微积分

目录

第一章

函数

记号与术语

R :实数集

R_+ :正实数集

R_- :负实数集

Q :有理数集

Z :整数集

N :自然数集(包含0)

N_+ :正整数集

$\forall$:任意

$\exists$:存在

$\sim$:等价

函数

定义 设x和y是两个变量，D是一个给定的非空数集，若对于$x \in D$，变量y按照确定的法则f总有确定的数值和它对应，则称y是x的函数

记作 $y = f(x)$

因变量　　自变量

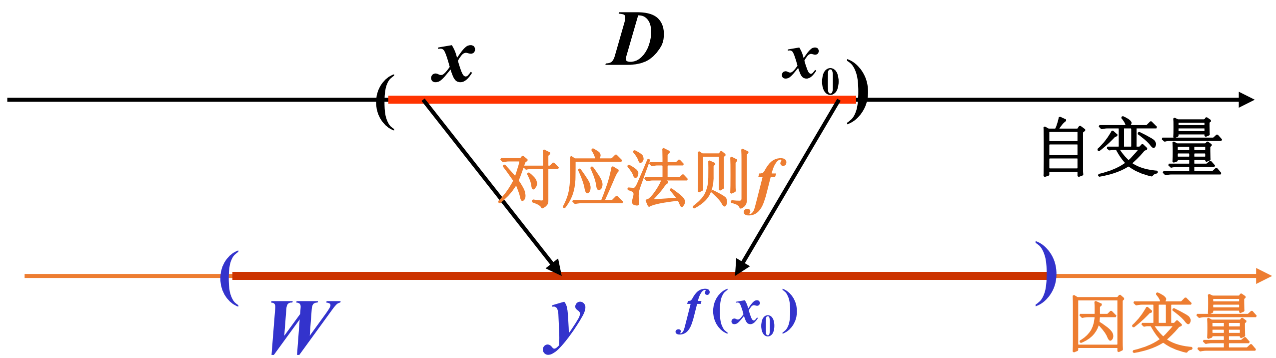
当$x_0 \in D$时，称$f(x_0)$为函数在点x_0处的函数值.

函数值全体组成的数集

$Z = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

函数

函数的两要素：定义域与对应法则.



约定:如果不考虑函数的实际意义，函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值称为函数的自然定义域

例如， $y=\sqrt{1-x^2}$ $D:[-1,1]$

例如， $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D:(-1,1)$

函数的性质

1．函数的有界性:

2．函数的单调性:

3．函数的奇偶性:

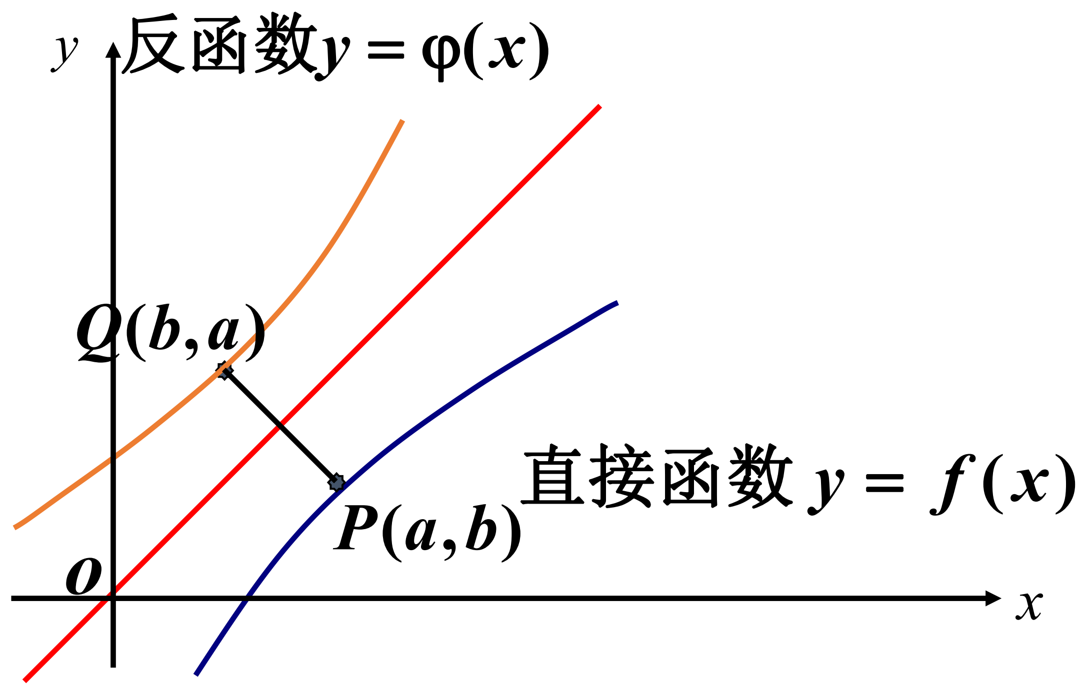
4．函数的周期性:

反函数

$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的关系是 x、y 互换，它们的图形关于 $y=x$ 对称。

$y = f(x)$ 单调单值，则 $y = f^{-1}(x)$ 单调单值。

请同学们注意
反函数的写法
和逆是一样的



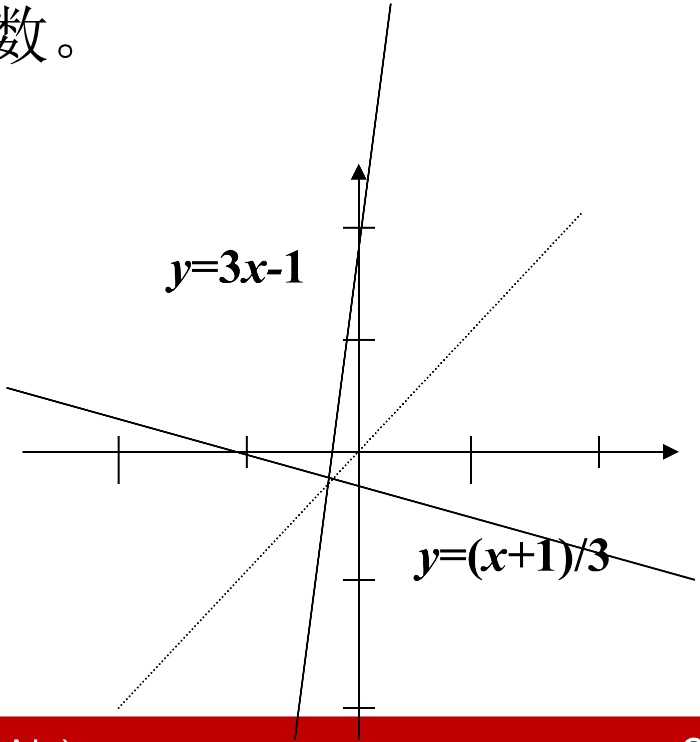
反函数

例:求$y=3x-1$的反函数。

解:

$\because$ $y=3x-1$ $\Rightarrow$ $x=(y+1)/3=f^{-1}(y)$

$\therefore$ x、y互换得$y=f^{-1}(x)=(x+1)/3$为反函数。



复合函数

设$y=f(u)$的定义域、值域分别是D_f、W_f

$u=\varphi(x)$的定义域、值域分别是D_φ、W_φ

若 $D_f \cap W_\varphi \neq \varnothing$ 则称$y=f[(\varphi(x)]$为复合函数

其中：　x为自变量，　y为因变量，　u为中间变量。

复合函数的定义域

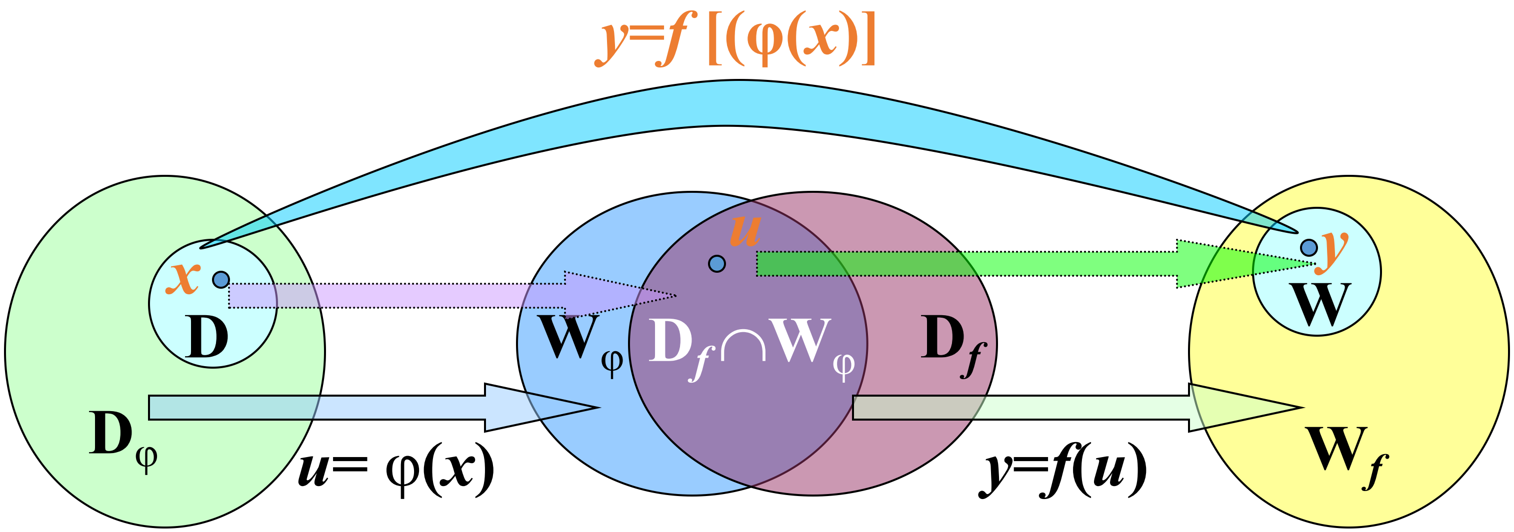
$$D=\{x \mid x \in D_\varphi, \varphi(x) \in D_f \cap W_\varphi\}$$

复合函数的值域

$$W=\{y \mid y \in W_f, \text{且存在} u \in D_f \cap W_\varphi \text{使} f(u)=y\}$$

或$W=\{y \mid y=f[(\varphi(x)], x \in D\}$

复合函数



符合条件：$D_f \cap W_\varphi \neq \varnothing$

例如 $y = \arcsin u$, $u = 2 + x^2$; $y \neq \arcsin(2 + x^2)$

初等函数

初等函数

以下六类函数称为基本初等函数.

思考：一次函数是那种?

(1) 常量函数 $y = c$ (c为常数);

(2) 幂函数 $y = x^{\alpha}$ (α 为实数);

(3) 指数函数 $y = a^{x}$ $(a > 0, a \neq 1)$;

(4) 对数函数 $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$;

(5) 三角函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$,

$y = \tan x$, $y = \cot x$;

(6) 反三角函数 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,

$y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

初等函数

定义 凡是由常数和基本初等函数经过有限次四则运算及有限次的函数复合所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

基本初等函数 → 有限次四则运算 → 初等函数

基本初等函数 → 有限次的复合 → 初等函数

$$y = 2^{\sin x} + \lg\sqrt{3^x + 1} + 4\cos 3x$$

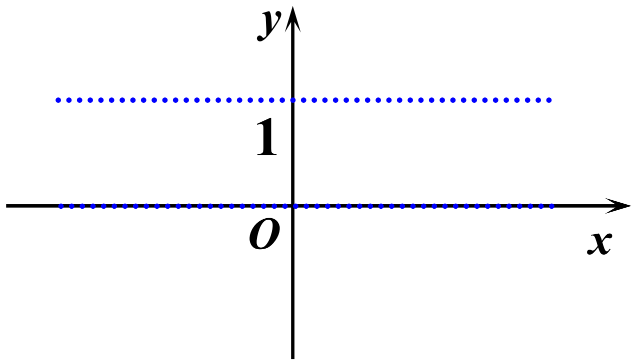
$$y = \sqrt[3]{1 + \tan x} + \sin 3x^5$$

初等函数

狄利克雷函数与黎曼函数是非初等函数.

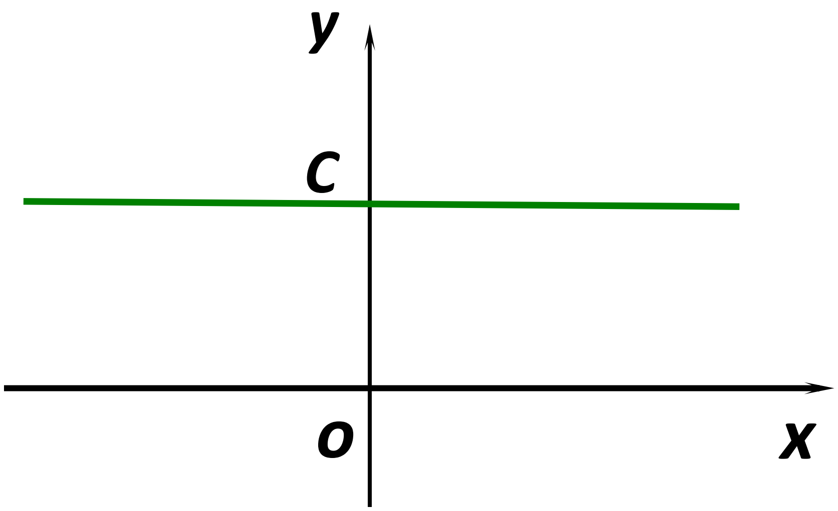
例 **狄利克雷函数**

$$D(x)=\begin{cases}1\,, & x\in Q\\ 0\,, & x\notin Q\end{cases}$$



初等函数

1. 常量函数 $y = C$ （又称 常值函数）

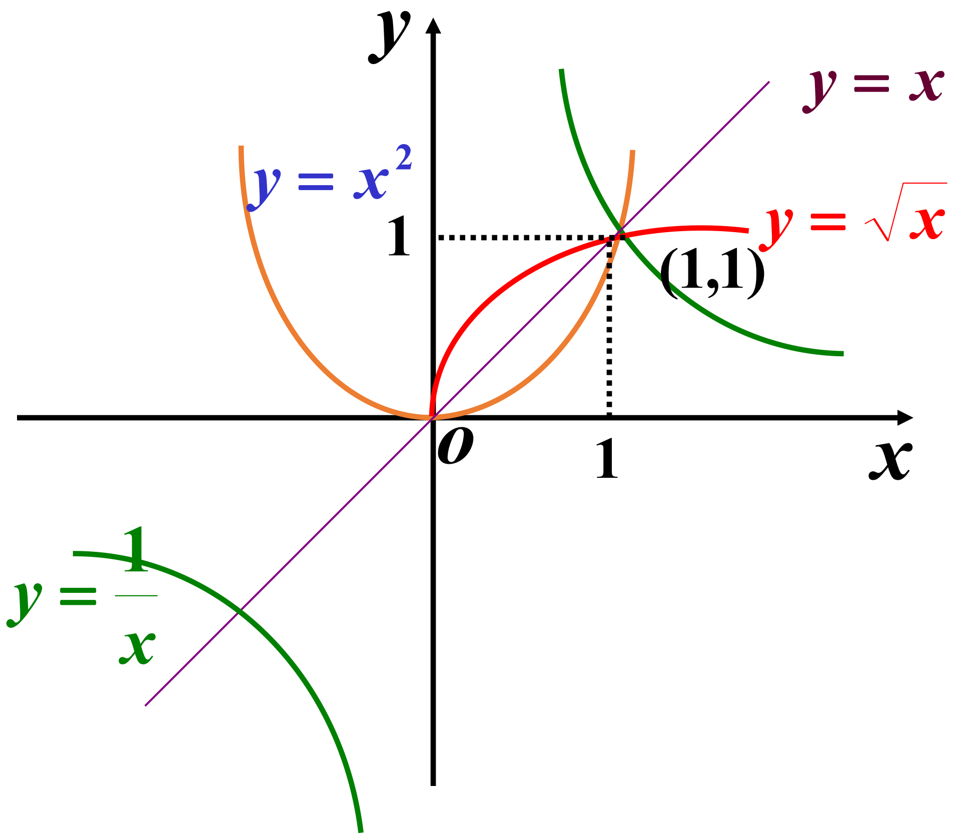


性质

垂直于y轴的直线

初等函数

2.幂函数 $y = x^{\mu}$ (μ是常数)



性质

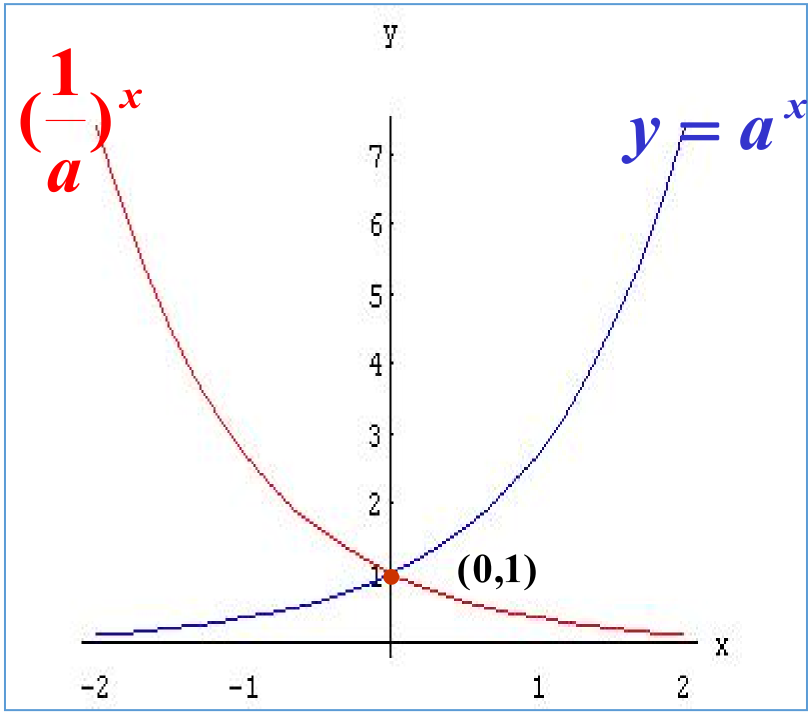
1、当 $\mu > 0$时，
幂函数（x>0）
过（1，1）点，
是增函数

2、当 $\mu < 0$ 时，
幂函数(x>0)
过（1，1）点，
是减函数
以x轴、y轴为渐近线

初等函数

3.指数函数 $y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$ $y = e^x$

$y = (\frac{1}{a})^x$ $y = a^x$

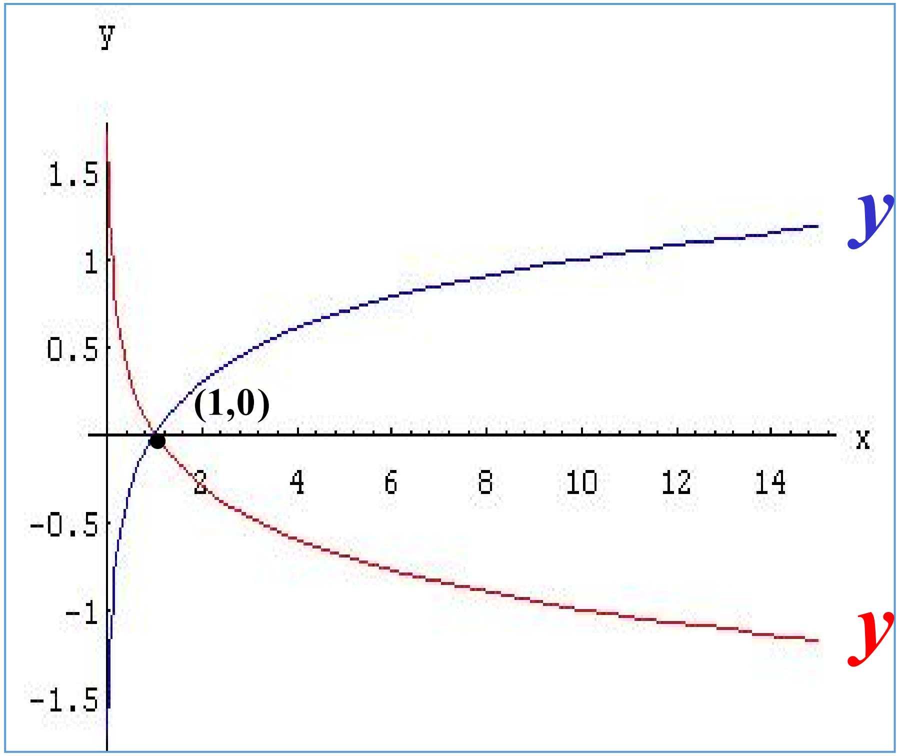


$(a > 1)$

初等函数

CDA数据分析师 CERTIFIED DATA ANALYST

4.对数函数 $y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1) \quad y = \ln x$



