Grupa 3

Informatyka i Systemy Informacyjne — MiNI PW

Matematyka Dyskretna I

Studenckie rozwiązania zadań z ćwiczeń z Matematyki Dyskretnej I.
Ćwiczenia z *MD I* w gr. 3 prowadzi dr inż. Tomasz Brengos
i też oto pod jego opieką powstaje ten plik.
Ostatnia aktualizacja: 9 czerwca 2025

Spis treści

Lato 2025

1. Zestaw

Zadanie 1.1 (Krzysztof Wójtowicz, Autor 2). *Na płaszczyźnie poprowadzono n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przechodzą przez ten sam punkt. Wyznacz liczbę:*

1. *obszarów, na które te proste dzielą płaszczyznę;*
2. *obszarów ograniczonych, na które te proste dzielą płaszczyznę.*

1. Zauważymy, że każda kolejna prosta przecina wszystkie poprzednie proste, a co za tym idzie również obszary, które są do nich "przyległe", dzieląc je na dwa. Każda poprzednia prosta ma dwa takie obszary, więc ich ogólna liczba to (odejmujemy obszary wspólne, czyli te "pośrodku" dwóch prostych, by ich nie duplikować):

$$2(n-1) - (n-1-1) = n$$

   Zatem każda kolejna prosta dodaje n nowych obszarów:

$$P(n) = P(n-1) + n = P(0) + \sum_{k=1}^{n} k = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

   gdzie $P(n)$ to liczba obszarów dla n prostych.

2. Liczbę obszarów ograniczonych otrzymamy odejmując liczbę obszarów nieograniczonych z wyniku z podpunku 1. Każda prosta ma dwa "przyległe" obszary nieograniczone, więc liczba wszystkich takich obszarów to $2n$, zatem liczba wszystkich obszarów ograniczonych to:

$$1 + \frac{n(n+1)}{2} - 2n = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

Zadanie 1.2 (Autor 1, Autor 2). *Ciąg Fibonacciego $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zadany jest przez $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ i $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Udowodnij, że:*

1. $F_0 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$;
2. $5|F_{5n}$,
3. $F_n < 2_n$.

1. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 2
3. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 3

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2
3. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 3

Zadanie 1.3 (Autor 1, Autor 2). *Turniej n-wierzchołkowy to dowolny graf skierowany $G = (V, E)$, gdzie $|V| = n$ i w którym $(u, v) \in E$ lub $(v, u) \in E$ dla dowolnych $u, v \in V$. Pokaż, że w dowolnym niepustym turnieju istnieje wierzchołek z którego można "przejść" po krawędziach zgodnie z ich skierowaniem do dowolnego innego wierzchołka w co najwyżej dwóch krokach.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.4 (Autor 1, Autor 2). *Udowodnij, że każdy turniej ma ścieżkę Hamiltona.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.5 (Autor 1, Autor 2). *W każdym polu szachownicy rozmiaru nxn znajduje się jedna osoba. Część osób zarażona jest wirusem grypy. Wirus grypy rozprzestrzenia się w dyskretnych odstępach czasowych w sposób następujący:*

— *osoby zarażone pozostają zarażone,*
— *osoba ulega zarażeniu jeżeli co najmniej dwie sąsiadujące z nią osoby są już zarażone (przez osobę sąsiednią rozumiemy osobę siedzącą z przodu, z tyłu, z lewej lub prawej strony). Wykaż, że jeżeli na początku zarażonych jest istotnie mniej niż n osób, to w każdej chwili przynajmniej jedna osoba pozostaje niezarażona.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.6 (Krzysztof Wójtowicz, Autor 2). *Wykaż, że w grupie n osób istnieją dwie, które mają taką samą liczbę znajomych.*

Dowód:
W grupie n osób każda osoba może mieć od 0 do $n-1$ znajomych, ale wtedy:

1. Jeśli ktoś ma 0 znajomych to maksymalna liczba znajomych to $n-2$, bo osoba mająca $n-1$ znajomych musiałaby być znajomym z osobą, która ma ich 0, co jest niemożliwe
2. Jeśli minimalna liczba znajomych to 1 to wtedy maksymalna liczba znajomych to $n-1$

W obydwu przypadkach mamy $n-1$ wartości oraz n osób. Zatem na mocy zasady Dirichleta conajmniej dwie osoby muszą mieć tę samą liczbę znajomych. ■

