

Теория по задаче "Случайный поиск в задачах разной размерности"

Постановка задачи

На клетчатом поле появляется квадрат, означающий объект, который нужно найти. Его размер можно регулировать и от него строится крест, соответствующий координатам его по двум осям OX и OY . В случайно выбранной точке появляется маленькая частица, которая начинает двигаться как броуновская частица. Она совершает скачки через равные промежутки, а длина скачка по каждой из осей определяется распределением вероятности. Если частица попадает на искомый объект, то он считается найденным и высвечивается время поиска. Если она попадает на перекладину креста, то получается, что была найдена одна из координат, в результате высвечивается время поиска для одной оси. *Основная задача:* проанализировать, как наличие двух масштабов распределения скачков ускоряет поиск.

Функционал модели

1. В левой и центральной частях экрана располагается клетчатое поле, внутри которого и происходит поиск целевого объекта (квадрата). В правой части экрана находится панель управления моделью.
2. В верхней части панели управления располагаются ползунок, с помощью которого можно регулировать размеры искомого квадрата (размер может варьироваться от 1 до 100 единиц), поле "включить след", которое отвечает за прорисовку траектории движения частицы, и ускорение поиска, которое убирает искусственную задержку вычислений.
3. Далее располагается ползунок выбора числа экспериментов ("число экспериментов"), которые одновременно начнутся при нажатии кнопки "Старт" (см. ниже).
4. Ниже располагаются поля выбора вида распределения для скачка по каждой из осей (слева - ось OX , справа - OY). Доступные распределения: нормальное - $N(\mu, \sigma^2)$, гамма-распределение - $\Gamma(k, \theta)$. В нашей модели по каждой из осей задаются два одинаковых распределения с целью моделирования распределения с двумя максимумами, соотношение между которыми определяется за счёт специального "веса коэффициента", о котором будет сказано ниже.
5. Далее находятся ползунки выбора параметров распределений: μ (среднее значение) и σ (стандартное отклонение) для нормального распределения, k (параметр формы) и θ (параметр масштаба) для гамма-распределения. Значения каждого параметра для всех распределений лежат на отрезке $[0, 10]$.
6. Далее располагается поле выбора "веса коэффициента", который принимает значения от 0 до 1, и означает вероятность выбора первого максимума. Например, если данный коэффициент равен 0, то длина скачка определяется только вторым максимумом, если коэффициент равен 1, то роль играет только первый максимум, если же коэффициент равен 0.5, то существует два "равноправных" максимума.
7. Ниже располагаются поля выбора смещения распределений относительно среднего значения - "смещение 1" для первого распределения и "смещение 2" для второго (по каждой из осей). Смещение может принимать значение из отрезка $[-750, 750]$.
8. Под смещениями печатается общая дисперсия двух распределений с учетом весовых коэффициентов.
9. Ниже располагается кнопка "центрировать", при нажатии на которую зануляется общее математическое ожидание двух распределений с учётом весовых коэффициентов за счёт изменения смещений. В случае, если произвести центрирование невозможно (из-за некорректного подбора параметров), пользователь получает сообщение об ошибке.

10. Ниже находятся графики распределений по осям OX и OY с заданными ранее параметрами, а так же время поиска целевого объекта и его координат по отдельности. В случае одновременного проведения нескольких экспериментов (более одного) в графах "время", "время до X ", "время до Y " (по окончании всех экспериментов) высвечиваются средние значения времени поиска.
11. Далее располагается счётчик, который показывает количество ещё незавершённых экспериментов ("осталось экспериментов").
12. В нижней части панели управления находятся кнопки "Обновить", "Старт" и "Стоп", с помощью которых происходит основное взаимодействие с моделью. При нажатии кнопки "Старт" частица начинает поиск целевого квадрата и продолжает своё движение по клетчатому полю до тех пор, пока не встретит нужный объект или пока не будет нажата кнопка "Стоп". При нажатии кнопки "Стоп" частица останавливается, прекращается подсчёт времени поиска. Если же после этого нажать кнопку "Старт", то частица продолжит своё движение с той же точки, при этом время поиска будет отсчитываться заново. При нажатии кнопки "Обновить" время поиска сбрасывается, а частица и целевой объект появляются в новых случайных точках клетчатого поля.