$y = \log_a x$

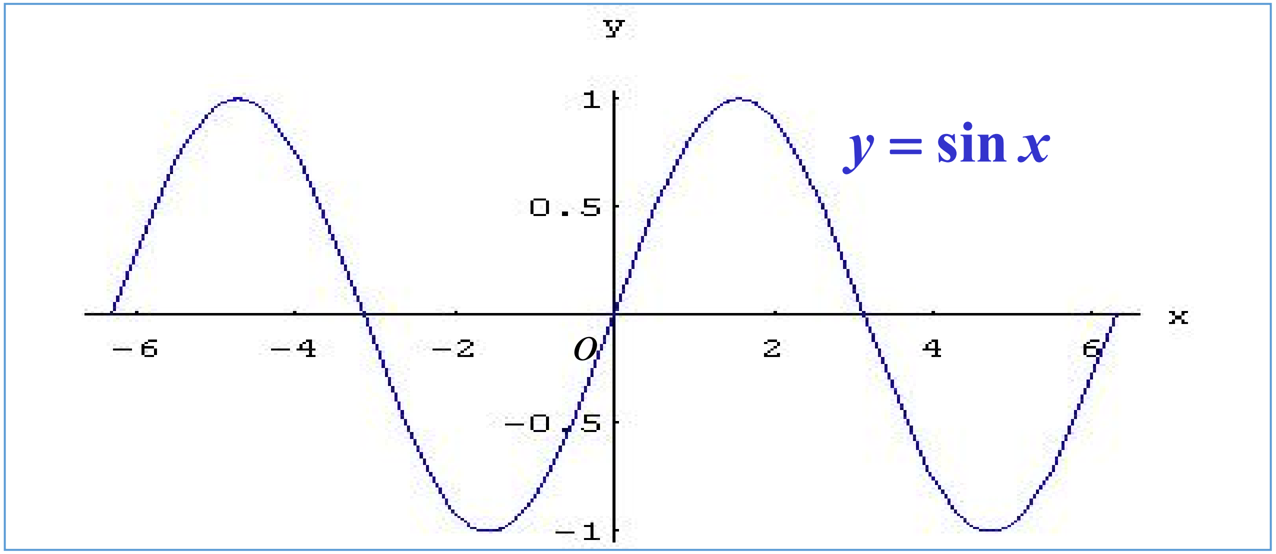
$(a > 1)$

$y = \log_{\frac{1}{a}} x$

初等函数

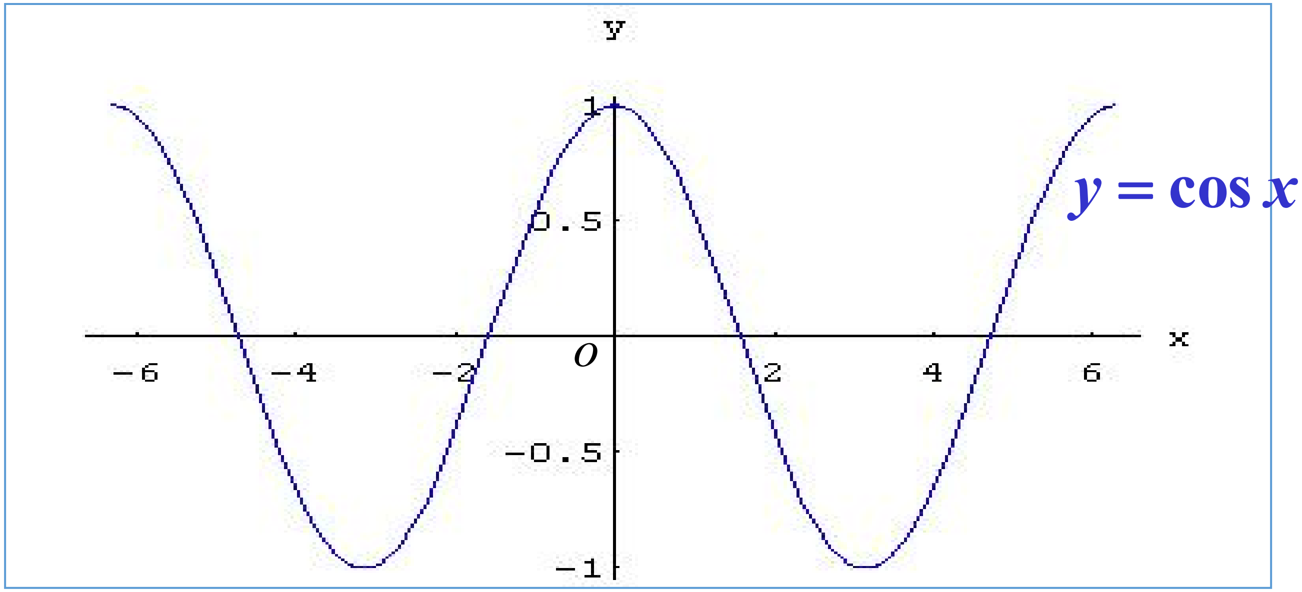
5.三角函数

正弦函数 $y = \sin x$



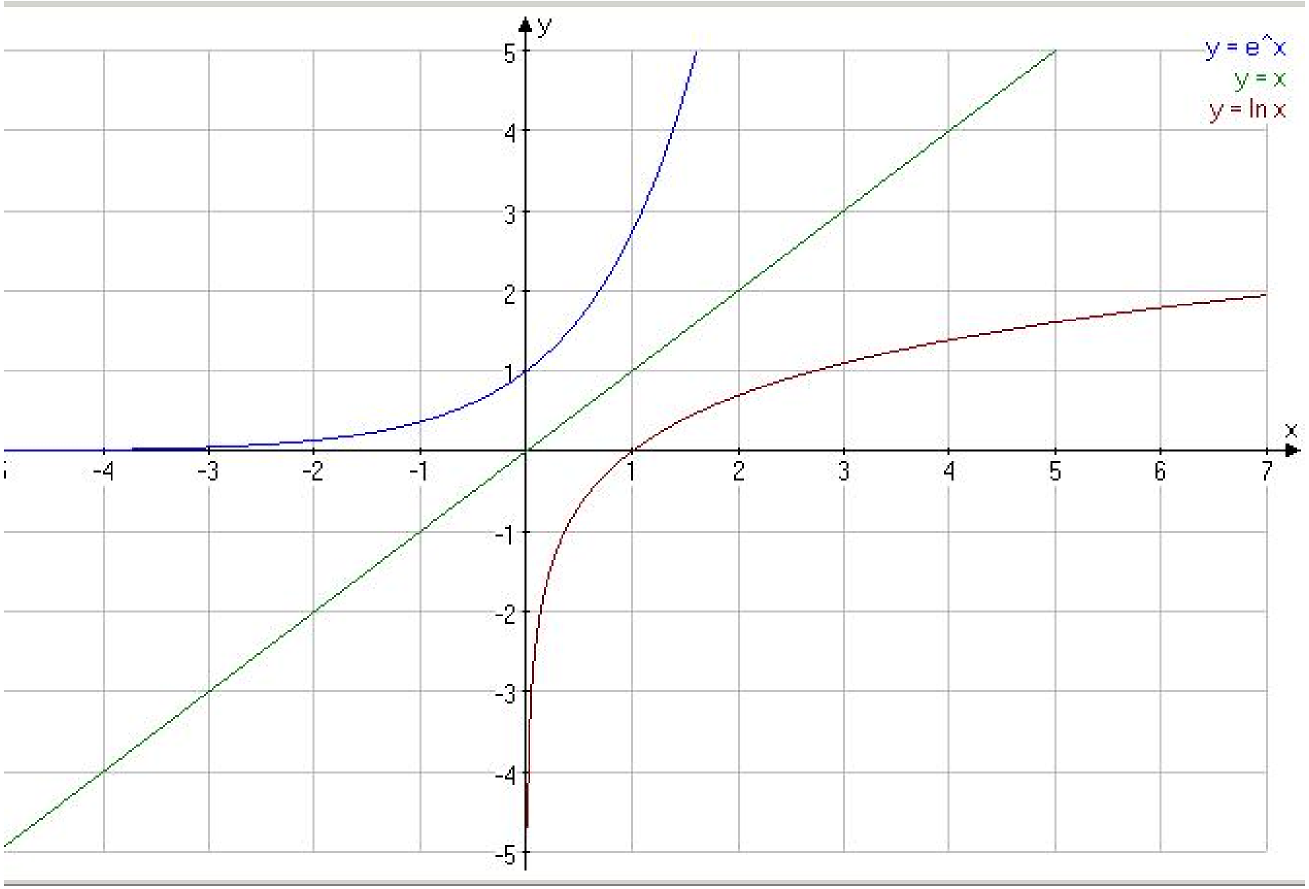
初等函数

余弦函数 $y = \cos x$



初等函数

- 指数与对数关系：互为反函数



初等函数

指数函数的运算：

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

$$a^{mn} = (a^m)^n$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

初等函数

对数函数的运算：

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^c = c \log_a b$$

对数的换底公式：$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

第二章

极限

1. 数列极限

古代哲学家庄周所著的《庄子 · 天下篇》引用了一句话：“一尺之棰，日取其半，万世不竭”．它的意思是：一根长为一尺的木棒，每天截下一半，

这样的过程可以无限制地进行下去.

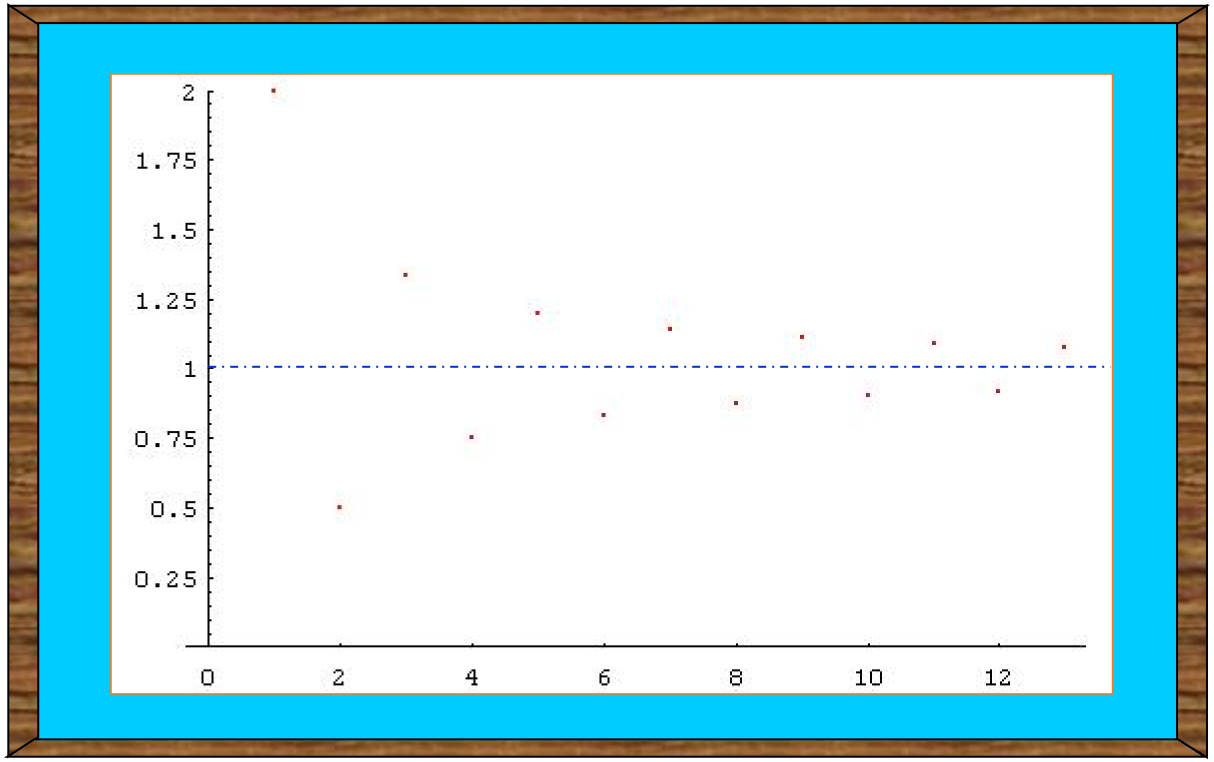
我们把每天截下部分 (或剩下部分) 的长度列出：

第一天截下 $\frac{1}{2}$，第二天截下 $\frac{1}{2^2}, \cdots$，第n天截下 $\frac{1}{2^n}, \cdots$. 这样就得到一个数列：

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots,\text{ 或 } \left\{\frac{1}{2^n}\right\}.$$

容易看出：数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 的通项 $\frac{1}{2^n}$ 随着 n 的无限增大而无限趋于 0.

定性分析：当n无限增大时，$\left\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 无限趋近于1，数1即所谓 $\left\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ 的“极限”.



定量分析： $\left\{1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ **无限趋近于1是指：**

当 n 充分大时， $\left|1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}-1\right|$ **能任意小，并保持任意小。**

收敛数列的定义

一般地说, 对于数列 $\{a_n\}$, 若当 n 充分变大时, a_n

能无限地接近某个常数 a， 则称$\{a_n\}$ 收敛于 a .

下面给出严格的 "ε - N"数学定义.

定义1 设 $\{a_n\}$为一个数列, a 为一个常数, 若对于

任意的正数 $\varepsilon > 0$, 总存在正整数 N, 使当 $n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

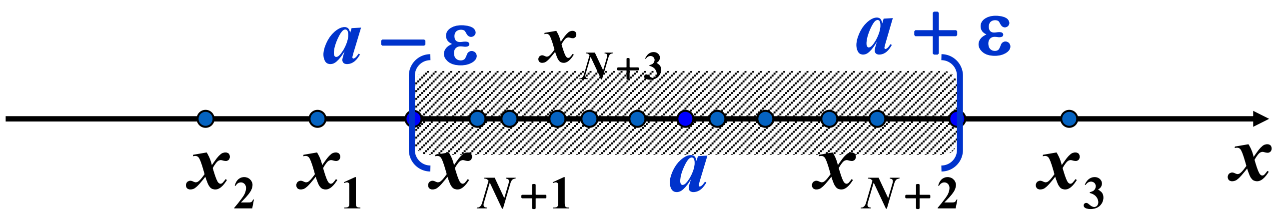
则称数列$\{a_n\}$收敛于a, 又称 a 为数列$\{a_n\}$的极限,

记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (或 $a_n \to a$, $n \to \infty$) .

若$\{a_n\}$不收敛, 则称$\{a_n\}$为发散数列.

数列极限的几何解释:

由定义 $|x_n - a| < \varepsilon$, 得 $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.



对任意给定的ε邻域$O(a,\varepsilon)=(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$,

总存在项x_N，第N项以后的所有项

$x_{N+1}, x_{N+2}, \cdots$ 全位于这个邻域内；

只有有限个(至多只有N个)落在其外.

2. 函数极限

作为数列极限的推广, 函数极限与数列极限之间有着密切的联系, 它们之间的纽带就是归结原理.

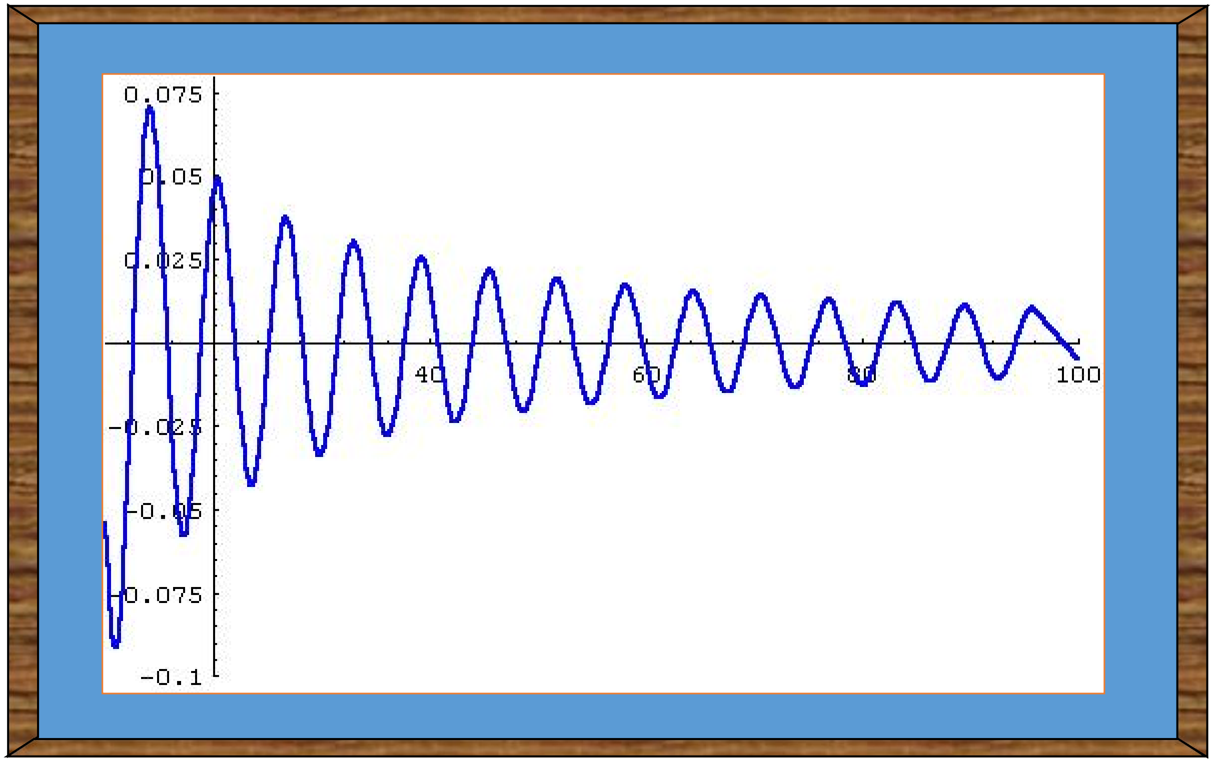
一、x 趋于∞时的函数极限

二、x 趋于x_0时的函数极限

三、单侧极限

一. x 趋于∞时的函数极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



用 ε − δ 语言定义极限

定义1 设 f 为定义在 $[a,+\infty)$ 上的一个函数． A 为定数, 若对于任意正数 $\varepsilon > 0$,存在正数 $M(\geq a)$, 使得当 $x > M$ 时,

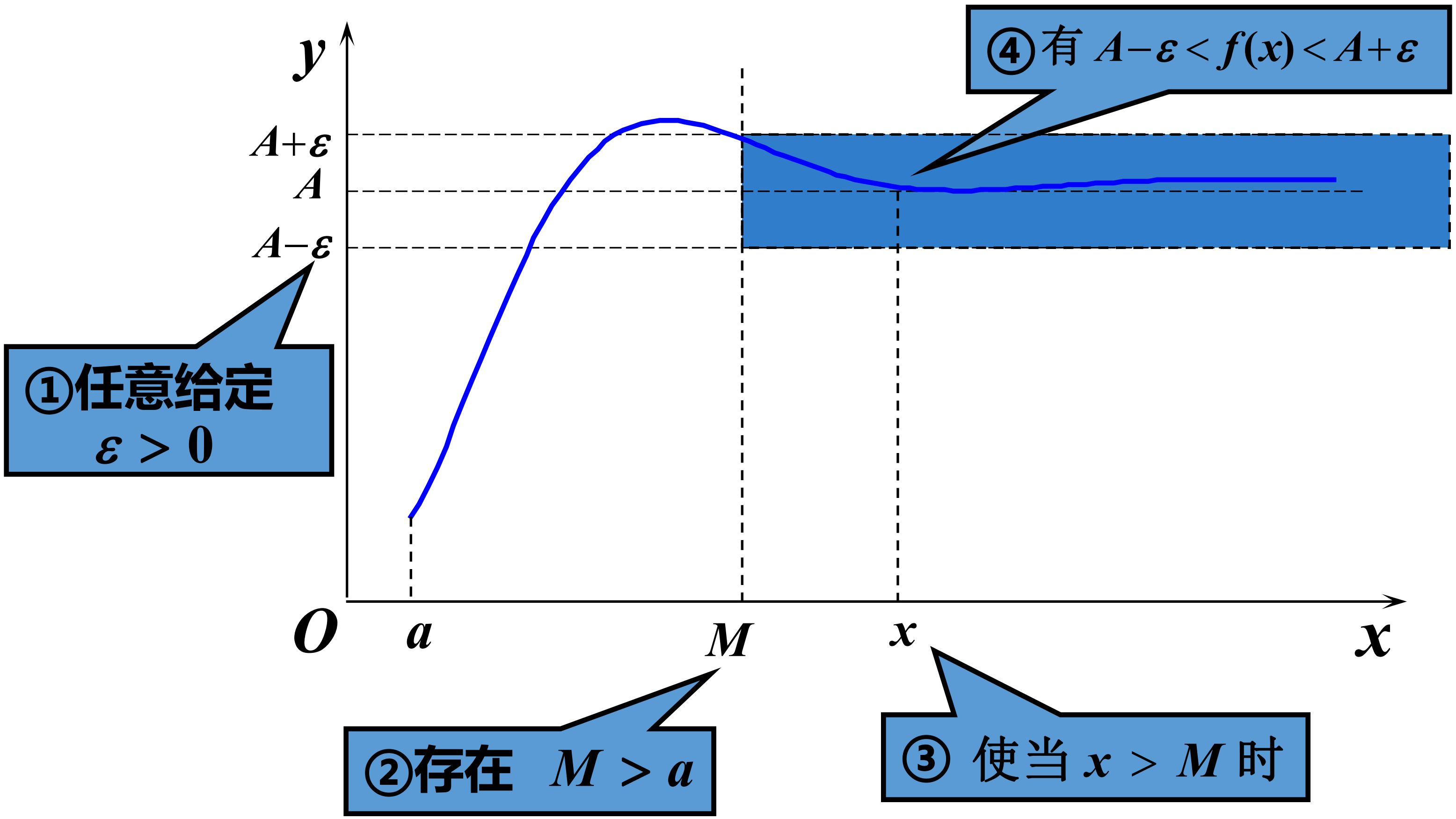
$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于 $+\infty$ 时以 A 为极限．

记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \quad \text{或者} \quad f(x) \to A \ \ (x \to +\infty).$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 的几何意义



二、x趋于x_0时的函数极限

定义4 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心邻域 $U^\circ(x_0,\delta')$ 内有定义，A是一个常数．如果对于任意正数 ε，存在正数 $\delta<\delta'$，当 $x\in U^\circ(x_0,\delta)\subset U^\circ(x_0,\delta')$时

(即$0<|x-x_0|<\delta$)

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$当$x\to x_0$时以 A 为极限．**记为**

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

$$f(x)\to A\ \ (x\to x_0).$$

三、单侧极限

在考虑 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 时，**x 既可以从 x_0** 的左侧 $(x<x_0)$ 又可以从 x_0 的右侧 $(x>x_0)$趋向于x_0. **但在某些时候,我们仅需(仅能)在 x_0的某一侧来考虑, 比如函数在定义区间的端点和分段函数的分界点等.**

定义5 设 $f(x)$ 在 $U_+^\circ(x_0,\eta)$ ($U_-^\circ(x_0,\eta)$)有定义，***A*** **为常数. 若对于任意正数**ε **,** 存在正数 δ（$\delta<\eta$),

迫敛性（夹逼准则）

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, 且

在 x_0 的某个空心邻域 $U^\circ(x_0)$ 内有

$$f(x) \le h(x) \le g(x).$$

那么 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$.