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.7 (Autor 1, Autor 2). *Przy okrągłym stole jest n miejsc oznaczonych proporczykami różnych państw. Ambasadorowie tych państw usiedli przy tym stole tak, że żaden z nich nie siadł przy właściwym proporczyku. Wykaż, że można tak obrócić stołem, że co najmniej 2 ambasadorów znajdzie się przed proporczykiem swojego państwa.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.8 (Autor 1, Autor 2). *Pokaż, że w dowolnym ciągu n liczb całkowitych istnieje (niepusty) podciąg kolejnych elementów taki, że suma wyrazów podciągu jest wielokrotnością n.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.9 (Autor 1, Autor 2). *Rozważ dowolną rodzinę podzbiorów zbioru n–elementowego zawierającą więcej niż połowę wszystkich podzbiorów. Wykaż, że w tej rodzinie muszą być dwa zbiory takie, że jeden zawiera się w drugim.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.10 (Autor 1, Autor 2). *Dla n–elementowego zbioru X rozważ pewną rodzinę jego podzbiorów $\mathcal{F}$, gdzie $|F| > n/2$ dla każdego $F \in \mathcal{F}$. Wykaż, że istnieje $x \in X$ należący do co najmniej połowy zbiorów z $\mathcal{F}$.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.11 (Autor 1, Autor 2). *Dana jest kwadratowa szachownica $n \times n$. Dla jakich wartosci $n \geqslant 1$ możemy pokryć tę szachownicę kostkami wielkości 2×2 oraz 3×3.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.12 (Autor 1, Autor 2). *Dana jest kwadratowa szachownica $2n \times 2n$ z wyciętym jednym polem. Wykaż, że dla wszystkich wartości $n \geqslant 1$ możemy pokryć tę szachownicę kostkami w kształcie litery L (czyli kwadrat 2×2 bez jednego pola).*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

2. Zestaw

Zadanie 2.1 (Filip Sajko, Bartłomiej Sokołowski). *Na ile sposobów można ustawić n wież na szachownicy $n \times n$ tak, by żadne dwie nie znajdowały się w polu wzajemnego rażenia.*

Starczy zauważyć, że dla każdej wieży wybieramy rząd i kolumnę w której się znajduje – i tym samym zmniejsza liczbę dostępnych o jeden. Tak więc odpowiedź wynosi:

$$n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = n! \cdot n!$$

Musimy wybrać n pozycji z n^2 dostępnych pól na szachownicy. Wybierając 1 pozycję automatycznie eliminujemy całą kolumnę oraz wiersz, w którym znajduje się wybrane pole.
Pierwszą wieżę wybieramy z $n \times n = n^2$ dostępnych pozycji.
Następną wieżę wybieramy na $(n-1) \times (n-1) = (n-1)^2$ sposobów, ponieważ wykluczamy wybraną już kolumnę i wiersz.
Powtarzając proces n razy dostajemy:

$$n \times n \times (n-1) \times (n-1) \times ... \times 1 \times 1 = n! \times n! = (n!)^2$$

Zadanie 2.2 (Filip Sajko, Autor 2). *Na ile sposobów można ustawić k wież na szachownicy $n \times m$ tak, by żadne dwie nie znajdowały się w polu wzajemnego rażenia.*

Zadanie analogiczne od poprzedniego - z tym, że zmienił nam się rozmiar planszy, a ponadto nie wypełniamy jej całej. Zasada pozostaje jednak ta sama. Na start jednak warto założyć, że $k \leqslant max\{n, m\}$ (choć w sumie jeżeli tak nie jest, to odpowiedź to 0). Mając to już za sobą:

$$n \cdot m \cdot (n-1) \cdot (m-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot (m-k+1)$$

(wykonujemy mnożenie $k + k$ elementów – stąd to $-k + 1$).

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.3 (Filip Sajko, Autor 2). *Znaleźć definicje rekurencyjne następujących ciągów:*

1. *$a(n)$ – liczba słów długości n nad alfabetem $\{0, 1\}$, które nie zawierają dwóch jedynek koło siebie.*
2. *$b(n)$ – liczba różnych pokryć prostokąta o wymiarze $2 \times n$ dominami wymiaru 2×1.*

1. Oczywiście $a(1) = 2$, $a(2) = 3$. Rozważmy słowo n elementowe. Zauważamy, że jeżeli ono kończy sie ono zerem to poprzedzające słowo $n-1$ elementowe jest dowolne. Jeżeli natomiast kończy się jedynką, to poprzedzające słowo $n-2$ elementowe jest dowolne (tak jakby cofamy się krok dalej by mieć dowolność). Stąd: $a(n) = a(n-1) + a(n-2)$.
2. Analogicznie do poprzedniego. Jak wiemy $a(1) = 1$, $a(2) = 2$. Zastanówmy się nad $a(n)$: Rozważamy ciąg o długości n. Jeżeli na końcu jest blok poziomy, to wiemy że powstał on z ciągu długości $a(n-2)$. Jeżeli jest pionowy, to wiemy, że musiał on powstać z ciągu długości $n-1$. A stąd $a(n) = a(n-1) + a(n-2)$.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.4 (Autor 1, Autor 2). *Ile rozwiązań ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$:*

