河南工業大學

# 实 验 报 告

课程设计名称：物联网通信技术

专 业 班 级 ：物联网工程 1902 班

指 导 教 师 ：王佳盈

课程实验时间：2021 年 6 月 20 日


小组成员：201916070216 王源 201916070213 王众

201916070212 徐俊逸 201916070214 刘宗政

201916070217 赵浩钧　201916070215 方彬

# 物联网通信技术_实验三

## 傅立叶变换玩玩看

## #傅立叶变换-01


练习：

1.观察两个波形相加的结果。如果只显示相加的总和，而不显示出成份波，有办法透过肉眼观察出有哪些成份波吗？

2.从图上的结果可以看出，时间取样值为 2 -1 -1，请思考为什么？（用暂停且移动时间点的方式来找出答案。）

答：

1. 如果只显示相加的总和，而不显示出成份波，我个人觉得没有办法透过肉眼观察出有哪些成份波。从第一个点和第三个点结合看出可以看出：有两个振幅为 1 的成分波。 且一个波为 2HZ一个波为 1HZ。


2. Cycles:0 1 1

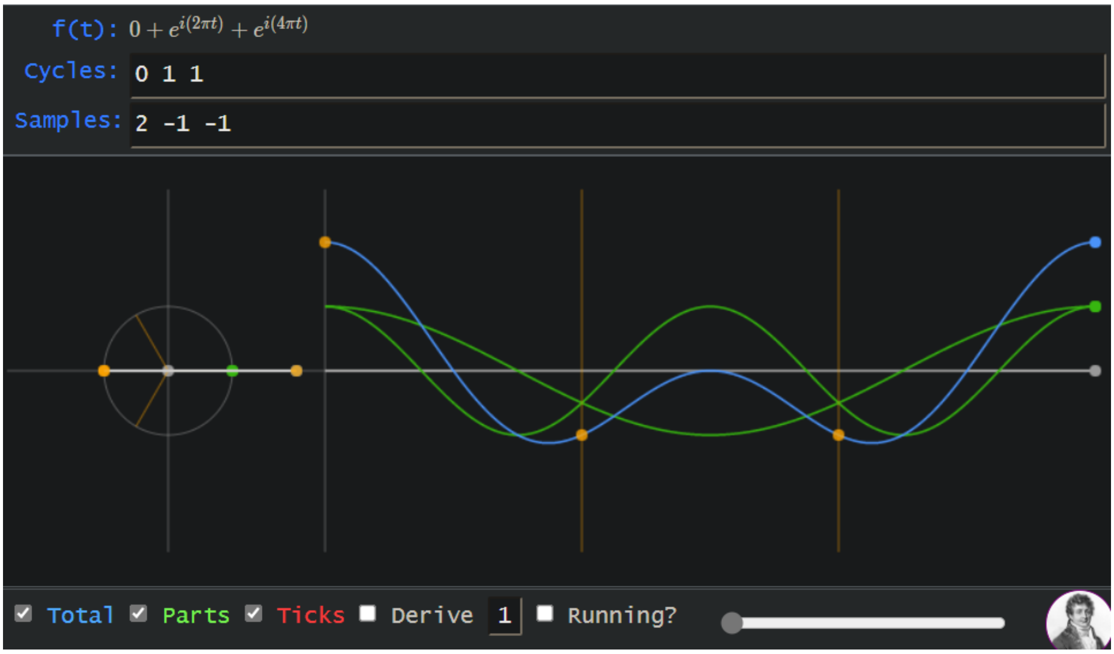
可以很容易看出来第一个数字 0 代表常数 0，在右边的图中就是一条灰色的线，一直是 0。

第二个数字 1 表示一秒钟转一圈，在网页中左边的图中是转动比较慢的绿色的点，在右边的图中就是坡度比较缓的那条线（该线即转动比较慢的绿色点的水平投影）。

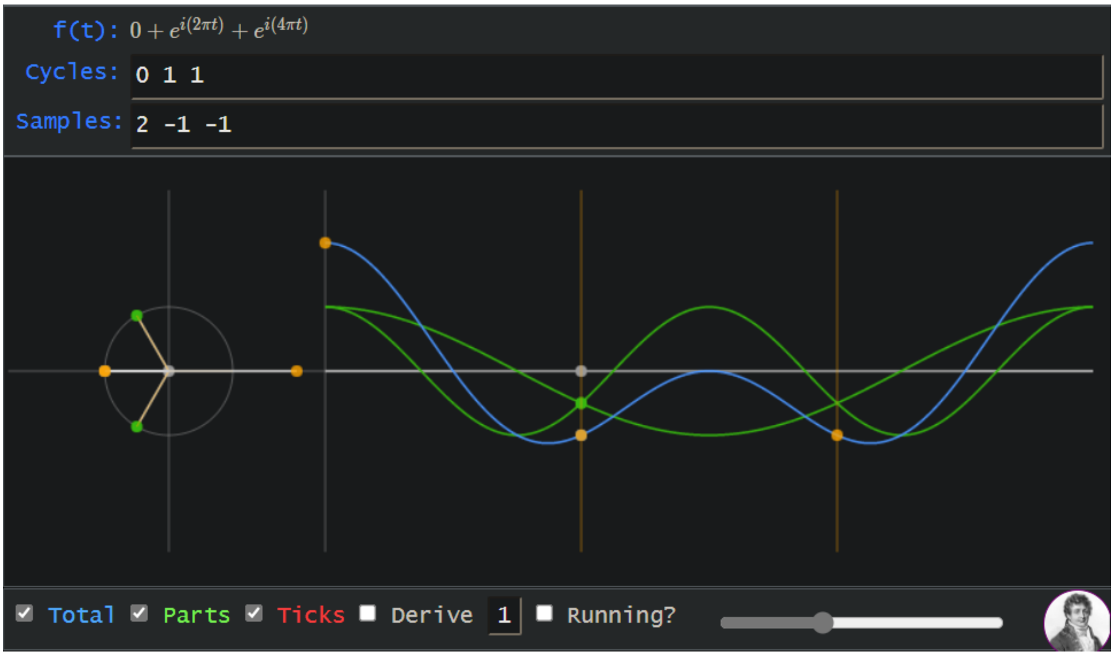
第三个数字 1 表示一秒钟转两圈，在网页中左边的图中是转动比较

快的绿色的点，在右边的图中就是坡度比较陡的那条线（该线即转动比较快的绿色点的水平投影）。

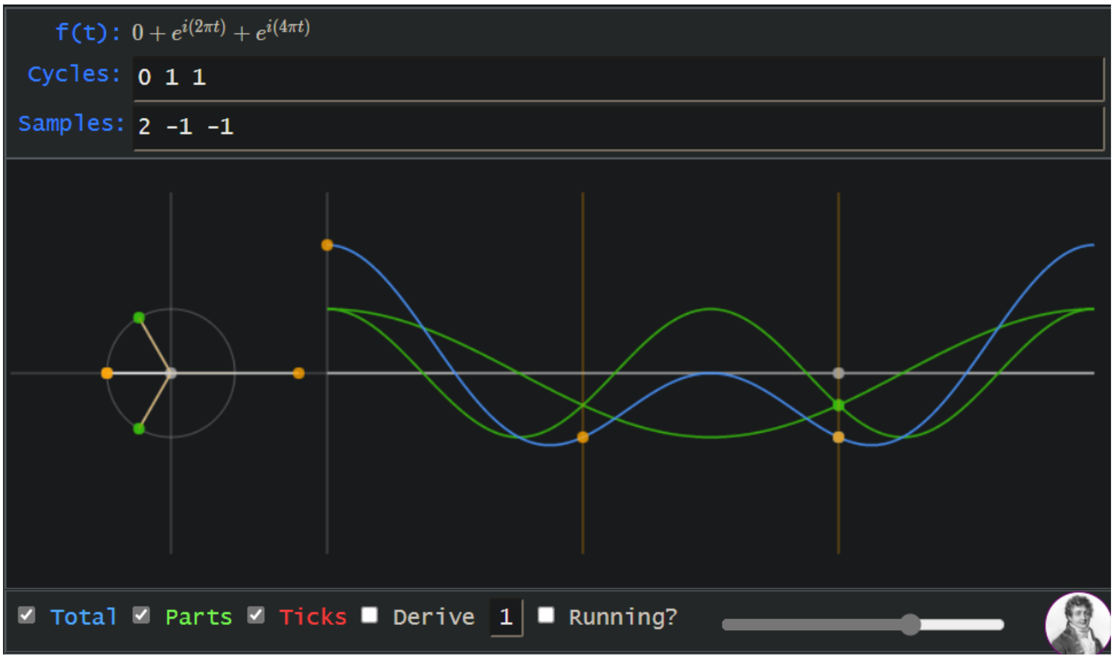
一. 第一个时刻为起始时刻，1HZ 和 2HZ 的波都为 1，所以相加时间取样为 2。我们可以很清楚的看到，在时间为 0 的时候，两个绿色的点是在(1,0)的位置，灰色的点在圆心。3 个点的水平投影的和为 2。如下图所示：




二. 第二个时刻时，1HZ 的波经过了 2/3 个周期， 2HZ 的波经过了 1/3 个周期，都为-0.5，所以时间 取样相加和为-1，我们可以很清楚的看到，在时间为 1/3 秒时，比较慢的绿色的点跑到 120°，比较快的绿色的点跑到 240°，投影下来都在-1/2，3 个点的水平投影的和-1。如下图所示：




三．第 3 个时刻时，1HZ 的波经过了 4/3 个周期， 2HZ 的波经过了 2/3 个周期，都为-0.5，所以时间取样相加和为-1，我们可以很清楚地看到，在时间为 2/3 秒时，比较慢的绿色的点跑到 240°，比较快的绿色的点跑到 480°，投影下来都在-1/2，3 个点的水平投影的和-1。如下图所示：



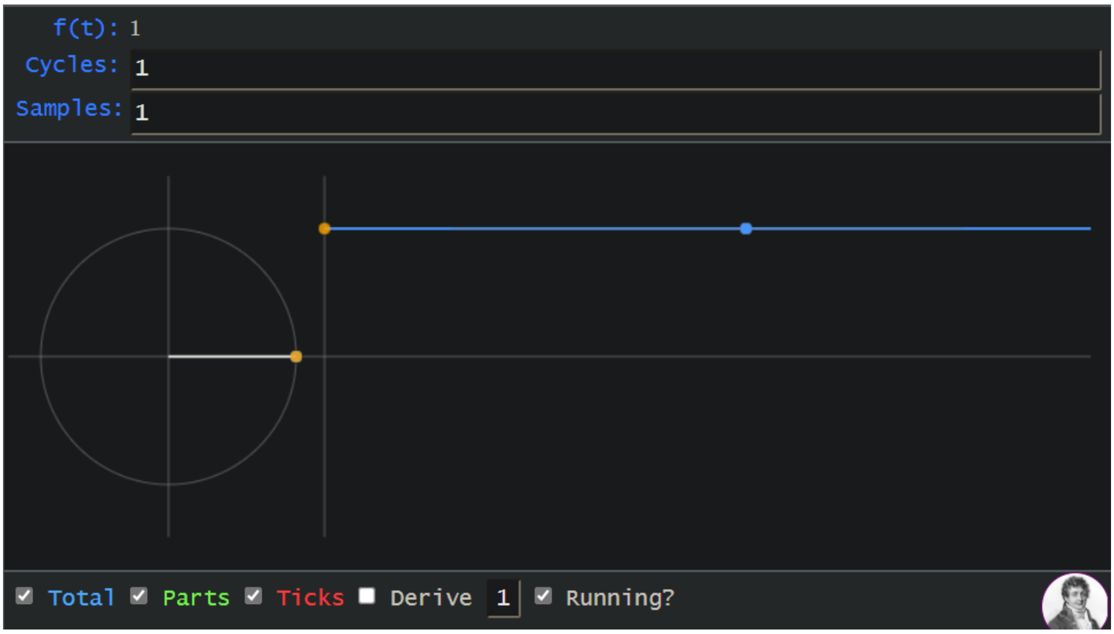
# #傅立叶变换-02

试着确认以下各点说明：

1.当频率成份为 1 时，表示只有直流成份，振幅为 1，故时间的取样值永远为 1。

2.当频率成份为 0 1 时，表示只有频率为 1 且振幅为 1 的成份，此时会发现时间的取样值为 1 -1，为什么呢？因为是余弦波，而取样点恰好在开始和中间的缘故。