四则运算法则

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

都存在, 则 $f\pm g, f\cdot g$ 在点 x_0 的极限也存在， 且

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

(3) 又若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$，则 $\dfrac{f}{g}$ 在点 x_0 的极限也存在,

并有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

这些定理的证明类似于数列极限中的相应定理.

无穷小量

定义1 设 f 在点 x_0 的某邻域 $U^\circ(x_0)$ 内有定义，

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，则称 f 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量 .

若 f 在点 x_0 的某个空心邻域内有界，**则称 f 为**

$x \to x_0$ 时的有界量.

类似地可以分别定义 f 为

$$x \to x_0^+, x \to x_0^-, x \to \infty, x \to +\infty, x \to -\infty$$

时的无穷小量和有界量 .

反之，我们也可以定义 无穷大量。

无穷小量阶的比较

CDA数据分析师 CERTIFIED DATA ANALYST

两个相同类型的无穷小量，它们的和、差、积仍是无穷小量，但是它们的商一般来说是不确定的.这与它们各自趋于零的速度有关.为了便于考察两个无穷小量之间趋于零的速度的快慢，我们给出如下定义.

设当 $x \to x_0$ 时，$f(x), g(x)$ 均是无穷小量 .

1. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, 则称 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 是关于 $g(x)$

的高阶无穷小量，记作

$$f(x)=o(g(x))\ \ (x\to x_0)\,.$$

当 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量时，我们记

$$f(x)=o(1)\ \ (x\to x_0)\,.$$

2.若 $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$，则称为同阶无穷小量。

3.若 $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$，则称为等价无穷小量,记为~。

常用的等价无穷小替换：
X~sinX~tanX~arcsinX~arctanX~$e^x - 1$~ln(X+1) (X →0)

1-cosX~$\frac{1}{2}X^2$ (X →0)

第三章

微分

一、函数在一点的连续性

定义1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，且

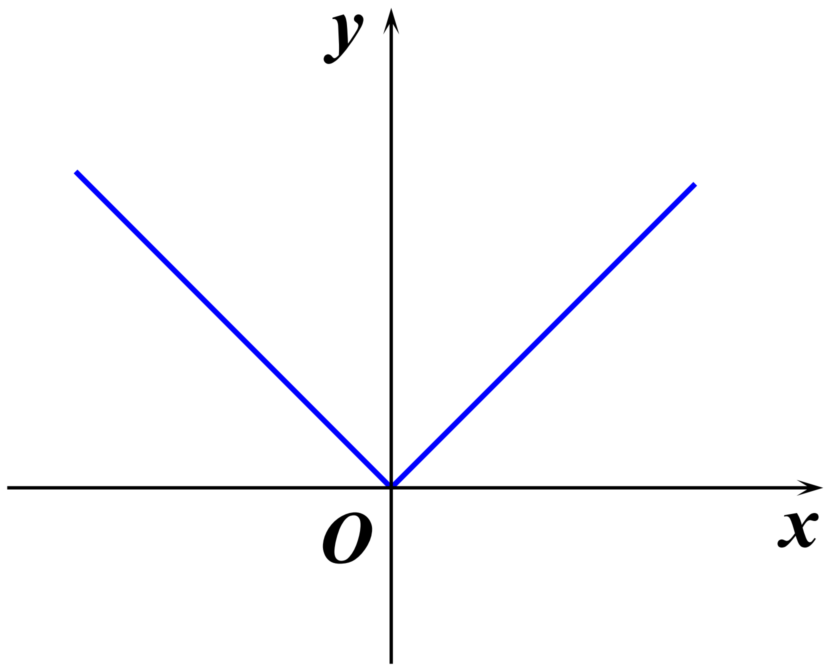
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \tag{1}$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

由定义1知，我们是通过函数的极限来定义连续性的，换句话说连续就是指 $f(x)$ 在点 x_0 的极限不仅存在，而且其值恰为 $f(x)$ 在点 x_0 的函数值 $f(x_0)$.

例如：$f(x)=|x|$在 $x=0$ 处连续，这是因为

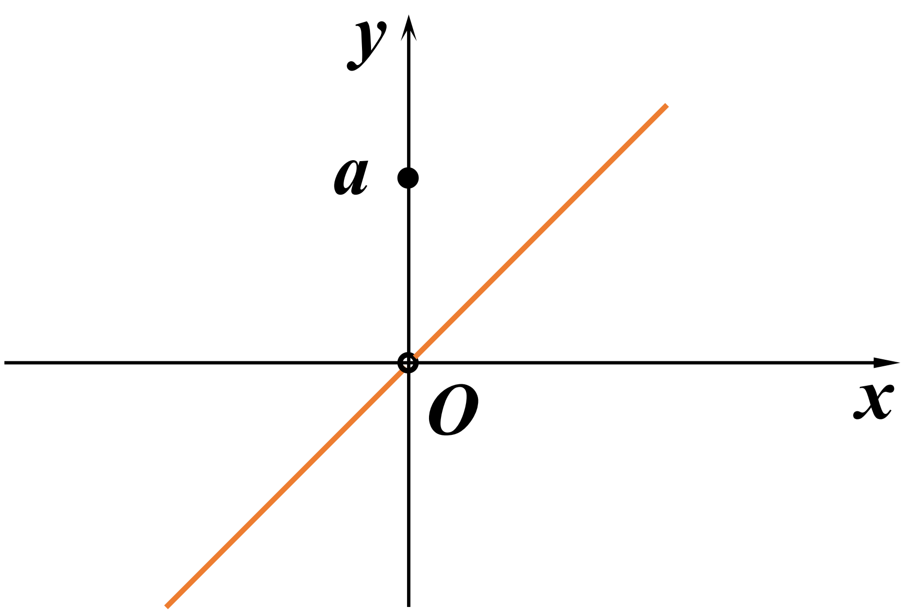
$$\lim_{x\to 0}|x|=0=f(0).$$



$y=|x|$

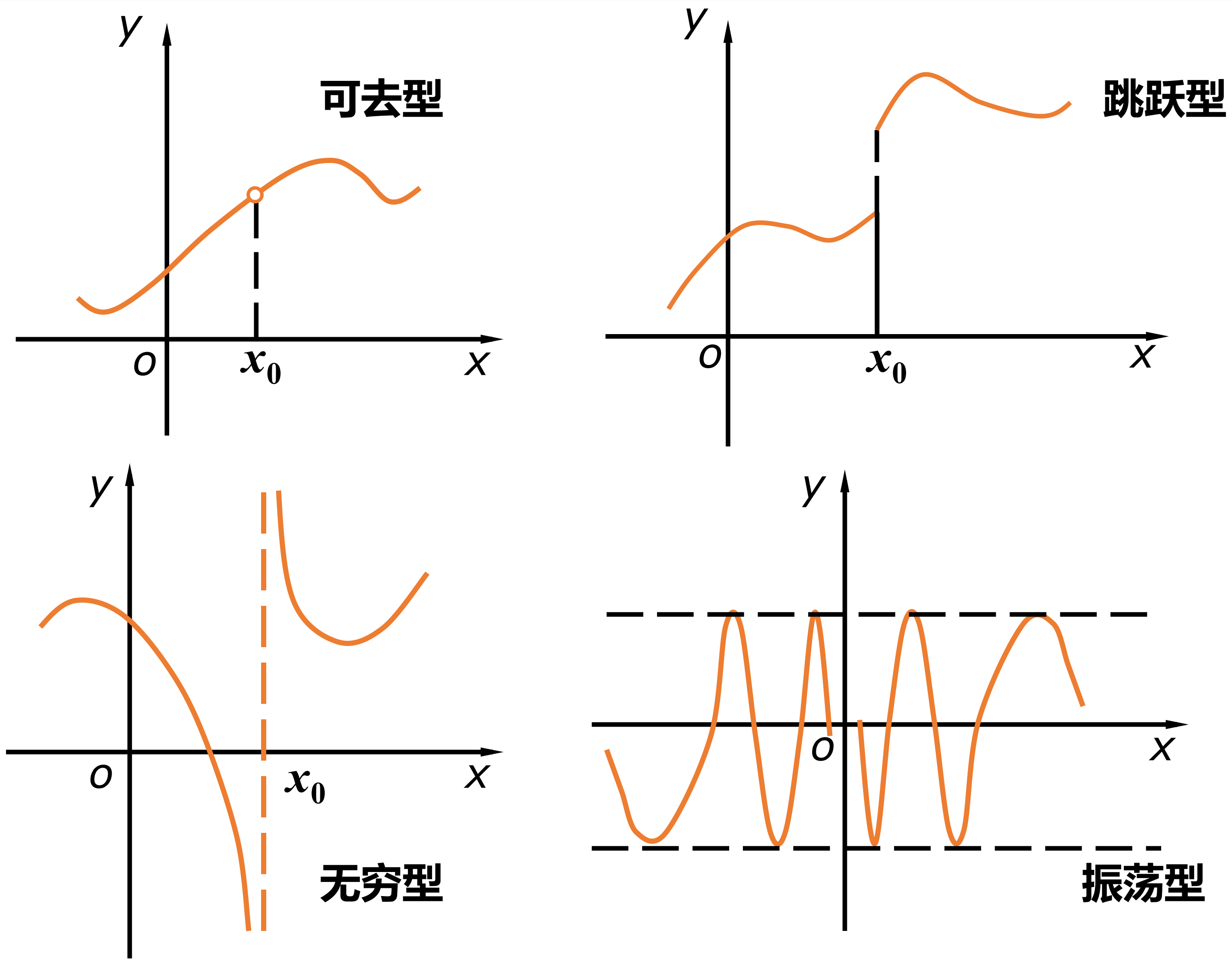
函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$ $(a\neq 0)$

在 $x=0$ 处不连续，这是因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0\neq f(0)$.



第一类间断点

第二类间断点



二、导数和微分

15世纪文艺复兴以后的欧洲，资本主义逐渐发展，采矿冶炼、机器发明、商业交往、枪炮制造、远洋航海、天象观测等大量实际问题，给数学提出了前所未有的亟待解决的新课题。其中有两类问题导致了导数概念的产生：（1）求变速运动的瞬时速度；（2）求曲线上一点处的切线。这两类问题都归结为变量变化的快慢程度，即变化率问题。牛顿从第一个问题出发，莱布尼兹从第二个问题出发，分别给出了导数的概念。

1. 瞬时速度　设一质点作直线运动，质点的位置 s 是时间 t 的函数， 即其运动规律是 $s=s(t)$， 则在某时刻 t_0 及邻近时刻 t 之间的平均速度是

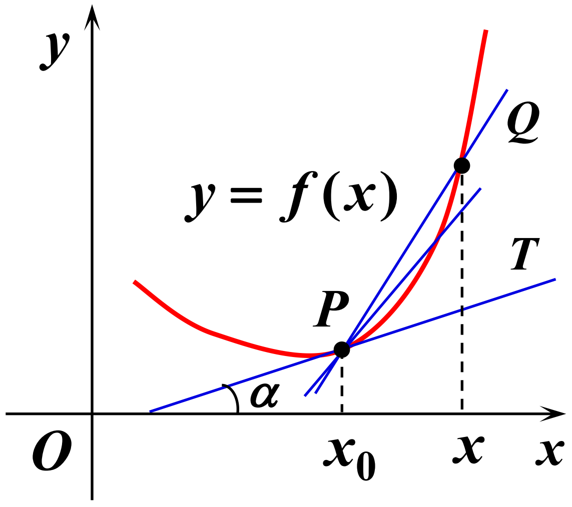
$$\bar{v}=\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}.$$

当 t 越来越接近 t_0 时，平均速度就越来越接近 t_0 时刻的瞬时速度. 严格地说，当极限

$$\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=v \qquad (1)$$

存在时, 这个极限就是质点在 t_0 时刻的瞬时速度.

2. 切线的斜率 如图所示, 需要寻找曲线 $y = f(x)$ 在其上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线 PT. 为此我们在 P 的邻近取一点 Q , 作曲线的割线 PQ , 这条割线的斜率为



$$\bar{k} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

设想一下，当动点 Q 沿此曲线无限接近点 P 时，$\bar{k}$ 的极限若存在，则这个极限

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (2)$$

会是什么呢?

答：它就是曲线在点 P 的切线 PT 的斜率.

上述两个问题的实际意义完全不同，一个是物理学中的瞬时速度，一个是几何学中的切线斜率。但从数量关系来看，它们有着完全相同的数学结构—函数的改变量与自变量改变量之比的极限.

上面两个问题虽然出发点相异，但都可归结为同一类型的数学问题：求函数 f 在点 x_0 处的增量 $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ 与自变量增量 $\Delta x = x - x_0$ 之比的极限．这个增量比称为函数 f 关于自变量的平均变化率，增量比的极限（如果存在）称为 f 在点 x_0 处关于 x 的瞬时变化率(或简称变化率)．

定义1 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (3)$$

存在，则称函数 f 在点 x_0 **可导**，该极限称为 f 在 x_0 的**导数**，记作 $f'(x_0)$.

如果令 $\Delta x = x - x_0$，$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$，导数就可以写成

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (4)$$

导数公式

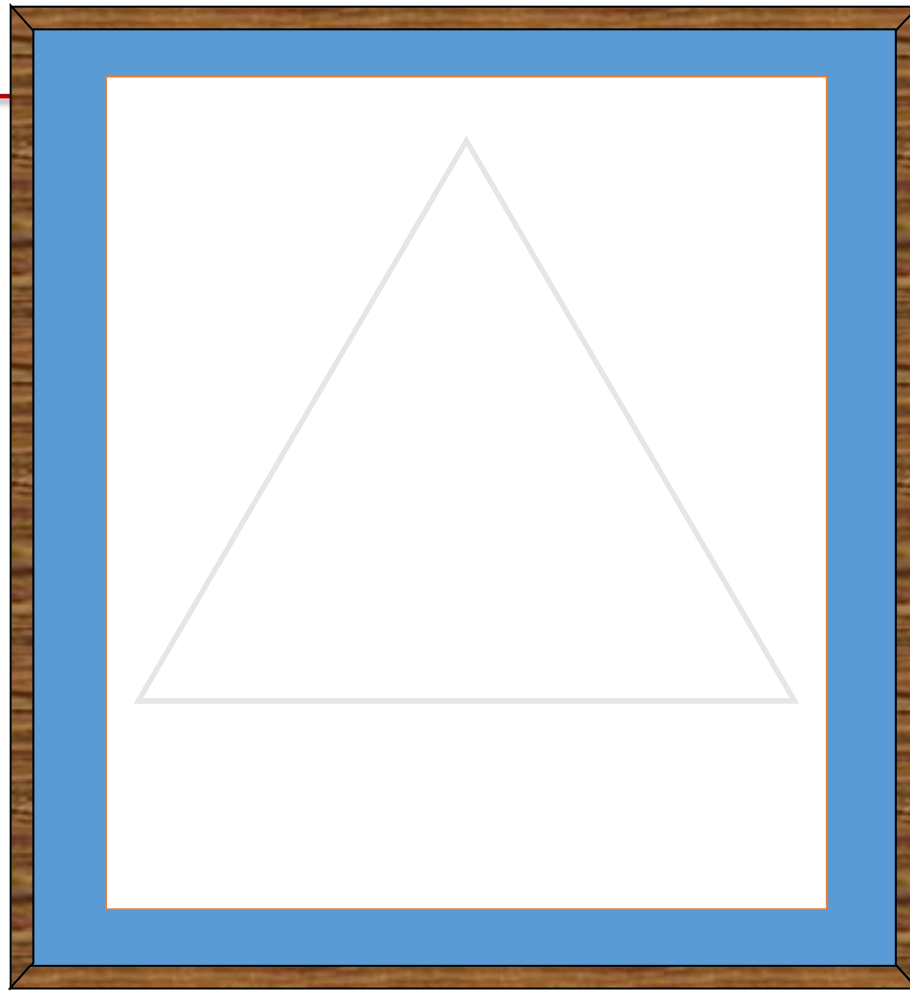
此公式非常重要，请同学们一定要理解，并且背下来。

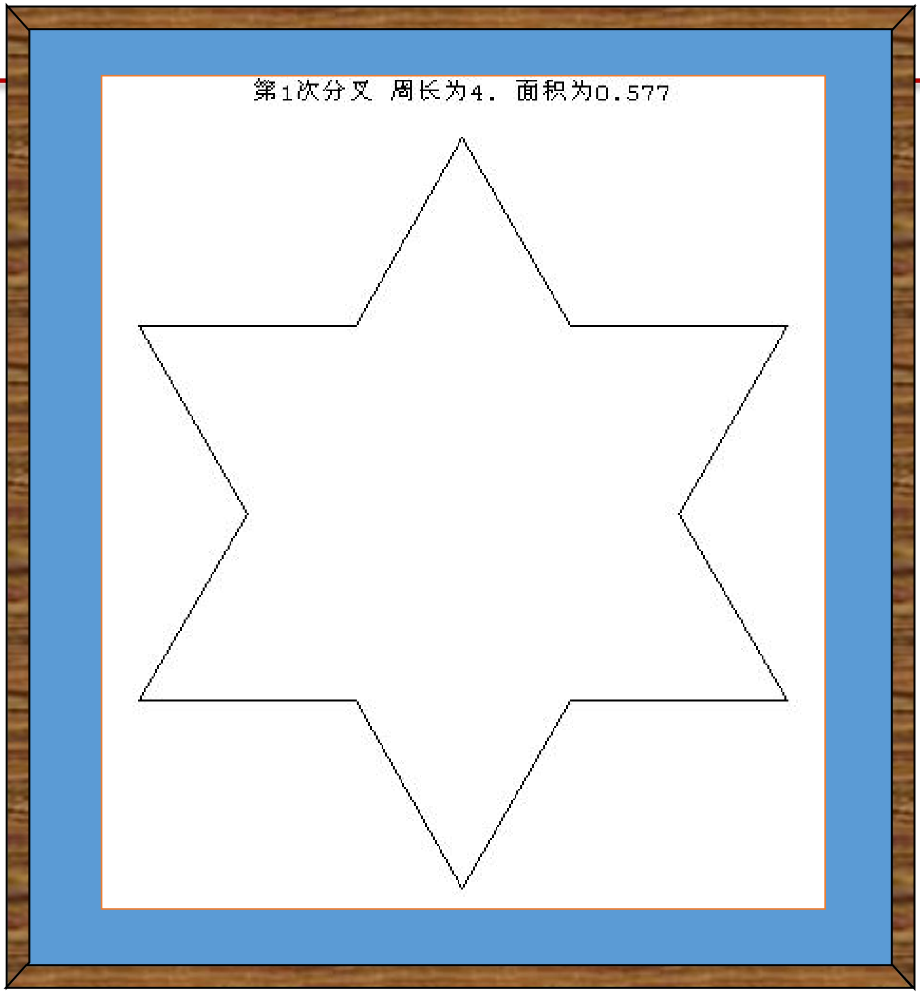
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

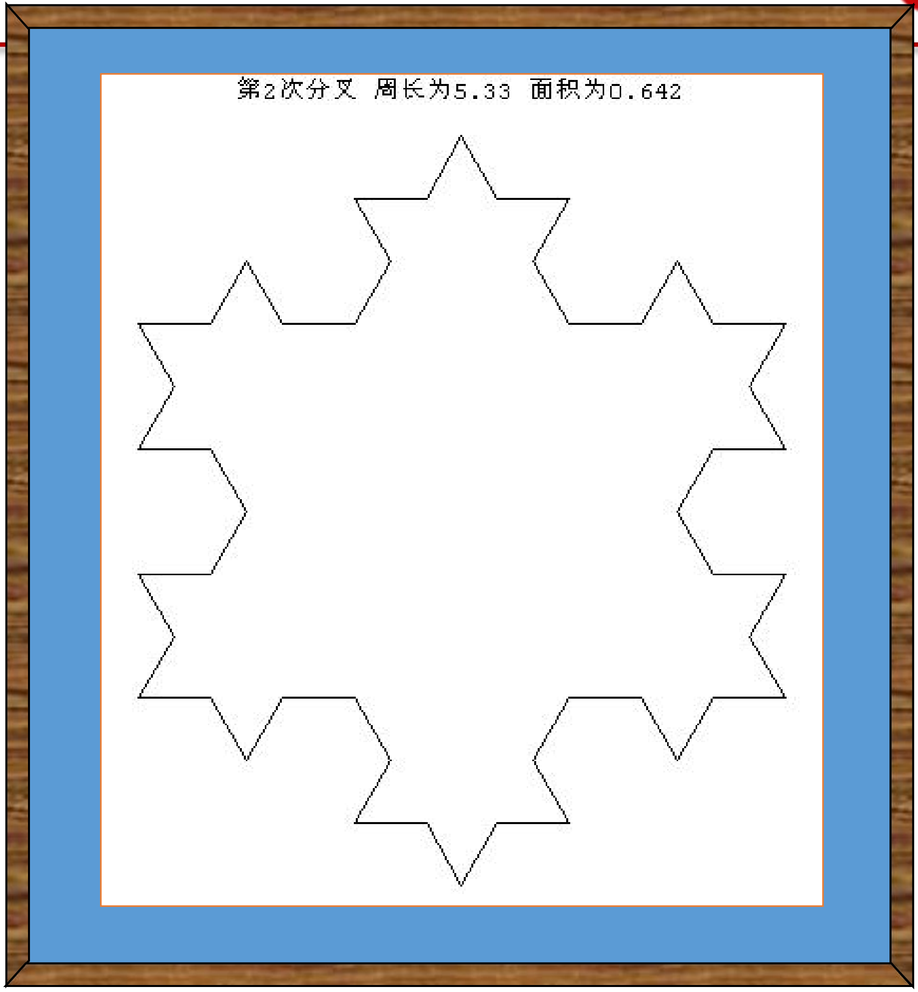
1834年，捷克数学家Bolzano（波尔查诺）给出了一个不可导的连续函数的例子，但他的工作在当时并不为人们所知.因此现在常常提到的例子是1872年由Weierstrass提出的著名的处处连续处处不可导的函数.由于这个例子涉及一些其它数学概念，因此在这里我们举一个较为直观的曲线的例子，虽然曲线和函数有区别，但本质是相通的.

