



# Grundlagen digitaler Systeme

## Kapitel 3: Schaltnetze aka Kombinatorische Logik

Holger Karl

# Was bisher geschah

---

- Grundbegriffe geklärt: Daten, Datenverarbeitung, . . .
- Ziel ist: Datenverarbeitung
  - Aus bekannten Daten neue Daten berechnen
- Offene Frage: **Wie** berechnet man, elektronisch?

Funktionen  
Realisierung  
beliebiger  
Funktionen  
Schaltnetze  
Laufzeiten  
Energie  
Zusammenfassung  
Material

# Plan für Teil II

- Dieses Kapitel:
  - Aus einfachen Schaltern realisieren wir logische Funktionen
  - Nur rechnen, noch nicht speichern
- Folgende Kapitel:
  - Daten speichern
  - Einheiten mit komplexerer Funktion bilden
  - Ein-/Ausgabe

## Teil 2: Digitaltechnik

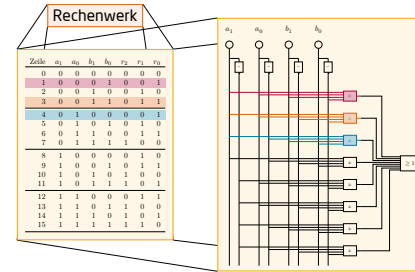
- Schalter und Gatter
- Sequentielle Logik
- Automaten
- Register/Transfer
- Ein-/Ausgabe

**Abbildung 3.1:** Struktur Teil 2: Digitaltechnik

Funktionen  
Realisierung  
beliebiger  
Funktionen  
Schaltnetze  
Laufzeiten  
Energie  
Zusammenfassung  
Material

# Plan für Teil II

- Dieses Kapitel:
  - ☐ Aus einfachen Schaltern realisieren wir logische Funktionen
  - ☐ Nur rechnen, noch nicht speichern
- Folgende Kapitel:
  - ☐ Daten speichern
  - ☐ Einheiten mit komplexerer Funktion bilden
  - ☐ Ein-/Ausgabe



**Abbildung 3.2:** Einordnung Kapitel 3

Funktionen  
Realisierung  
beliebiger  
Funktionen  
Schaltnetze  
Laufzeiten  
Energie  
Zusammenfassung  
Material

# Lernziele für dieses Kapitel

---

Sie können:

- ... aus Schaltern einfache Funktionen realisieren
- ... für Beispiele Funktionstabellen aufstellen
- ... für gegebene Funktionen Schaltnetze finden
  - Funktion kann z.B. durch Funktionstabelle angegeben sein
- ... Relevanz endlicher Schaltzeiten auf Schaltungsentwurf, Schwingungsverhalten einer Schaltung einschätzen
- ... Auswirkung von Parameteränderungen auf Energieeffizienz abschätzen

Funktionen  
Realisierung  
beliebiger  
Funktionen  
Schaltnetze  
Laufzeiten  
Energie  
Zusammenfassung  
Material

## 1. Funktionen

### 1.1 Funktionen aus Schaltern

### 1.2 Binäre Funktionen

### 1.3 Grundfunktionen

## 2. Realisierung beliebiger Funktionen

## 3. Schaltnetze

## 4. Laufzeiten

## 5. Energie

## 6. Zusammenfassung

## 7. Material

### Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

### Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

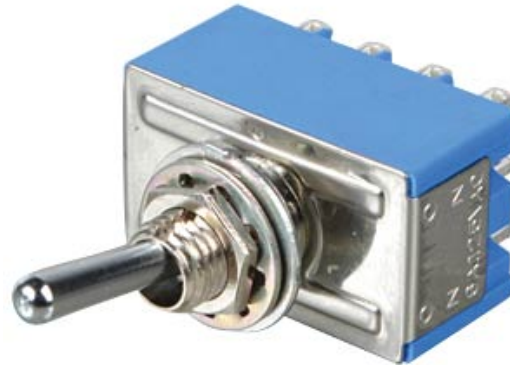
**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 6/93**

- Mechanische Schalter
  - Mit *Offen* oder *Geschlossen* als Voreinstellung
- Elektromechanischer Schalter (Relais)
  - Steuerstromkreis erzeugt Magnetfeld, zieht an Eisenkern, betätigt mechanischen Schalter
  - Film

Schalter:



**Abbildung 3.3:** Ein mechanischer Schalter (Reichelt, MS500P)

## Funktionen

Funktionen aus Schaltern  
Binäre Funktionen  
Grundfunktionen

Realisierung  
beliebiger  
Funktionen

Schaltnetze

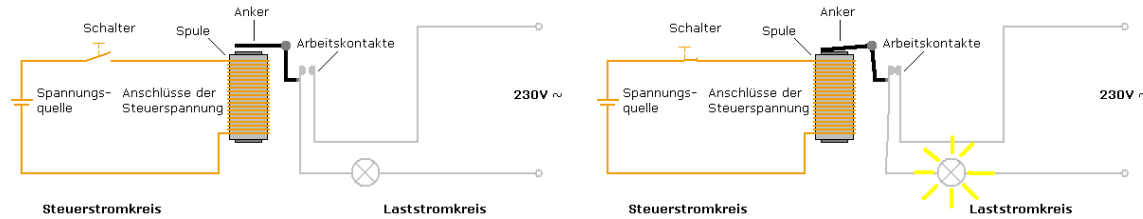
Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

# Relais: Schemazeichnung



**(a)** Kein Strom am Steuereingang: Relais offen

**(b)** Strom am Steuereingang: Relais geschlossen

**Abbildung 3.5:** Relais Schemazeichnung ([https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Relais\\_Animation.gif](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Relais_Animation.gif))

## Funktionen

Funktionen aus Schaltern  
Binäre Funktionen  
Grundfunktionen

## Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

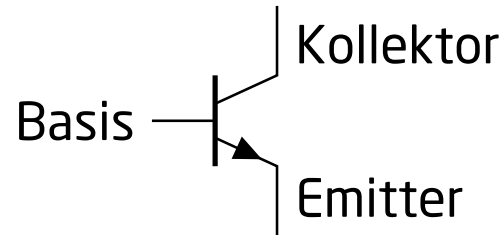
Energie

Zusammenfassung

Material



- Im Prinzip: Miniaturisiertes Relais in Halbleitertechnik
  - (Natürlich noch viel mehr: Verstärker, . . . )
- Transistor drei Anschlüsse: Basis, Kollektor, Emitter
- Spannung zwischen Basis und Emitter  
öffnet Kollektor-Emitter Schalter
  - Oder umgekehrt: Öffnen oder  
Sperren als default
- Echte **Schaltung**:  
Begrenzungswiderstände, . . .



**Abbildung 3.6:** Transistor als Schalter

## Funktionen

Funktionen aus Schaltern  
Binäre Funktionen  
Grundfunktionen

Realisierung  
beliebiger  
Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

# Alles: Schalter!

---

- Wesentlicher Punkt: Realisierungstechnologie ist uns egal
  - Mechanisch, Relais, Transistor, . . .
- Uns reicht die Vorstellung: Schalter!

## Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 10/93**

# Verarbeitung?

---

- Schalter: Schön und gut - wie verarbeiten wir damit nun Daten?

## Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

## Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 11/93**

# Verarbeitung?

---

- Schalter: Schön und gut - wie verarbeiten wir damit nun Daten?
- Einfachste Form der Verarbeitung: Funktionen

## Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 11/93**

# Verarbeitung?

---

- Schalter: Schön und gut - wie verarbeiten wir damit nun Daten?
- Einfachste Form der Verarbeitung: Funktionen

## Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 11/93**

## Definition 3.1 (Funktion)

Eine Funktion ist eine linkstotale, rechtseindeutige Relation.

- Linkstotal: Für jede mögliche Eingabekombination gibt es **mindestens eine** Ausgabe
- Rechtseindeutig: Für jede mögliche Eingabekombination gibt es **höchstens eine** Ausgabe
  - Oft auch: **deterministisch** (also nicht von Zufall abhängig)

### Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 12/93**

# Verarbeitung: Physik vs. Datum?

- Dazu notwendig: Identifikation
  - Brücke zwischen
    - manipulierbare **physikalischer Repräsentation**
    - Interpretation als Datum
  - Vgl. Signal vs. Datum

## Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 13/93**

# Brücke zwischen Datum und Physik

- Einfachstes Datum: Ein einzelnes Bit
  - ☐ Mit zwei möglichen Werte
  - ☐ z.B. geschrieben als 0 und 1
- Physik/Schalter (**BEISPIELE**):
  - ☐ Strom fließt, fließt nicht
  - ☐ Spannung liegt an, liegt nicht an
  - ☐ Ladung vorhanden, nicht vorhanden
  - ☐ Quantenzustand
  - ☐ ...

## Definition 3.2 (Verknüpfbare Datenrepräsentation)

Wir repräsentieren Daten so durch geeignete physikalische Eigenschaften, dass Schalter Operationen durchführen können, die als sinnvolle Verknüpfungen der Daten interpretiert werden können.

### Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

### Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 14/93**



## Beispiel 3.1 (Bits: Strom an/aus)

Identifikation von logischem Bitwert, physikalischer Größe, manipulierbarer  
Schalterstellung:

Bitwert	phys. Größe	Schalterstellung
0	kein Strom	offen
1	Strom fließt	geschlossen

(formal: Isomorphie)

### Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 15/93**

## 1. Funktionen

### 1.1 Funktionen aus Schaltern

### 1.2 Binäre Funktionen

### 1.3 Grundfunktionen

## 2. Realisierung beliebiger Funktionen

## 3. Schaltnetze

## 4. Laufzeiten

## 5. Energie

## 6. Zusammenfassung

## 7. Material

## Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

## Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

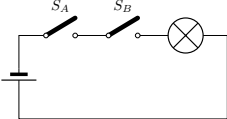
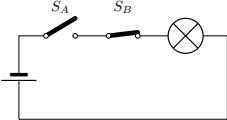
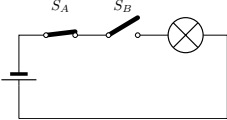
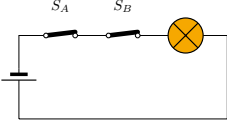
**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 16/93**

# Verknüpfung: Zwei Schalter in Reihe

Zwei Bits, vier mögliche Kombinationen

Bit A	Bit B	$S_A$	$S_B$	Schaltplan	Strom?	Resultat: Bit
0	0	offen	offen		nein	0
0	1	offen	zu		nein	0
1	0	zu	offen		nein	0
1	1	zu	zu		ja	1

## Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

## Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

## GDS 3: Schaltnetze

H. Karl, WS 22/23

Folie 17/93

- Wir haben die sog. **und**-Verknüpfung zweier Bits entdeckt!

## Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

## Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 18/93**

- Wir haben die sog. **und**-Verknüpfung zweier Bits entdeckt!
- Verallgemeinerung?
  - ☐ Andere Verknüpfungen?
  - ☐ Mehr als zwei Bits?

## Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

## Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

## GDS 3: Schaltnetze

H. Karl, WS 22/23

Folie 18/93

# Kompakte Darstellung: Funktionstabelle

- Zeichenvorrat:  $\{0, 1\}$
- Zeige alle Kombinationen möglicher Eingaben und Resultat

## Definition 3.3 (Binäre Funktion)

- Funktion binärer Eingaben mit binärer Ausgabe

### Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

### Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 19/93**

# Kompakte Darstellung: Funktionstabelle

- Zeichenvorrat:  $\{0, 1\}$
- Zeige alle Kombinationen möglicher Eingaben und Resultat

## Definition 3.3 (Binäre Funktion)

- Funktion binärer Eingaben mit binärer Ausgabe

## Definition 3.4 (Funktionstabelle)

- Einfache Darstellung einer binären Funktion
- Aufzählung aller möglichen Eingabekombinationen (**Belegungen**)
- Beispiel in Tab. 3.1

**Tabelle 3.1:** Beispiel einer einfachen Funktionstabelle für zwei Eingaben

Bit A	Bit B	Resultat-Bit
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

## Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

## Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 19/93**

# Funktionen mehrerer Bits

Angenommen:

- Wir haben  $n$  Bits: **Eingaben**
- Aus diesen berechnen wir den Wert eines weiteren Bits: **Ausgabe**
- Als deterministische **Funktion**

## Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 20/93**



# Funktionen mehrerer Bits

Angenommen:

- Wir haben  $n$  Bits: **Eingaben**
- Aus diesen berechnen wir den Wert eines weiteren Bits: **Ausgabe**
- Als deterministische **Funktion**
- Also: welche Kombinationen aus  $n$  Eingabebits und einem Ausgabebit können vorkommen?

Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 20/93**

# Beispiele binärer Funktionen

## Beispiel 3.2 (Funktion: Oder)

Bit A	Bit B	Resultat
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

## Beispiel 3.3 (Funktion: Entweder-oder (exclusive or, XOR))

Bit A	Bit B	Resultat
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

## Beispiel 3.4 (Funktion: Nicht-Und (NAND))

Bit A	Bit B	Resultat
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

### Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 21/93**

# Wie viele binäre Funktionen?

- Bei  $n$  Eingabebits gibt es  $k = 2^n$  viele Eingabekombinationen
  - Zum Beispiel durch Funktionstabelle dargestellt
- Für jeder der  $k$  Zeilen kann man 0 oder 1 als Ergebnis frei wählen
  - $2^k$  mögliche Kombinationen
- Insgesamt:  $2^{2^n}$  viele binäre Funktionen

## Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 22/93**

# Wie viele binäre Funktionen?

- Bei  $n$  Eingabebits gibt es  $k = 2^n$  viele Eingabekombinationen
    - Zum Beispiel durch Funktionstabelle dargestellt
  - Für jeder der  $k$  Zeilen kann man 0 oder 1 als Ergebnis frei wählen
    - $2^k$  mögliche Kombinationen
  - Insgesamt:  $2^{2^n}$  viele binäre Funktionen
- 
- Unübersichtlich! Struktur?

## Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 22/93**

## 1. Funktionen

### 1.1 Funktionen aus Schaltern

### 1.2 Binäre Funktionen

### 1.3 Grundfunktionen

## 2. Realisierung beliebiger Funktionen

## 3. Schaltnetze

## 4. Laufzeiten

## 5. Energie

## 6. Zusammenfassung

## 7. Material

### Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

### Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 23/93**

- Kann man binäre Funktionen aus anderen binären Funktionen zusammensetzen?

## Beispiel 3.5 (Mehrere NANDs)

- Was ist  $[ A \text{ NAND } ( A \text{ NAND } B ) ] \text{ NAND } [ B \text{ NAND } ( A \text{ NAND } B ) ]$  ?

### Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 24/93**

- Kann man binäre Funktionen aus anderen binären Funktionen zusammensetzen?

## Beispiel 3.5 (Mehrere NANDs)

- Was ist  $[ A \text{ NAND } ( A \text{ NAND } B ) ] \text{ NAND } [ B \text{ NAND } ( A \text{ NAND } B ) ]$  ?
- Das ist  $A \text{ XOR } B$ !

### Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 24/93**

- Kann man binäre Funktionen aus anderen binären Funktionen zusammensetzen?

## Beispiel 3.5 (Mehrere NANDs)

- Was ist  $[ A \text{ NAND } ( A \text{ NAND } B ) ] \text{ NAND } [ B \text{ NAND } ( A \text{ NAND } B ) ]$  ?
- Das ist  $A \text{ XOR } B$ !
- Nachweis: Funktionstabelle, (Boole'sche Algebra )

### Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 24/93**



## ■ Geht das immer?

- ☐ Kann an (beliebige) binäre Funktionen aus (bestimmten) anderen binären Funktionen zusammensetzen? Ja!
- ☐ Kann man **jede** der  $2^{2^n}$  vielen binären Funktionen von  $n$  binären Eingaben so darstellen? Ja!

## ■ Typische Funktionenmengen, mit denen man alle anderen binären Funktionen darstellen kann:

- ☐ AND, OR, NOT
- ☐ NAND
- ☐ NOR

## Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 25/93**

## Weiterlesen 3.1 (Erzeugendensystem)

Eine Teilmenge von Funktion, aus deren Kombination alle Funktionen erzeugt werden können, ist ein Erzeugendensystem.

Insbes. sind **minimale Erzeugendensysteme** interessant.

- Die hier mit NAND bzw. NOR sogar nur Größe 1 haben!
- Vgl. VL Lineare Algebra, Vektorräume, Basis.

### Funktionen

Funktionen aus Schaltern

Binäre Funktionen

Grundfunktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 26/93**

# Inhaltsverzeichnis

---

1. Funktionen

2. Realisierung beliebiger Funktionen

2.1 Hauptsatz der Schaltalgebra

2.2 Konstruktion von Normalformen

3. Schaltnetze

4. Laufzeiten

5. Energie

6. Zusammenfassung

7. Material

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Hauptsatz der Schaltalgebra

Konstruktion von Normalformen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 27/93**

# Problem: Eindeutigkeit, Konstruktion

- Problem 1: Für eine beliebige binäre Funktion gibt es unterschiedliche Formeln
  - Siehe Beispiel oben
  - Unpraktisch!

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Hauptsatz der Schaltalgebra

Konstruktion von Normalformen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 28/93**

# Problem: Eindeutigkeit, Konstruktion

---

- Problem 1: Für eine beliebige binäre Funktion gibt es unterschiedliche Formeln
  - Siehe Beispiel oben
  - Unpraktisch!
- Problem 2: Wie setzt man eine beliebige Funktion (z.B. durch Wahrheitstafel beschrieben) aus Grundfunktionen zusammen?
  - Algorithmus? . . . ?

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Hauptsatz der Schaltalgebra

Konstruktion von Normalformen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 28/93**

# Hauptsatz der Schaltalgebra

- Der Hauptsatz der Schaltalgebra:
  - Jede Schaltfunktion kann durch solche Formeln dargestellt werden
  - Der Satz gibt beispielhaft zwei Schemata für solche Formeln an (sog. **Normalform**): DNF und KNF
  - Diese Normalformen sind bis auf Reihenfolge eindeutig (wegen Kommutativität)

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Hauptsatz der Schaltalgebra

Konstruktion von Normalformen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 29/93**

## Definition 3.5 (Disjunktive Normalform)

Die **Disjunktive Normalform (DNF)** einer Funktion von  $n$  binären Eingaben besteht aus:

- Beliebige vielen UND-Verknüpfungen der  $n$  Eingaben oder deren Negation
- Sowie einer ODER-Verknüpfung aller dieser UND-Terme
- Beispiel:  $(a \text{ und nicht } b) \text{ oder } (\text{nicht } b \text{ und } c)$

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Hauptsatz der Schaltalgebra

Konstruktion von Normalformen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

# Normalformen

## Definition 3.5 (Disjunktive Normalform)

Die **DNF** einer Funktion von  $n$  binären Eingaben besteht aus:

- Beliebigen vielen UND-Verknüpfungen der  $n$  Eingaben oder deren Negation
- Sowie einer ODER-Verknüpfung aller dieser UND-Terme
- Beispiel:  $(a \text{ und nicht } b) \text{ oder } (\text{nicht } b \text{ und } c)$

## Definition 3.6 (Konjunktive Normalform)

Die **KNF** einer Funktion von  $n$  binären Eingaben besteht aus:

- Beliebigen vielen ODER-Verknüpfungen der  $n$  Eingaben oder deren Negation
- Sowie einer UND-Verknüpfung aller dieser ODER-Terme
- Beispiel:  $(a \text{ oder nicht } b) \text{ und } (\text{nicht } b \text{ oder } c)$

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Hauptsatz der Schaltalgebra

Konstruktion von Normalformen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 30/93**



# Inhaltsverzeichnis

---

1. Funktionen

2. Realisierung beliebiger Funktionen

2.1 Hauptsatz der Schaltalgebra

2.2 Konstruktion von Normalformen

3. Schaltnetze

4. Laufzeiten

5. Energie

6. Zusammenfassung

7. Material

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Hauptsatz der Schaltalgebra

Konstruktion von Normalformen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 31/93**

# Wie findet man Formeln oder Normalformen?

---

- Irgendeine Formeln für eine Wahrheitstabelle?
  - Inspiriertes Draufschauen? Ausprobieren? . . . ?