3.当频率成份为 1 1 时，表示同时具备前两者的成份，此时时间的取样为 2 0，也就是前两者时间取样值的和。这是波可以叠加的表现，也表示频率和时间两者之间的转换具备了线性转换的特质。




练习：

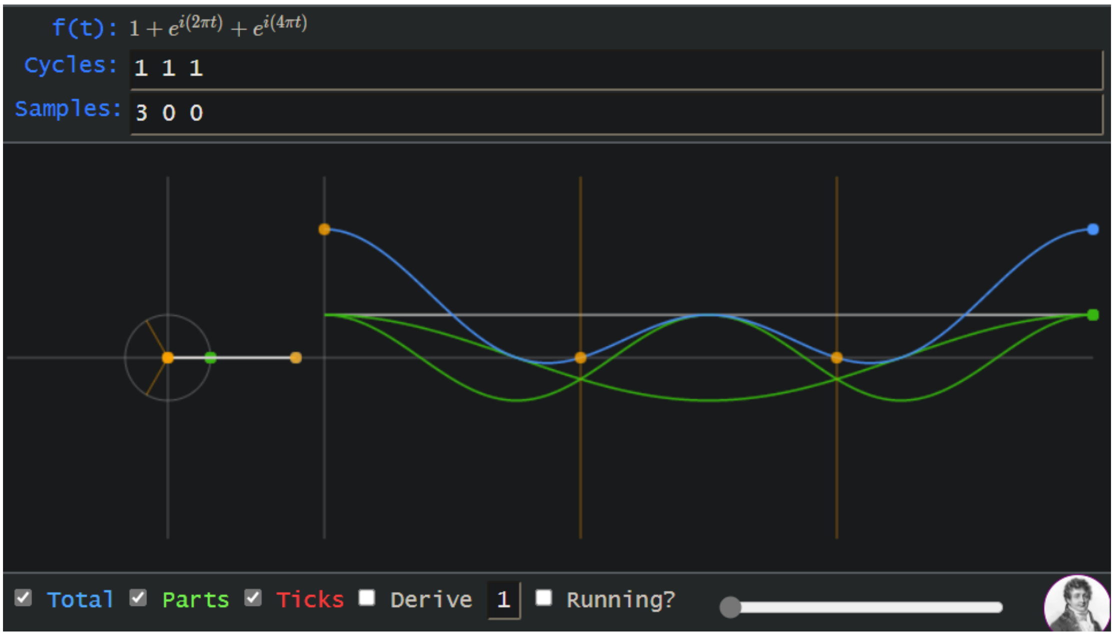
1.当频率成份为 1 1 1 时，时间取样为何？请说明为什么会得到这样的结果？（用暂停且移动时间点的方式来找出答案。）

2.当频率成份为 1 1 1 1 时，时间取样为何？如果频率成份为 1 1 1 1 1 呢？请试着推广到更多个 1 的情况，并说明原因。

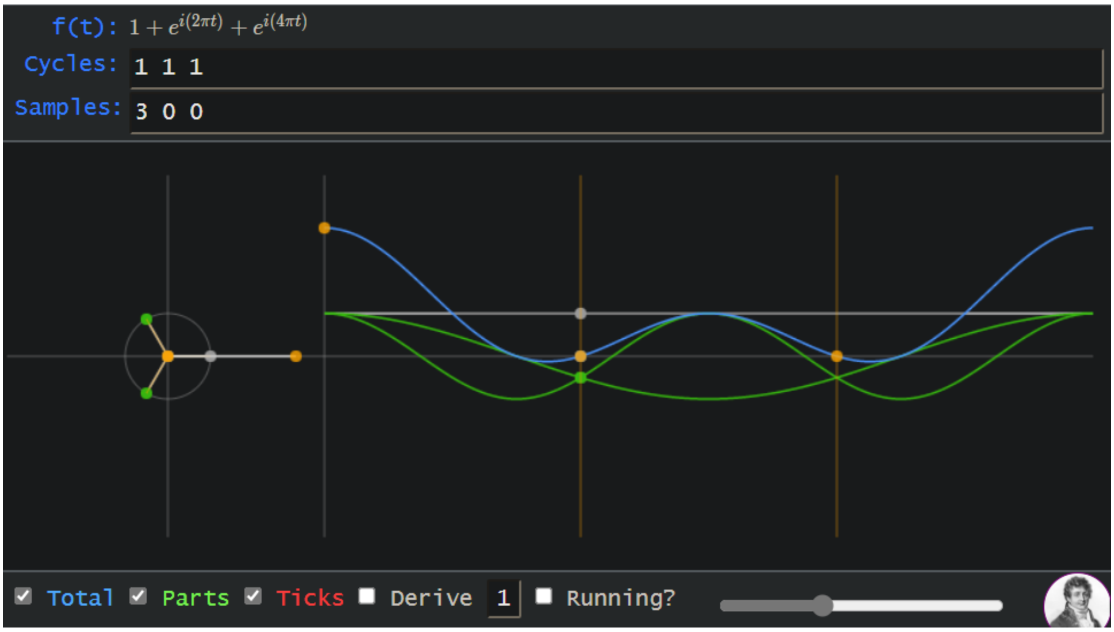
答：

一：当频率成份为 1 1 1 时，时间取样为 3 0 0。得到这样结果的原因：当频率成份为 1 1 1 时，在 0 秒，1/3 秒和 2/3 秒处做抽样。

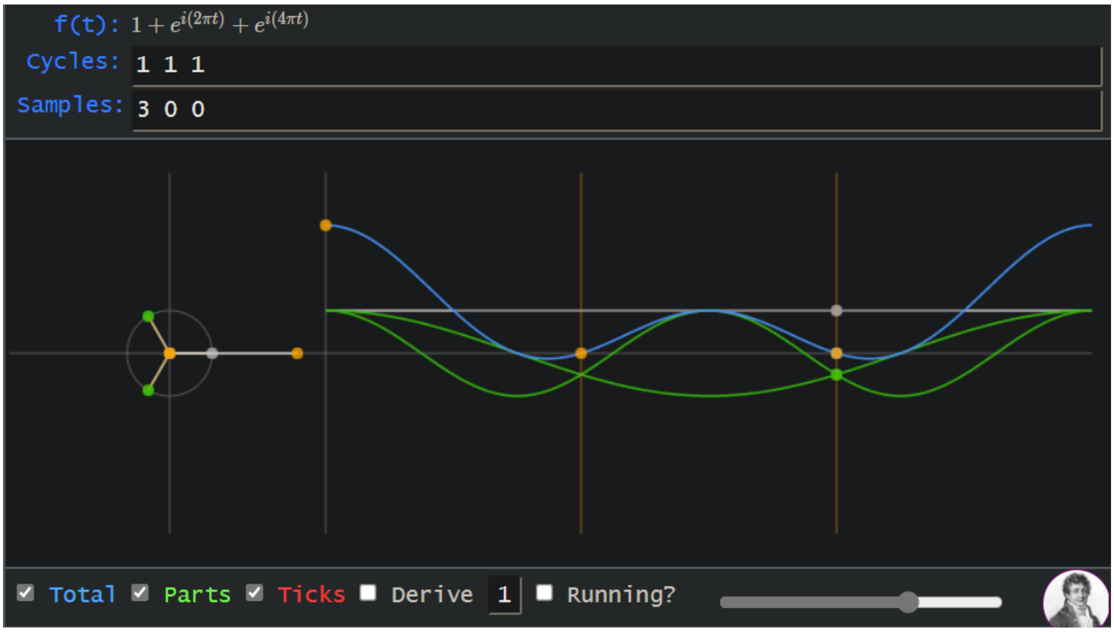
1.在 0 秒时，如下图，抽样值时是 3。时间取样为：3 0 0 时刻一：为起使时刻，直流、1hz、2hz 的波都为 1，所以为 3。




2. 在 1/3 秒时，如下图，抽样值时是 0。第二个时刻时，1HZ 经过了 2/3 个周期，2HZ 的波经过了 1/3 个周期，都为-0.5，所以这两个时间取样相加和为-1，直流为 1，所以相加为 0。

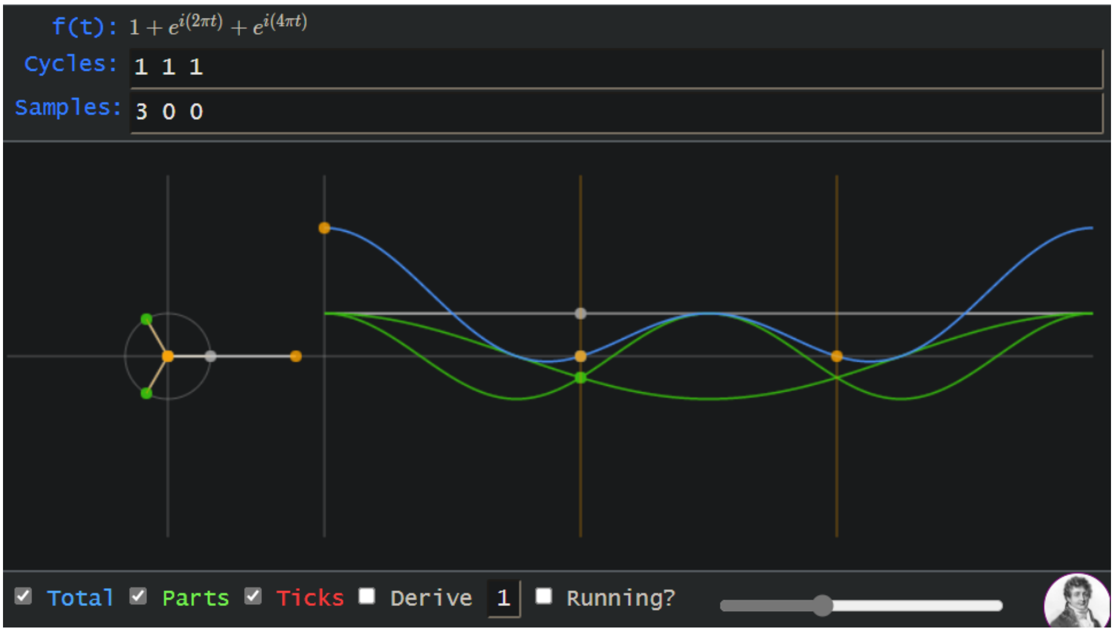



3. 在 2/3 秒时，如下图，抽样值时是 0。第 3 个时刻时，1HZ 经过了 4/3 个周期，2HZ 的波经过了 2/3 个周期，都 为-0.5，所以这两个时间取样相加和为-1 ，直流为 1，所以相加为 0。