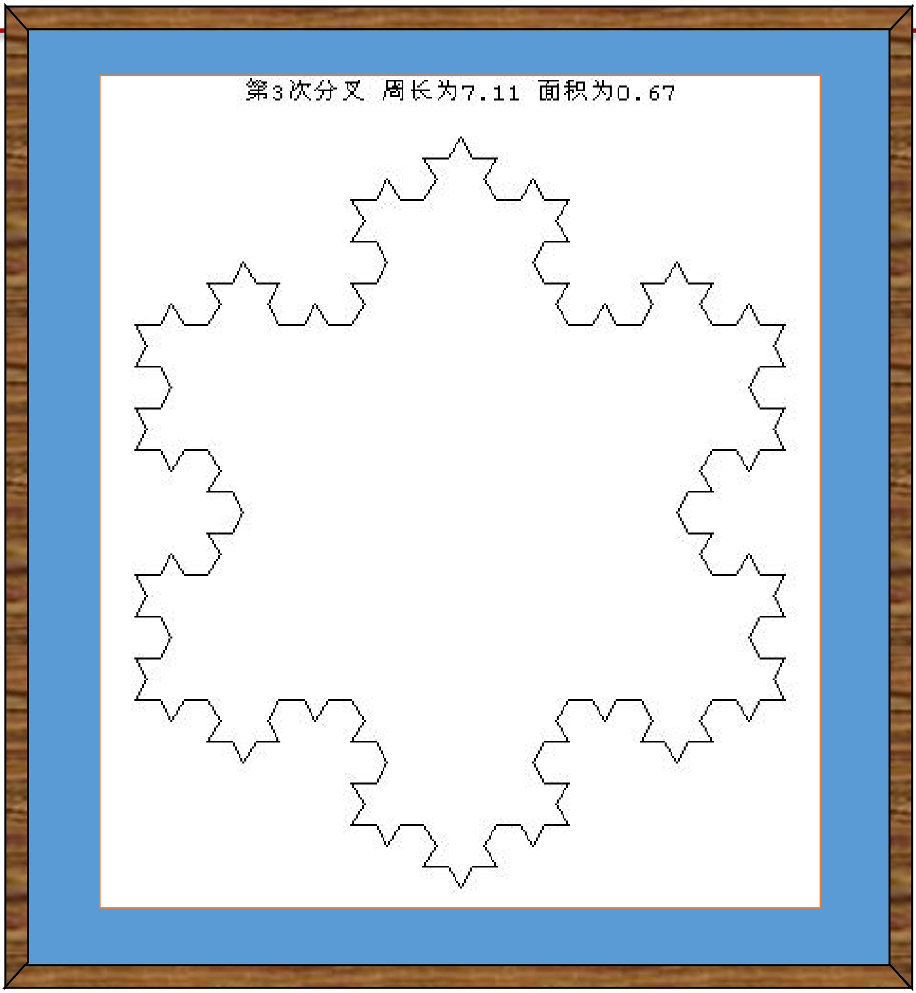
1904年，瑞典数学家科赫（Koch）做出一雪花曲线.

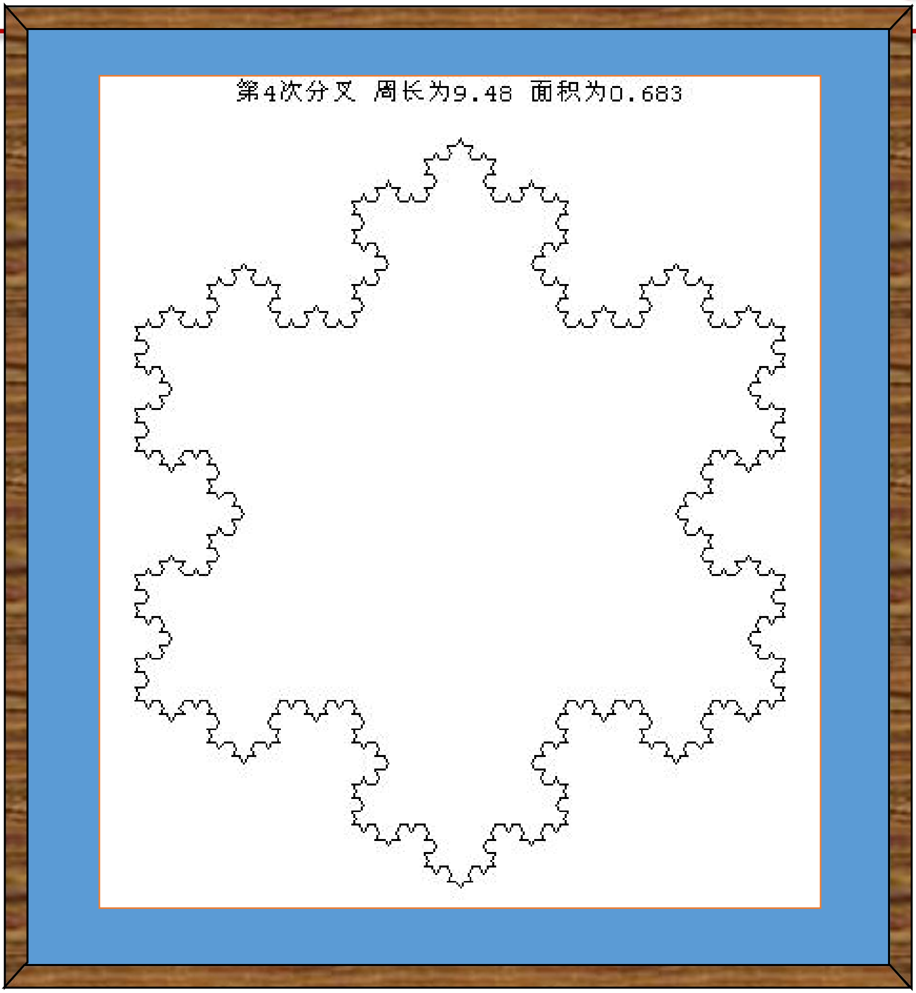
做法：先给定一个正三角形，然后在每条边上对称的产生边长为原边长的1/3的小正三角形．如此类推在每条凸边上都做类似的操作，就得到“Koch雪花曲线”．

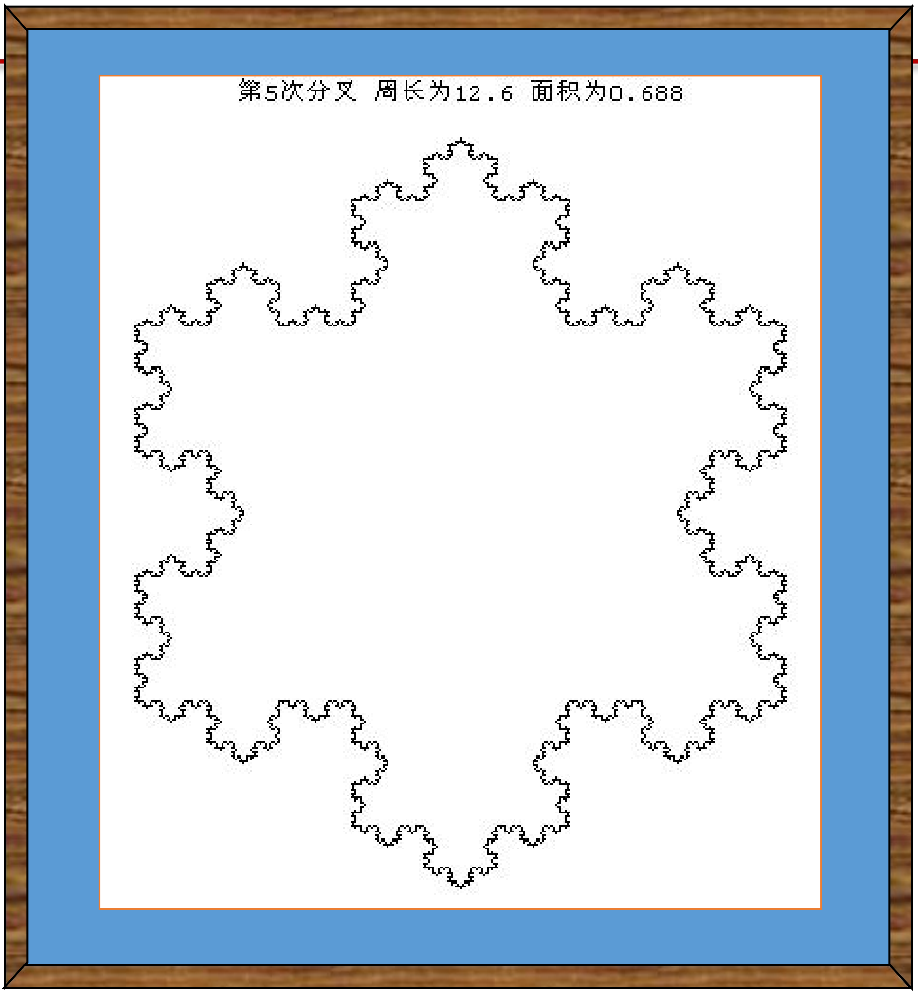



第1次分叉 周长为4. 面积为0.577


第2次分叉 周长为5.33 面积为0.642


第3次分叉 周长为7.11 面积为0.67


第4次分叉 周长为9.48 面积为0.683


第5次分叉 周长为12.6 面积为0.688

CDA数据分析师 CERTIFIED DATA ANALYST

Koch雪花曲线有趣的事实是：

它是连续曲线，但在每一点上都没有切线！雪花的周长是无界的，而面积有界.

不要以为雪花曲线仅仅是人脑想出来的一种“病态”曲线，科学家们发现，这类曲线能应用于研究自然界的许多现象，例如地球大陆的海岸线等.这门新兴的数学学科称为分形.

导函数

如果函数 f 在区间 I 上的每一点都可导 (对于区间端点考虑相应的单侧导数，如左端点考虑右导数)，则称 f 为区间 I 上的可导函数. 此时，对 I 上的任意一点 x 都有 f 的一个导数 $f'(x_0)$ 与之对应，这就定义了一个在区间 I 上的函数，称为 f 在 I 上的导函数，简称导数，记作 $f'(x)$ 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\ x\in I. \qquad (7)$$

重要例题

例 求函数 $y = x^n$ 的导数，n为正整数.

解 由于 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$

$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1},$$

因此

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + \Delta x^{n-1}\right) = nx^{n-1}.$$

基本初等函数的导数公式：

(1) $(c)' = 0$ （c为常数）;

(2) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ （α为任意实数）;

(3) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$;

(4) $(\tan x)' = \sec^2 x$, $(\cot x)' = -\csc^2 x$;

$(\sec x)' = \sec x \tan x$, $(\csc x)' = -\csc x \cot x$;

(5) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$;

(6) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

(7) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,

$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

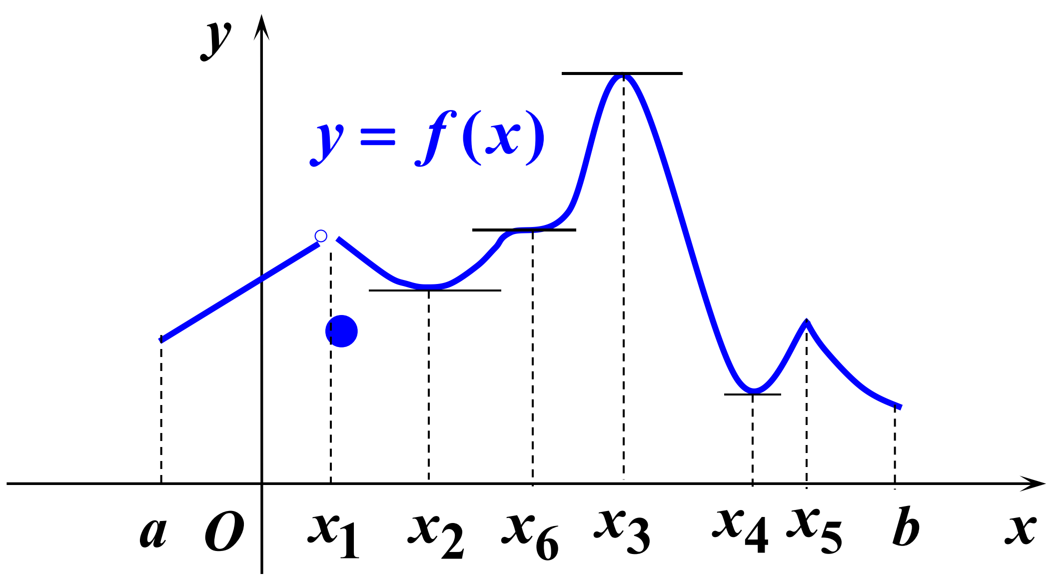
极值问题

定义3 如果函数 f 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 上对一切 $x \in U(x_0)$ 有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) \ge f(x_0)),$$

则称函数 f 在 x_0 处取得极大(或极小)值, 称点 x_0 为极大(或极小）值点. 极大值、极小值统称为**极值**, 极大值点、极小值点统称为**极值点**.

如图，函数 $y=f(x)$ 在 x_1,x_2,x_4 处取极小值,在 x_3,x_5 处取极大值. 由于极值是一个局部性概念,因此如果出现某一极大值反而小于另一极小值的现象, 那是不足为奇的. 此外, 在 x_6处虽然也有水平切线, 但它不是极值点.



定理 5.3（费马定理）

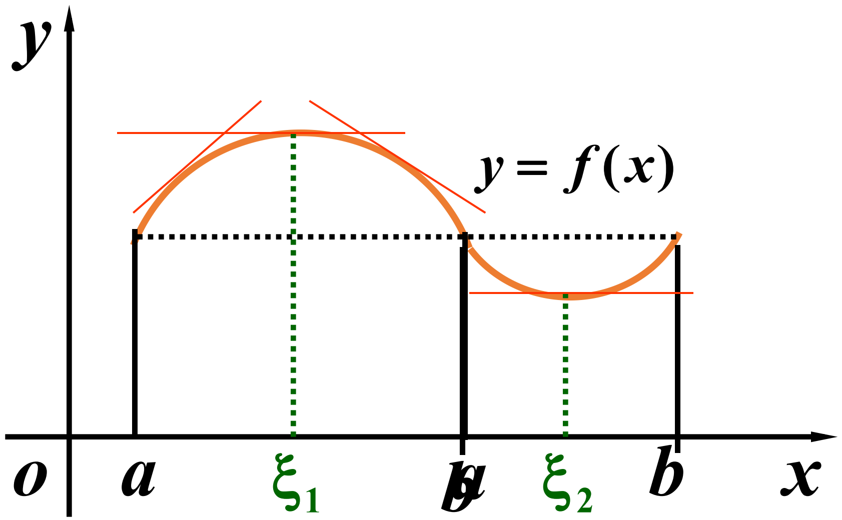
设函数 f 在点 x_0 的某邻域内有定义, 且在点 x_0 可导. 如果 x_0 是 f 的极值点，则必有

$$f'(x_0) = 0.$$

上述定理的几何意义：如果 f 在极值 $x = x_0$ 处可导，则该点处的切线平行于 x 轴.

几何解释:

曲线在最高点和最低点显然有水平切线，其斜率为0，当切线沿曲线连续滑动时，就必然经过位于水平位置的那一点 .



2.2　求导法则

导数很有用，但全凭定义来计算导数是不方便的. 为此要建立一些有效的求导法则，使导数运算变得较为简便.

一、导数的四则运算

三、复合函数的导数

四、基本求导法则与公式

一、导数的四则运算

定理 5.5 若函数 $u(x), v(x)$ 在点 x_0 可导，则函数

$f(x)=u(x)\pm v(x)$ 在点 x_0 也可导，且

$$(u(x)\pm v(x))'\big|_{x=x_0}=u'(x_0)\pm v'(x_0). \qquad (1)$$

定理 5.6 若函数 $u(x), v(x)$ 在点 x_0 可导，则函数

$f(x)=u(x)v(x)$ 在点 x_0 也可导，且

$$(u(x)v(x))'\big|_{x=x_0}=u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0). \qquad (2)$$

推论 若 $u(x)$ 在点 x_0 可导, c 是常数，则

$$\left(cu(x)\right)'\Big|_{x=x_0}=cu'(x_0). \qquad (3)$$

定理 5.6 可推广到任意有限个函数相乘的情形，如

$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'.$$

注意: $\boxed{(uv)' \cancel{=} u'v'}$ 千万不要把导数乘积公式（2）记错了.

例 求 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的导数.

解 $f'(x)=(a_0x^n)'+(a_1x^{n-1})'+\cdots+(a_{n-1}x)'+(a_n)'$

$$=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}.$$

因此, 对于多项式 f 而言, f' 总是比 f 低一个幂次.

定理5.7 若函数 $u(x),v(x)$ 在点 x_0 可导，$v(x_0)\neq 0$，

则 $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 在点 x_0 也可导，且

$$\left.\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'\right|_{x=x_0}=\frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}. \qquad (4)$$

三、复合函数的导数

定理 5.9 设 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 可导，$y=f(u)$ 在点 $u_0=\varphi(x_0)$ 可导，则复合函数 $f\circ\varphi$ **在点 x_0 可导，且**

$$(f\circ\varphi)'(x_0)=f'(u_0)\varphi'(x_0)=f'\big(\varphi(x_0)\big)\varphi'(x_0). \quad (7)$$

由 $f(u)$ 在点 u_0 可导，知存在一

个在点 u_0 连续的函数 $F(u)$，使 $f'(u_0)=F(u_0)$ 且

$$f(u)-f(u_0)=F(u)(u-u_0),\ x\in U(u_0).$$

同理，$u=\varphi(x)$ 在点 x_0 可导，则存在一个在点 x_0

连续的函数 $\Phi(x)$，使 $\varphi'(x_0)=\Phi(x_0)$，且

$$u-u_0=\varphi(x)-\varphi(x_0)=\Phi(x)(x-x_0),\ x\in U(x_0).$$

于是当 $x\in U(x_0)$，有

$$f(\varphi(x))-f(\varphi(x_0))=F(\varphi(x))\Phi(x)(x-x_0).$$

由于φ, Φ 在点 x_0 连续，F 在点 $u_0=\varphi(x_0)$ 连续，

所以 $H(x)=F(\varphi(x))\Phi(x)$ 在点 x_0 连续. **根据引理的充分性，** $f\circ\varphi$ 在点 x_0 可导，且 $(f\circ\varphi)'(x_0)$

$=H(x_0)=F(\varphi(x_0))\Phi(x_0)=f'(u_0)\varphi'(x_0).$

复合函数求导公式（7）又称为 "链式法则". 若将公式(7)改写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx},$$

其中 $y=f(u),u=\varphi(x)$，**这样就容易理解 "链" 的意义了.**

例 求幂函数 $y = x^{\alpha}$ (α是实数, $x > 0$) 的导数.

解 $y = x^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$ 由 $y = \mathrm{e}^{u}$ 与 $u = \alpha \ln x$ **复合而成,**

故 $(x^{\alpha})' = (\mathrm{e}^{\alpha \ln x})' = \mathrm{e}^{u} \cdot \dfrac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$.

练习 求下列函数的导数:

(i) $\sqrt{1 + x^2}$;　　(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$;

解 运用复合求导法则，分别计算如下：

$$\text{(i)}\ \left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(1+x^2)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{(ii)}\ \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-3/2}(1+x^2)'$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

2.3 高阶导数

当我们研究导函数的变化率时就产生了高阶导数. 如物体运动规律为 $s = s(t)$

它的运动速度是 $v = s'(t)$ ，而速度在时

t 的变化率就是物体在时刻 t 的加速度

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

定义 4 如果 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 可导，则称 $f'(x)$ 在点 x_0 的导数为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的二阶导数，记作 $f''(x_0)$. 此时也称 $f(x)$ 在点 x_0 二阶可导.

如果 $f(x)$ 在区间 I 上每一点都二阶可导，则得到一个定义在 I 上的二阶导函数，记作 $f''(x),\ x \in I$.

仿照上述定义，可以用 f 的 $n-1$ 阶导函数定义 f 的 n 阶导数. 二阶及二阶以上导数称为**高阶导数**.

函数 f 在点 x_0 处的 n 阶导数记作

$$f^{(n)}(x_0),\ \ y^{(n)}\Big|_{x=x_0},\ \ \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\Bigg|_{x=x_0},\ \ \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}\Bigg|_{x=x_0}.$$

n 阶导函数记作

$$f^{(n)}(x)\ (\text{或}\ \ f^{(n)}\ ),\ \ y^{(n)},\ \ \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n},\ \ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f(x).$$

求导运算“$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$”**（看作一个算符）.**

高阶导数运算法则（可用数学归纳法验证）:

加法 $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}.$ (1)

乘法 $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + C_n^1 u^{(n-1)}v^{(1)} + \cdots +$

$$C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + u^{(0)}v^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}, \quad (2)$$

其中 $u^{(0)} = u,\ v^{(0)} = v$.

公式（2）称为莱布尼茨公式.