Теоретическая справка

Плотность нормального распределения $N(\mu, \sigma^2)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Плотность гамма-распределения $\Gamma(k, \theta)$:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(k)\theta^k} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad k > 0, \quad \theta > 0, \quad x \in (0, +\infty),$$

$$\text{где } \Gamma(k) = \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt, \quad k > 0$$

Математическое ожидание и дисперсия распределения с весовым коэффициентом w :

$$E[X] = \mu = w * \mu_1 + (1 - w) * \mu_2$$

$$E[(X - \mu)^2] = \sigma^2 = w * \mu_1^2 + \sigma^2 + (1 - w) * \mu_2^2 - \mu$$

Некоторые результаты экспериментов

Далее, время нахождения объекта будем считать, как среднее значение времени для 100 экспериментов. Стоит отметить, что использование распределений с ненулевым общим средним приводит к неутешительным результатам, поскольку преобладание какого-либо направления движения в среднем увеличивает время поиска целевого объекта (вплоть до полного ненахождения). Поэтому в дальнейших экспериментах не будем рассматривать такие распределения.

1. Для начала будем использовать распределения только с одним максимумом. Рассмотрим модель со следующими параметрами: размер цели - 25 единиц, распределение по обеим осям - нормальное с нулевым средним. Установим зависимость времени поиска целевого объекта от значения стандартного отклонения. Для модели со значением $\sigma = 5$ среднее время поиска целевого объекта составило 66.11 секунд, для модели со значением $\sigma = 7$ время поиска - 29 секунд, а для значения $\sigma = 10$ - 11.81 секунд. На основании полученных результатов можно сделать

вывод об обратно пропорциональной зависимости среднего времени поиска целевого квадрата от величины дисперсии распределения длины скачка частицы.

2. Попробуем добавить распределение с двумя максимумами для одной из осей, например для OX . При этом зафиксируем стандартное отклонение максимально возможным для нашей модели ($\sigma = 10$). Проанализируем зависимость времени поиска целевого объекта от масштаба среднего значения каждого распределения. Для этого зададим весовой коэффициент, равный 0.5 и будем варировать смещения. Если "смещение 1" положить равным -5, а "смещение 2" - равным +5, то среднее время поиска составит порядка 11 секунд (меньше чем для соответствующего распределения с одним максимумом). Если же задать "смещение 1", равным -10, а "смещение 2" - равным +10, то среднее время поиска уменьшится и составит 9.39 секунд. И наконец, если задать "смещение 1", равным -20, и "смещение 2", равным +20, то среднее время поиска составит 7.66 секунд. На основании полученных результатов можно сказать, что с ростом масштаба средних значений двух максимумов время поиска целевого объекта уменьшается. Данные наблюдения подтверждают выводы пункта 1: при увеличении масштабов средних значений двух максимумов совокупная дисперсия распределения увеличивается, что приводит к уменьшению среднего времени поиска.
3. Теперь зафиксируем одно из смещений и будем варировать "весовой коэффициент", при этом центрируя распределение. В качестве фиксированного смещения выберем "смещение 2", равное +10. Рассмотрим следующие значения коэффициента: 0.5 ("смещение 1" = -10), 0.35 ("смещение 1" = -18.6) и 0.25 ("смещение 1" = -30). Как было показано в пункте 2, время поиска при значении весового коэффициента 0.5 составляет 9.39 секунд. Если же задать значение коэффициента 0.35, то время поиска целевого квадрата составит порядка 8 секунд. И наконец, если задать значение коэффициента, равным 0.25, то время поиска составит 7.24 секунды. На основании полученных результатов можно отметить, что разномасштабность двух максимумов распределения благотворно сказывается на времени поиска целевого объекта. Наилучшее время из рассматриваемых продемонстрировала модель с весовым коэффициентом 0.25. Заметим, что значения весового коэффициента симметричны относительно 0.5, поэтому опустим эксперименты для аналогичных значений, больших 0.5.
4. Попробуем повысить результаты, изменив распределение по OY на распределение с двумя максимумами. В качестве такого распределения возьмём распределение, которое было получено для оси OX на основании пунктов 1-3 (с наименьшим временем поиска): "смещение 1" = -30, "смещение 2" = 10, "весовой коэффициент" = 0.25. В результате этого изменение время поиска уменьшится до 4 секунд.
5. Если провести аналогичные эксперименты для цели вдвое большего размера (50 единиц), то все рассуждения выше остаются верными. При этом сокращается среднее время поиска объекта. Наилучший результат - 2.68 секунд.