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Hauptsatz der Schaltalgebra

Konstruktion von Normalformen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 32/93**

# Wie findet man Formeln oder Normalformen?

- Irgendeine Formeln für eine Wahrheitstabelle?
  - ☐ Inspiriertes Draufschauen? Ausprobieren? . . . ?
- Normalformen?
  - ☐ Konstruktionsvorschrift!

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Hauptsatz der Schaltalgebra

Konstruktion von Normalformen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 32/93**

# Grundidee für DNF

- Wir schauen uns die Zeilen an, in denen die darzustellende Funktion eine 1 hat
- Für jede dieser Zeilen bauen wir uns eine eigene Hilfsfunktion, die nur in dieser Zeile 1 ist, sonst 0
- Wir ODER-verknüpfen diese Hilfsfunktionen

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Hauptsatz der Schaltalgebra

Konstruktion von Normalformen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 33/93**

**Tabelle 3.2:** Beispielfunktion

Zeile	$X$			$y = f(X)$
	$x_3$	$x_2$	$x_1$	
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Hauptsatz der Schaltalgebra

Konstruktion von Normalformen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 34/93**

# Hilfsfunktionen: Minterm-Funktionen

**Tabelle 3.3:** Minterm-Funktionen (Idee)

Zeile	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$y = f(X)$	$m_0$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$m_6$	$m_7$
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
<b>3</b>	0	1	1	1	0	0	0	<b>1</b>	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
6	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
7	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

■ Minterm-Funktionen: 1 ist genau einer Zeile

- $m_j$  ist 1 für Belegung  $X_j$  der Eingaben in Zeile  $j$ , ansonsten 0
  - Für  $n$  Eingaben haben wir also  $2^n$  Minterme
- Beispiel:  $m_3$  ist in der **3.** Zeile **1**, ansonsten 0

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Hauptsatz der Schaltalgebra

Konstruktion von Normalformen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 35/93**

# Konstruktion Minterm-Funktionen

**Tabelle 3.4:** Minterm-Funktionen (Gleichung)

Zeile	$x_3$	$x_2$	$x_1$	$y = f(X)$	$m_0$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$m_6$	$m_7$
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
6	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
7	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

## ■ Gleichungen für die Minterm-Funktionen

- $m_j = \ddot{x}_n \wedge \dots \wedge \ddot{x}_i \wedge \dots \wedge \ddot{x}_1$
- $\ddot{x}$  steht für die Eingabe  $x$  oder deren Negation  $\bar{x}$ 
  - $\ddot{x} = x$  fuer  $X_{j,i} = 1$ ;  $\ddot{x} = \bar{x}$  fuer  $X_{j,i} = 0$
- $m_3 = \bar{x}_3 \wedge x_2 \wedge x_1$

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Hauptsatz der Schaltalgebra

Konstruktion von Normalformen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 36/93**

# Disjunktive Normalform

**Tabelle 3.5:** Bildung Disjunktive Normalform

Zeile	X			$y = f(X)$	$m_0$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$m_6$	$m_7$
	$x_3$	$x_2$	$x_1$									
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
6	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
7	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

- Konstruktion der Funktion  $f(X)$  als ODER-Verknüpfung der Minterme, in denen die Ausgabe wahr sein soll
  - $f(X)$  ist 1 dann und nur dann wenn  $m_1 = 1$  oder  $m_3 = 1$  oder  $m_6 = 1$  oder  $m_7 = 1$
  - $f(X) = m_1 \vee m_3 \vee m_6 \vee m_7$

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Hauptsatz der Schaltalgebra

Konstruktion von Normalformen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 37/93**



# Disjunktive Normalform

**Tabelle 3.6:** Minterm-Funktionen

Zeile	X			$y = f(X)$	$m_0$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$m_6$	$m_7$
	$x_3$	$x_2$	$x_1$									
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
6	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
7	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

## ■ Konstruktion von $y$ mit Hilfe der Minterm-Funktionen

- ☐  $y = m_1 \vee m_3 \vee m_6 \vee m_7$
- ☐  $y = (\overline{x_3} \wedge \overline{x_2} \wedge x_1) \vee (\overline{x_3} \wedge x_2 \wedge x_1) \vee (x_3 \wedge x_2 \wedge \overline{x_1}) \vee (x_3 \wedge x_2 \wedge x_1)$
- ☐ **Beweis:** Durchprobieren aller Belegungen
  - $f(0, 0, 0) = 0, f(0, 0, 1) = 1, \dots$

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Hauptsatz der Schaltalgebra

Konstruktion von Normalformen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 38/93**

# Diskussion Disjunktive Normalform

## ■ Vorteil

- Alle Schaltfunktionen umsetzbar
- Einfach aus der Wahrheitstafel ablesbar

## ■ Nachteil

- Sehr aufwändig; die DNF ist oft sehr groß
- Es werden drei Verknüpfungen (UND, ODER, NICHT) benötigt
- Aber: Mit Hilfe der De-Morganschen Gesetze einfach in NAND-NAND überführbar

$$- y = (\overline{x_3} \wedge \overline{x_2} \wedge x_1) \vee (\overline{x_3} \wedge x_2 \wedge x_1) \vee (x_3 \wedge x_2 \wedge \overline{x_1}) \vee (x_3 \wedge x_2 \wedge x_1)$$

$$- y = \overline{(\overline{x_3} \wedge \overline{x_2} \wedge x_1) \wedge (\overline{x_3} \wedge x_2 \wedge x_1) \wedge (x_3 \wedge x_2 \wedge \overline{x_1}) \wedge (x_3 \wedge x_2 \wedge x_1)}$$

$$- \overline{x_i} = \overline{(x_i \wedge x_i)}$$

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Hauptsatz der Schaltalgebra

Konstruktion von Normalformen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 39/93**

# Inhaltsverzeichnis

---

1. Funktionen

2. Realisierung beliebiger Funktionen

3. Schaltnetze

3.1 Realisierung

3.2 Wichtige Schaltnetze

3.3 Optimierung

3.4 Zusammenfassung: Von Funktion zu Realisierung

4. Laufzeiten

5. Energie

6. Zusammenfassung

7. Material

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

**Schaltnetze**

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 40/93**

# Funktion vs. Schaltung

Zwei Sichtweisen: binäre Funktion vs. Realisierung als Schaltung

## Definition 3.7 (Schaltnetz)

Eine Schaltung, die eine binäre Funktion realisiert, heißt **Schaltnetz** (auch: **Kombinatorische Schaltung**).

- Ein Schaltnetz realisiert eine bestimmte Funktion
- Eine Funktion kann in der Regel durch unterschiedliche Schaltnetze realisiert werden
  - Entspricht: für eine Funktion gibt es unterschiedliche, äquivalente Formeln

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

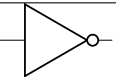
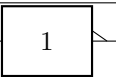

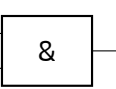
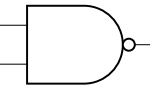
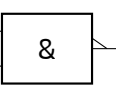
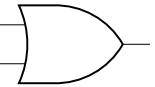
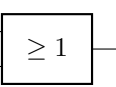
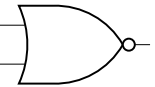
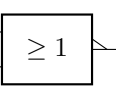
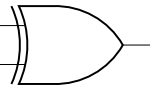
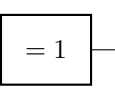
**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 41/93**

# Schaltnetz: Graphische Symbole

Für die Schaltnetze typischer binärer Funktionen führt man Symbole zur Darstellung in Schaltbildern ein

Funktion	IEEE Symbol	europ. Symbol
NOT		
AND		
NAND		
OR		
NOR		
XOR		

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

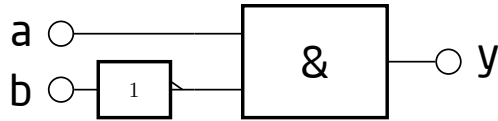
**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

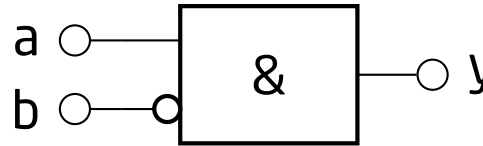
**Folie 42/93**

# Vereinfachte Darstellung invertierter Eingänge

Funktion:  $y = a \text{ AND } (\text{NOT } b)$



**Abbildung 3.7:** Darstellung mit expliziten Inverter



**Abbildung 3.8:** Darstellung mit Kreis an invertieren Eingängen

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 43/93**

# Von Funktion zu Schaltung

---

- Im Prinzip kann man für jede der  $2^{2^n}$  binären Funktionen eine (oder mehrere) Schaltung entwerfen (siehe Übung)

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 44/93**

# Von Funktion zu Schaltung

---

- Im Prinzip kann man für jede der  $2^{2^n}$  binären Funktionen eine (oder mehrere) Schaltung entwerfen (siehe Übung)
- Oder man überlegt sich,
  - dass es für binäre Funktionen kompakte Erzeugendensysteme gibt
  - und man nur für diese erzeugenden Funktionen Schaltungen braucht, geeignet zusammengesetzt?