莱布尼茨(Leibniz,G.W. 1646-1716, 德国)

2.4 微分

若在有限增量公式 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$

中删去

高阶无穷小量项，则得 Δy 关于 Δx 的一个

似式, 这就是“微分”；其中的线性因子 $f'(x_0)$

导数. 所以, 微分和导数是一对相辅相成的概念.

定义 5 设函数 $y=f(x), x\in U(x_0)$. 如果增量

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可以表示成

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x), \qquad (1)$$

其中 A 是与 Δx无关的常数，则称函数 f 在点 x_0 可微，并称 $A\Delta x$ 为 f 在点 x_0 处的微分，记作

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=A\Delta x, \text{ 或 } \mathrm{d}f(x)\big|_{x=x_0}=A\Delta x. \qquad (2)$$

由定义，函数在点 x_0 处的微分与增量只相差一个关于Δx的高阶无穷小量，而 $\mathrm{d}y$是 Δx的线性函数.

更通俗地说， $\mathrm{d}y$ 是 Δy 的线性近似.

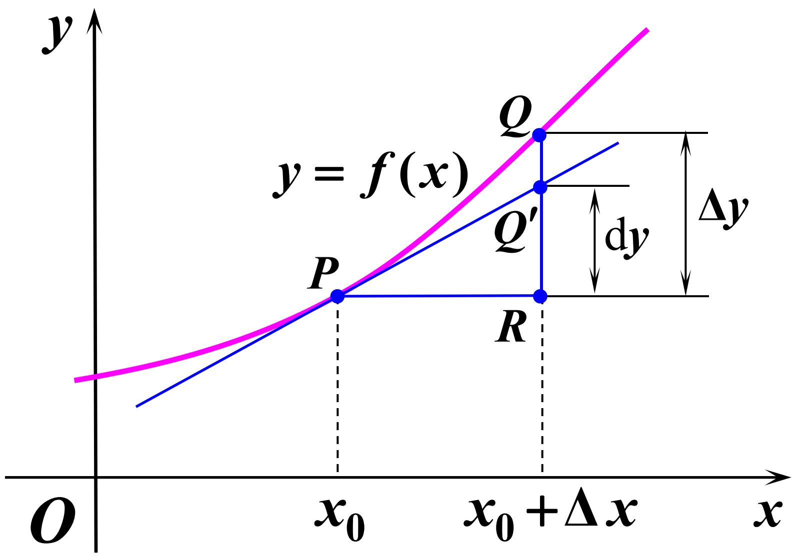
f 在点 x_0 的增量为

$$\Delta y = RQ,$$

而微分是 $\mathrm{d}y = RQ',$

它是点 P 处切线相

应于 Δx 的增量.



当 $|\Delta x|$ 很小时, 两者之差 $|\Delta y - \mathrm{d}y| = Q'Q$ 相比于

$|\Delta x|$ 将是更小的量(高阶无穷小).

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left|\frac{\Delta y - \mathrm{d}y}{\Delta x}\right| = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{Q'Q}{RQ'}\left|f'(x_0)\right| = 0,$$

故若 $f'(x_0) \neq 0$, **则得到** $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{Q'Q}{RQ'} = 0.$ 这说明当

$\Delta x \to 0$ 时, QQ' 还是 RQ' **的高阶无穷小量.**

若函数 f **在区间** I **上每一点都可微, 则称　是** f **上** I

的可微函数. $f(x)$ 在 I 上的微分记为

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x,\quad x \in I, \tag{3}$$

它既依赖于 Δx **, 也与** x **有关.**

习惯上喜欢把Δx写成$\mathrm{d}x$, 于是（3）式可改写成

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x,\ x \in I. \qquad (4)$$

这相当于$y = x$ 的情形，此时显然有 $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x = \Delta x$.

（4）式的写法会带来不少好处，首先可以把导数看

成函数的微分与自变量的微分之商，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x), \qquad (5)$$

所以导数也称为微商. 更多的好处将体现在后面

积分学部分中.

例

$$\mathrm{d}(x^{\alpha}) = \alpha\, x^{\alpha-1}\mathrm{d}x\ ;$$

$$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x\ ;$$

$$\mathrm{d}(a^{x}) = a^{x}\ln a\,\mathrm{d}x\ .$$

微分的运算法则

由导数与微分的关系,可方便得出微分运算法则:

1. $\mathrm{d}(u(x) \pm v(x)) = \mathrm{d}u(x) \pm \mathrm{d}v(x)$;

2. $\mathrm{d}(u(x)v(x)) = v(x)\mathrm{d}u(x) + u(x)\mathrm{d}v(x)$;

3. $\mathrm{d}\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right) = \dfrac{v(x)\mathrm{d}u(x) - u(x)\mathrm{d}v(x)}{v^2(x)}$;

4. $\mathrm{d}(f \circ g(x)) = f'(u)g'(x)\mathrm{d}x$，其中 $u = g(x)$.

由于 $\mathrm{d}u = g'(x)\mathrm{d}x$，故运算法则 4 又可以写成

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u\,.$$

它在形式上与(4)式完全一样， 不管 u 是自变量还是中间变量（另一个变量的可微函数），上式都成立. 这个性质称为“一阶微分形式不变性”.

3、偏导数的定义及其计算法

定义　设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内有定义，当y固定在y_0而x在x_0处有增量Δx时，相应地函数有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$存在，则称此极限为函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处对$x$的偏导数，记为

同理可定义函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处对y的偏导数，为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

记为$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$z_y\big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$或$f_y(x_0,y_0)$.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad z_x\big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\text{或}f_x(x_0,y_0).$$

如果函数$z=f(x,y)$在区域 D内任一点(x,y)处对x的偏导数都存在，那么这个偏导数就是x、y的函数，它就称为函数$z=f(x,y)$对自变量x的偏导数，

记作$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial x}$，$z_x$或$f_x(x,y)$.

同理可以定义函数$z=f(x,y)$对自变量y的偏导数，记作$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，$z_y$或$f_y(x,y)$.

偏导数的概念可以推广到二元以上函数

如 $u=f(x,y,z)$ 在 (x,y,z) 处

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x},$$

$$f_y(x,y,z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y},$$

$$f_z(x,y,z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}.$$

例 1　求 $z=x^2+3xy+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数.

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+3y$;　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=3x+2y$.

$$\therefore \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=2\times1+3\times2=8,$$

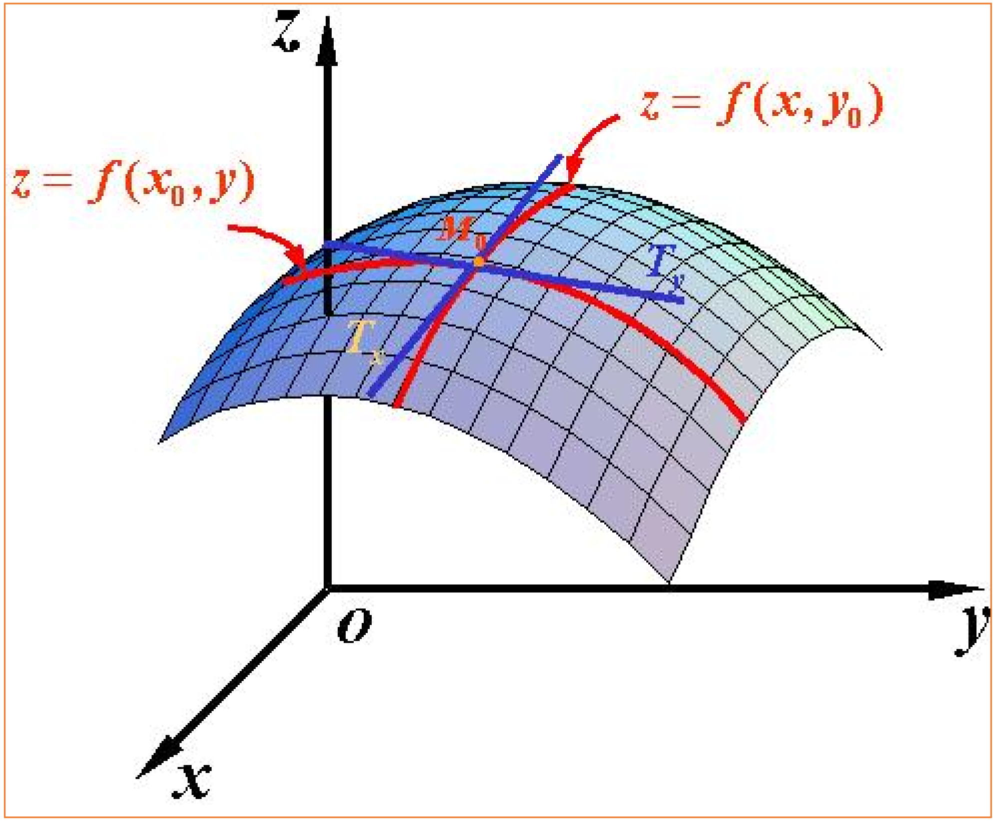
$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=3\times1+2\times2=7.$$

几何意义

偏导数的几何意义

设 $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 为曲面 $z = f(x, y)$ 上一点，

如图



几何意义:

偏导数$f_x(x_0,y_0)$就是曲面被平面$y=y_0$所截得的曲线在点M_0处的切线M_0T_x对x轴的斜率.

偏导数$f_y(x_0,y_0)$就是曲面被平面$x=x_0$所截得的曲线在点M_0处的切线M_0T_y对y轴的斜率.

高阶偏导数

CDA数据分析师 CERTIFIED DATA ANALYST

函数$z=f(x,y)$的二阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$$

纯偏导

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)$$

混合偏导

定义：二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

例 5 设 $z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1$，

求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}$.

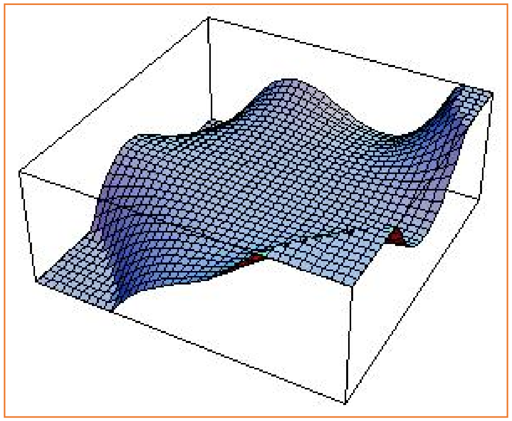
解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - 3y^3 - y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y - 9xy^2 - x$;

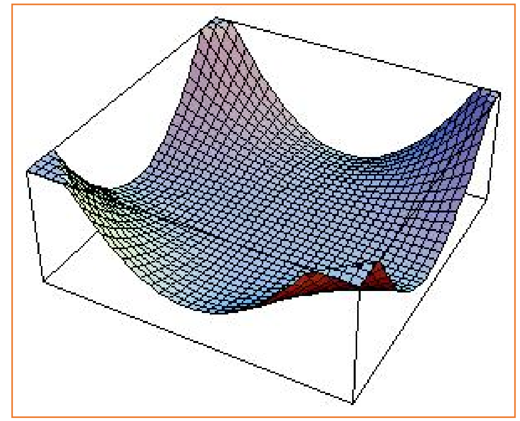
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6y^2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 - 18xy$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y - 9y^2 - 1$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2y - 9y^2 - 1$.

观察上例中原函数、偏导函数与二阶混合偏导函数图象间的关系：

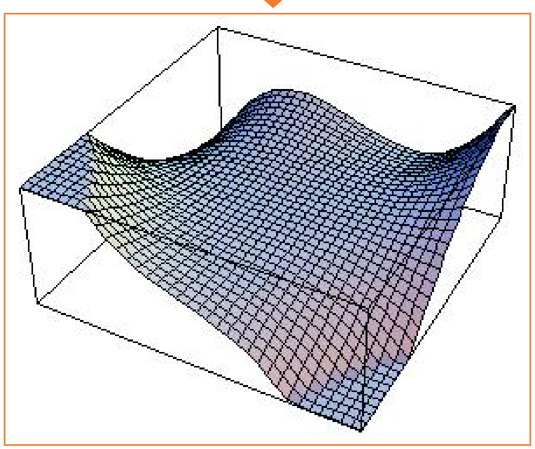
原函数图形

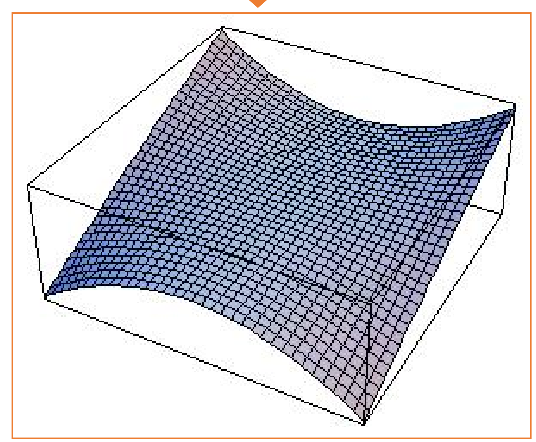




偏导函数图形

偏导函数图形





二阶混合偏导函数图形

补充：多元函数链式求导

以二元复合函数为例：

设 $z = \ln\left(u^2 + v\right)$，而 $\mathbf{u} = \mathbf{e}^{\mathbf{x}}$，$\mathbf{v} = \mathbf{x}^2$，**求** $\frac{\partial z}{\partial x}$

解： $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+v}e^x + \frac{1}{u^2+v}2x = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+x^2} + \frac{2x}{e^{2x}+x^2}$

思考：用此方法计算 $y = x^x$

补充：隐函数求导

对于方程 $F(x, y) = 0$ ：

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

例：设 $F(x, y) = y - x - \frac{1}{2}siny = 0$ ，求 $f'(x)$

解： $f'(x) = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}cosy} = \frac{2}{2-cosy}$

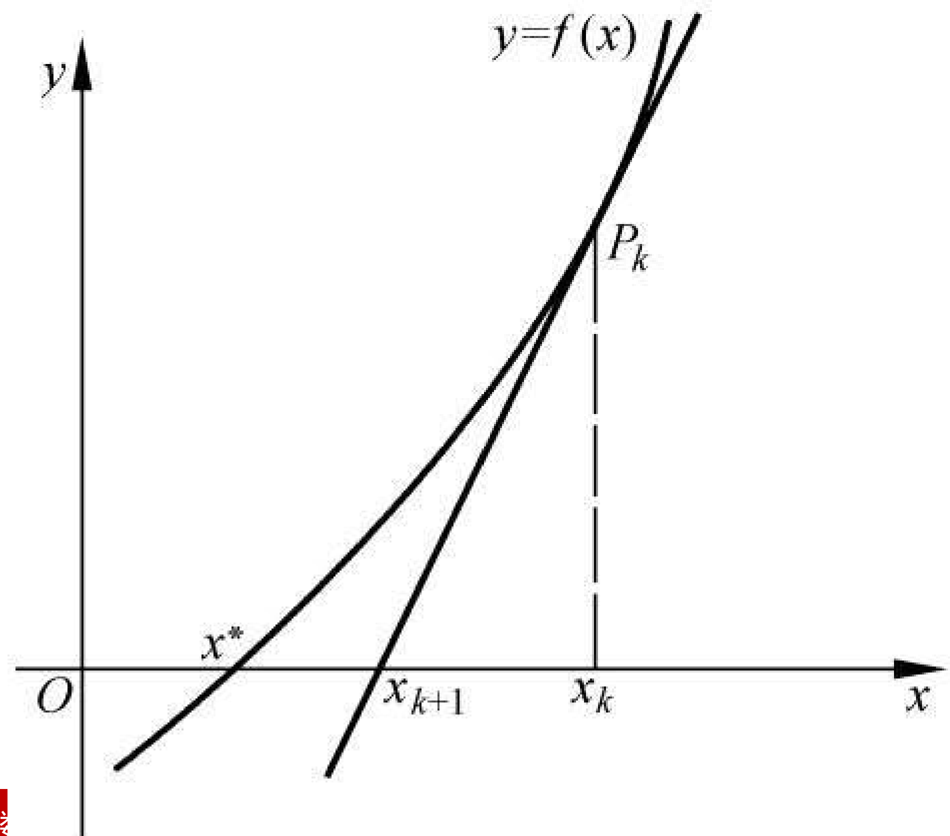
四、牛顿法与梯度下降

牛顿法（Newton's method）

牛顿法是一种在实数域和复数域上近似求解方程的方法。方法是使用函数$f(x)$的泰勒级数的前面几项来寻找方程$f(x) = 0$的根。牛顿法最大的特点就在于它的收敛速度很快。

假设我们可以计算出右图函数的点x_k的函数值与导数值，则可用如下公式来近似计算出方程的根x^*的近似值x_{k+1}

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



梯度下降法

梯度下降法,又称最速下降法。1847年由著名的数学家柯西Cauchy给出。

基本思想

假设我们爬山，如果想最快的上到山顶，那么我们应该从山势最陡的地方上山。也就是山势变化最快的地方上山

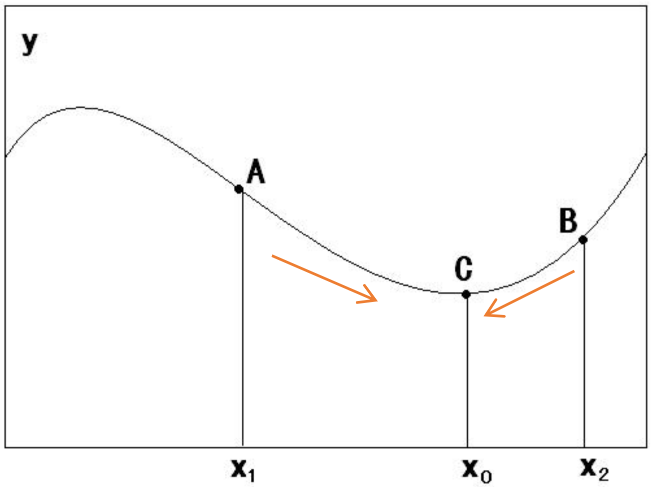
同样，如果从任意一点出发，需要最快搜索到函数最大值，那么我们也应该从函数变化最快的方向搜索。

函数变化最快的方向是什么呢？　　函数的梯度。

如果函数为一元函数，梯度就是导数 $\nabla f(x) = f'(x)$

如果为多元函数，梯度定义为： $\nabla f(x_1, \cdots) = \frac{\partial y}{\partial x_1} i + \frac{\partial y}{\partial x_2} j + \cdots$

如果需要找的是函数极小点，那么应该从负梯度的方向寻找，该方法称之为梯度下降法。



要搜索极小值C点，在A点必须向x增加方向搜索，此时与A点梯度方向相反；在B点必须向x减小方向搜索，此时与B点梯度方向相反。总之，搜索极小值，必须向负梯度方向搜索。

梯度下降法-步骤

假设函数 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 只有一个极小点。
初始给定参数为$X_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0})$。从这个点如何搜索才能找到原函数的极小值点？

方法：

1. 首先设定一个较小的正数η，ε;
2. 求当前位置处的各个偏导数：

$$f'(x_{m0}) = \frac{\partial y}{\partial x_m}(x_{m0}), m = 1 \sim n$$

3. 修改当前函数的参数值，公式如下：

$$x_m^{'} = x_m - \eta \cdot \frac{\partial y}{\partial x_m}(x_{m0}), m = 1 \sim n$$

4. 如果参数变化量小于ε，退出；否则返回2。

例 任给一个初始出发点，设为x_0=-4，求函数$y=x^2/2-2x$的极小值。

(1) 首先给定两个参数：$\eta = 0.9, \varepsilon = 0.01$

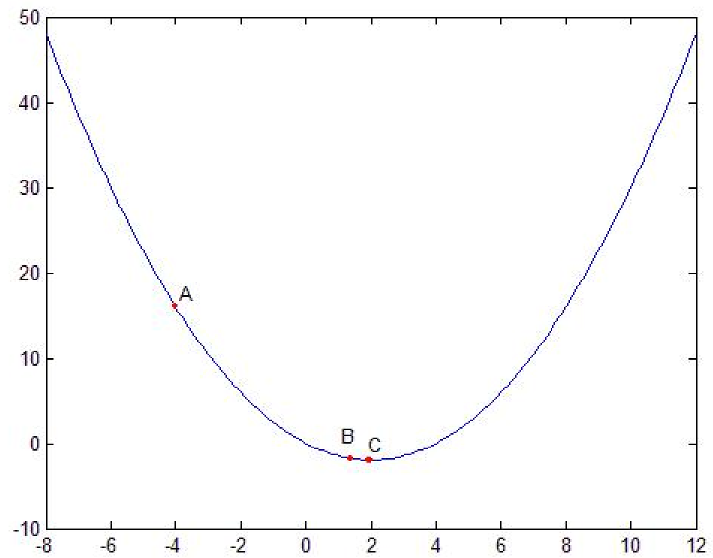
(2) 计算导数：$\frac{dy}{dx} = x - 2$

(3) 计算当前导数值：$y' = -6$

(4) 修改当前参数：

$$x' = x - \eta \frac{dy}{dx} = -4 - 0.9 * (-6) = 1.4$$

$$\Delta x = -0.9 * (-6) = 5.4$$



(5) 计算当前导数值：$y' = -0.6$

(6) 修改当前参数：$x' = x - \eta \frac{dy}{dx} = 1.4 - 0.9 * (-0.6) = 1.94$

$$\Delta x = -0.9 * (-0.6) = 0.54$$

(7) 计算当前导数值：$y' = -0.06$

(8) 修改当前参数：

$$x' = x - \eta \frac{dy}{dx} = 1.94 - 0.9 * (-0.06) = 1.994$$

$$\Delta x = -0.9 * (-0.06) = 0.054$$

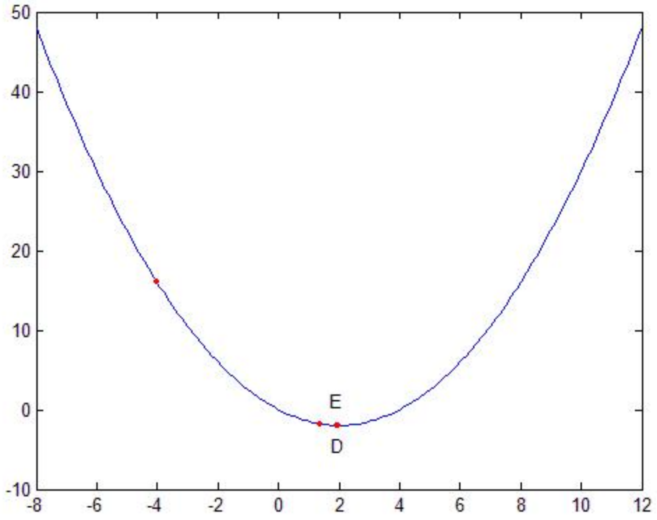
(9) 计算当前导数值：$y' = -0.006$

(10) 修改当前参数：

$$x' = x - \eta \frac{dy}{dx} = 1.994 - 0.9 * (-0.006) = 1.9994$$

$$\Delta x = -0.9 * (-0.006) = 0.0054 < \varepsilon$$

(11) 此时变化量满足终止条件，终止。



第四章

微分和导数的应用

一、洛必达法则

一、$x \to a$时的$\dfrac{0}{0}$型未定式

二、当$x \to \infty$时的$\dfrac{0}{0}$型未定式及当$x \to a$

或$x \to \infty$时的$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式

三、$0 \cdot \infty$、$\infty - \infty$、0^0、1^∞、∞^0型未定式

一、$x \to a$ 时的 $\frac{0}{0}$ 型未定式解法：洛必达法则

定义 如果当 $x \to a$ (或 $x \to \infty$) 时，两个函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 都趋于零或都趋于无穷大，那末极限 $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \frac{f(x)}{F(x)}$ 可能存在、也可能不存在．通常把这种极限称为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式.