1. *gdzie x_i są liczbami naturalnymi?*
2. *gdzie x_i są dodatnimi liczbami naturalnymi?*

1. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 2

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

Zadanie 2.5 (Autor 1, Autor 2)**.** *Rozważmy czekoladę złożoną z $m \times n$ kostek. Na ile sposobów można wykroić prostokąt złożony z $k \times k$ sąsiadujących ze sobą kostek czekolady?*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.6 (Maciej Wełpa, Autor 2)**.** *(Reguła sumowania po górnym indeksie). Udowodnij, że dla $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Lewa strona: Niech X to zbiór wszystkich k + 1 elementów z ze zbioru n + 1 elementów, $|X| = \binom{n+1}{k+1}$.
Prawa strona: Niech X_j to podzbiory $|k+1|$ elementowe ze zbioru X, które zawierają maksymalny element j+1. np. dla k = 2 $X_3 = \{1, 2, 4\}$, $X_4 = \{1, 3, 5\}$ - ostatni element jest największy, pozostałe dwa to wybrane z {1...j}. Rozważamy j elementów mniejszych od j+1, spośród nich wybieramy k elementów - mamy $\binom{j}{k}$ możliwości. Sumując po j dodajemy do siebie wszystkie możliwości.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.7 (Bartłomiej Sokołowski, Autor 2)**.** *(Reguła sumowania równoległego). Udowodnij, że dla $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n+j}{j} = \binom{n+k+1}{k}$$

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.
k = 0:

$$L = \sum_{j=0}^{0} \binom{n+j}{j} = \binom{n}{0} = 0$$

$$P = \binom{n+0+1}{0} = \binom{n+1}{0} = 0$$

Zał. indukcyjne :

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{j} = \binom{n+k+1}{k}$$

Teza indukcyjna :

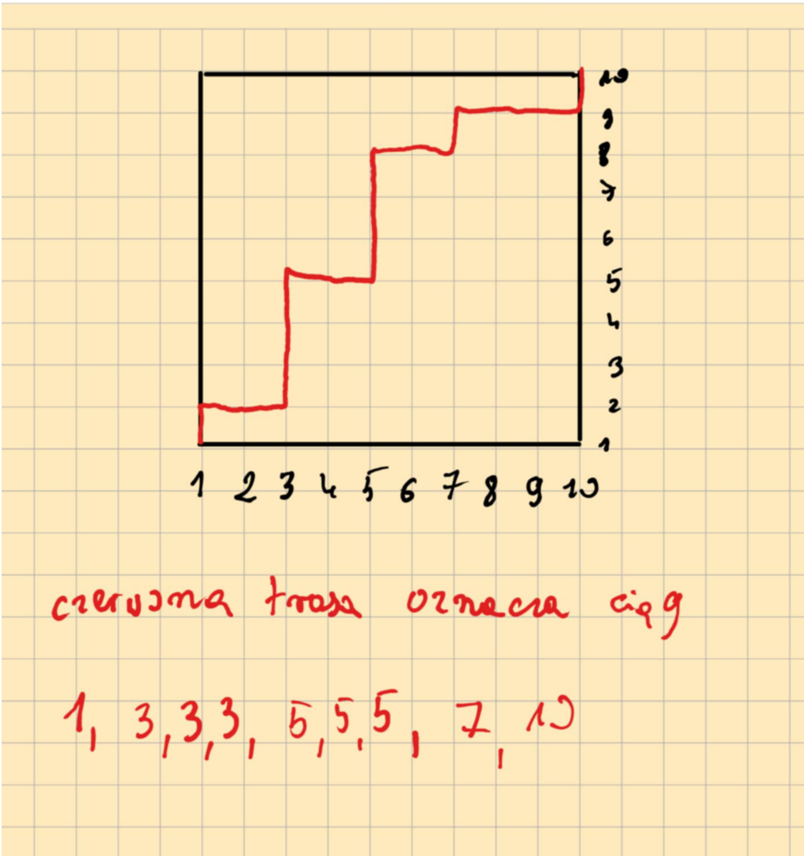
$$\sum_{j=0}^{k+1} \binom{n+j}{j} = \binom{n+k+2}{k+1}$$

$$\sum_{j=0}^{k+1} \binom{n+j}{j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{j} + \binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k+1}{k} + \binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k+2}{k+1}$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.8 (Krzysztof Wojczakowski, Autor 2). *Ile jest funkcji* $f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ *monotonicznych takich, że* $f(i) \leqslant f(j)$ *dla* $i < j$*?*

Zauważmy, że te funkcje tworza tak jakby jakby ciąg , który ma być niemalejący. Możemy to zobrazować jako kratę gdzie wartości na dole to liczby od 1 do n , a idąc do góry mozemy tylko iść w prawo lub w górę. , gdie tyle ile kresek w górę przy danej liczbie to tyle ile razy tą liczbę wybieramy.