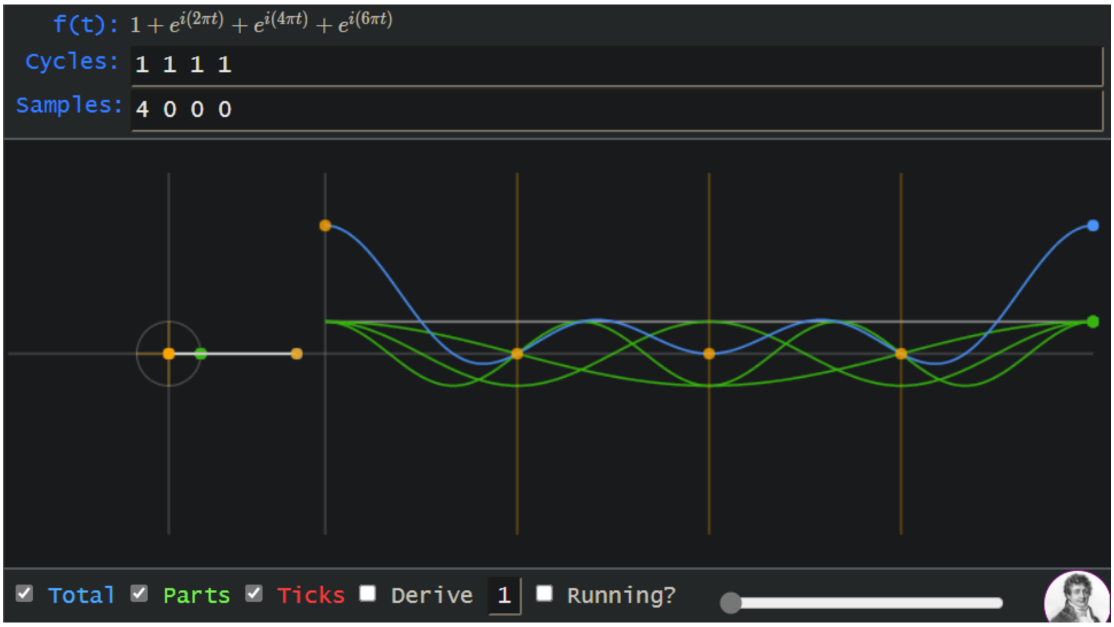


二：当频率成份为 1 1 1 1 时，时间取样为 4 0 0 0；如果频率成份为 1 1 1 1 1 ，时间取样为 5 0 0 0 0；当频率成份为 n 个 1 时，即 1 1……1，时间取样为 n 0 …… 0（n 个 0）。

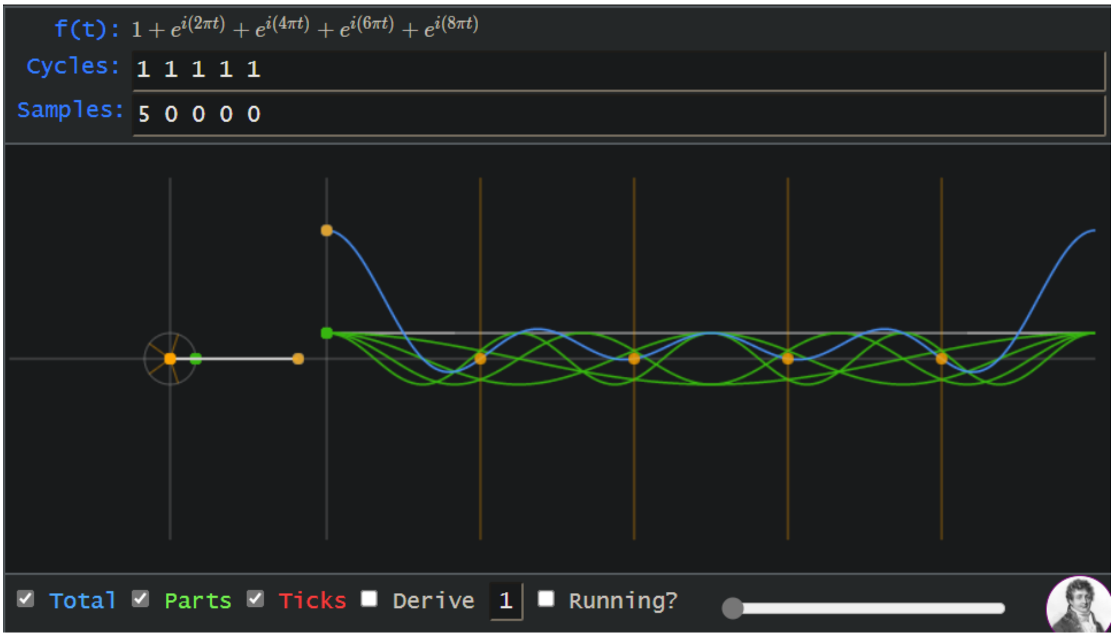
原因所在：只要看第二个取样时间点的结果就可以很明确地知道。如下图，现在我们来观察左边的图，直流的成份波还是停在 1 的位置；频率 1 的成份波跑了 1/3 圈；频率 2 的成份波跑了 2/3 圈。因为这 3 个点刚好是对称的，它们的和为 0，当然实数部份也是 0，所以取样值就是 0 了。这样下去，下一个取样点也类似。



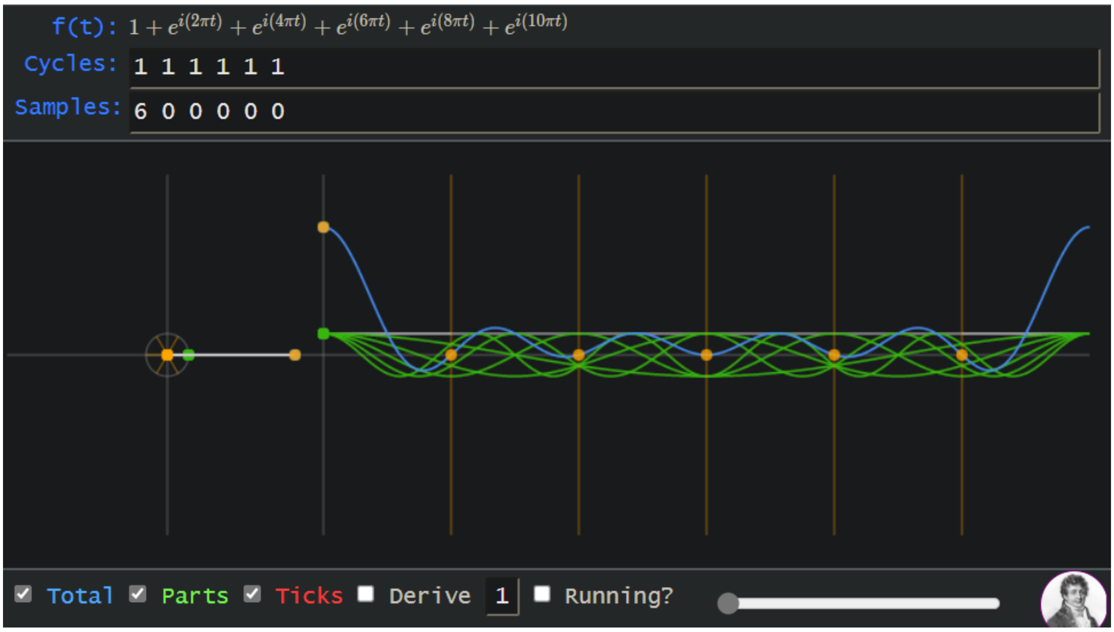

我们不妨来试一下：首先把频率成分调到 1 1 1 1，时间取值为 4 0 0 0，如下图所示：




我们再把频率成分调到 1 1 1 1 1，时间取值：5 0 0 0 0，如下图所示：




我们要有一颗耐得住寂寞的心，所以我们继续做重复的实验，我们把频率成分调到 1 1 1 1 1 1，同理我们可以得到时间取值为：6 0 0 0 0 0 ，如下图所示：




到这里，我们已经可以大胆的下出结论，推广到更多：

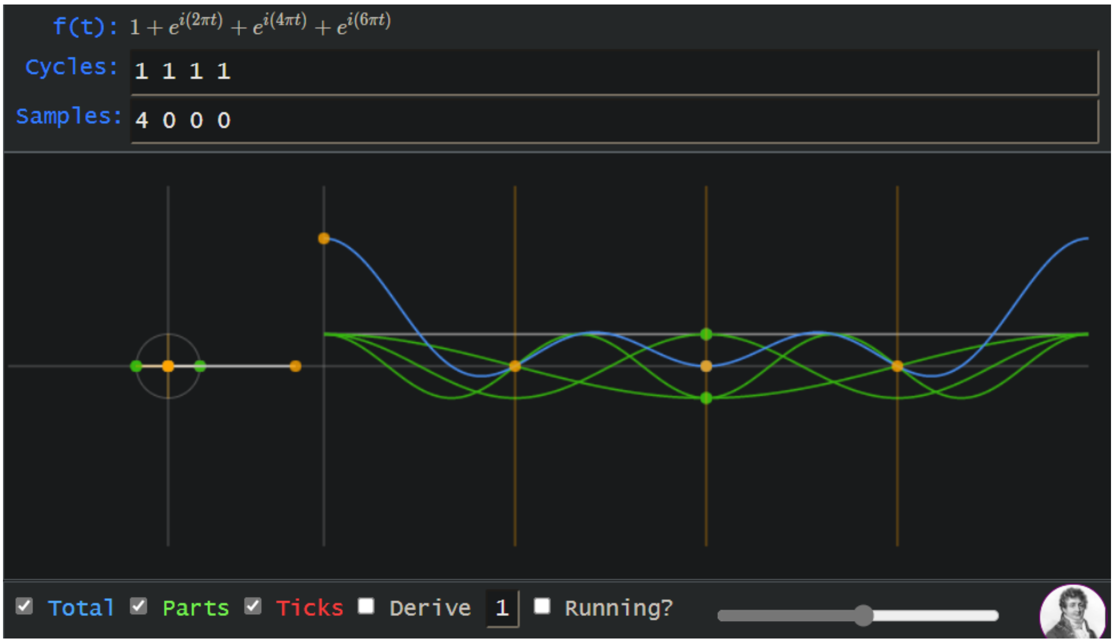
1 1 1 1 1 1 1******* 时间取值为：n（n 为波的总数 量）0 0 0 0 0 0 0 *****。

原因如下：在时间取样时刻：所有交流波相加都为-1，加上直流波始终为 1，所以除了起始点，其他时间取样总和都为 0。

# #傅立叶变换-03

在上一个小单元中，你是否发现当频率成份为 1 1 1 1 时，时间取样为 4 0 0 0 呢？其实我们只要看第二个取样时间点的结果就可以知道了。下面的图应该会在第二个取样时间点暂停（你可以刷新页面来重新观察）。现在我们来观察左边的图，直流的成份波还是停在 1 的位置；频率 1 的成份波跑了 1/4 圈；频率 2 的成份波跑了 2/4 圈；频率 3 的成份波跑了 3/4 圈。因为这 4 个点刚好是对称的，它们的和为 0，当然实数部份也是 0，所以取样值就是 0 了。