例如，$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}, \left(\frac{0}{0}\right)$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}, \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

定理 设

(1) 当 $x \to a$ 时,函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零;

(2) 在 a 点的某去心邻域内,$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x) \neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)} = A$ (或为∞);

那末 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$.

定义 这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为**洛必达法则**.

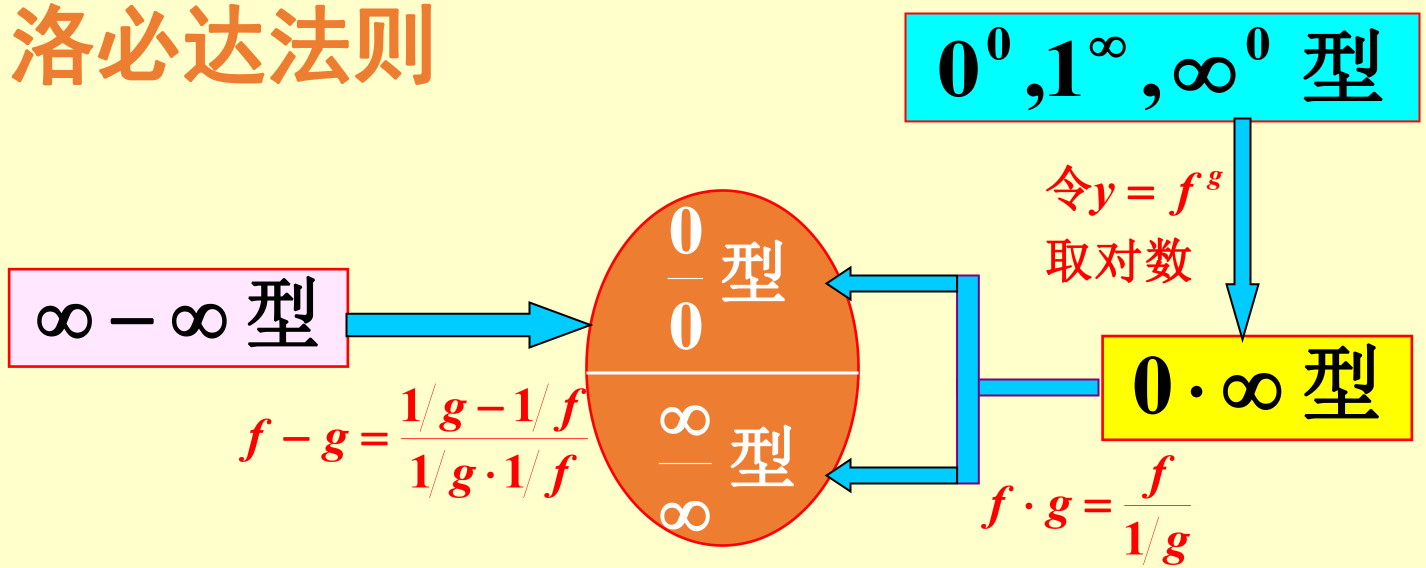
例 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{3}{2}$.

注意： 上式中的 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}$ 已不是未定式，不能再对它应用洛必达法则，否则会导致错误结果.

在多次使用洛必达法则时，一定要注意验证是否满足条件.

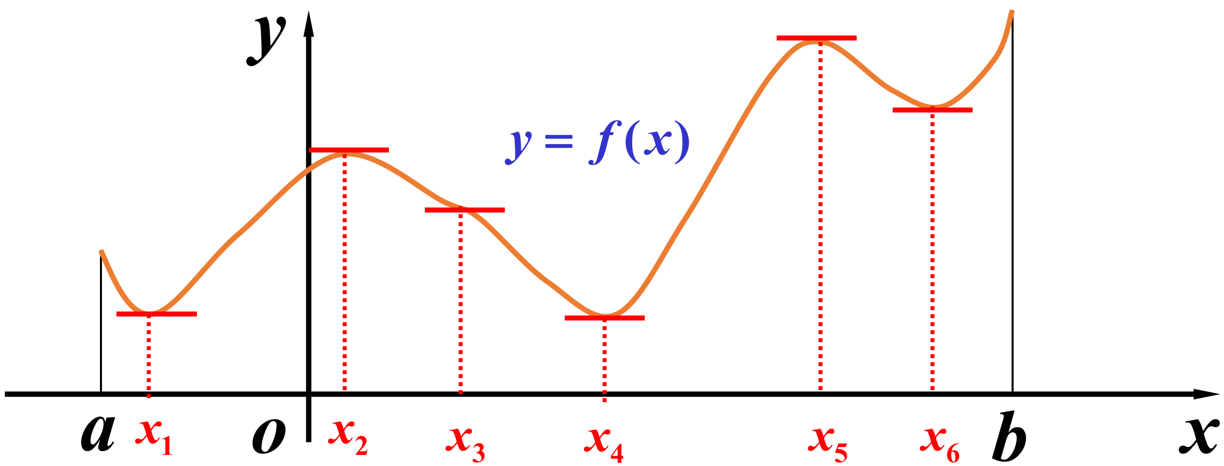
洛必达法则

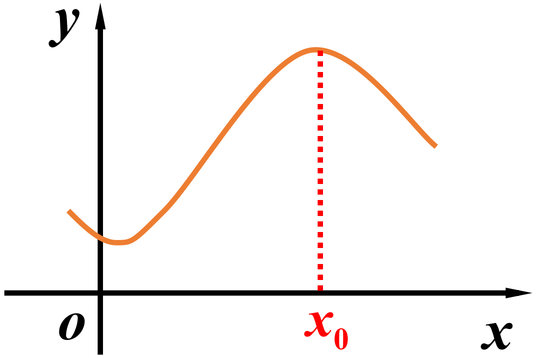


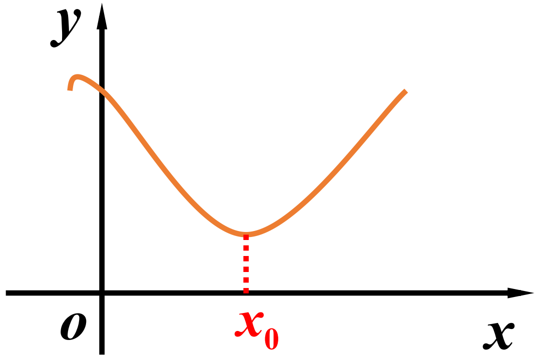
$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型
令$y = f^g$
取对数
$0 \cdot \infty$ 型
$\frac{0}{0}$ 型
$\frac{\infty}{\infty}$ 型
$\infty - \infty$ 型
$f - g = \frac{1/g - 1/f}{1/g \cdot 1/f}$
$f \cdot g = \frac{f}{1/g}$

二、函数的极值

1．函数极值的定义







定义 设函数$f(x)$在区间(a,b)内有定义, x_0是(a,b)内的一个点,

如果存在着点x_0的一个邻域,对于这邻域内的任何点x,除了点x_0外, $f(x) < f(x_0)$均成立,就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值;

如果存在着点x_0的一个邻域,对于这邻域内的任何点x,除了点x_0外, $f(x) > f(x_0)$均成立,就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极小值.

函数的极大值与极小值统称为极值,使函数取得极值的点称为极值点.

2．函数极值的求法

定理1（必要条件） 设 $f(x)$ 在点 x_0 处具有导数，且在 x_0 处取得极值，那么必定 $f'(x_0)=0$.

定义 使导数为零的点(即方程 $f'(x)=0$ 的实根)叫做函数 $f(x)$ 的驻点.

注意: 可导函数 $f(x)$ 的极值点必定是它的驻点，但函数的驻点却不一定是极值点.

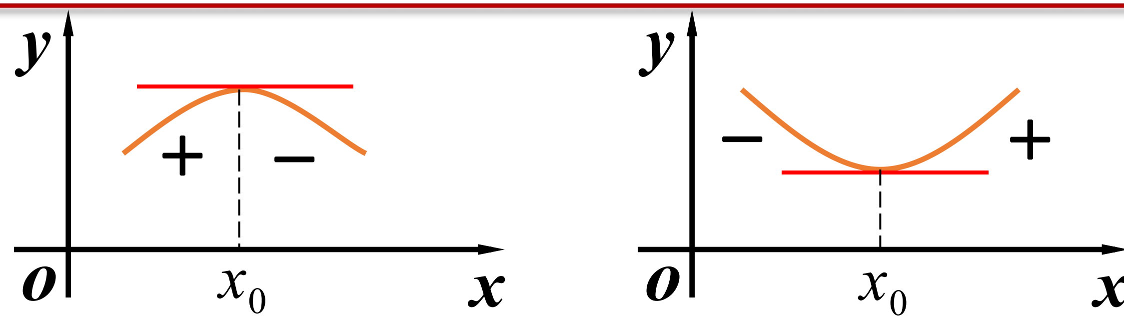
例如, $y=x^3,\ y'\big|_{x=0}=0$, 但 $x=0$ 不是极值点.

定理2(第一充分条件)

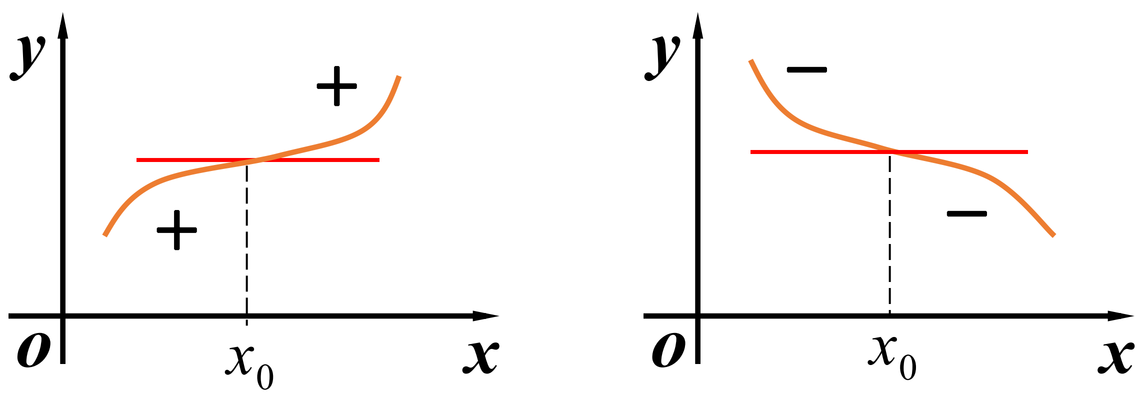
(1) 如果$x \in (x_0-\delta, x_0)$,有$f'(x)>0$;而$x \in (x_0, x_0+\delta)$,
有$f'(x)<0$，则$f(x)$在x_0处取得极大值.

(2) 如果$x \in (x_0-\delta, x_0)$,有$f'(x)<0$;而$x \in (x_0, x_0+\delta)$
有$f'(x)>0$，则$f(x)$在x_0处取得极小值.

(3) 如果当$x \in (x_0-\delta, x_0)$及$x \in (x_0, x_0+\delta)$时，$f'(x)$
符号相同, 则$f(x)$在x_0处无极值.



(是极值点情形)



(不是极值点情形)

例1 求出函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值.

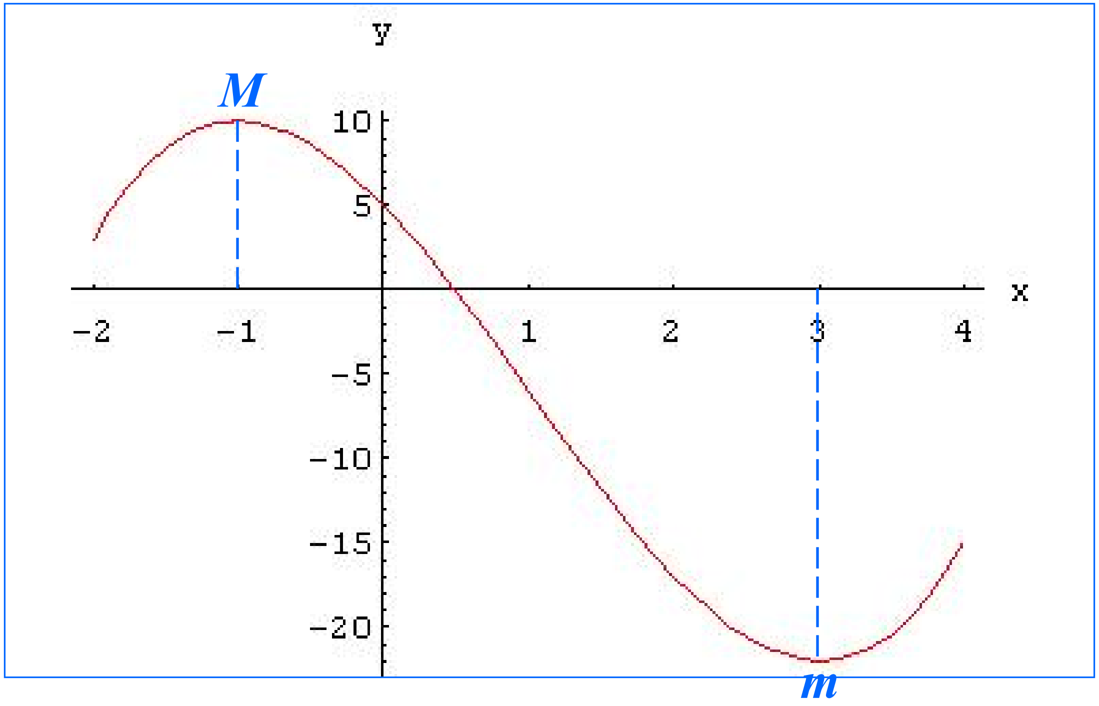
解 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-1, x_2=3$. **列表讨论**

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	极大值	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$

极大值 $f(-1)=10$，　极小值 $f(3)=-22$.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$$图形如下



定理3（第二充分条件） 设$f(x)$在x_0处具有二阶导数，且$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，那末

(1) 当$f''(x_0)<0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极大值；

(2) 当$f''(x_0)>0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极小值.

例2 求出函数 $f(x)=x^3+3x^2-24x-20$ 的极值.

解 $f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$

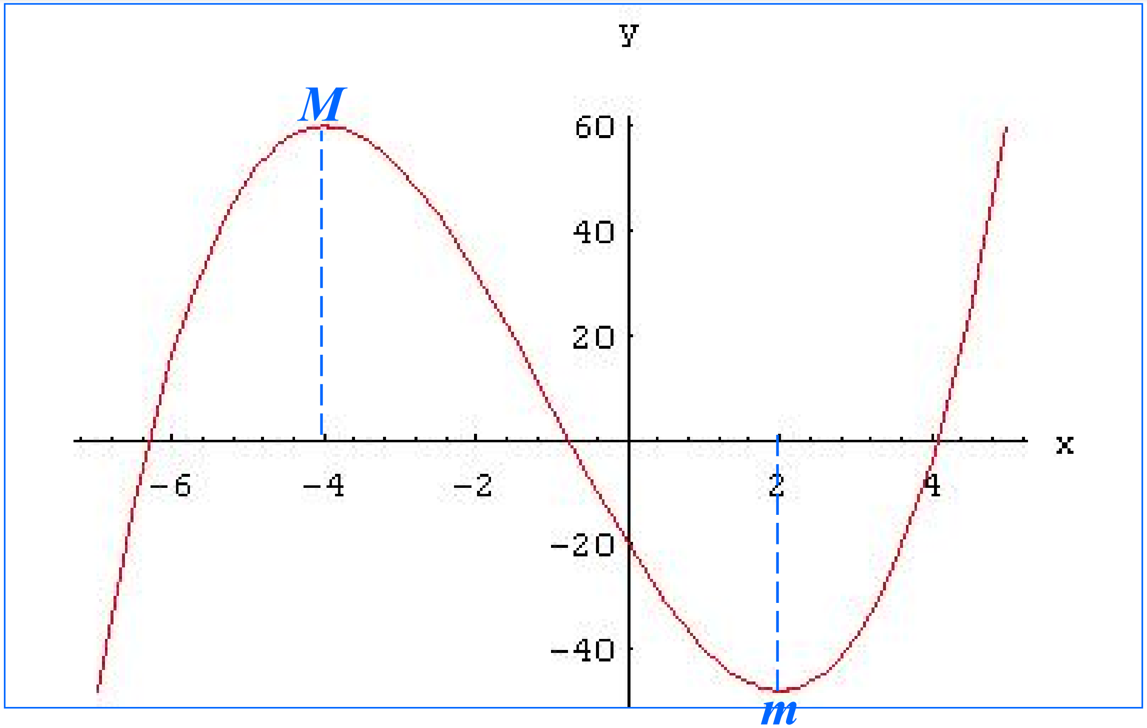
令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-4$, $x_2=2$.

$\because$ $f''(x)=6x+6$,

$\because$ $f''(-4)=-18<0$, 故极大值 $f(-4)=60$,

$f''(2)=18>0$, 故极小值 $f(2)=-48$.

$f(x)=x^3+3x^2-24x-20$ 图形如下



注意：$f''(x_0)=0$时，$f(x)$在点x_0处不一定取极值，仍用定理2.

注意:**函数的不可导点,也可能是函数的极值点.**

例3 求出函数 $f(x)=1-(x-2)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

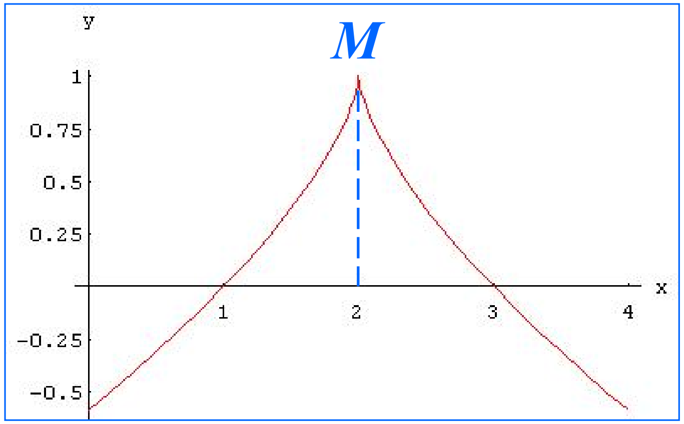
解 $f'(x)=-\dfrac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}} \quad (x\neq 2)$

当$x=2$时, $f'(x)$不存在. 但函数$f(x)$在该点连续.

当$x<2$时, $f'(x)>0$;

当$x>2$时, $f'(x)<0$.

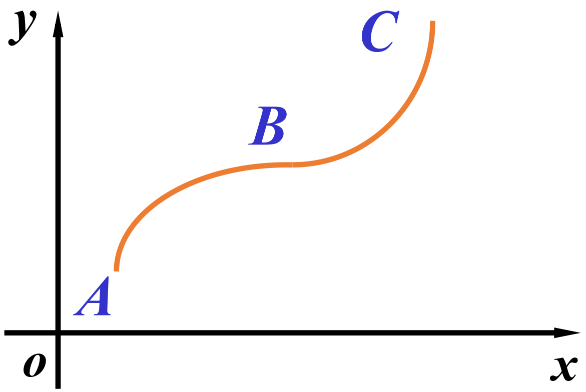
$\therefore f(2)=1$为$f(x)$的极大值.