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 44/93**



# Schaltungen für Erzeugendensystem

---

Alle Funktionen aus Grundfunktionen erzeugbar

## Beobachtung 3.1 (Konsequenz)

- Wir brauchen nur Schaltnetze für diese Grundfunktionen!
- NAND bzw. NOR sind einfach mikroelektronisch zu realisieren

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 45/93**

# Schaltungen für Erzeugendensystem

Alle Funktionen aus Grundfunktionen erzeugbar

## Beobachtung 3.1 (Konsequenz)

- Wir brauchen nur Schaltnetze für diese Grundfunktionen!
- NAND bzw. NOR sind einfach mikroelektronisch zu realisieren

## Definition 3.8 (Grundschaltnetz)

- Beschränkt man sich auf solche Grundfunktionen, so spricht man analog von einem **Grundschaltnetz**
- Alle Schaltungen werden aus Grundschaltnetzen zusammengesetzt

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 45/93**

# Schaltungen für Erzeugendensystem

Alle Funktionen aus Grundfunktionen erzeugbar

## Beobachtung 3.1 (Konsequenz)

- Wir brauchen nur Schaltnetze für diese Grundfunktionen!
- NAND bzw. NOR sind einfach mikroelektronisch zu realisieren

## Definition 3.8 (Grundschaltnetz)

- Beschränkt man sich auf solche Grundfunktionen, so spricht man analog von einem Grundschaltnetz
- Alle Schaltungen werden aus Grundschaltnetzen zusammengesetzt

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 45/93**

## Beobachtung 3.2 (Uneinheitliche Terminologie)

- Manchmal werden Grundschaltnetze auch als *Gatter* bezeichnet
  - Insbes. als Und-Gatter, NAND-Gatter, . . .
- Wir benutzen den Begriff allerdings etwas anders (Abschnitt 3.4)
- Leider keine einheitliche Terminologie!

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

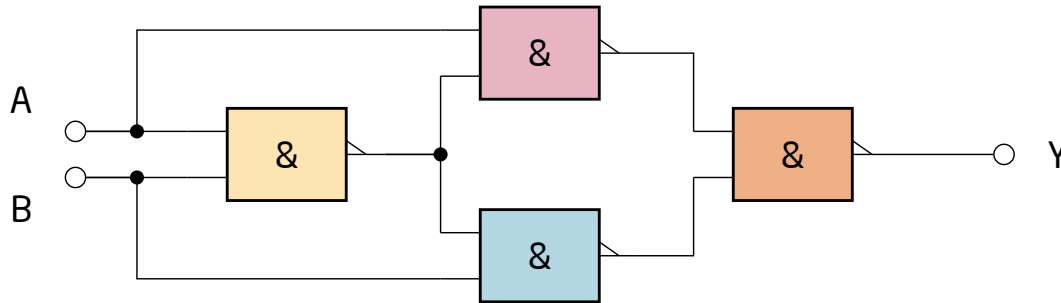
H. Karl, WS 22/23

**Folie 46/93**

# XOR aus NAND: Schaltungssymbole

■  $Y = A \text{ XOR } B = [ A \text{ NAND } ( A \text{ NAND } B ) ] \text{ NAND } [ B \text{ NAND } ( A \text{ NAND } B ) ]$

■  $Y = A \oplus B = \overline{A \wedge A \wedge B \wedge B \wedge A \wedge B}$



**Abbildung 3.9:** XOR durch vier NANDs realisiert

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

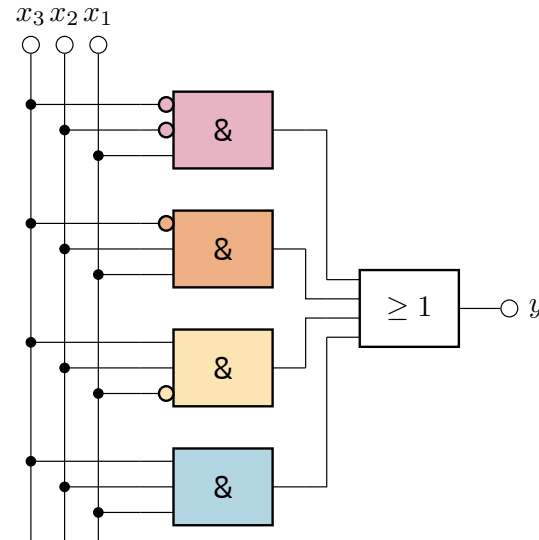
**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 47/93**

# Schaltung Beispiel Disjunktive Normalform

$$y = (\overline{x_3} \wedge \overline{x_2} \wedge x_1) \vee (\overline{x_3} \wedge x_2 \wedge x_1) \vee (x_3 \wedge x_2 \wedge \overline{x_1}) \vee (x_3 \wedge x_2 \wedge x_1)$$



**Abbildung 3.10:** Schaltung für Beispiel aus Tabelle 3.2 in DNF

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

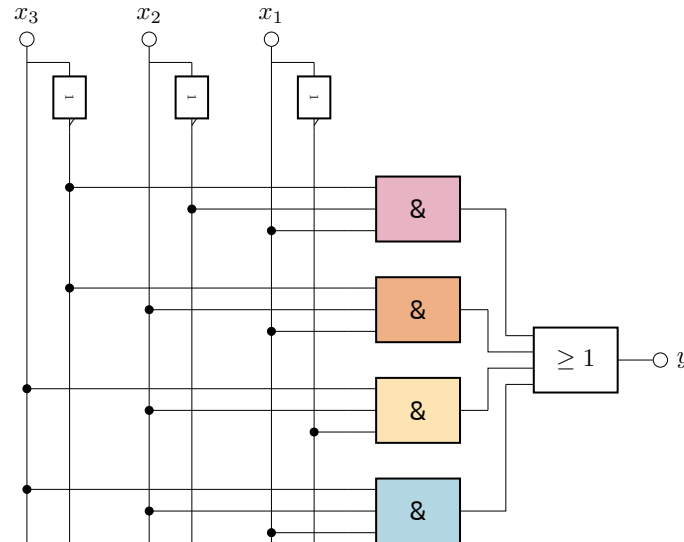
**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 48/93**

# Schaltung Beispiel Disjunktive Normalform, alternative Darstellung

$$y = (\overline{x_3} \wedge \overline{x_2} \wedge x_1) \vee (\overline{x_3} \wedge x_2 \wedge x_1) \vee (x_3 \wedge x_2 \wedge \overline{x_1}) \vee (x_3 \wedge x_2 \wedge x_1)$$



**Abbildung 3.11:** Schaltung für Beispiel aus Tabelle 3.2 in DNF, alternative Darstellung

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 49/93**

# Inhaltsverzeichnis

---

- 1. Funktionen
- 2. Realisierung beliebiger Funktionen
- 3. Schaltnetze**
  - 3.1 Realisierung
  - 3.2 Wichtige Schaltnetze**
  - 3.3 Optimierung
  - 3.4 Zusammenfassung: Von Funktion zu Realisierung
- 4. Laufzeiten
- 5. Energie
- 6. Zusammenfassung
- 7. Material

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 50/93**



# Aufgabe: Addierer

- Schaltnetz, das zwei 2-Bit Zahlen  $a = a_1a_0$  und  $b = b_1b_0$  addieren kann

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 51/93**

# Aufgabe: Addierer

3.2, A.3

- Schaltnetz, das zwei 2-Bit Zahlen  $a = a_1a_0$  und  $b = b_1b_0$  addieren kann
- Ausgabe: **drei** Bits!
- Folgende Grunschaltnetze erlaubt: UND, ODER, NICHT

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 51/93**

**Tabelle 3.7:** Wahrheitstafel 2-Bit-Addierer

Zeile	$a_1$	$a_0$	$b_1$	$b_0$	$r_2$	$r_1$	$r_0$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1
2	0	0	1	0	0	1	0
3	0	0	1	1	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0	1
5	0	1	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0	1	1
7	0	1	1	1	1	0	0
8	1	0	0	0	0	1	0
9	1	0	0	1	0	1	1
10	1	0	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1	0	1
12	1	1	0	0	0	1	1
13	1	1	0	1	1	0	0
14	1	1	1	0	1	0	1
15	1	1	1	1	1	1	0

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 52/93**

# Drei Schaltnetze!

- Beobachtung: Die Resultat-Bits  $r_2, r_1, r_0$  kann man separat betrachten
- Also **drei** Schaltnetze entwerfen; eines pro Resultat-Bit
- Disjunktive Normalform für  $r_2$ :

$$r_2 = (\overline{a_1} \wedge a_0 \wedge b_1 \wedge b_0) \vee (a_1 \wedge \overline{a_0} \wedge b_1 \wedge \overline{b_0}) \vee (a_1 \wedge \overline{a_0} \wedge b_1 \wedge b_0) \vee \\ (a_1 \wedge a_0 \wedge \overline{b_1} \wedge b_0) \vee (a_1 \wedge a_0 \wedge b_1 \wedge \overline{b_0}) \vee (a_1 \wedge a_0 \wedge b_1 \wedge b_0)$$

- $r_1, r_0 \rightarrow$  Übungsblatt!