下面的图应该会在第三个取样时间点暂停，你可以看到 4 个点的和仍然是 0。



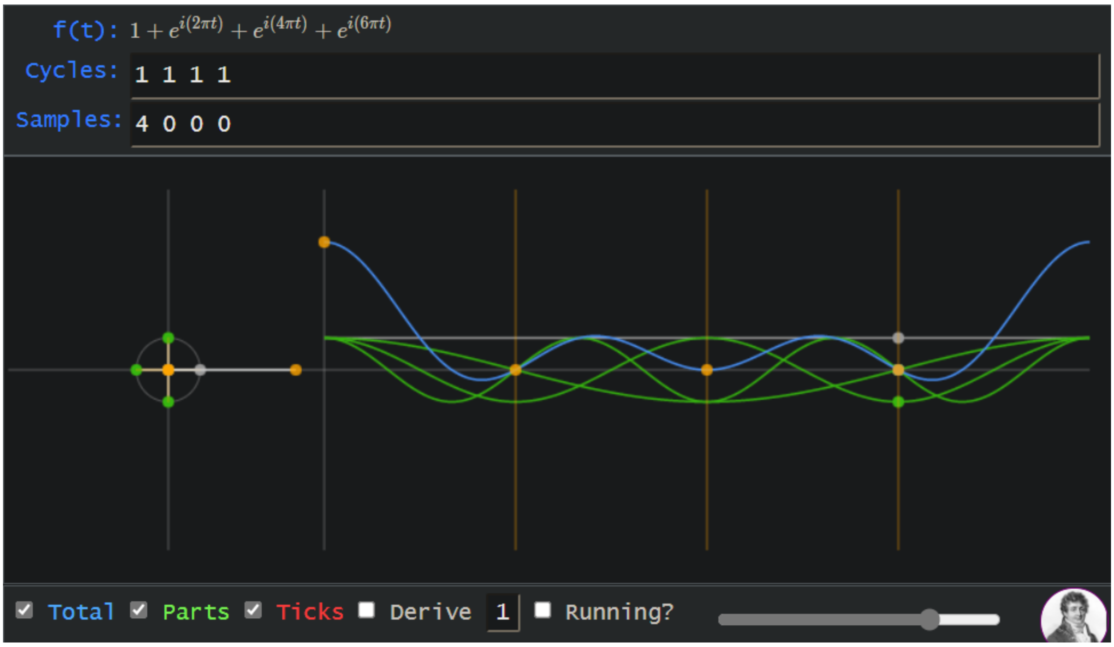

练习：

1.第四个取样时间点会是怎样呢？第五个取样的时间点？之后的取样点呢？

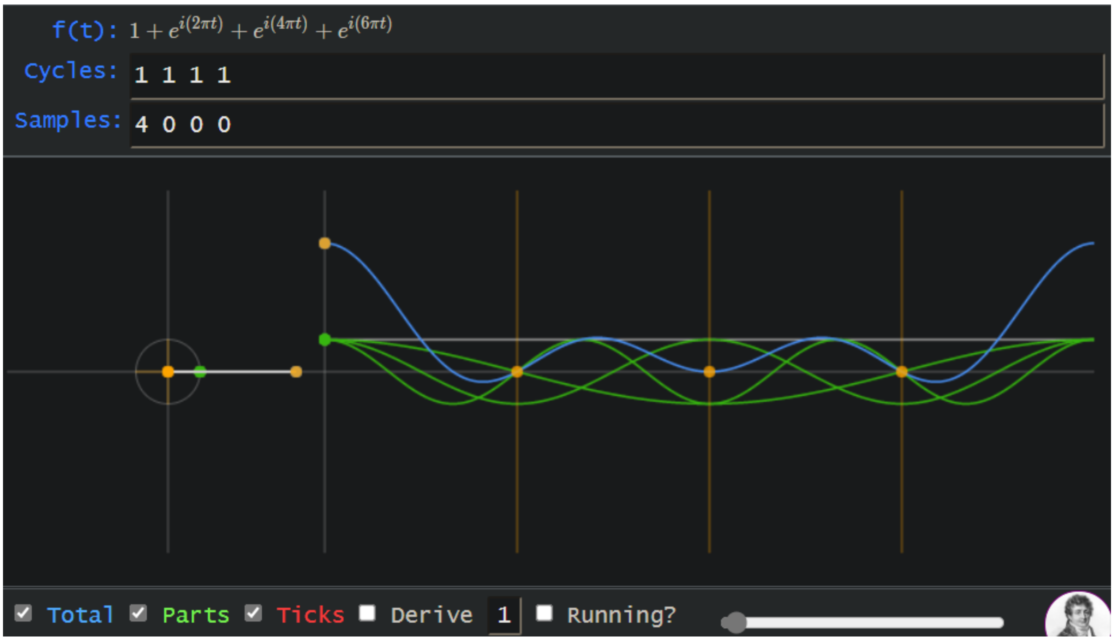
2.有什么办法可以让时间的取样值变成 0 4 0 0 呢？先思考一下，再看下一页。

3.如果你很快就想出来了，那么怎样让时间的取样值变成００４０？怎样可以变成０００４？

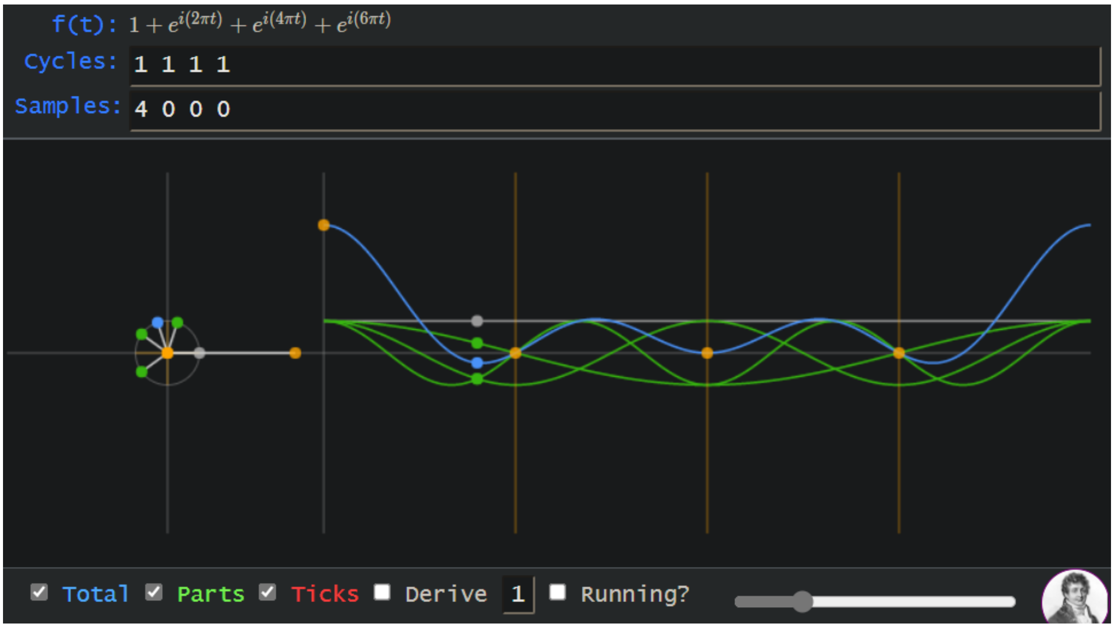
一．我们发现第四个取样时间点：它们的４个点是对称的，它们４个点的和为０，当然我们也可以知道实数部分也是０，所以取样值也就是应该０了。（如下图）




我们又可以发现第五个取样的时间点回到了起点的位置取样值为４，到这里我们大概能摸索出其中的一些门道，如下图所示：




我们怀着严谨的心态来测试一下第六个取样点，结果果然不出我们所料，第六个取样值跟第二个取样值的情况一模一样，如下图所示：




第七个后的取值情况也依次类推，也就是第七个的取值情况跟第三个一样，第八个的取值情况跟第四个一样。

二．如果要得到 0 4 0 0 的结果，也就是说，在 1/4 单位时间时，四个点才会重合。我们可以把时间倒回去，时间为 0 的时候，直流成份波还是在原地；速度 1 的应该后退 1/4 圈（-90 度）；速度 2 的应该后退 2/4 圈（-180 度）；速度 3 的应该后退 3/4 圈（-270 度）。

三．如果要得到 0 0 4 0 的结果，也就是说，在 2/4 单位时间时，四个点才会重合。我们可以把时间倒回去，时间为 0 的时候，直流成份波还是在原地；速度 1 的应该后退 180 度；速度 2 的应该后退 360 度；速度 3 的应该后退 540 度。

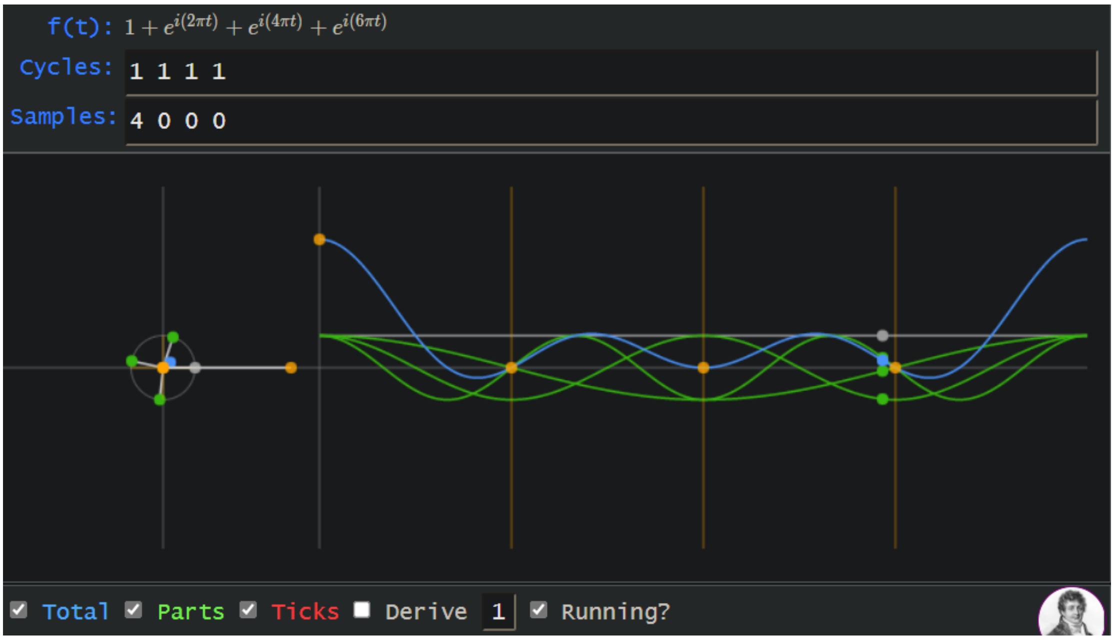
如果要得到 0 0 0 4 的结果，也就是说，在 3/4 单位时间时，四个点才会重合。我们可以把时间倒回去，时间为 0 的时候，直流成份波还是在原地；速度 1 的应该后退 270 度；速度 2 的应该后退 540 度；速度 3 的应该后退 810 度。