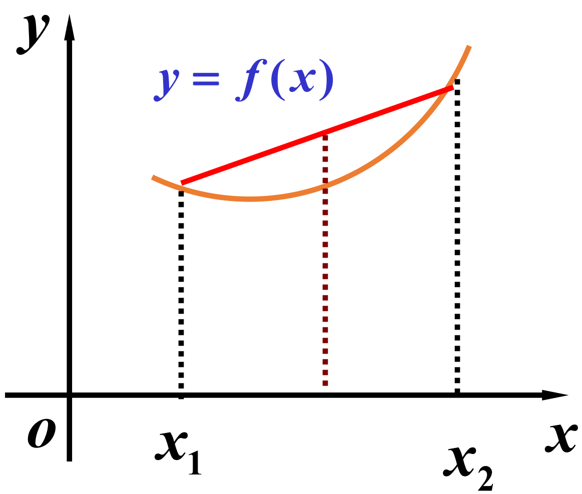


三、曲线的凹凸性与拐点

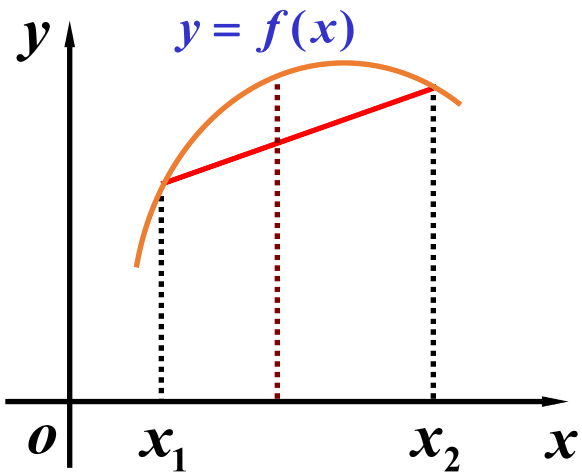
1．曲线的凹凸性(concave or convex)

问题:如何研究曲线的弯曲方向?





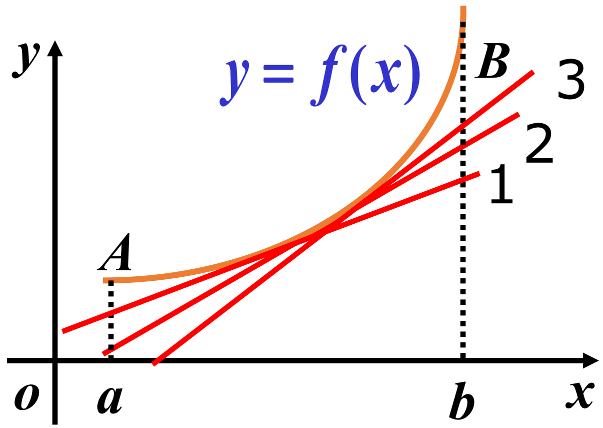
图形上任意弧段位于所张弦的下方



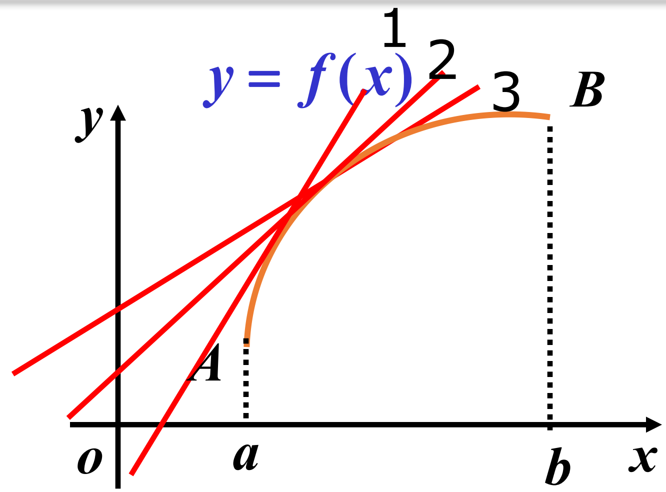
图形上任意弧段位于所张弦的上方

1. 凹凸性的判定

凸



$f'(x)$ 递增　　$y'' > 0$



凹

$f'(x)$ 递减　　$y'' < 0$

定理1

如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有一阶和二阶导数，若在 (a, b) 内

(1) $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凸的；

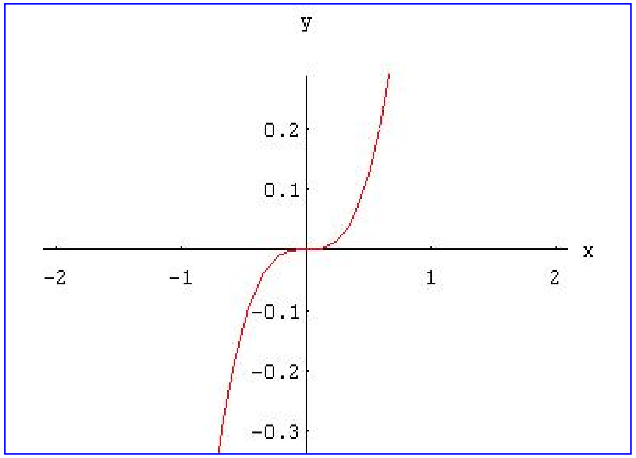
(2) $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凹的．

例1 判断曲线 $y = x^3$ 的凹凸性.

解 $\because\ y' = 3x^2,\quad y'' = 6x,$

当$x < 0$时，$\quad y'' < 0,$

$\therefore$ 曲线 在$(-\infty,0]$为凹的；



当$x > 0$时，$\quad y'' > 0,\quad \therefore$ 曲线 在$[0,+\infty)$为凸的；

注意到， 点$(0,0)$是曲线由凹变凸的分界 点.

2. 曲线的拐点

CDA数据分析师 CERTIFIED DATA ANALYST

① 拐点的定义

连续曲线上凹凸的分界点称为**曲线的拐点.**

注意:**拐点处的切线必在拐点处穿过曲线.**

② 拐点的求法

定理 2 如果 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内存在二阶导数, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点的必要条件是 $f''(x_0)=0$.

方法1：设函数$f(x)$在x_0的邻域内二阶可导,且

$$f''(x_0)=0,$$

(1) x_0两近旁$f''(x)$变号,点$(x_0,f(x_0))$即为拐点;

(2) x_0两近旁$f''(x)$不变号,点$(x_0,f(x_0))$不是拐点.

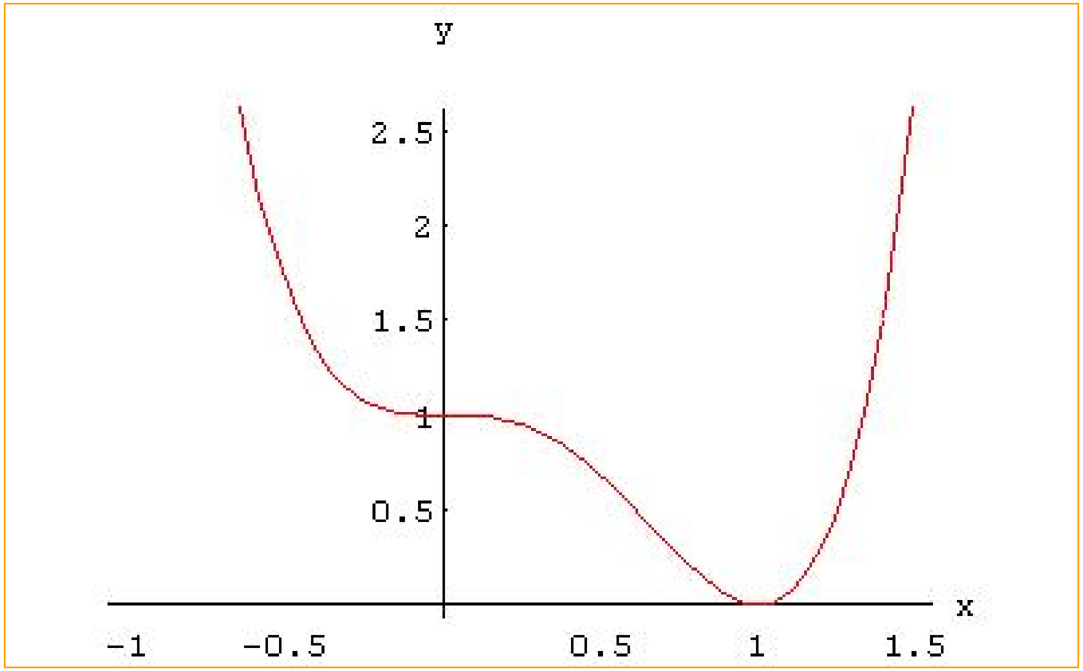
例 求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的拐点及凹、凸的区间.

解 $\because D:(-\infty,+\infty)$

$$y'=12x^3-12x^2, \qquad y''=36x(x-\frac{2}{3}).$$

令 $y''=0$, 得 $x_1=0,\ x_2=\frac{2}{3}$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	凹的	拐点 $(0,1)$	凸的	拐点 $(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$	凹的



凹凸区间为$(-\infty,0]$， $[0,\frac{2}{3}]$， $[\frac{2}{3},+\infty)$.

商业应用问题举例

例 1 某厂每批生产 A 商品 X 台的费用为 $C(X)=5X+200$（万元），得到的收入为 $R(X)=10X-0.01X^2$（万元），问每批生产多少台，才能使利润最大？

商业应用问题举例

例 1 某厂每批生产 A 商品 X 台的费用为$C(X)=5X+200$（万元），得到的收入为$R(X)=10X-0.01X^2$（万元），问每批生产多少台，才能使利润最大？

解： 设利润为$L(X)$,则

$$L(X)=R(X)-C(X)=5X-0.01X^2-200$$

$$L'(X)=5-0.02X$$

令$L'(X)=0$，解得$X=250$(台)，由于

$$L''(X)=-0.02<0$$

所以$L(250)=425$(万元)为极大值，也就是最大 值.

多元函数极值问题

第一步：求出所有驻点。

第二步：构造黑塞矩阵

若矩阵正定，原函数取极小值。
若矩阵负定，原函数取极大值。

若矩阵半正定或半负定，无法判断。

若矩阵不定，则不是极值点。

$$H(f)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

例：下列2个函数驻点都是(0, 0)

(1) 函数 $z = x^2 + y^2$，对应黑塞矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 正定，

则(0, 0)为极小值点。

(2) 函数 $z = x^2 + xy$，对应黑塞矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 不定，

则(0, 0)不是极值点。

例题

求三元函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$ 的极值。

解：因为 $\frac{\partial f}{\partial x}=2x+2,\frac{\partial f}{\partial y}=2y+4,\frac{\partial f}{\partial z}=2z-6$

故该三元函数的驻点是 $(-1,-2,3)$

又因为 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2,\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=0,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=0$

故有：$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

因为A是正定矩阵，故 $(-1,-2,3)$ 是极小值点，且极小值 $f(-1,-2,3)=-14$

三、泰勒中值定理

泰勒(Taylor)中值定理 如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数，则当 x 在 (a,b) 内时，$f(x)$ 可以表示为 $(x-x_0)$ 的一个 n 次多项式与一个余项 $R_n(x)$ 之和：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ 在 x_0 与 x 之间).

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

称为$f(x)$按$(x-x_0)$的幂展开的 n 次近似多项式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

称为$f(x)$按$(x-x_0)$的幂展开的 n 阶泰勒公式

常用函数的麦克劳林公式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

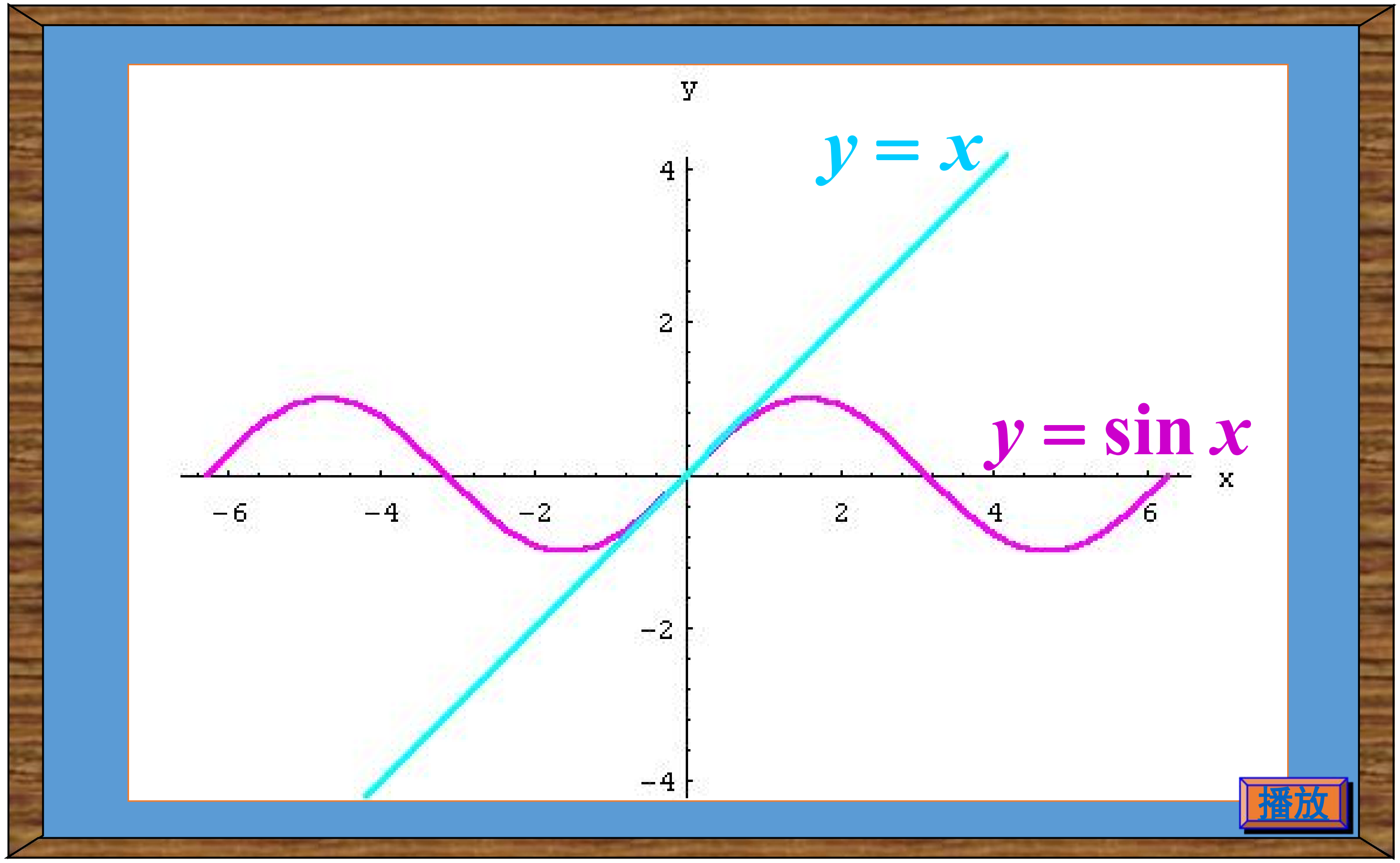
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

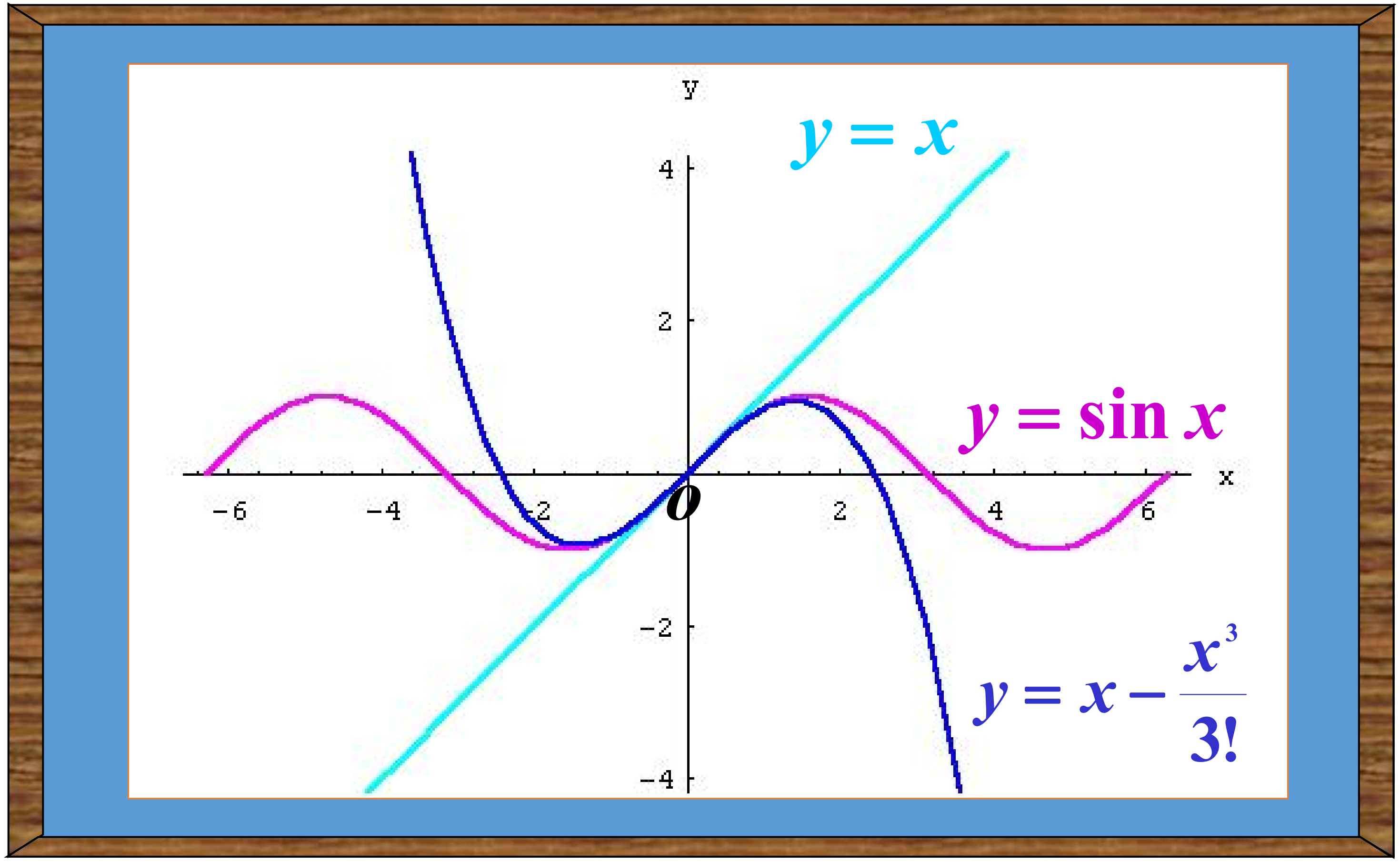
$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