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 53/93**

# Beispiel Schaltnetz: Addierer Ausgabe $r_2$

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

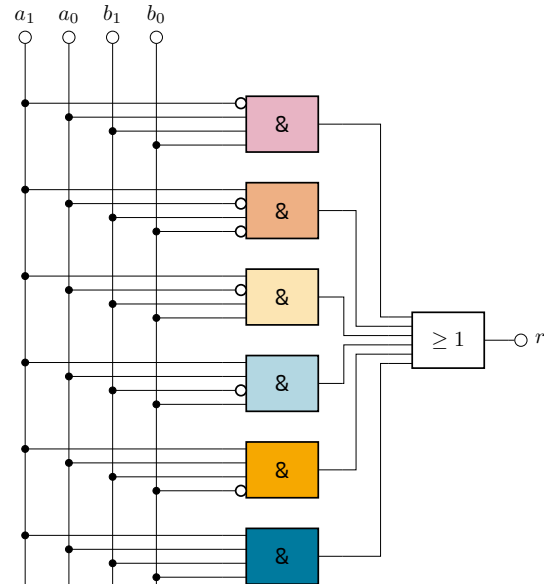
Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 54/93**

$$r_2 = \begin{aligned} & (\overline{a_1} \wedge a_0 \wedge b_1 \wedge b_0) \vee \\ & (a_1 \wedge \overline{a_0} \wedge b_1 \wedge \overline{b_0}) \vee \\ & (a_1 \wedge \overline{a_0} \wedge b_1 \wedge b_0) \vee \\ & (a_1 \wedge a_0 \wedge \overline{b_1} \wedge b_0) \vee \\ & (a_1 \wedge a_0 \wedge b_1 \wedge \overline{b_0}) \vee \\ & (a_1 \wedge a_0 \wedge b_1 \wedge b_0) \end{aligned}$$



**Abbildung 3.12:** Schaltung (basierend auf DNF) für das Ausgabebit  $r_2$  des Zwei-Bit-Addierers

## Definition 3.9 (Dekodierer)

Schaltnetz, das aus  $k$  Eingängen (mit allen erlaubten Kombinationen)  $2^k$  Ausgänge macht, bei denen **genau der** Ausgang 1 ist, dessen Nummer am Eingang anliegt (alle anderen 0)

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

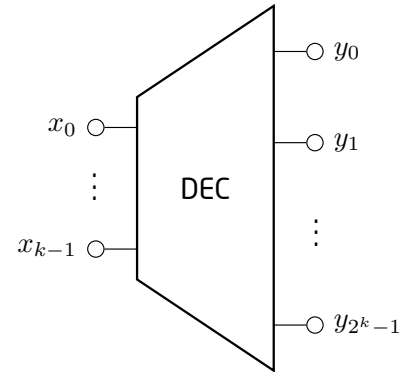
**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 55/93**

## Definition 3.9 (Dekodierer)

Schaltnetz, das aus  $k$  Eingängen (mit allen erlaubten Kombinationen)  $2^k$  Ausgänge macht, bei denen **genau der** Ausgang 1 ist, dessen Nummer am Eingang anliegt (alle anderen 0)



**Abbildung 3.13:** Dekodier-Baustein

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 55/93**

# Dekodierer und Kodierer

## Definition 3.9 (Dekodierer)

Schaltnetz, das aus  $k$  Eingängen (mit allen erlaubten Kombinationen)  $2^k$  Ausgänge macht, bei denen **genau der** Ausgang 1 ist, dessen Nummer am Eingang anliegt (alle anderen 0)

## Definition 3.10 (Kodierer)

Schaltnetz, das aus  $2^k$  Eingängen, von denen **genau einer** 1 ist,  $k$  Ausgänge macht und dort die Nummer des aktiven Eingangs als Dualzahl darstellt.

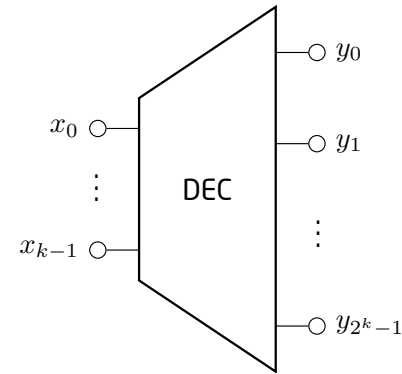


Abbildung 3.13: Dekodier-Baustein

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 55/93**



# Multiplexer

Verwandt mit Kodierer/Dekodierer

## Definition 3.11 (Multiplexer)

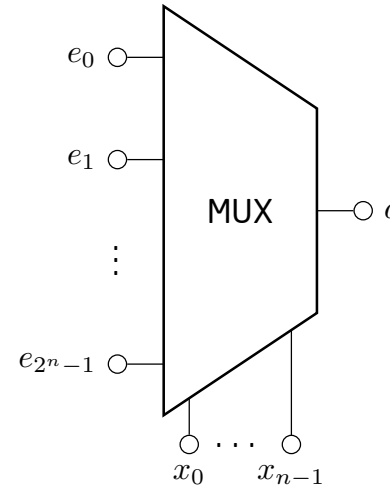
Schaltnetz mit

■ zwei Gruppen von Eingängen:

- $n$  Steuereingänge  $x_0, \dots, x_{n-1}$
- $2^n$  Eingabeeingängen  $e_0, \dots, e_{2^n-1}$

■ und einem Ausgang  $a$ .

An den Steuereingängen wird durch eine Dualzahl  $i$  der Eingabeeingang  $i$  ausgewählt, der mit dem Ausgang verbunden wird.



**Abbildung 3.14:**  
Multiplexer-Baustein

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 56/93**

# Demultiplexer

Die Umkehrung des Multiplexers

## Definition 3.12 (Demultiplexer)

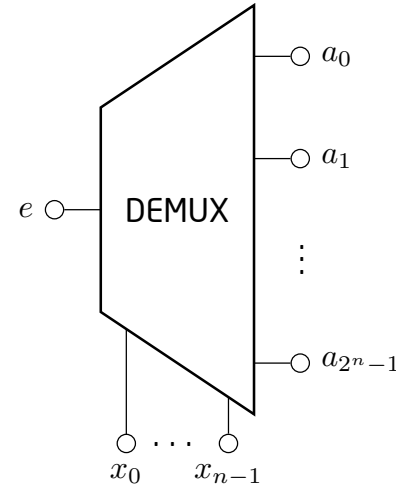
Schaltnetz mit

■ zwei Gruppen von Eingängen:

- $n$  Steuereingängen  $x_0, \dots, x_{n-1}$
- 1 Eingabeeingang  $e$

■ und  $2^n$  Ausgängen  $a_0, \dots, a_{2^n-1}$ .

An den Steuereingängen wird durch eine Dualzahl  $i$  der Ausgang  $i$  ausgewählt, der mit dem Eingabeeingang verbunden wird.



**Abbildung 3.15:**  
Demultiplexer-Baustein

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 57/93**

# Weitere Beispiele

- Andere Formen von Addierern, für unterschiedliche Zahlenformate
- Andere arithmetische Schaltnetze: Subtrahierer, Multiplizierer, . . .
- Vergleiche zwischen Zahlen, . . .
- (im weiteren Sinne: A/D, D/A-Wandler)

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 58/93**

# Inhaltsverzeichnis

---

- 1. Funktionen
- 2. Realisierung beliebiger Funktionen
- 3. Schaltnetze**
  - 3.1 Realisierung
  - 3.2 Wichtige Schaltnetze
  - 3.3 Optimierung**
  - 3.4 Zusammenfassung: Von Funktion zu Realisierung
- 4. Laufzeiten
- 5. Energie
- 6. Zusammenfassung
- 7. Material

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

**Optimierung**

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 59/93**

# Funktionen aus Schaltnetzen

- Schaltnetze verursachen Kosten
  - Letztlich: Chipfläche, Energieverbrauch
- Für gegebene binäre Funktion: was ist das **beste** Schaltznetz?

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 60/93**

# Funktionen aus Schaltnetzen

- Schaltnetze verursachen Kosten
  - Letztlich: Chipfläche, Energieverbrauch
- Für gegebene binäre Funktion: was ist das **beste** Schaltznetz?
- Was bedeutet **bestes**?
  - Die wenigsten Grundschaltnetze?
  - Der geringste Stromverbrauch?
  - Die geringste Tiefe? (Warum wichtig?)

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 60/93**

# Minimierung von Schaltnetzen

- Umfangreiche Theorie dazu existiert
- Grundidee:
  - Von Normalformen der Schaltung ausgehen (z.B. DNF, KNF, . . . )
  - Diese lassen sich gut analysieren und minimale Varianten bestimmen
- Aber nicht zentral für GDS!

