Penzioni plan

Iva Čitlučanin　Đorđe Petrović　Emilija Stevanović

Maj 2023

Sadržaj

1 Uvod

Mnogi matematički modeli sadrže promenljive koje se posmatraju samo za diskretne vrednosti nezavisno promenljive iako mogu uzimati vrednosti iz skupa koji ne mora biti diskretan. Ovakvi modeli se najviše koriste u bankarskom poslovanju gde se promene registuju samo u fiknsnim vremenskim intervalima. Često se ovakvi modeli dobijaju aproksimacijom drugih modela u kojima je nezavisna promenljiva kontinualnog tipa tako što se ta promenljiva diskretizuje. Ukoliko u diferencijalnoj jednačini

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = a \tag{1}$$

aproksimiramo prvi izvod podeljenom razlikom unapred sa korakom Δ t dobijamo

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = f(t, y) + O(\Delta t) \tag{2}$$

Ako sa u_k označimo aproksimaciju rešenja $y(t_k)$, $t_k = t_0 + k\Delta t$, dobijamo

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t f(t_n u_n), \quad u_0 = a \tag{3}$$

što predstavlja Ojlerovu eksplicitnu metodu za rešavanje Košijevog zadatka za diferencijalnu jednačinu. Ovako se može dobiti približno rešenje jednačine koju ne možemo rešiti egzaktno. Neke ostale metode: Runge-Kuta i Adamsove metode.
Umesto vrednosti funkcije za sve vrednosti kontinualne promenljive t, poslednja jednačine (3) povezuje vrednosti funkcije samo u tačkama $t_0, t_1, .., t_N$. Funkciju definisanu na diskretnom skupu tačaka zovemo *diskretnom funkcijom*, a jednačinu koja povezuje nekoliko uzastopne vrednosti diskretne funkcije *diferencnom jednačinom.* U nastavku je primer diferencne jednačine.

2 Linearne diferencne jednačine prvog reda

2.1 Penzijska štednja

Promena kapitala data je formulom

$$C(t + \Delta t) = (1 + K)C(t) \tag{4}$$

gde K predstavlja kamatnu stopu za period Δt.

Ukoliko imamo kamatu od K procenata na godišnjem nivou, komforna kamatna stopa za kamaćenje na mesecnom novu ce biti:

$$K_m = (\sqrt[12]{1 + \frac{K}{100}} - 1) \cdot 100 \tag{5}$$

Pretpostavimo da svakog meseca ulažemo u svoj penzijski fond fiksirani novčani iznos p. Penzijski fond svakog meseca pripisuje kapitalu C kamatu po stopi K_m. Cilj nam je da izračunamo koliko ce biti para u našem fondu u trenutku kada odlučimo da se penzionišemo. Neka C_n predstavlja stanje fonda nakon n meseci od pocetka štednje. Na početku je fond prazan, pa je početni uslov $C_0 = 0$. Kada na prethodno stanje deluje kamata i dodatno stiže nova uplata svakog meseca, imamo nehomogenu linearnu diferencnu jedancinu prvog reda koja glasi:

$$C_{n+1} = (1 + \frac{K_m}{100})C_n + p \tag{6}$$

Kada prebacimo C_n koeficijente na jednu stranu dobijamo:

$$C_{n+1} - (1 + \frac{K_m}{100})C_n = p \tag{7}$$

Imamo nehomogenu jednačinu zato što se sa desne strane nalazi konstanta p. Opšte rešenje nehomogene linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima je:

$$C_n = h_n + p_n \tag{8}$$

Pri cemu je h_n opste resenje odgovarajuce homogene jednačine, a p_n partikularno rešenje date nehomogene jednačine.

Rešenje homogene linearne diferencne jednačine sa konstantnim koeficijentima određeno je njenom karakterističnom jednačinom. Karakteristična jednačina jednačine (6) je:

$$x - (1 + \frac{K_m}{100}) = 0 \tag{9}$$

Rešavanjem karakteristične funkcije dobijamo jednu nulu:

$$x = (1 + \frac{K_m}{100}) \tag{10}$$

Opšte resenje nehomogene jednačine je dato sa:

$$h_n = a(1 + \frac{K_m}{100})^n \tag{11}$$

Sledeći korak u rešavanju diferencne jednačine je nalaženje opšteg rešenja koje je oblika, gde je b jedno partikularno resenje:

$$C_n = a(1 + \frac{K_m}{100})^n + b \tag{12}$$

Iz početnog uslova i (7) imamo

$$C_0 = 0, \quad C_1 = p = a(1 + \frac{K_m}{100}) + b \tag{13}$$

Rešavanjem sistema jednačina dobijamo da je vrednost za

$$\begin{cases} C_0 = 0 = a + b \\ C_1 = p = a(1 + \frac{K_m}{100}) + b \end{cases} \tag{14}$$