1. Taylor 公式在近似计算中的应用;

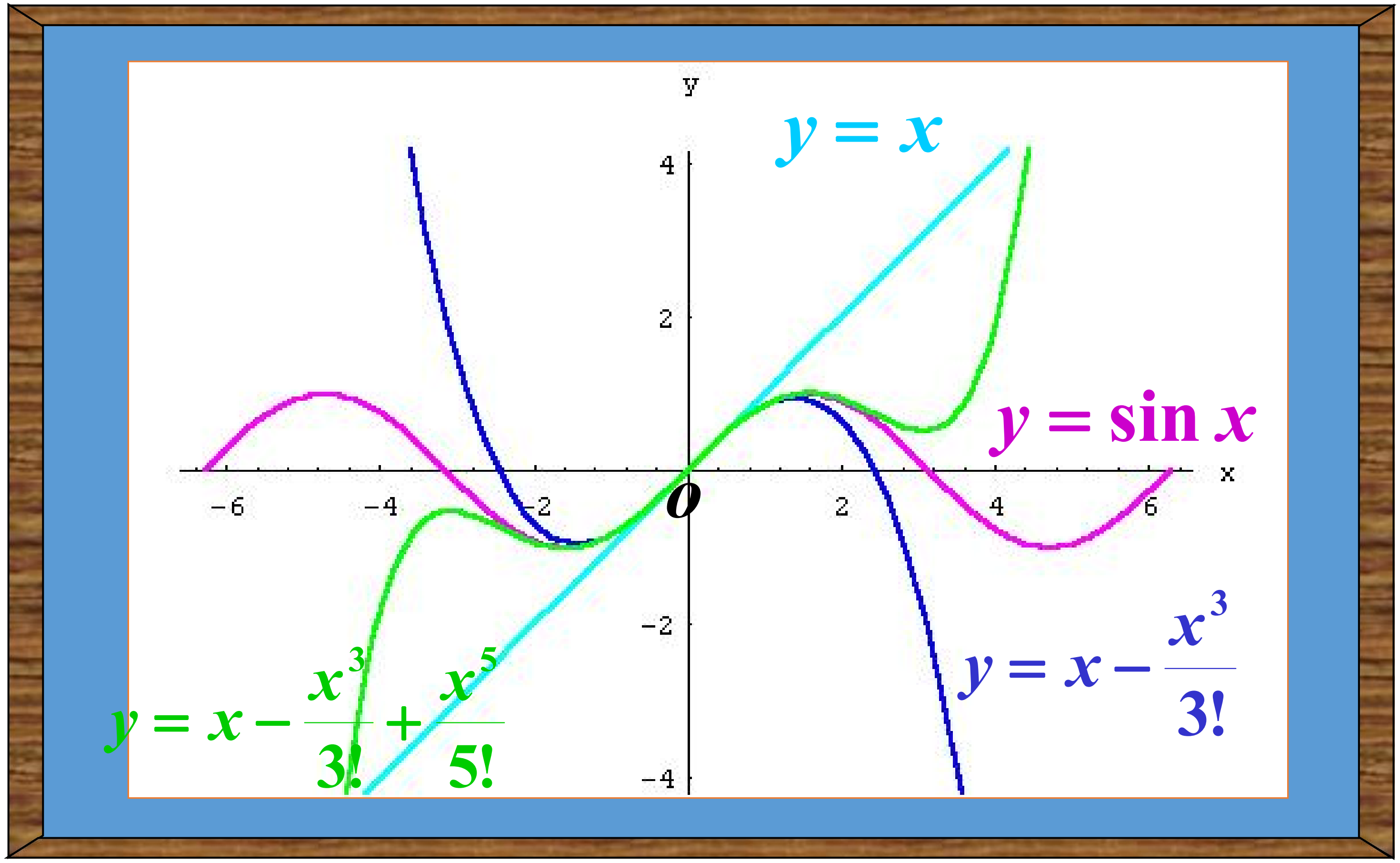


CDA数据分析师 CERTIFIED DATA ANALYST

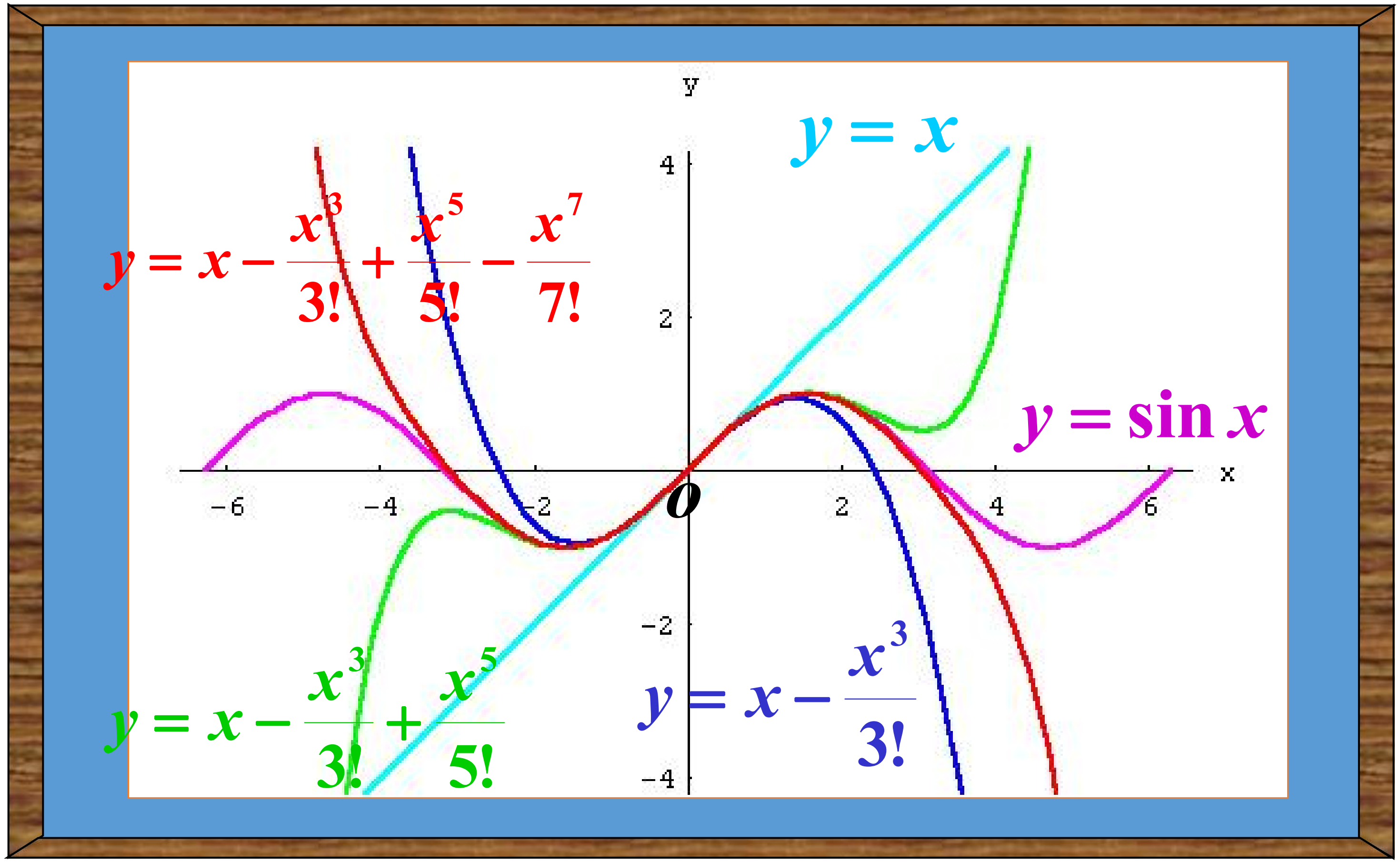
1. Taylor 公式在近似计算中的应用;



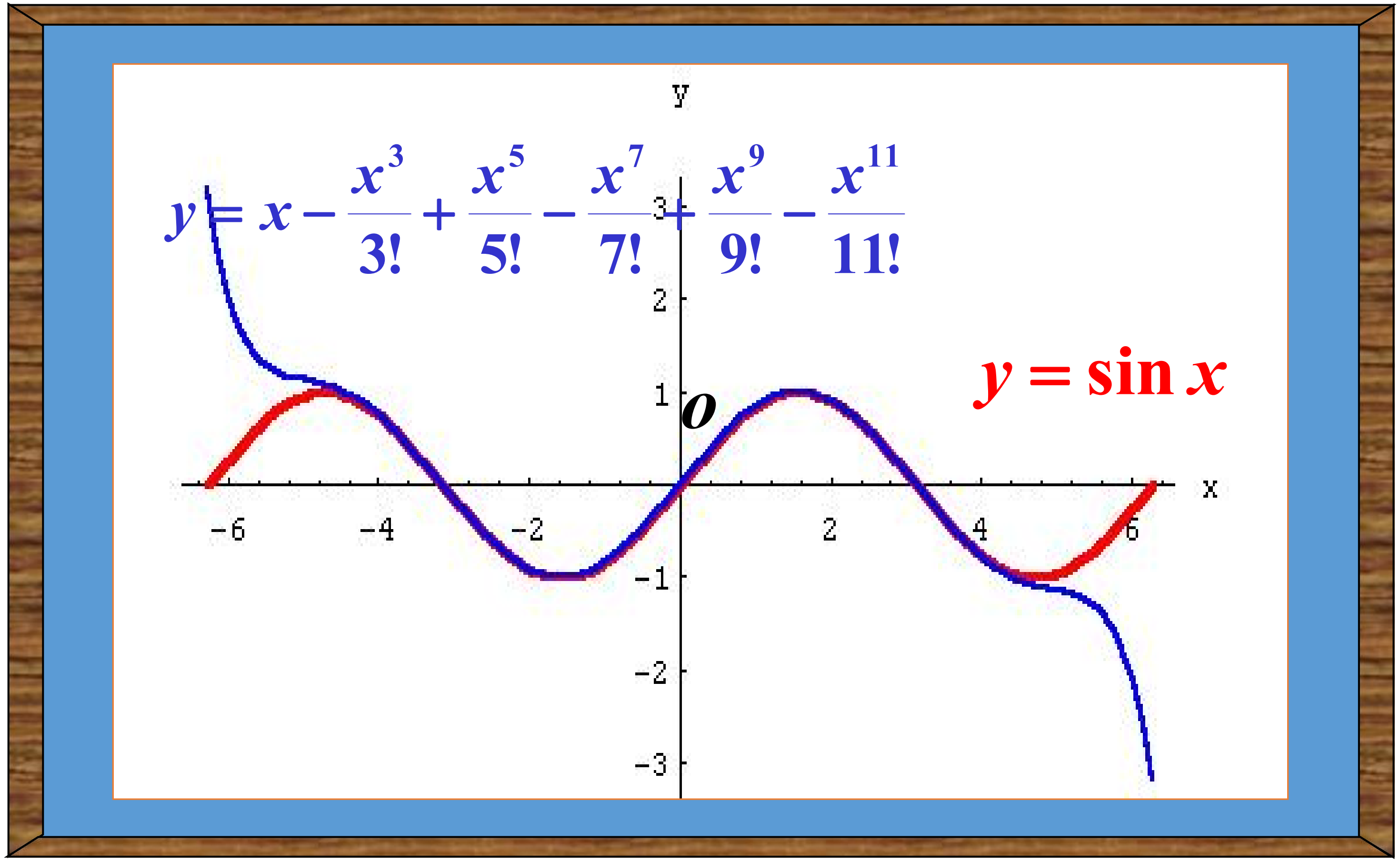
1. Taylor 公式在近似计算中的应用;



1. Taylor 公式在近似计算中的应用;



1. Taylor 公式在近似计算中的应用;



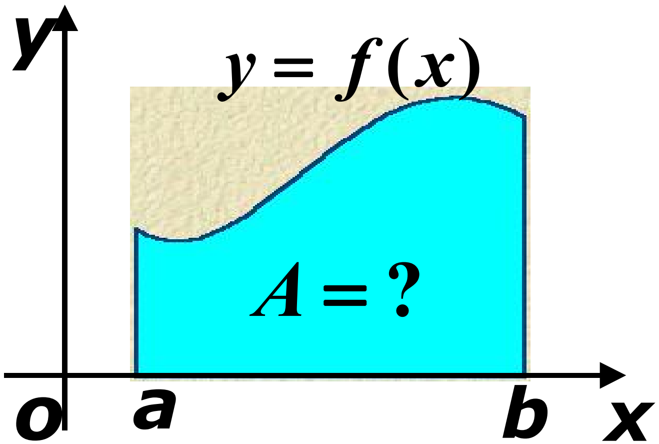
第五章

定积分

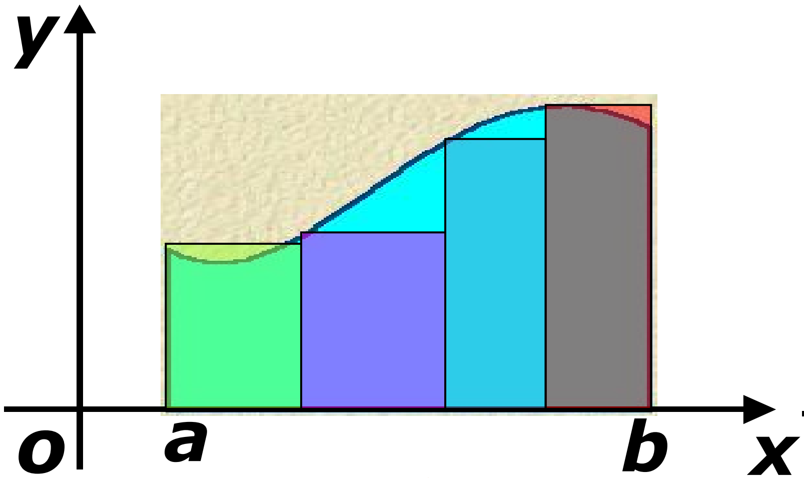
一、问题的提出

实例1　(求曲边梯形的面积)

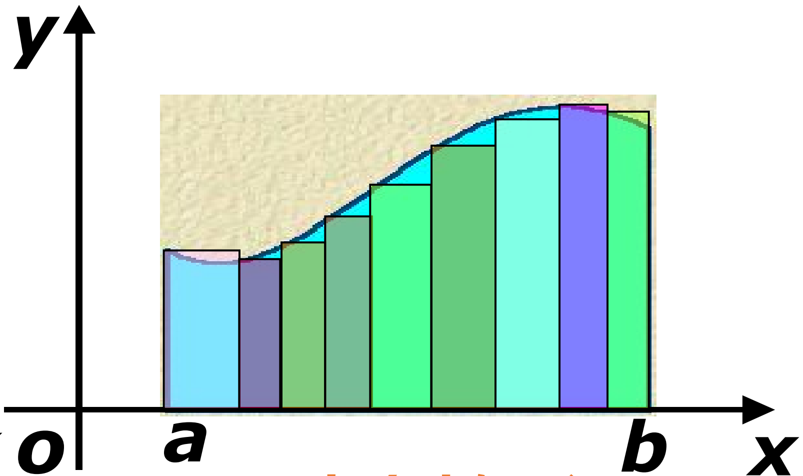
曲边梯形由连续曲线 $y=f(x)(f(x)\geq 0)$、x轴与两条直线$x=a$、$x=b$所围成.



用矩形面积近似取代曲边梯形面积



（四个小矩形）



（九个小矩形）

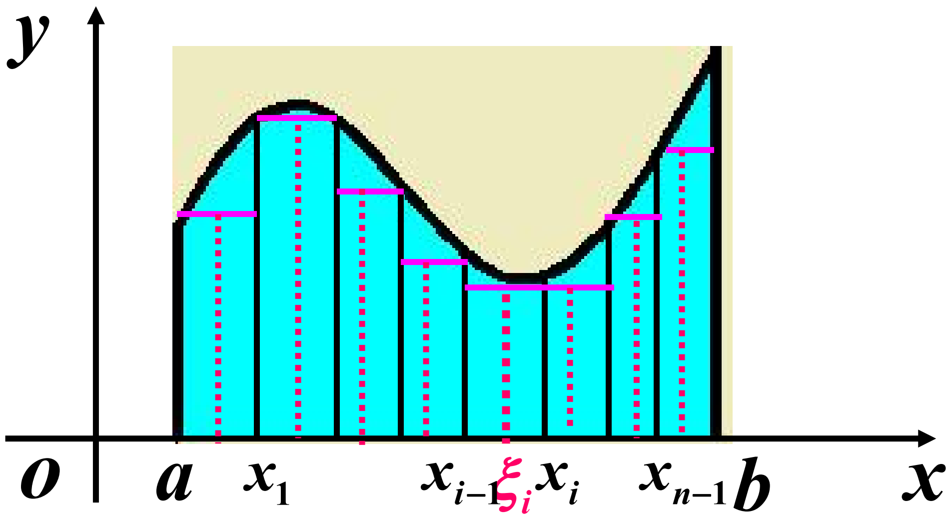
显然，小矩形越多，矩形面积和越接近曲边梯形面积.

曲边梯形如图所示， 在区间$[a,b]$内插入若干个分点，$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$，

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$，

长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$；

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i，



以$[x_{i-1}, x_i]$为底，$f(\xi_i)$为高的小矩形面积为

$$A_i = f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形面积的近似值为

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

当分割无限加细,即小区间的最大长度

$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n\}$

趋近于零 $(\lambda \to 0)$ 时,

曲边梯形面积为 $A = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

二、定积分的定义

定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，各小区间的长度依次为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$(i = 1,2,\cdots)$，在各小区间上任取一点 ξ_i（$\xi_i \in \Delta x_i$），作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i = 1,2,\cdots)$，

并作和 $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，如果不论对 $[a,b]$

怎样的分法， 也不论在小区间$[x_{i-1}, x_i]$上

点ξ_i怎样的取法，只要当$\lambda \to 0$时，和S总趋于

确定的极限I， 我们称这个极限I为函数$f(x)$

在区间$[a,b]$上的**定积分**， 记为

积分上限

$$\int_a^b \boxed{\underline{f(x)}\,\mathrm{d}x} = I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分和

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

$[a,b]$ ← 积分区间

注意：

（1）积分值仅与被积函数及积分区间有关，

而与积分变量的字母无关.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

（2）定义中区间的分法和ξ_i的取法是任意的.

（3）当函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分存在时，

称$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

三、存在定理

定理1 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，

则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

定理2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，

且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在

区间 $[a,b]$ 上可积.

对定积分的补充规定：

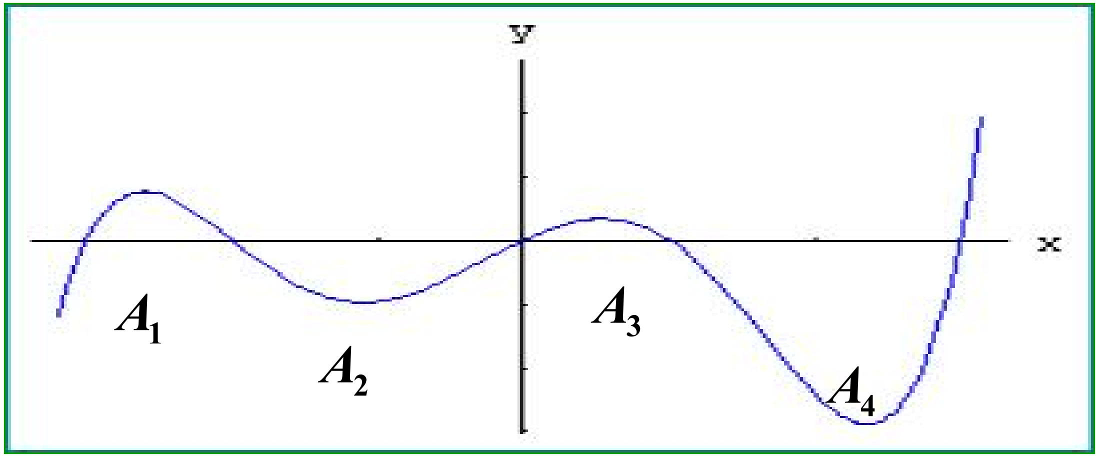
（1）当$a = b$时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$；

（2）当$a > b$时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

四、定积分的几何意义

$f(x) > 0, \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$ 曲边梯形的面积

$f(x) < 0, \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A$ 曲边梯形的面积的负值

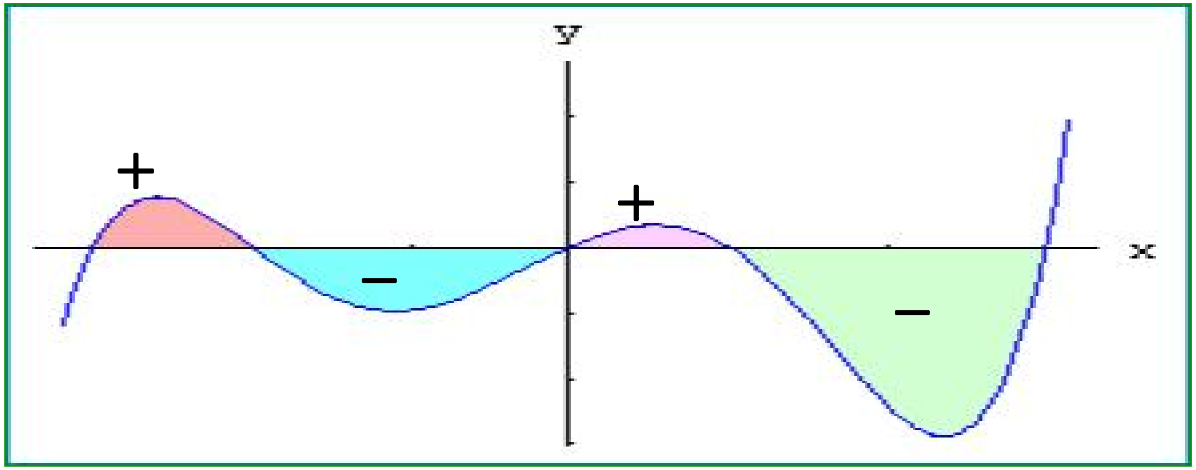


$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

定积分的几何意义

几何意义：

它是介于 x 轴、函数 $f(x)$ 的图形及两条直线 $x=a, x=b$ 之间的各部分面积的代数和. 在 x 轴上方的面积取正号；在 x 轴下方的面积取负号.



小结

1．定积分的实质：**特殊和式的极限**.

2．定积分的思想和方法：

分割 → 化整为零

求近似以直（不变）代曲（变）

求和 → 积零为整

取极限

取极限 → 精确值——定积分

六、牛顿—莱布尼兹公式

定理 3（微积分基本公式）

如果$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

证　已知$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，

又 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$也是$f(x)$的一个原函数,

$$\therefore F(x) - \Phi(x) = C \qquad x \in [a,b]$$

令 $x=a \Rightarrow \quad F(a)-\Phi(a)=C,$

$$\Phi(a)=\int_a^a f(t)\mathrm{d}t=0 \Rightarrow \quad F(a)=C,$$

$$F(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=C,$$

$$\therefore \int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a),$$

令 $x=b \Rightarrow$ $\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).}$

牛顿—莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

微积分基本公式表明：

一个连续函数在区间$[a,b]$上的定积分等于它的任意一个原函数在区间$[a,b]$上的增量.

求定积分问题转化为求原函数的问题.

注意

当$a > b$时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$仍成立.

例4 求$\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx.$

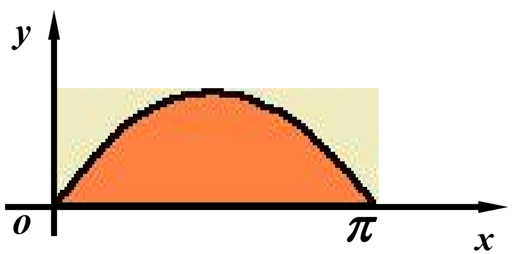
解 当$x<0$时，$\frac{1}{x}$的一个原函数是$\ln|x|$,

$$\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx=[\ln|x|]_{-2}^{-1}=\ln 1-\ln 2=-\ln 2.$$

例 8 计算曲线$y=\sin x$在$[0,\pi]$上与x轴所围成的平面图形的面积.

解 面积 $A=\int_0^{\pi}\sin x dx$

$$=[-\cos x]_0^{\pi}=2.$$



小结

微积分基本公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

牛顿—莱布尼茨公式沟通了微分学与积分学之间的关系.

(选学) 补充：三角积分

三角换元:

见$\sqrt{a^2-x^2}$的奇次幂，用$x=asint$ 换元

见$\sqrt{a^2+x^2}$的奇次幂，用$x=atant$ 换元

见$\sqrt{x^2-a^2}$的奇次幂，用$x=asect$ 换元

同时有x^n和$\sqrt{1-x}$，用$x=\sin^2 t$换元

例:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

三角积分：

定积分里sin和cos可互换

若$I_{(m,n)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx$

则$I_{(m,n)}=\frac{m-1}{m+n}I_{(m-2,n)}=\frac{n-1}{m+n}I_{(m,n-2)}$

$I_{(0,0)}=\frac{\pi}{2}$，$I_{(0,1)}=I_{(1,0)}=1$，$I_{(1,1)}=\frac{1}{2}$

例：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\sin^3 x dx=I_{(4,3)}=\frac{3}{7}I_{(2,3)}=\frac{3}{7}\frac{1}{5}I_{(0,3)}=\frac{3}{7}\frac{1}{5}\frac{2}{3}I_{(0,1)}=\frac{2}{35}$$