf unterschiedliche Art und Weise geschehen. Zur Vereinfachung dieser Schreibweise dienen z. B. innerhalb des Vermessungswesens vorgefertigte Vordrucke.

Zerlegt man die auf dem Bild zu sehende Einzelfläche  $A$  in die vier Teilflächen  $A_I$ ,  $A_{II}$ ,  $A_{III}$  und  $A_{IV}$ , so erhält man folgende Formel

$$\blacksquare \quad A = -A_I + A_{II} + A_{III} - A_{IV}$$

Somit ist

$$\blacksquare \quad 2A = -(y_2 + y_1)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + (y_3 + y_4)(x_3 - x_4) - (y_1 + y_4)(x_1 - x_4).$$

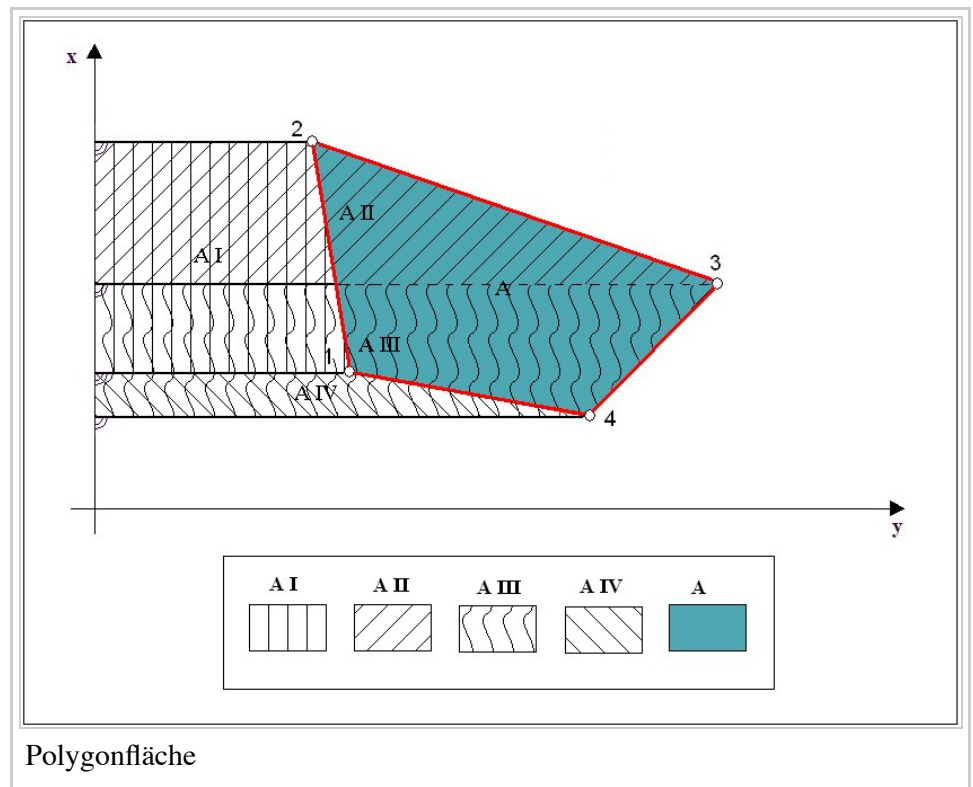
Durch geringe Umformungen erhält man daraus

$$\blacksquare \quad 2A = (y_1 + y_2)(x_1 - x_2) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + (y_3 + y_4)(x_3 - x_4) + (y_4 + y_1)(x_4 - x_1).$$

Dieses Ergebnis entspricht der oben angegebenen Trapezformel.

## Dreiecksformel

Die gaußsche **Dreiecksformel** ergibt sich durch das Ausklammern und Umstellen der Trapezformel. Die Indizes, die größer als  $n$  sind, müssen wieder modulo  $n$  betrachtet werden, d. h. mit  $x_{n+1}$  ist  $x_1$  gemeint und mit  $x_{n+2}$  ist  $x_2$  gemeint.



$$\begin{aligned}
 2A &= \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n (y_i(x_i - x_{i+1}) + y_{i+1}(x_i - x_{i+1})) \\
 &= \sum_{i=1}^n (y_i x_i - y_i x_{i+1} + y_{i+1} x_i - y_{i+1} x_{i+1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n (-y_i x_{i+1} + y_{i+1} x_i) + \underbrace{\sum_{i=1}^n (y_i x_i - y_{i+1} x_{i+1})}_{=0} \\
 &= \sum_{i=1}^n (y_{i+1} x_i - y_i x_{i+1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n (y_i x_{i-1} - y_i x_{i+1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n y_i (x_{i-1} - x_{i+1}).
 \end{aligned}$$

analog lässt sich

$$\blacksquare 2A = \sum_{i=1}^n (x_i + x_{i+1})(y_{i+1} - y_i)$$

zu

$$\blacksquare 2A = \sum_{i=1}^n x_i (y_{i+1} - y_{i-1})$$

umformen.

In Worten lautet diese Formel:

Die doppelte Fläche entspricht dem Produkt aus dem aktuellen Rechtswert und der Differenz aus vorherigem Hochwert und folgendem Hochwert.

Oder:

Die doppelte Fläche entspricht dem Produkt aus dem aktuellen Hochwert und der Differenz aus vorherigem Rechtswert und folgendem Rechtswert.

## Anwendung

Zur Flächenbestimmung im Gauß-Krüger-Koordinatensystem muss die Flächenverzerrung abhängig vom Abstand zum Hauptmeridian berücksichtigt werden.

Formel zur Berücksichtigung der Flächenverzerrung:  $r = \frac{F \cdot y^2}{R^2}$

- $r$  = Flächenreduktion
- $F$  = Ausgangsfläche
- $y$  = Abstand zum Hauptmeridian
- $R$  = Erdradius (geodätischer Erdradius = 6381 km)

Abgerufen von „[https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Gaußsche\\_Trapezformel&oldid=138863626](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Gaußsche_Trapezformel&oldid=138863626)“

Kategorien: Ebene Geometrie | Mathematische Geographie | Carl Friedrich Gauß

- 
- Diese Seite wurde zuletzt am 15. Februar 2015 um 14:32 Uhr geändert.
  - Abrufstatistik

Der Text ist unter der Lizenz „Creative Commons Attribution/Share Alike“ verfügbar; Informationen zu den Urhebern und zum Lizenzstatus eingebundener Mediendateien (etwa Bilder oder Videos) können im Regelfall durch Anklicken dieser abgerufen werden. Möglicherweise unterliegen die Inhalte jeweils zusätzlichen Bedingungen. Durch die Nutzung dieser Website erklären Sie sich mit den Nutzungsbedingungen und der Datenschutzrichtlinie einverstanden.

Wikipedia® ist eine eingetragene Marke der Wikimedia Foundation Inc.