## #傅立叶变换-04

在上一个小单元中，我们可以把四个不同频率的成份波想成四个跑者，速度分别是 0 1 2 3，那么同时出发，经过 1 个时间单位之后，分别跑了 0 1 2 3 圈，于是又重合在一起了，这时的取样值为 4。至于另三个取样时间点（1/4, 2/4, 3/4 单位时间），因为都会产生对称的情况，所以总和都会是 0，于是就不断得到 4 0 0 0 的重覆取样结果。那如果要得到 0 4 0 0 的结果，也就是说，在 1/4 单位时间时，四

个跑者才会重合。那么我们不妨把时间倒回去，看看时间为 0 的时候，它们应该在哪裡？这个应该不难，直流成份波还是在原地；速度 1 的应该后退 1/4 圈( -90 度 ) ;速度 2 的应该后退 2/4 圈( -180 度）；速度 3 的应该后退 3/4 圈（-270 度）。

那么现在把 Cycles 的部份改成 1 1:-90 1:-180 1:-270 试试看看。




练习：

1.如果上面的问题想通了，那么试着调整 Cycles 的成份，分别让时间取样变成 0 0 4 0 以及 0 0 0 4。

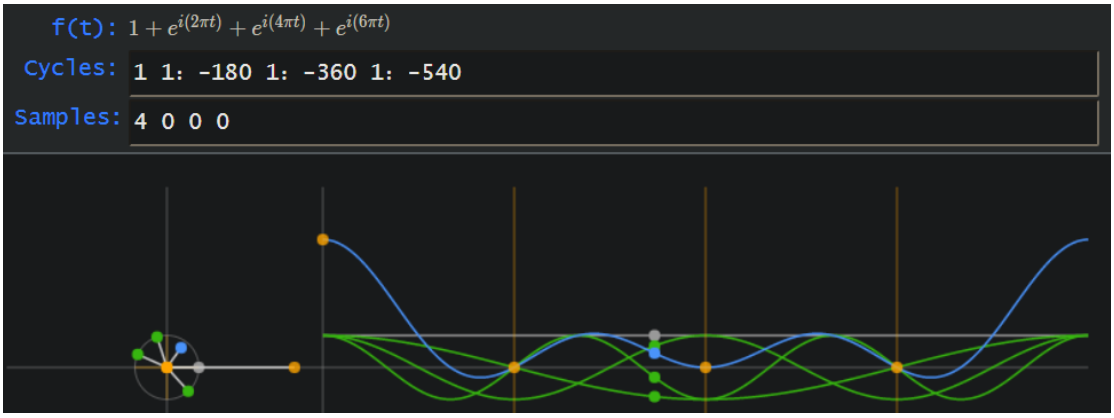
2.现在试着调整 Cycles 的成份，让时间取样变成 0 0 3。

3.现在试着调整 Cycles 的成份，让时间取样变成 0 0 6 0 0 0。

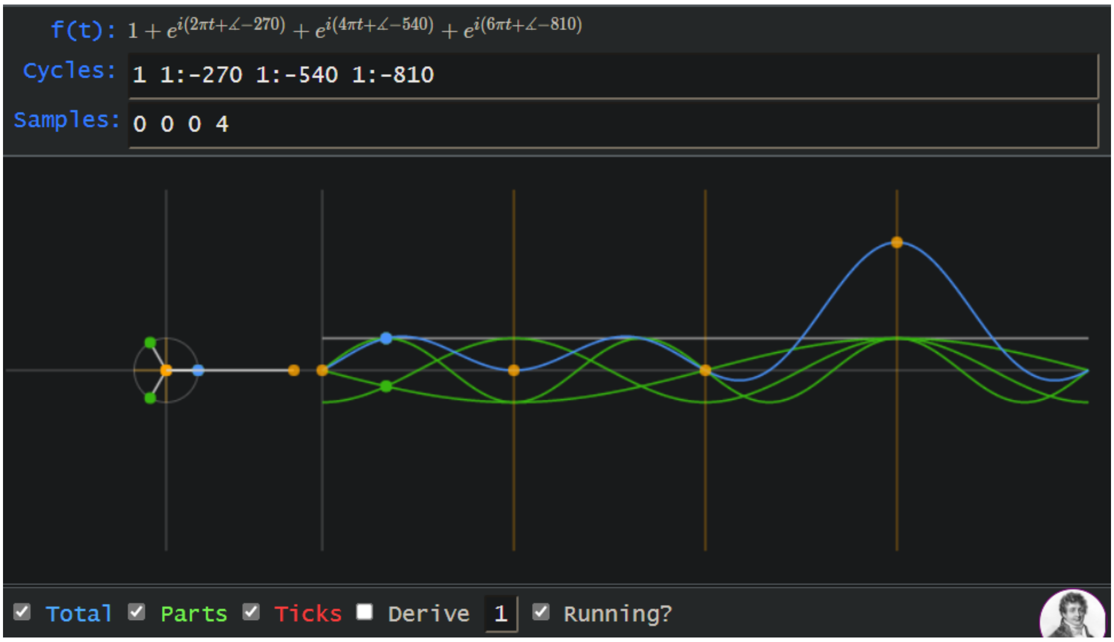
答：结果如下→

一：时间取样为 0 0 4 0 时，Cycle 为:1 1：-180 1：-360 1：-540。

如果要得到 0 0 4 0 的结果，也就是说，在 2/4 单位时间时，四个跑者才会重合。那么我们不妨把时间倒回去，看看时间为 0 的时候，它们应该在哪裡？直流成份波还是在原地；速度 1 的应该后退 2/4 圈（-180 度）；速度 2 的应该后退 4/4 圈（-360 度）；速度 3 的应该后退 6/4 圈（-540 度）。

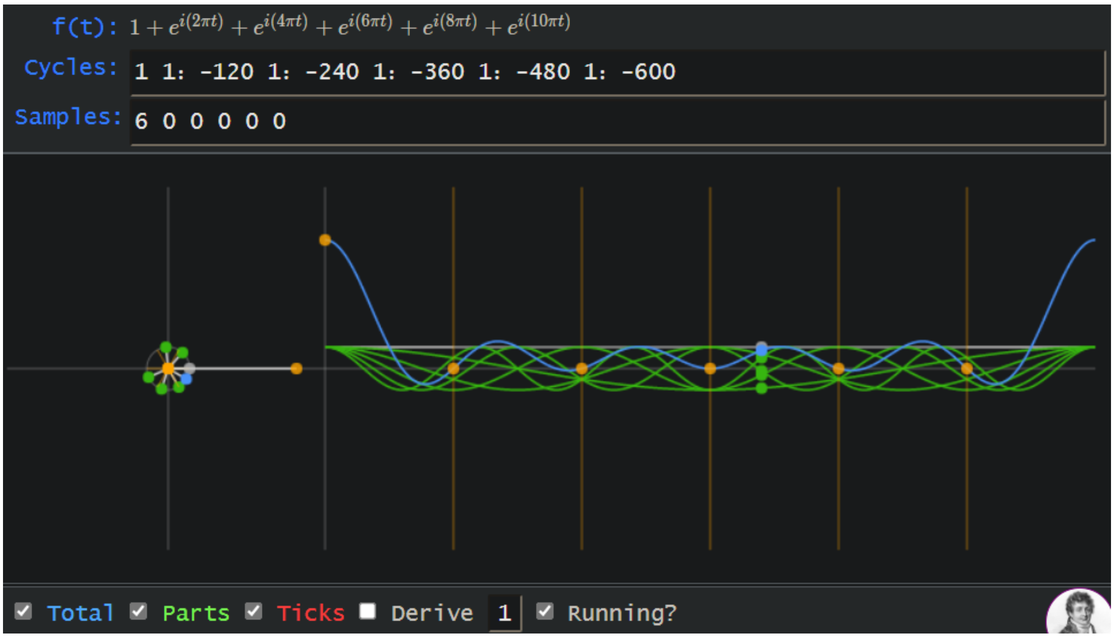



时间取样为 0 0 0 4 时，Cycle 为:1 1：-270 1：-540 1：-810。如果要得到 0 0 0 4 的结果，也就是说，在 3/4 单位时间时，四个跑者才会重合。那么我们不妨把时间倒回去，看看时间为 0 的时候，它们应该在哪裡？直流成份波还是在原地；速度 1 的应该后退 3/4 圈（-270 度）；速度 2 的应该后退 6/4 圈（-540 度）；速度 3 的应该后退 9/4 圈（-810 度）。



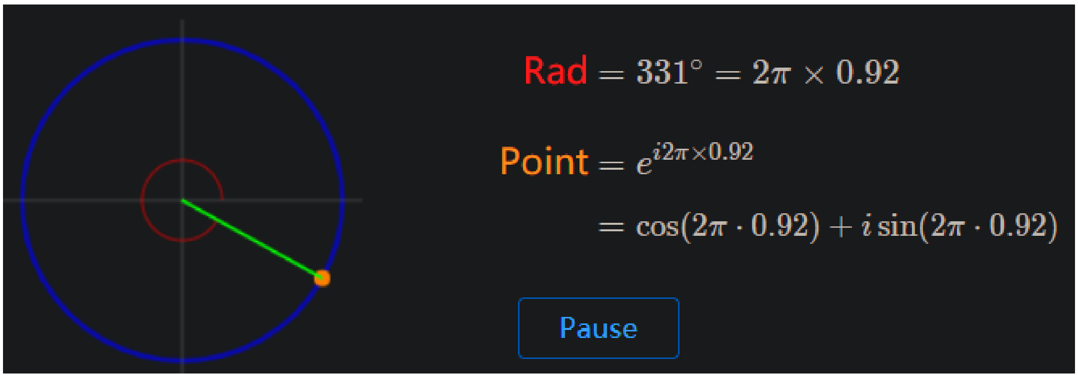

二．同理，我们也可以推出当 Cycle:1 1：-240 1：-120 时，时间取样变为 0 0 3。


三．同样的，我们亦可以推出当 Cycle:1 1：-120 1：-240 1：-360 1：-480 1：-600 时，时间取样变为 0 0 6 0 0 0。




# #傅立叶变换-05

现在我们来看一点数学。首先看一下这个模拟图：




这边橘色点在单位圆上绕行，假设绿色线段和 x 轴的交角为 $\theta$，那麽橘点的位置应该在 $\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ 的位置，或者我们也可以把它写成 $e^{i\theta}$ (尤拉公式)。 如果橘点的角速度是 $\omega$，那它在时间 $t$ 的位置可以写成 $e^{i\omega t}$。 注意在这种表示法中，指数部份每增加 $2\pi$ 表示刚好绕一圈，所以 $e^{i2\pi}=e^{i0}=1$。

现在考虑 $N$ 个跑者，有 $N$ 个取样时间点 $(0,1/N,2/N,\cdots,(N-1)/N)$ 的问题。如果全部的振幅都是 1，开始的角度都是 0，那麽就像前面所讨论过的，第一个取样值应该是 $N$，而其他 $N-1$ 个取样值都是 0。