## Weiterlesen 3.2 (Minimierung)

Stichworte: Primimplikant, Primimplikat, Karnaugh-Diagram, Quine-McCluskey

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 61/93**

# Inhaltsverzeichnis

---

- 1. Funktionen
- 2. Realisierung beliebiger Funktionen
- 3. Schaltnetze**
  - 3.1 Realisierung
  - 3.2 Wichtige Schaltnetze
  - 3.3 Optimierung
  - 3.4 Zusammenfassung: Von Funktion zu Realisierung**
- 4. Laufzeiten
- 5. Energie
- 6. Zusammenfassung
- 7. Material

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Realisierung

Wichtige Schaltnetze

Optimierung

Zusammenfassung: Von Funktion  
zu Realisierung

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 62/93**



# Von Wahrheitstafel zu Funktion zu Schaltbild zu Layout

**Wahrheitstafel:**  
Eindeutig bis auf Anordnung

Zeile	$a_1$	$a_0$	$b_1$	$b_0$	$r_2$	$r_1$	$r_0$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1
2	0	0	1	0	0	1	0
3	0	0	1	1	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0	1
5	0	1	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0	1	1
7	0	1	1	1	1	0	0
8	1	0	0	0	0	1	0
9	1	0	0	1	0	1	1
10	1	0	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1	0	1
12	1	1	0	0	0	1	1
13	1	1	0	1	1	0	0
14	1	1	1	0	1	0	1
15	1	1	1	1	1	1	0

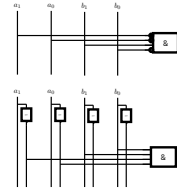
**Formeln**

Disjunktive Normalform  
 $r_1 = (\overline{a_1} \wedge \overline{a_0} \wedge b_1 \wedge \overline{b_0}) \vee \dots$

Beliebige andere Form  
 ...

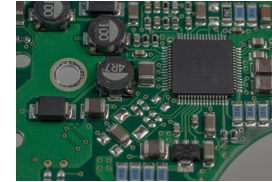
Konjunktive Normalform  
 $r_1 = (a_1 \vee a_0 \vee b_1 \vee b_0) \wedge \dots$

**Schaltbilder**



...

**Layout**



**Abbildung 3.16:** Von Funktion als Wahrheitstafel (eindeutig bis auf Reihenfolge) über unterschiedliche Formeln über unterschiedliche Schaltungen für jede Formel zu unterschiedlichen Layouts (PCB, Chip, ... ) für die eigentliche Funktion

Funktionen  
 Realisierung  
 beliebiger  
 Funktionen  
 Schaltnetze  
 Realisierung  
 Wichtige Schaltnetze  
 Optimierung  
 Zusammenfassung: Von Funktion  
 zu Realisierung  
 Laufzeiten  
 Energie  
 Zusammenfassung  
 Material

# Inhaltsverzeichnis

---

- 1. Funktionen
- 2. Realisierung beliebiger Funktionen
- 3. Schaltnetze
- 4. Laufzeiten**
- 5. Energie
- 6. Zusammenfassung
- 7. Material

Funktionen  
Realisierung  
beliebiger  
Funktionen  
Schaltnetze  
**Laufzeiten**  
Energie  
Zusammenfassung  
Material

# Bisher: Ideale Schaltungen

---

- Unsere Schalter, Schaltungen bisher: **Idealisiert**
  - Schalter braucht keine Zeit für Aktion
  - Signal verbreiten sich unendlich schnell; Distanzen spielen keine Rolle

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

**Laufzeiten**

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 65/93**

# Bisher: Ideale Schaltungen

---

- Unsere Schalter, Schaltungen bisher: **Idealisiert**
  - Schalter braucht keine Zeit für Aktion
  - Signal verbreiten sich unendlich schnell; Distanzen spielen keine Rolle
- Das ist **FALSCH**

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

**Laufzeiten**

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 65/93**

# Laufzeiten in Leitungen

---

- Erinnerung: Signale sind sich im Raum ausbreitende Veränderungen einer physikalischen Größe
- *Im Raum ausbreiten* braucht Zeit

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

# Laufzeiten in Leitungen

- Erinnerung: Signale sind sich im Raum ausbreitende Veränderungen einer physikalischen Größe
- *Im Raum ausbreiten* braucht Zeit
- Beispiele
  - Schall in Luft: 300 m/s
  - Elektromagnetische Welle im Vakuum:  $c = 299792458$  m/s
  - Elektromagnetische Welle in Glasfaser:  $\approx 2/3 c$  !
  - Strom in Leiter: Frequenzabhängig!
    - Bei typischen Takt, groß im Vergleich zu typischen Strukturgrößen (präziser: Wellenlänge ist groß . . . )

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

# Laufzeiten in Leitungen

- Erinnerung: Signale sind sich im Raum ausbreitende Veränderungen einer physikalischen Größe
- *Im Raum ausbreiten* braucht Zeit
- Beispiele
  - Schall in Luft: 300 m/s
  - Elektromagnetische Welle im Vakuum:  $c = 299792458$  m/s
  - Elektromagnetische Welle in Glasfaser:  $\approx 2/3 c$  !
  - Strom in Leiter: Frequenzabhängig!
    - Bei typischen Takt, groß im Vergleich zu typischen Strukturgrößen (präziser: Wellenlänge ist groß . . . )
- Konsequenz: Können wir **für einfache Schaltungen** vernachlässigen!
  - (Hinweis: Auf Ebene einer CPU stimmt das schon nicht mehr!)

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 66/93**

# Schaltzeiten in Transistoren

- In Transistor: Zeit von Anlegen/Abnehmen der Signalspannung bis zum Öffnen/Schließen des Transistors relevant
- Hängt von vielen Faktoren ab (Fertigungstechnologie, Spannung, . . . )
  - Phys. Hintergrund: In den Halbleiterschichten müssen Ladungsträger wandern; das braucht Zeit
- Typische **Daumenregeln**:
  - Einschaltzeit: 5 . . . 500 ns
  - Ausschaltzeit: 50 . . . 1000 ns
- Das ist **nicht vernachlässigbar**

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

**Laufzeiten**

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 67/93**



# Schalter mit Verzögerung: Gatter

---

## Definition 3.13 (Gatter)

Für einen Schalter, eine Schaltung oder ein Schaltnetz mit nicht vernachlässigbaren Verzögerungen benutzen wir den Begriff **Gatter**.

Verzögerungen sind insbes., aber nicht nur durch Schaltzeiten der Transistoren bedingt.

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

**Laufzeiten**

Energie

Zusammenfassung

Material

# Terminologie

---

## Beobachtung 3.3 (Schaltnetz vs. Gatter)

Terminologie ist nicht einheitlich in Literatur, um Unterschied "idealisiert  $\leftrightarrow$  mit Laufzeit" darzustellen

- Schaltnetz vs. Gatter ( $\leftarrow$  GDS!)
- Schaltnetz = Gatter, aber Unterscheidung ideales Gatter vs. reales Gatter

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

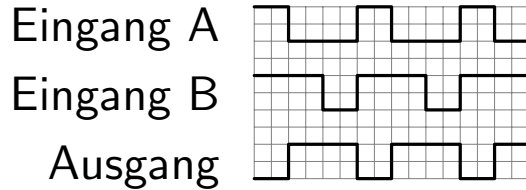
Energie

Zusammenfassung

Material

Darstellung Zeitverlauf eines einfachen NAND-Gatters

## Idealisiert, keine Verzögerung



**Abbildung 3.17:** NAND-Gatter ohne Verzögerung

Funktionen  
Realisierung  
beliebiger  
Funktionen  
Schaltnetze  
**Laufzeiten**  
Energie  
Zusammenfassung  
Material

Darstellung Zeitverlauf eines einfachen NAND-Gatters

## Idealisiert, keine Verzögerung

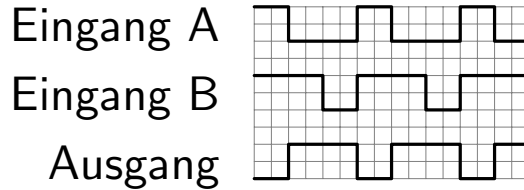


Abbildung 3.17: NAND-Gatter ohne Verzögerung

## Mit Verzögerung

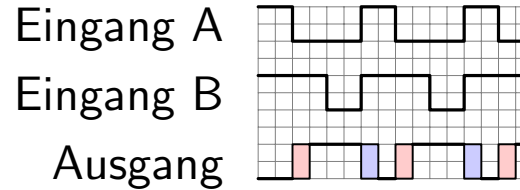


Abbildung 3.18: NAND-Gatter mit Verzögerung

- Rote, blaue Bereiche zeigen Übergangszeiten an, in denen Ausgang noch nicht den richtigen Wert erreicht hat
- Meist nur Obergrenze für Übergangszeit bekannt (im Beispiel: eine Zeiteinheit)
  - Vorsichtshalber: In Übergangszeit den **falschen** Wert annehmen

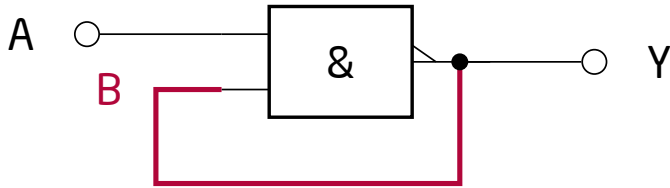
Funktionen  
Realisierung  
beliebiger  
Funktionen  
Schaltnetze  
**Laufzeiten**  
Energie  
Zusammenfassung  
Material

# Rückkopplung

**Rückkopplung:** Signal eines Ausgangs wird wieder als Eingang verwendet

## Beispiel 3.6 (Beispiel: NAND mit Rückkopplung)

### Schaltung



**Abbildung 3.19:** NAND-Gatter mit Rückkopplung (Schaltung)

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

**Laufzeiten**

Energie

Zusammenfassung

Material

**Rückkopplung:** Signal eines Ausgangs wird wieder als Eingang verwendet

## Beispiel 3.6 (Beispiel: NAND mit Rückkopplung)

### Schaltung

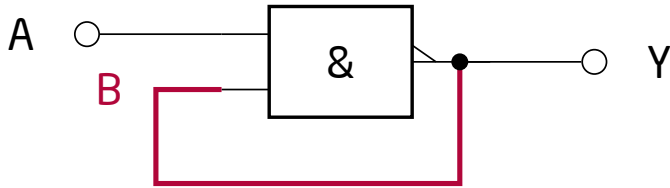


Abbildung 3.19: NAND-Gatter mit Rückkopplung (Schaltung)