Основные выводы :

1. При увеличении "совокупной" дисперсии распределения (для любой из осей) среднее время поиска целевого объекта уменьшается.
2. Выбор распределения с двумя разномасштабными максимумами ускоряет процесс поиска частицей целевого объекта.

Интересные траектории случайного движения

Во всех ранее описанных экспериментах использовалось нормальное распределение. В данном разделе приведены некоторые интересные результаты использования как нормального, так и гамма-распределения.

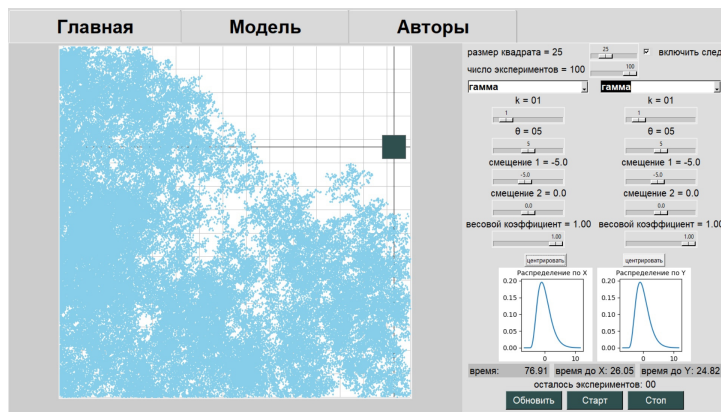


Рис. 1: Траектория движения частицы при выборе гамма-распределения

Если задать параметры гамма-распределения как на Рис. 1, то можно наблюдать "нижнетреугольную" траекторию движения частицы (частица в процессе своего движения "закрашивает" область под главной диагональю клетчатого поля). Это объясняется тем, что гамма-распределение асимметрично относительно нуля (вероятность "отрицательного" прыжка выше), поэтому частица будет двигаться вблизи нижнего левого угла.

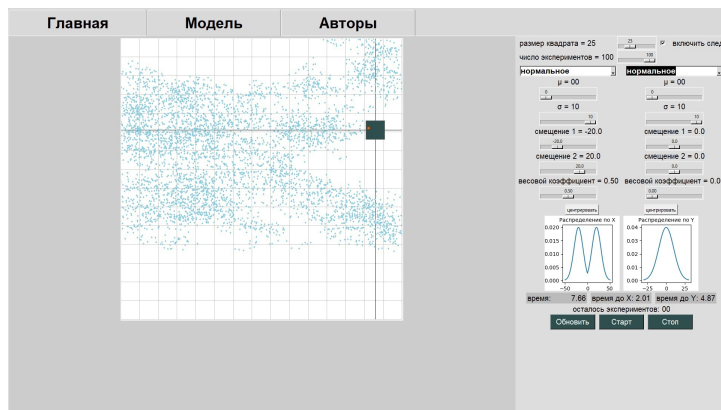


Рис. 2: Траектория движения "крокодил"

Отметим, что из-за случайности движения частицы иногда можно наблюдать причудливые траектории, напоминающие какие-либо объекты. В качестве бонуса покажем траекторию, похожую на крокодила, которая была получена при выборе определённых параметров нормального распределения.