那怎样让第 $n$ 个取样值是 $N$，而其他值是 0 呢？先看 $n=2$ 的情况，也就是到了第二个取样时间点所有跑者才重合的情况，那如果我们把时间倒回去第一个取样点，也就是倒退 $1/N$ 秒，会发生什麽事呢？基本上就是把速度 1 的跑者倒退 $1/N$ 圈，速度 2 的跑者倒退 $2/N$ 圈，依此类推就可以了。换句话说，这 $N$ 个跑者的起始位置应该是:

$$1,e^{-i2\pi/N},e^{-i4\pi/N},\cdots,e^{-i2(N-1)\pi/N}$$

$$1,e^{-i2\pi/N},e^{-i4\pi/N},\cdots,e^{-i2(N-1)\pi/N}$$

思考一下上面的数学式，等到理解了再回答下面的问题。

练习：

1. 跟上面类似的推论，当 $n$=3 的情况下，$N$ 个跑者的起始位置在哪里？

2. 一般 $n$ 值的情况呢（$1 \le n \le N$）？先想一想，再往下看。

答：我的答案如下→

一．n=3 的情况，也就是到了第 3 个取样时间点所有跑者才重合的情况，那如果我们把时间倒回去第一个取样点，也就是倒退 2/N 秒，会发生什么事呢？基本上就是把速度 1 的跑者倒退 4/N 圈，速度 2 的跑者倒退 6 /N 圈，依此类推就可以了。倒退后的位置为起始位置。

起始位置：1,e−i6π/N, e−i12π/N,⋯,e−i6(N−1)π/N

二．要让 N 个时间取样值中，除了第 n+1 个取样值为 N，而其他的取样值都是 0，基本上，就是把时间倒回去 n/N 秒，这等于把速度为 1 的跑者，倒退 n/N 圈，把速度为 2 的跑者，倒退 2n/N 圈，...依此类推。所以一开始的位置安排应该如下:

1,e−i2nπ/N, e−i4nπ/N,⋯,e−i2(N−1)nπ/N

# #傅立叶变换-06

上一个小单元，如果你都想通的话，那应该就可以明瞭，要让 N 个时间取样值中，除了第 n+1 个取样值为 N，而其他的取样值都是 0，基本上，就是把时间倒回去 n/N 秒，这等于把速度为 1 的跑者，倒退 n/N 圈，把速度为 2 的跑者，倒退 2n/N 圈，...依此类推。所以一开始的位置安排应该如下：

$$1, e^{-i2n\pi/N}, e^{-i4n\pi/N}, \cdots, e^{-i2(N-1)n\pi/N}$$

有想通吗？

接下来，我们前面曾经提到过：波可以叠加，频率和时间两者之间的转换具备线性转换的特质。那么我们已经知道如何产生 4 0 0 0 和 0 4 0 0 的取样值了，请回答以下问题。

练习：

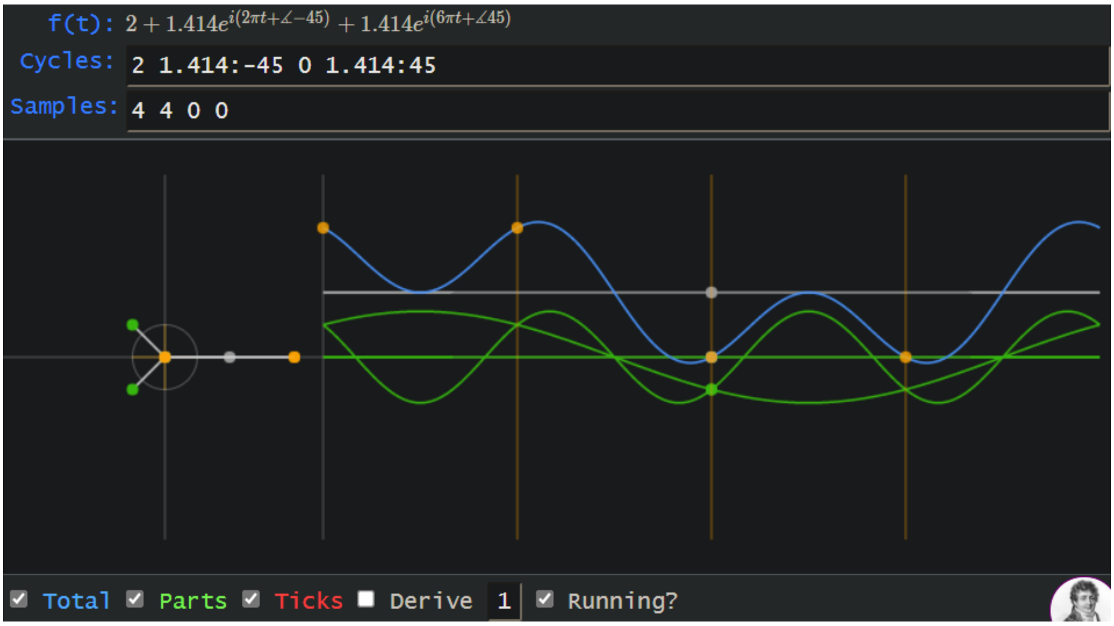
1.如何让时间取样值变成 4 4 0 0？

2.如何让时间取样值变成 a b c d？

答：我的答案如下→

一．Cycle:1 1 1 1 可以产生 4000；Cycle:1 1：-90 1：-180 1：-270 可以产生 0400；波可以叠加，频率和时间两者之间的转换具备线性转换的特质，只需将产生 4000 和 0400 的 cycle 相加产生新的 cycle 值为 4400 的 cycle 值。把上面两组相加得到结果，化简后得

(2,2−√e−iπ/8,0,2−√eiπ/8)，取近似值 2 1.414:-45 0 1.414:45，即得到 4400。如下图：




二.

Cycle:a/4　a/4　a/4　a/4 可以产生 a 0 0 0；

Cycle:b/4　b/4:-90　b/4:-180　b/4:-270 可以产生 0 b 0 0；

Cycle:c/4　c/4:-180　c/4　c/4:-180 可以产生 0 0 c 0；

Cycle:d/4　d/4:-270　d/4:-180　d/4:-90 可以产生 0 0 0 d；

将上面所有 cycle 相加得出的 cycle 值即为产生 abcd 的 cycle 值

考虑频率为 k-Hz 的成份 (0≤k<4)，假设振幅为 Xk，那么

要产生 a 0 0 0 的话，Xk 应该等于 a/4；

要产生 0 b 0 0 的话，Xk 应该等于 (b/4)e−i2kπ/4 ；

要产生 0 0 c 0 的话，Xk 应该等于 (c/4)e−i4kπ/4；

要产生 0 0 0 d 的话，Xk 应该等于 (d/4)e−i6kπ/4；

把以上 4 个数相加，就得到 Xk 的总和为

(a/4)+(b/4) e−i2kπ/4+(c/4) e−i4kπ/4+(d/4) e−i6kπ/4。

# #傅立叶变换-07

上一个单元有答对吗?

$(1,1,1,1)$ 可以产生 4 0 0 0;

$(1,e^{-i2\pi/4},e^{-i4\pi/4},e^{-i6\pi/4})$ 可以产生 0 4 0 0;

那麽把上面两组相加就好了，所以结果应该是:

$(1+1,1+e^{-i2\pi/4},1+e^{-i4\pi/4},1+e^{-i6\pi/4})$ 也就是 $(2,\sqrt{2}e^{-i\pi/8},0,\sqrt{2}e^{i\pi/8})$，那我们可以填入一个近似值:

`2 1.414:-45 0 1.414:45`，就可以得到 4 4 0 0 的结果了。有答对吗?

那怎麼产生取样值 $a$ $b$ $c$ $d$ 呢? 方法其实是一样的。

考虑频率为 $k$-Hz 的成份 $(0\le k<4)$，假设振幅为 $X_k$，那麼要产生 $a$ 0 0 0 的话，$X_k$ 应该等于 $a/4$;

要产生 0 $b$ 0 0 的话，$X_k$ 应该等于 $(b/4)\,e^{-i2k\pi/4}$;

要产生 0 0 $c$ 0 的话，$X_k$ 应该等于 $(c/4)\,e^{-i4k\pi/4}$;

要产生 0 0 0 $d$ 的话，$X_k$ 应该等于 $(d/4)\,e^{-i6k\pi/4}$,

把以上 4 个数相加，就得到 $X_k$ 的总和为

$$(a/4)+(b/4)\,e^{-i2k\pi/4}+(c/4)\,e^{-i4k\pi/4}+(d/4)\,e^{-i6k\pi/4}$$

整理一下，把 $a$ $b$ $c$ $d$ 写成 $x_0$ $x_1$ $x_2$ $x_3$， 那麼

$$X_k=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}x_n e^{-i2kn\pi/4}$$

练习：

1. 现在把 4 个点变成 N 个点，时间取样值是 $x_0,x_1,\cdots,x_{N-1}$，那麼第 $k$ 个频率的值 $X_k$ 会变成什麼呢?
2. 反过来，假设频率为 $k$-Hz 的成份振幅为 $X_k$，那麼第 $n$ 个时间的取样值为何呢?

答：我的答案如下→

由: 考虑频率为 $\mathrm{k-Hz}$ 的成份 $(0 \le \mathrm{k} < 4)$,假设振幅为 $\mathrm{x_k}$, 那麼要产生 a 000 的话， $\mathrm{X}_k$ 应该等 于 a/4; 要产生 0 b 00 的话， $\mathrm{X_k}$ 应该等于 $(\mathrm{b}/4)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\mathrm{k}\pi/4}$;
要产生 00 c 0 的话， $\mathrm{X_k}$ 应该等于 $(\mathrm{c}/4)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\mathrm{k}^{\pi/4}}$;
要产生 000 d 的话， $\mathrm{X}_k$ 应该等于 $(\mathrm{d}/4)\mathrm{e}^{-22k^{\pi}/4}$,
把以上 4 个数相加，就得到 $\mathrm{X_k}$ 的总和为
$(\mathrm{a}/4)+(\mathrm{b}/4)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\mathrm{k}^{\pi}/4+}(\mathrm{c}/4)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\mathrm{k}^{\mathrm{K}}/4+}(\mathrm{d}/4)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\mathrm{k}^{\pi}/4}$
整理一下，把 a b c d 写成 $\mathrm{x0, x1, x2, x3}$, 那麼
$\mathrm{X_k} = \frac{1}{4}\sum_{\mathrm{n=0}}^{3} X\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\mathrm{kn}\pi 2\mathrm{k}}$ 知

整理一下，把 a b c d 写成 $\mathrm{x0, x1, x2, x3}$, 那麼
$\mathrm{X_k} = \frac{1}{4}\sum_{\mathrm{n=0}}^{3} X\mathrm{ne}^{-2\mathrm{kn}\pi 2\mathrm{k}}$ 知
1. 若把 4 个点换成 N 个点，要考虑频率为 $\mathrm{k-HZ}$ 的成份 $(0 \le \mathrm{k} < \mathrm{n})$ 假设振幅为 $\mathrm{x}_k$
要产生 a 00……0(n − 1 个 0)$\mathrm{x}_k$ 应等于 a/n 依次类举，可得 $\mathrm{x_k}$ 最后为
$\mathrm{x_k} = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{n=0}}^{\mathrm{N-1}} X\mathrm{ne}^{-\mathrm{i}2\mathrm{kn}\pi 2\mathrm{k}}$
2. 反过来，假设第 k 个频率的值是 $\mathrm{x_k}$, 因为它的转速是 k，而取样点在 $0, 1/\mathrm{N}, 2/\mathrm{N}, \cdots, (\mathrm{N}-1)/\mathrm{N}$ 所以第 n 个取样值 $(0 \leqslant \mathrm{n} < \mathrm{N})$ 表示经过 n/N 的时间，所
以转了 nk/N 圈，那麼它的位置在 $\mathrm{x_k e^{i2kn\pi N}}$($\mathrm{x_k}$ 是振幅)。