### Timing

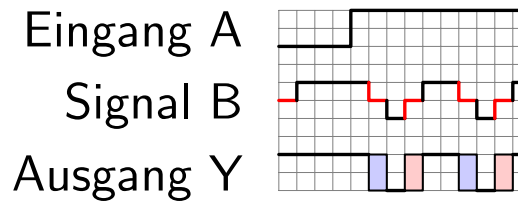


Abbildung 3.20: NAND-Gatter mit Rückkopplung (Timing)

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

# Rückkopplung

**Rückkopplung:** Signal eines Ausgangs wird wieder als Eingang verwendet

## Beispiel 3.6 (Beispiel: NAND mit Rückkopplung)

### Schaltung

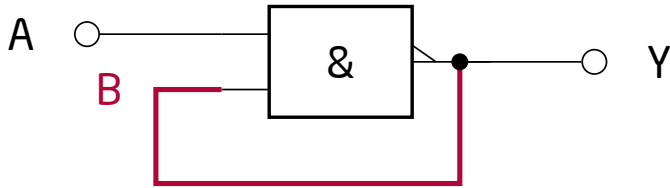


Abbildung 3.19: NAND-Gatter mit Rückkopplung (Schaltung)

### Timing

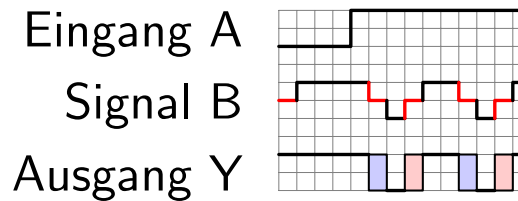


Abbildung 3.20: NAND-Gatter mit Rückkopplung (Timing)

- Schaltung stabil wenn  $A=0$
- Wenn  $A=1$ : Schaltung **schwingt** zwischen zwei Zuständen!

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

**Laufzeiten**

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 71/93**

# Verzögerung: Konsequenz?

---

- Verzögerungen sind eine Herausforderung
  - Im Schaltungsentwurf bedenken
  - Gattern Zeit lassen, Zielwert zu erreichen: Idee des **Taktes**

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

**Laufzeiten**

Energie

Zusammenfassung

Material



## ■ Verzögerungen sind eine Herausforderung

- Im Schaltungsentwurf bedenken
- Gattern Zeit lassen, Zielwert zu erreichen: Idee des **Taktes**

### Definition 3.14 (Takt, Taktfrequenz)

Ein **Takt** ist ein Rechtecksignal fester Periodendauer. Die Werte von Gattern werden nur zu festgelegten **Zeitpunkten** des Taktes beachtet, z.B. zum Zeitpunkt der ansteigenden oder der absteigenden Flanke. Die **Taktfrequenz**  $f$  ist  $1/\text{Periodendauer}$ .

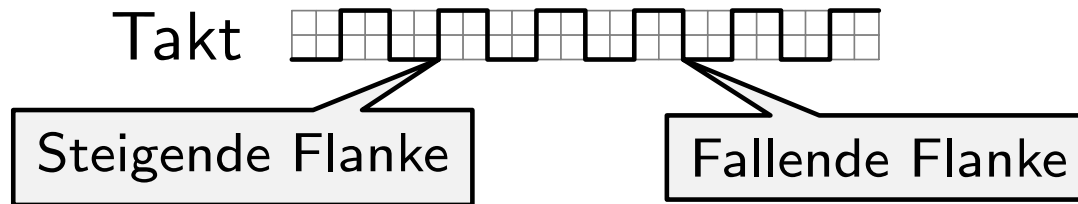


Abbildung 3.21: Taktsignal mit Flankenbezeichnungen

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

**Laufzeiten**

Energie

Zusammenfassung

Material

# Inhaltsverzeichnis

---

1. Funktionen

2. Realisierung beliebiger Funktionen

3. Schaltnetze

4. Laufzeiten

5. Energie

6. Zusammenfassung

7. Material

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

Zur Erinnerung:

## Definition 3.15 (Energie und Leistung)

- **Energie:** Die Möglichkeit, Arbeit zu leisten; gespeicherte Arbeit
  - Formelzeichen:  $E$
  - Einheit: Joule, J (nicht  $J$ )
- **Leistung:** Pro Zeiteinheit umgesetzte Energie.
  - Formelzeichen:  $P$  (für power)
  - Einheit: Watt, W (nicht  $W$ );  $W = J/s$

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

# Elektrische Energie, Leistung

## Beispiel 3.7 (Elektrische Energie und Leistung)

- Elektrische Leistung:  $P = U \cdot I$ 
  - Strom  $I$  mal Spannung  $U$
- Am Ohm'schen Verbraucher mit konstantem Widerstand  $R$  gilt  $U = R \cdot I$
- Dann bei Gleichstrom:
  - $P = I^2 \cdot R$
  - $P = \frac{U^2}{R}$

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

# Wann verbrauchen Schaltnetze Energie?

- Wenn Strom fließt
- Wann Strom fließt hängt ab von:
  - Fertigungstechnologie
  - Schaltungsaufbau (insbes.: Flipflops)
- Erste Idee: Vermutlich passiert an den Taktflanken etwas?
  - Höherer Takt, öfters Stromfluss
  - Über Zeit gemittelt: Leistung proportional zu Takt

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

# Einfaches Leistungsverbrauchsmodell

## Beispiel 3.8 (Leistungsverbrauch CMOS)

- Für Complementary Metal-Oxide Semiconductor (CMOS)-Technologie [Ins97]  
Leistungsverbrauch der Schaltvorgänge:

$$P \propto U^2 \cdot f$$

Funktionen  
Realisierung  
beliebiger  
Funktionen  
Schaltnetze  
Laufzeiten  
Energie  
Zusammenfassung  
Material

# Einfaches Leistungsverbrauchsmodell

## Beispiel 3.8 (Leistungsverbrauch CMOS)

- Für CMOS-Technologie [Ins97]

Leistungsverbrauch der Schaltvorgänge:

$$P \propto U^2 \cdot f$$

- Zusätzlich: Leckströme; konstanter Verbrauch egal was die Schaltung tut
  - Steigt mit Temperatur, Strukturverkleinerung

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

## Definition 3.16 (Leistungsverbrauchsmodell GDS)

$$P \propto \underbrace{P_0}_{\text{Leckstrom, immer}} + \underbrace{U^2 f}_{\text{Beim schalten}}$$

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 78/93**



## Definition 3.16 (Leistungsverbrauchsmodell GDS)

$$P \propto \underbrace{P_0}_{\text{Leckstrom, immer}} + \underbrace{U^2 f}_{\text{Beim schalten}}$$

### Vereinfacht!

- Wie jedes Modell ist auch dieses Modell **stark** vereinfacht
  - Beispiel: **benötigtes**  $U$  hängt nichtlinear von  $f$  ab; großes  $f$  braucht großes  $U$ !
- Aber für GDS gut genug

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 78/93**

## Definition 3.16 (Leistungsverbrauchsmodell GDS)

$$P \propto \underbrace{P_0}_{\text{Leckstrom, immer}} + \underbrace{U^2 f}_{\text{Beim schalten}}$$

### Vereinfacht!

- Wie jedes Modell ist auch dieses Modell **stark** vereinfacht
  - Beispiel: **benötigtes**  $U$  hängt nichtlinear von  $f$  ab; großes  $f$  braucht großes  $U$ !
- Aber für GDS gut genug

### Fehlvorstellung

Leistungsaufnahme eines Rechners ist **nicht** proportional zum momentanen Arbeitsaufkommen!

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 78/93**

- Ist geringer *Leistungsverbrauch* gut?

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

- Ist geringer *Leistungsverbrauch* gut?
- Wir bezahlen, "erzeugen" Energie! Also geringer *Energieverbrauch* relevant!

## Definition 3.17 (Energieeffizienz)

Verhältnis aus Größe einer Aufgabe und zur Bewältigung der Aufgabe eingesetzten Energie.