Oduzimanjem prve jednačine od druge dobijamo:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a(1 + \frac{K_m}{100}) - a = p \end{cases} \tag{15}$$

Rešavanjem druge jednačine po a dobijamo:

$$a = \frac{p}{\frac{K_m}{100}} \tag{16}$$

Zamenom u prvu jednačinu u (14) dobijamo:

$$b = -\frac{p}{\frac{K_m}{100}} \tag{17}$$

Ubacivanjem ovih vrednosti u (12) dobijamo :

$$C_n = \frac{p}{\frac{K_m}{100}}(1+\frac{K_m}{100})^n - \frac{p}{\frac{K_m}{100}} \quad . \tag{18}$$

2.2 Vremenski period isplate penzije

Sada se postavlja pitanje koliko meseci traje isplata penzije iz našeg fonda C ako nam je poznat fiksiran iznos mesečne penzije. U sledecoj diferencnoj jednačini C_t predstavlja stanje fonda nakon t meseci, K_m mesečnu kamatu i A iznos mesečne penzije.

$$C_{n+1} = (1+\frac{K_m}{100})C_n - A \tag{19}$$

Gde je

$$C_0 = C \tag{20}$$

Rešavanjem ove jednačine istim koracima kao u rešavanju jednačine (6), dobijamo opšte rešenje

$$C_{n+1} = (C - \frac{A}{\frac{K_m}{100}})(1+\frac{K_m}{100})^n + \frac{A}{\frac{K_m}{100}} \tag{21}$$

Pošto se isplata penzije vrši dokle god ima novca u fondu, imamo uslov:

$$C_{n+1} = 0 \tag{22}$$

Rešavanjem ove jednačine po n dobijamo broj meseci koliko traje isplata penzije.

$$n = \log\left(\frac{A}{A - C\cdot K_m/100}\right)_{1+K_m/100} \quad . \tag{23}$$

Da li postoje ograničenja u iznosu mesečne penzije A?

Prodiskutujmo sledeće: mesčni iznos penzije je manji ili jednak iznosu kada na naš fond C primenimo mesečnu kamatu K_m. Iz početne jednacine (19) i uslova (20) i (22) zaključujemo da ukoliko je mesečni iznos penzije manji od C $\cdot K_m/100$, stanje fonda će iz meseca u mesec rasti i nikada neće biti ispunjen uslov (22). Iz tog razloga imamo uslov da mesečni iznos penzije A bude veći od C $\cdot K_m/100$.

2.3 Mesečni iznos penzije

Sledeći problem koji rešavamo je koliki je mesečni iznos penzije ukoliko je poznat ukupan broj meseci isplate penzije n.

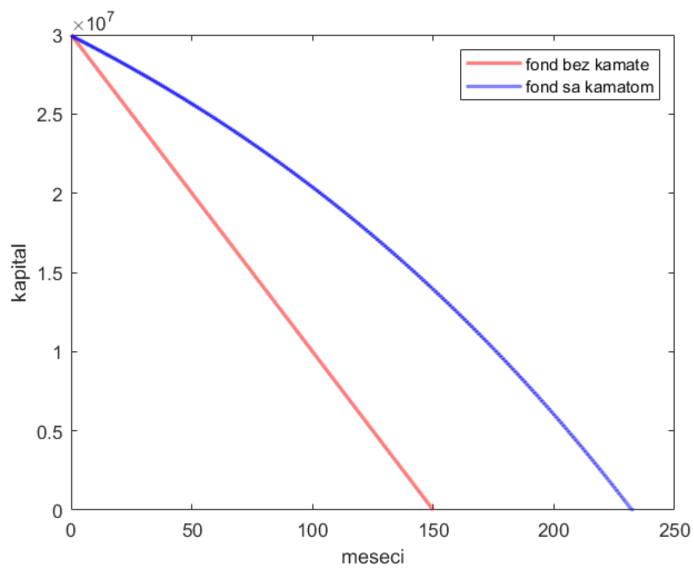
Jednačina ovog problema je takodje diferencna jednačina (16) sa istim početnim uslovom (17), opštim rešenjem (18) i njenim rešavanjem po A sa uslovom (19) dobijamo nepoznato A koje predstavlja mesečni iznos penzije za ukupan broj meseci isplate, n.