# #傅立叶变换-08

当时间取样值是 $x_0, x_1, \cdots, x_{N-1}$ 时，第 $k$ 个频率的值 $X_k$ 就是

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2kn\pi/N}$$

反过来，假设第 $k$ 个频率的值是 $X_k$，因为它的转速是 $k$，而取样点在 $0, 1/N, 2/N, \cdots, (N-1)/N$，所以第 $n$ 个取样值 $(0 \le n < N)$ 表示经过 $n/N$ 的时间，所以转了 $nk/N$ 圈，那麼它的位置在 $X_k e^{i2\pi nk/N}$ ($X_k$ 是振幅)。那我们总共有 $N$ 个频率，全部相加，就可以得到全部合成的点 $x_n$，其结果为

$$x_n = \sum_{n=0}^{N-1} X_k e^{i2kn\pi/N}$$

在我们的模拟程式中，最后再把 $x_n$ 取实数就是取样点的值了。

上面两个式子，就是离散傅立叶变换 (Discrete Fourier Transform, DFT)。

如果我们知道时间的取样值，就可以计算频率的各个成份;
反过来，如果我们知道频率的各个成份，也可以计算时间的取样值。

练习：

1.假设时间取样值为 1 1 1 1，则频率成份应该为何？试着先用公式算看看，然后再用模拟图检查看看是否相同。

2.假设频率成份为 1 1 1 1，则时间取样值应该为何？试着先用公式算看看，然后再用模拟图检查看看是否相同。

答：我的答案如下→

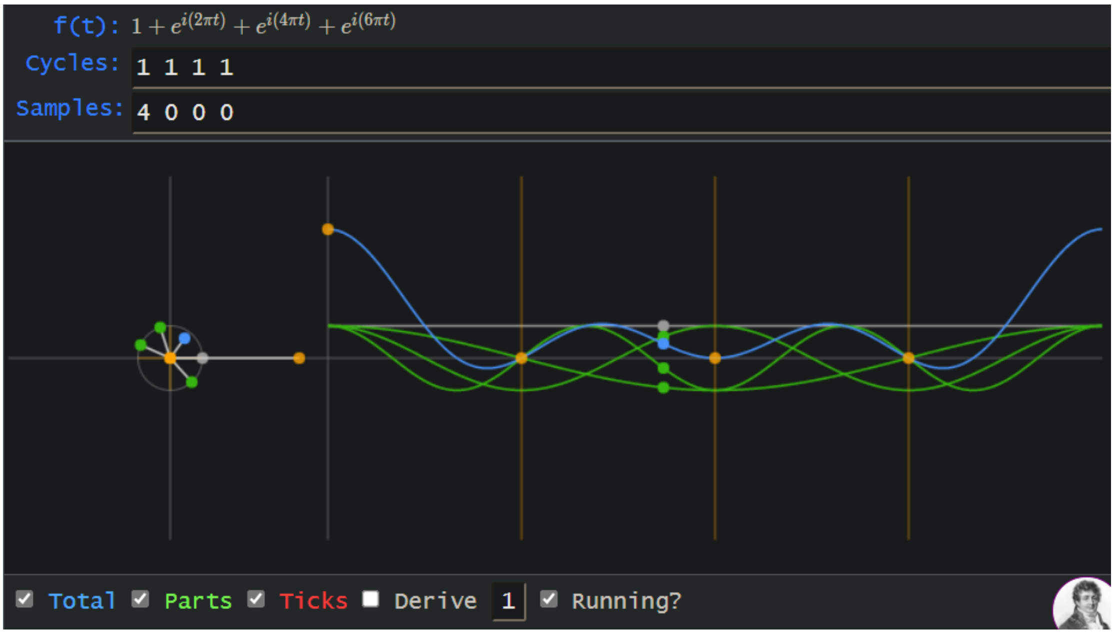
一．1.若时间取样为 1 1 1 1，代入公式中得频率成分应为 1 0 0 0

代入模拟图得如下：

模拟图：

二．若频率成分为１１１１，代入公式得时间取样值为４０００代入模拟图得如下：

模拟图：




# #傅立叶变换-09

延续上一个单元的转换公式，如果所有频率成份速度都加快成为原来的 2 倍，那么我们把所有取样时间点也都缩短成 1/2 倍，这样的话，每次取样时，各个成份波跑的位移和原来是一样的，所以最后合成的结果自然也会相同，因此转换公式不会改变。

那如果频率为 0, $0, \Delta f, 2\Delta f, \cdots, (N-1)\Delta f$ 表示每个频率变成 Δf 倍，那我们只要把取样时间间隔 1/N 缩短成 1/Δf 倍（等于是 1/(NΔf)），那么公式还是不会改变。

练习：

1. 反过来，如果取样点的时间间隔变成 $\Delta t$ 时，使用同样的转换公式，那麼频率间隔会变成多少呢？

2. 假设总共取样的时间总长度为 $T$，而且总共取了 $N$ 点，那么频率间隔为何？

3. 如果我们希望看到的最小频率间隔要小一点，那么时间取样部分应该要做怎样的调整？

4. 如果我们希望看到的最大频率成份要大一点，那么时间取样部分应该要做怎样的调整？

**答：我的答案如下→**

**由：频率为 0, Δf, 2Δf, ⋯, (N−1)Δf 表示每个频率变成 Δf 倍，那我们只要把取样时间间隔 1/N 缩短成 1/Δf 倍(等于是 1/(NΔf))，那么公式还是不会改变。**

**1. 可知反过来，时间间隔为 1/N 时，Δf=1，则取样时间间隔变为Δt 时，取样间隔变成了Δt/(1/N)=NΔt，那么频率应乘上倒数倍为Δf=1/(NΔt)。**

**2. 如果总共取样的时间长度为 T，而且取了 N 点，那么 T=NΔtT 这时候，Δf=1/(NΔt)也就是说，频率间隔为总共取样时间长度的倒数。**

**3. 由上两条结合可知，如果使频率间隔变小，则需要总取样时间长度 T 变大，反之，若频率成分大一点也就是说频率间隔大一点，则需要总时间取样长度 T 变大。**

# #傅立叶变换-10

先回答上一个单元的问题，当取样时间间隔为 1/N 的时候 $\Delta f=1$。当取样时间间隔变成 $\Delta t$ 时，等于取样间隔变成了 $\Delta t/(1/N)=N\Delta t$ 倍，那麽同样的公式下，频率应该乘上倒数倍，也就是新的 $\Delta f=1/(N\Delta t)$。

如果总共取样的时间长度为 $T$，而且取了 $N$ 点，那麽 $T=N\Delta t$，这时候，$\Delta f=1/(N\Delta t)=1/T$，也就是说，频率间隔为总共取样时间长度的倒数。

那麽频率间隔要小一点的话，取样总长度就要大一点。另外，假设点数是固定的，要让最大频率成份大一点的话，那就表示频率间隔也要大一点，那也就是说取样时间间隔要小一点，就是取样速度要快一点的意思。

整理一下:

$$\Delta f=1/(N\Delta t)=1/T$$

$$\Delta t=1/(N\Delta f)=1/F$$

这边 $F$ 表示 $N$ 个 $\Delta f$ 的长度。

练习：

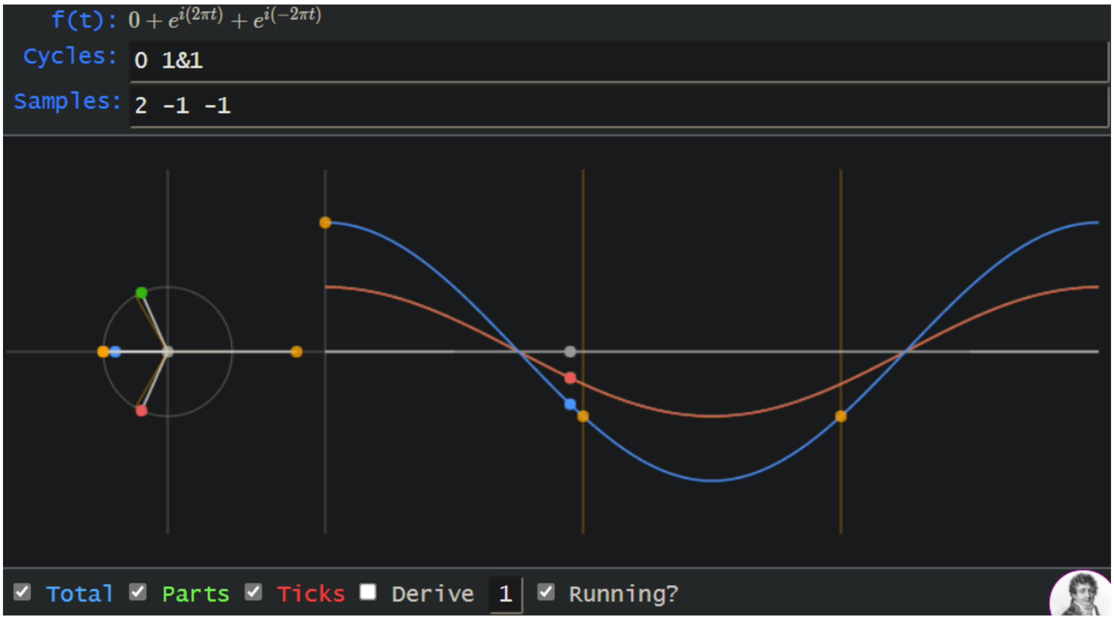
1.我们到目前为止都只考虑频率是逆时针转的情形，实际上，我们也可以输入顺时针转的频率成份。试着在 Cycles 中输入 0 1&1 看看会有什么结果。

2.除了第一个数表示直流成份之外，其他的成份都可以用类似的方法成对输入，一个表示正频，另一个表示负频。在上面的模拟中，正频和负频的两个波，它们在实轴的投影，有办法区分吗？它们在虚轴的投影，有办法区分吗？

3.把时间取样加入考虑，在上面的模拟中，如果每 1/2 秒取样一次，正频和负频的两个波，它们在实轴的投影，有办法区分吗？它们在虚轴的投影，有办法区分吗？

答：我的答案如下→

一． 在 Cycles 输入 0 1&1 结果如下：




我们可以看到，会形成两个余弦波，一个波正转，一个波反转。

二． 实轴投影可以区分，虚轴投影可以区分。

三． 实轴投影可以区分，虚轴投影可以区分。

## #傅立叶变换-11

最后总结一下，如果取样间隔是 1/10，那么转速是 0 和转速是 10 两者是无法区分的。转速是 7 和转速是-3 也是无法区分的。（可以了解吗？）换句话说，频率是 7 的成份波，你也可以把它看成频率是-3 的成份波，没什么区别。

那如果我们希望观察到的最快频率（不分正负频）是 F/2，则取样的间隔要是 Δt=1/F，

或者说，取样的速度要是 F。(等于最快频率的两倍)