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

# Energieeffizienz: Beispiel

## Beispiel 3.9 (Energieeffizienz als Funktion der Taktfrequenz)

### ■ Annahmen

- Aufgabe braucht  $n$  Taktzyklen (egal, wie lange die sind)

- $T_{\text{aufgabe}} = n \cdot T_{\text{Periode}} = n \cdot 1/f$

- Damit:

$$E = P \cdot t \propto (P_0 + U^2 f) \cdot n \cdot 1/f = P_0 n/f + U^2$$

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

# Energieeffizienz: Beispiel

## Beispiel 3.9 (Energieeffizienz als Funktion der Taktfrequenz)

### ■ Annahmen

- Aufgabe braucht  $n$  Taktzyklen (egal, wie lange die sind)

- $T_{\text{aufgabe}} = n \cdot T_{\text{Periode}} = n \cdot 1/f$

- Damit:

$$E = P \cdot t \propto (P_0 + U^2 f) \cdot n \cdot 1/f = P_0 n / f + U^2$$

- ### ■ Beispiel-Plot: $U = 1, P_0 = 1, f \in [1, 10], n = 100$

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

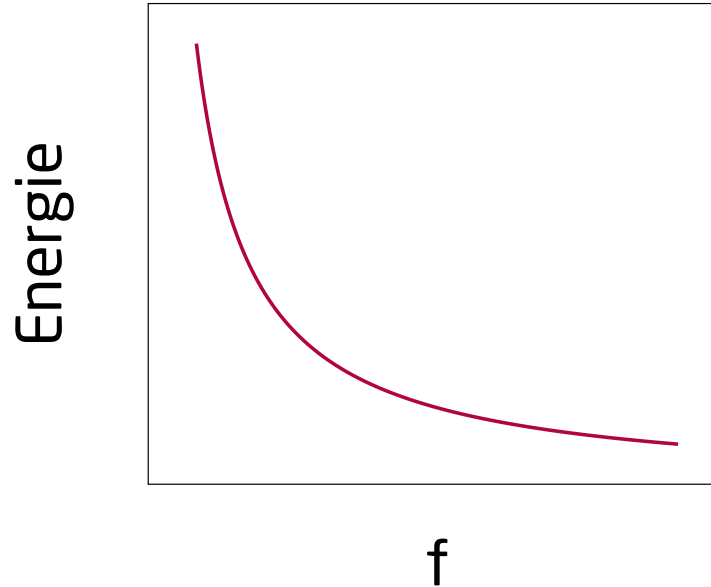
Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

# Energieeffizienz: Beispiel, einfaches Modell

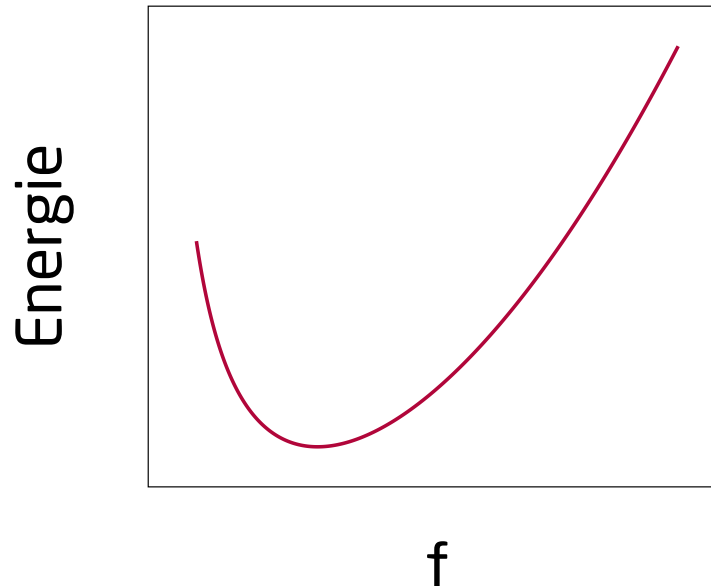


**Abbildung 3.22:** Energieverbrauch für variierende Taktfrequenz; Spannung konstant

Funktionen  
Realisierung  
beliebiger  
Funktionen  
Schaltnetze  
Laufzeiten  
Energie  
Zusammenfassung  
Material

# Energieeffizienz: Beispiel, realistischer

- Realistischer: Spannung muss mit Frequenz mitwachsen
  - im Beispiel:  $U = 1.2f$



**Abbildung 3.23:** Energieverbrauch für variierende Taktfrequenz; Spannung linear in Frequenz

Funktionen  
Realisierung  
beliebiger  
Funktionen  
Schaltnetze  
Laufzeiten  
Energie  
Zusammenfassung  
Material



# Entscheidung?

---

- Was ist gut? Hohe oder niedrige Taktfrequenz?
- Know your hardware!

## Weiterlesen 3.3 (Techniken für Energieeffizienz)

Stichworte zum weiter lesen: Dynamic Voltage Scaling, power cycling

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

# Leistungseffizienz?

---

- Kein sinnvoller Begriff

Funktionen  
Realisierung  
beliebiger  
Funktionen  
Schaltnetze  
Laufzeiten  
Energie  
Zusammenfassung  
Material

# Inhaltsverzeichnis

---

- 1. Funktionen
- 2. Realisierung beliebiger Funktionen
- 3. Schaltnetze
- 4. Laufzeiten
- 5. Energie
- 6. Zusammenfassung**
- 7. Material

Funktionen  
Realisierung  
beliebiger  
Funktionen  
Schaltnetze  
Laufzeiten  
Energie  
**Zusammenfassung**  
Material

- Aus Schaltern werden Schaltnetze, mit denen man Funktionen berechnen kann
- Schaltungsentwurf für nichttriviale Funktionen ist nicht trivial!
- Laufzeiten komplizieren Entwurf weiter
  - Es gibt strukturierte Ansätze; gehen aber über GDS hinaus
- Wir haben noch keine Möglichkeit der Speicherung gefunden
- Energieeffizienz und diese verbessernden Entscheidungen hängen sehr von den konkreten Modellannahmen ab!
  - *Know your hardware!*

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

**Zusammenfassung**

Material

# Inhaltsverzeichnis

---

1. Funktionen

2. Realisierung beliebiger Funktionen

3. Schaltnetze

4. Laufzeiten

5. Energie

6. Zusammenfassung

**7. Material**

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

**Material**

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 87/93**

# Referenzen I

---

- [Ins97] Texas Instruments, Hrsg. *CMOS Power Consumption and  $C_{pd}$  Calculation*. 1997.
- [MM15] Christoph Meinel und Martin Mundhenk. *Mathematische Grundlagen der Informatik*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015. doi: 10.1007/978-3-658-09886-5.

Funktionen  
Realisierung  
beliebiger  
Funktionen  
Schaltnetze  
Laufzeiten  
Energie  
Zusammenfassung  
Material

**CMOS** Complementary Metal-Oxide Semiconductor 102, 103

**DNF** Disjunktive Normalform; die Formel besteht lediglich aus der ODER-Verknüpfung von UND-verknüpften Variablen, zB. (a und b) oder (nicht a und c) 39, 40

**KNF** Konjunktive Normalform; die Formel besteht lediglich aus der UND-Verknüpfung von ODER-verknüpften Variablen, zB. (a oder b) und (nicht a oder c) 39, 40

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**Dekodierer** Schaltnetz, das aus  $a$  Leitungen (mit allen erlaubten Kombinationen)  $2^a$  Leitungen macht, bei denen jeweils **genau die** Leitung 1 ist, deren Nummer als Dualzahl auf den Eingangsleitungen anliegt (alle anderen Leitung 0).  
70--72

**Demultiplexer** Schaltnetz mit zwei Gruppen von Eingängen: (1)  $n$  Steuereingängen und (2) 1 Eingabeeingang und  $2^n$  Ausgängen. An den Steuereingängen wird durch eine Dualzahl  $i$  der Ausgang  $i$  ausgewählt, mit dem der Eingang verbunden wird. 74

**Energie** Gespeicherte Arbeit; das Vermögen, Arbeit zu leisten. Einheit Joule (kurz: J) 99

**Funktionstabelle** Darstellung einer Funktion mit (typischerweise) den möglichen Ergebnissen 0/1, in Abhängigkeit mehrere Eingaben, die ebenfalls (typischerweise) die Werte 0 oder 1 annehmen können. 22, 23

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material



- Gatter** Ein Schalter, Schaltung oder Schaltnetz mit nicht vernachlässigbaren Verzögerungszeiten. 89
- Grundschaltnetz** Schaltnetz für eine Funktion, die zu einer Menge von Funktionen gehört, aus denen sich beliebige binären Funktionen erzeugen lassen. 57--59
- Kodierer** Schaltnetz, das aus  $2^a$  Leitungen, bei denen **genau eine** Leitung 1 ist,  $a$  Leitungen macht und dort die Nummer der aktiven Leitung als Dualzahl darstellt. 70--72
- Kombinatorische Schaltung** Anderer Begriff für Schaltnetz. 52
- Leistung** Pro Zeiteinheit umgesetzte Energie. Einheit Watt (kurz: W) 99
- Multiplexer** Schaltnetz mit zwei Gruppen von Eingängen: (1)  $n$  Steuereingänge und (2)  $2^n$  Eingabeeingängen sowie einem Ausgang. An den Steuereingängen wird durch eine Dualzahl  $i$  der Eingabeeingang  $i$  ausgewählt und mit dem Ausgang verbunden. 73

Funktionen  
Realisierung  
beliebiger  
Funktionen  
Schaltnetze  
Laufzeiten  
Energie  
Zusammenfassung  
**Material**

**Normalform** Eine in der Regel eindeutige Form, eine bestimmte Formel darzustellen, siehe KNF oder DNF. 38

**Rückkopplung** Signal eines Ausgangs wird wieder als Eingang verwendet (nicht notwendigerweise Eingang desselben Gatters). 93--95

**Schalbild** Ein Schalbild (auch: Schaltplan, Schaltskizze) ist die schematische Darstellung einer Schaltung. Es gibt unterschiedliche Konventionen (z.B. amerikanische vs. europäische Symbole für Bauteile). 7

**Schaltnetz** Schaltung, die eine binäre Funktion realisiert. 52

**Schaltung** Verbindung von elektrischer oder elektronischen Bauteilen (z.B. Widerstände, Kondensatoren, Spulen, Dioden, Transistoren, . . . ) zu einer Anordnung, die einen vorgegebenen Zweck erfüllt. 9

**Takt** Ein Takt ist ein Rechtecksignal fester Periodendauer. Die Werte von Gattern werden nur so festgelegten Punkten des Taktes beachtet, z.B. zum Zeitpunkt

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material

**GDS 3: Schaltnetze**

H. Karl, WS 22/23

**Folie 92/93**

an der ansteigenden oder absteigenden Flanke. 96, 97, 122

Funktionen

Realisierung

beliebiger

Funktionen

Schaltnetze

Laufzeiten

Energie

Zusammenfassung

Material