Gaußsche Trapezformel

aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie

Mit Hilfe der **gaußschen Trapezformel** (nach Carl Friedrich Gauß) ist es möglich, die Fläche zwischen mehreren auf eine Messungslinie bezogenen/koordinierten Punkten, also beispielsweise die Fläche eines einfachen Polygons, zu berechnen. Durch die Zerlegung der gesuchten Fläche in einzelne auf die Messungslinie bezogenen Trapeze erfolgt die Berechnung.

Wortformel: Die doppelte Fläche entspricht der Summe des aktuellen Rechtswertes und des darauf folgenden, multipliziert mit der Differenz aus aktuellem Hochwert und folgendem Hochwert.

oder:

Die doppelte Fläche entspricht der Summe des aktuellen Hochwertes und des darauf folgenden, multipliziert mit der Differenz aus folgendem Rechtswert und aktuellem Rechtswert.

- $2A = \sum_{i=1}^{n}(y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1})$
- $2A = \sum_{i=1}^{n}(x_i + x_{i+1})(y_{i+1} - y_i)$

wobei die Indizes, die größer als n sind, immer modulo n betrachtet werden müssen, d.h. mit x_{n+1} ist x_1 gemeint.

Wenn die Punkte in der Drehrichtung des Koordinatensystems durchlaufen werden, ist der berechnete Flächeninhalt positiv, sonst negativ.

Beispiel

Die Fläche des rechtsstehenden Bildes soll mit der Trapezformel berechnet werden. Es wird ein geodätisches Koordinatensystem verwendet, in dem der positive Drehsinn dem Uhrzeigersinn entspricht. Um einen positiven Flächeninhalt zu erhalten, müssen daher die Punkte im Uhrzeigersinn durchlaufen werden.

Die Dokumentation des Rechenweges kann auf unterschiedliche Art und Weise geschehen. Zur Vereinfachung dieser Schreibweise dienen z. B. innerhalb des Vermessungswesens vorgefertigte Vordrucke.

Zerlegt man die auf dem Bild zu sehende Einzelfläche A in die vier Teilflächen A_I, A_{II}, A_{III} und A_{IV}, so erhält man folgende Formel

- $A = -A_I + A_{II} + A_{III} - A_{IV}$

Somit ist

- $2A = -(y_2 + y_1)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + (y_3 + y_4)(x_3 - x_4) - (y_1 + y_4)(x_1 - x_4).$

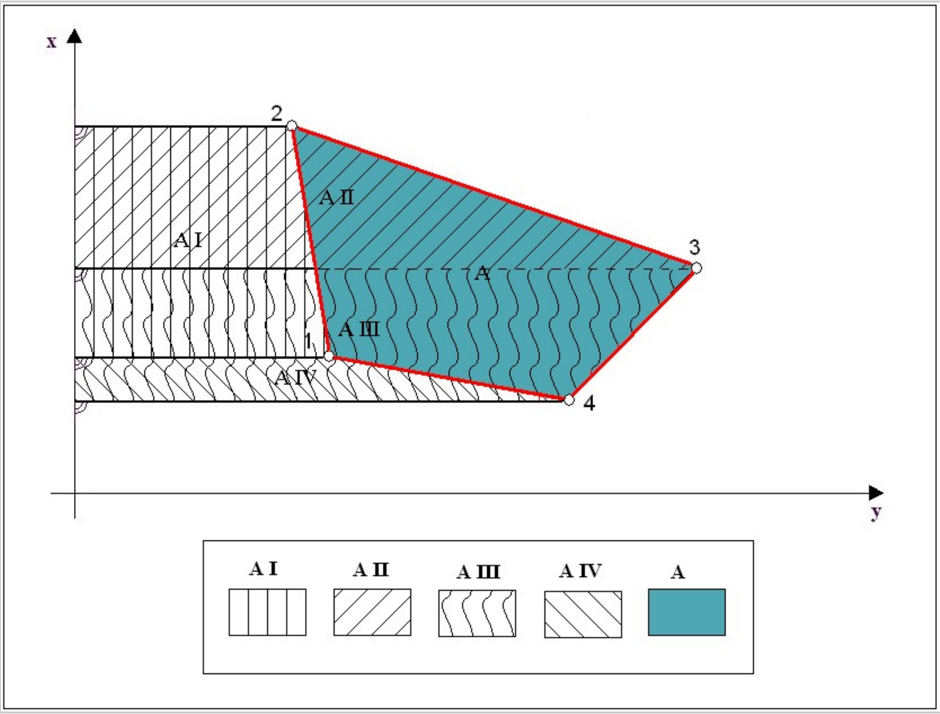
Durch geringe Umformungen erhält man daraus

- $2A = (y_1 + y_2)(x_1 - x_2) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + (y_3 + y_4)(x_3 - x_4) + (y_4 + y_1)(x_4 - x_1).$

Dieses Ergebnis entspricht der oben angegebenen Trapezformel.

Dreiecksformel

Die gaußsche **Dreiecksformel** ergibt sich durch das Ausklammern und Umstellen der Trapezformel. Die Indizes, die größer als n sind, müssen wieder modulo n betrachtet werden, d. h. mit x_{n+1} ist x_1 gemeint und mit x_{n+2} ist x_2 gemeint.



Polygonfläche

$$\begin{aligned}
2A &= \sum_{i=1}^{n} (y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(y_i (x_i - x_{i+1}) + y_{i+1}(x_i - x_{i+1}) \big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(y_i x_i - y_i x_{i+1} + y_{i+1} x_i - y_{i+1} x_{i+1} \big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(- y_i x_{i+1} + y_{i+1} x_i \big) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \big(y_i x_i - y_{i+1} x_{i+1} \big)}_{=0} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(y_{i+1} x_i - y_i x_{i+1} \big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(y_i x_{i-1} - y_i x_{i+1} \big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i (x_{i-1} - x_{i+1}).
\end{aligned}$$

analog lässt sich

- $2A = \sum_{i=1}^{n} (x_i + x_{i+1})(y_{i+1} - y_i)$

zu

- $2A = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_{i+1} - y_{i-1})$

umformen.

In Worten lautet diese Formel:

Die doppelte Fläche entspricht dem Produkt aus dem aktuellen Rechtswert und der Differenz aus vorherigem Hochwert und folgendem Hochwert.

Oder:

Die doppelte Fläche entspricht dem Produkt aus dem aktuellen Hochwert und der Differenz aus vorherigem Rechtswert und folgendem Rechtswert.

Anwendung

Zur Flächenbestimmung im Gauß-Krüger-Koordinatensystem muss die Flächenverzerrung abhängig vom Abstand zum Hauptmeridian berücksichtigt werden.

Formel zur Berücksichtigung der Flächenverzerrung: $r = \frac{F \cdot y^2}{R^2}$

- r = Flächenreduktion
- F = Ausgangsfläche
- y = Abstand zum Hauptmeridian
- R = Erdradius (geodätischer Erdradius = 6381 km)