如果我们希望观察到的最小频率间隔是 Δf，则取样的总长度要是 T=1/Δf。

练习：

1. 假设希望观察到的最大频率成份是 500 Hz，而且频率间隔为 1/2 Hz，那么时间取样应该要如何才能达成。

2. 透过这个课程，你对傅立叶变换的原理是否有进一步的理解？

答：我的答案如下→

一． 最大频率成分是 500Hz，则取样间隔不能高于

$$\Delta t = \frac{1}{500\times 2} = 0.001s$$

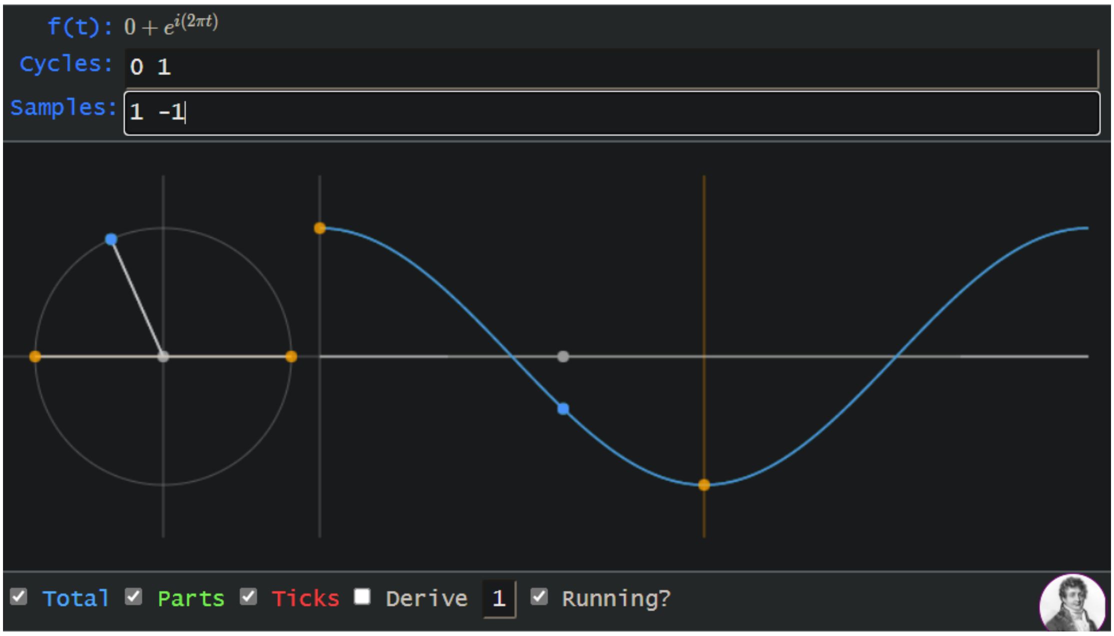
频率间隔是 0.5Hz，则取样总长度不能低于 $T = \frac{1}{0.5} = 2s$

二．通过这次实验，我对傅立叶变换的理解更加深刻了，傅里叶变换表示能将满足一定条件的某个函数表示成三角函数（正弦和/或余弦函数）或者它们的积分的线性组合。在不同的研究领域，傅立叶变换具有多种不同的变体形式，通俗理解就是把看似杂乱无章的信号考虑成由一定振幅、相位、频率的基本正弦（余弦）信号组合而成，是将函数向一组正交的正弦、余弦函数展开，傅里叶变换的目的就是找出这些基本正弦（余弦）信号中振幅较大（能量较高）信号对应的频率，从而找出杂乱无章的信号中的主要振动频率特点。

# #傅立叶变换-12

这个单元是要解释模拟图中的 Derive 选项，会略为复杂一点，如果不能理解，可以略过。

在我们的模拟程式中，有一个 Derive 的选项，把它勾选起来，会跑出一个反方向的成份波，其频率就是 Derive 右边框框的数字。而在波点移动的过程中，每次到达取样点时，会跑出一个红点，它的高度就是反向波的值乘以总和讯号的时间取样值。最后，当图中所有取样时间都跑过之后，模拟程式会把所有红点的高度加总，然后计算其平均值，这也就是闪烁出现的文字的实数部份。



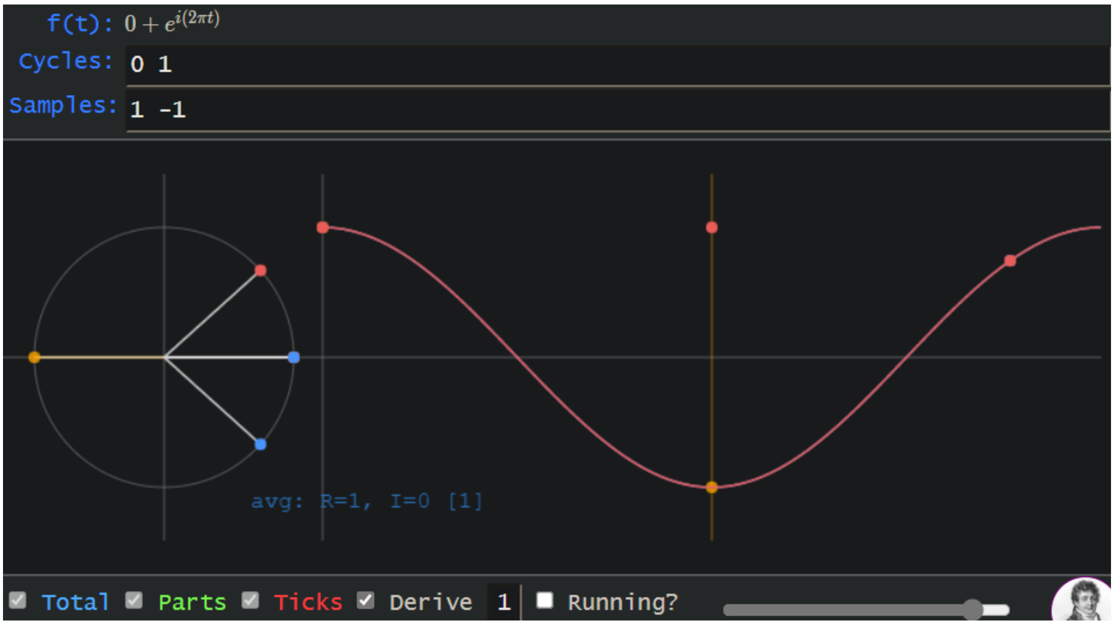

练习：

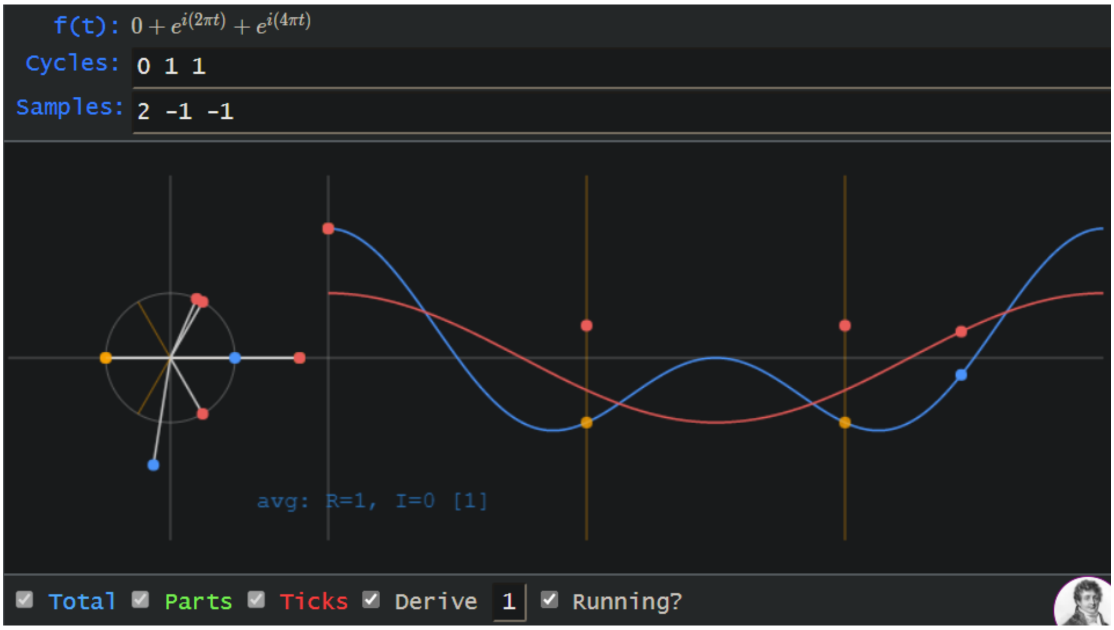
1.你知道这个平均值有何意义吗？

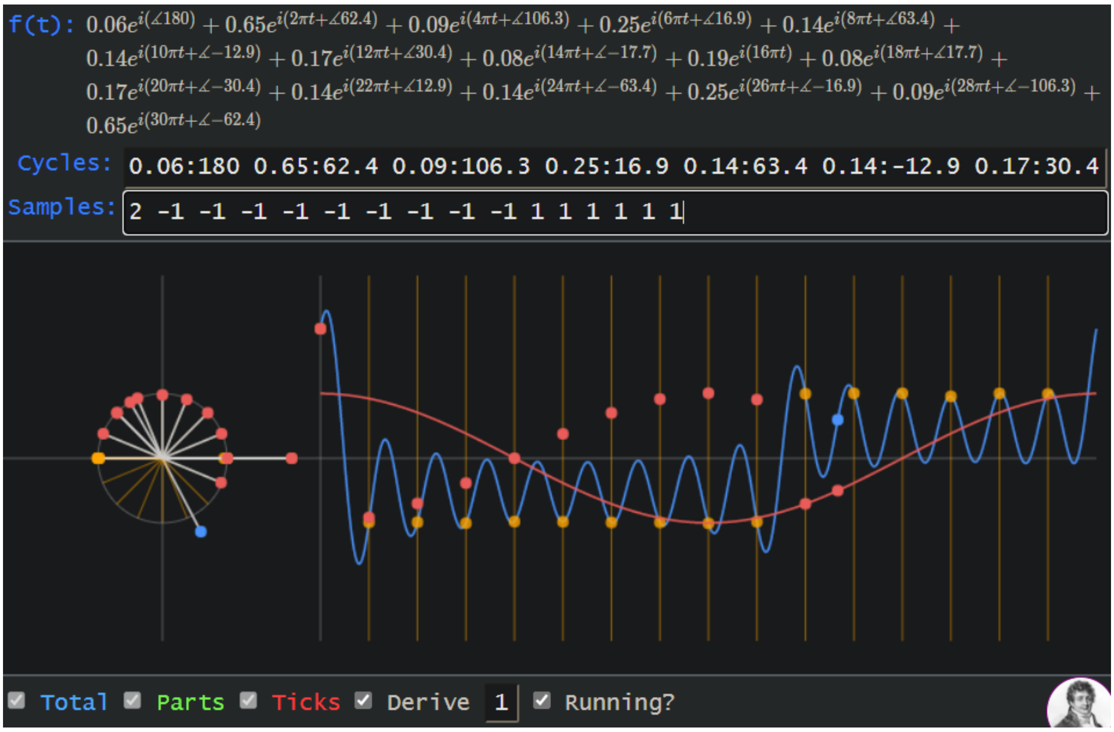
2.其实模拟程式不只显示平均的实数值，同时也会显示一个平均的虚数值，你知道这个虚数值有何意义吗？

3.不只实数和虚数，其实还有一个方括号，里面可能有一个或两个数，你知道它们的意义为何吗？

答：我的答案如下→






由上图可推导出：

一． 通过对波的数量的不断增多 ，进行推断 Derive 可以看出时间取样总和的走势。平均值可以看出波频率总和的平均值。

二． 虚值可以看出不同波频率的方差。

三． 意义：频率方差上限与下限。