$$A = \frac{K_m}{100} \cdot \left(\frac{C \cdot \left(1 + \frac{K_m}{100}\right)^n}{\left(1 + \frac{K_m}{100}\right)^n - 1} \right). \tag{24}$$

3 Neka rešenja problema

3.1 Vremenski period isplate penzije

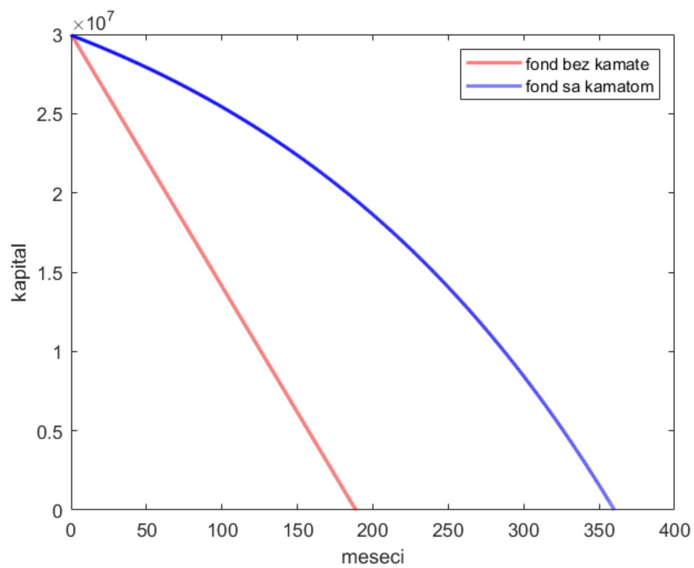
Na slici 1 je prikazana isplata fiksne penzije za parametre: Početni kapital = 30,000,000.00 dinara, godišnja kamata 5%, iznos penzije = 200.000,00 dinara. Korišćenjem formule (18) i izvođenjem za n dobijamo da bi isplata penzije trajala 233 meseci (19,4 godina).
Crvenom bojom je prikazana promena kapitala ako bi se isti iznos penzije uzimao svakog meseca bez štednje (iz slamarice). Isplaćivanje penzije na ovaj način bi trajalo 150 dana (12.5 godina).



Slika 1: Prikaz promene kapitala kroz vreme za fiksni iznos penzije

3.2 Mesečni iznos penzije

Na slici 2 je plavom bojom prikazana promena kapitala za dati broj meseci sa parametrima: Početni kapital = 30,000,000.00 dinara, godišnja kamata = 5%, broj meseci = 360 (30 godina). Korišćenjem formule (18) i izvođenjem za A dobijamo mesečni iznos penzije od 159,016.56 dinara.



Slika 2: Prikaz promene kapitala kroz vreme za fiksan broj meseci

Isplata penzije bez štednje traje samo 189 dana, što je skoro duplo manje od vremena isplate sa štednjom.

3.3 Promena kapitala, kamate i glavnice kroz mesece

U tabeli 1 je prikazana promena kroz mesece kamate, glavnice i kapitala za fiksnu penziju. Parametri su: Početni kapital = 100,000.00 dinara, kamata = 5%, iznos penzije = 10,000.00 dinara.

	Penzija	Kamata	Glavnica	Kapital
1	10000.00	407.41	9592.59	90407.41
2	10000.00	368.33	9631.67	80775.74
3	10000.00	329.09	9670.91	71104.83
4	10000.00	289.69	9710.31	61394.52
5	10000.00	250.13	9749.87	51644.65
6	10000.00	210.41	9789.59	41855.06
7	10000.00	170.52	9829.48	32025.58
8	10000.00	130.48	9869.52	22156.06
9	10000.00	90.27	9909.73	12246.32
10	10000.00	49.89	9950.11	2296.22

Tabela 1: Promena kapitala, kamate i glavnice kroz mesece

Može se primetiti da nakon desete penzije kapital nije 0, već postoji ostatak. Ovo se dešava zbog zaokruživanja meseci na dole pa se u stvarnom životu može dogovoriti da li da poslednja penzija bude veća za taj iznos ili da se doda još jedna (manja) penzija.

4 Literatura

[1] Milan Dražić, Matematičko modeliranje. Matematički fakultet, Beograd, 2017.
[2] Narodna Banka Srbije