Końcowo poszliśmy $n-1$ razy w prawo i $n-1$ razy w górę, czyli mamy $n-1+n-1 = 2n-2$ kroków W rezultacie takich funkcji jest: $\binom{2n-2}{n-1}$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.9 (Krzysztof Wojczakowski, Autor 2). *Ile jest* k*–elementowych podzbiorów zbioru* n*–elementowego, które nie zawierają dwóch sąsiednich liczb?*

Zauważmy, że jeżeli mamy mamy do wybrania k elementow , to równolegle to oznacza , że musimy zrobić $k-1$ "przerw" pomiędzy nimi. Wygląda to tak: _0_0_0_. . . _0_0_ gdzie zero to oznacza ze liczby nie bierzemy, a podłoga oznacza, że bierzemy. Zostaje nam $n-(k+1)$ miejsc do wyboru, czyli $n-k+1$ miejsc. w takim razie ilość k elementowych podzbiorów jest : $\binom{n-k+1}{k}$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.10 (Autor 1, Autor 2). *Posługując się interpretacją kombinatoryczną udowodnij, że:*

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = 2^k \binom{n}{k}$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.11 (Katarzyna Szwed, Autor 2). *Udowodnij poniższe tożsamości na dwa sposoby: posługując się interpretacją kombinatoryczną albo rozwinięciem dwumianu* $(1+x)^n$*:*

1.
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

2.
$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = (n+n^2)2^{n-2}$$

3.
$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

1. Podpunkt 1
   Rozważmy zbiór X taki, że:
   $$X := \{(A, x) : x \in A \wedge A \subset [n]\}$$
   Żeby policzyć jego moc najpierw wybierzemy element $x \in [n]$ na n sposobów, a potem resztę elementów zbioru A, czyli dowolny podzbiór $[n] - \{x\}$
   $$|X| = n \cdot 2^{n-1}$$
   Teraz rozważmy rodzinę zbiorów $\{X_k\}_{k=0}^{n}$:
   $$X_k := \{(A, x) \in X : |A| = k\}$$
   Żeby policzyć moc zbioru X_k (dla danego k) najpierw wybieramy k-elementowy zbiór A będący podzbiorem $[n]$, a potem należący do niego element x:
   $$|X_k| = \binom{n}{k} \cdot k$$
   Rodzina X_k jest rozłącznym pokryciem zbioru X, zatem mamy:
   $$|X| = \sum_{k=0}^{n} |X_k|$$
   $$n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}$$
2. Podpunkt 2
   Rozważmy zbiór X taki, że:
   $$X := \{(A, x_1, x_2) : A \subset [n] \wedge x_1, x_2 \in A\}$$
   Żeby policzyć moc zbioru X osobno policzymy przypadki kiedy $x_1 = x_2$ i $x_1 \neq x_2$.
   Dla $x_1 = x_2$ wybieramy najpierw wyróżniony element na n sposobów, a potem dobieramy resztę elementów z A, dostajemy $n2^{n-1}$.

Dla $x_1 \neq x_2$ wybieramy x_1 na n sposobów, x_2 na $n-1$ sposobów, a potem dobieramy resztę elementów z A, dostajemy $n(n-1)2^{n-2}$. Zatem mamy:

$$|X| = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = (2n + n^2 - n)2^{n-2} = (n + n^2)2^{n-2}$$

Teraz rozważmy rodzinę zbiorów $\{X_k\}_{k=0}^{n}$:

$$X_k := \{(A, x_1, x_2) \in X : |A| = k\}$$

Żeby policzyć moc zbioru X_k (dla danego k) najpierw wybierzemy k-elementowy zbiór $A \subset [n]$, a potem wybierzemy z niego elementy x_1 i x_2 (przy czym mogą być one sobie równe):

$$|X_k| = \binom{n}{k} \cdot k \cdot k$$

Rodzina X_k jest rozłącznym pokryciem zbioru X, więc otrzymujemy:

$$\sum_{k=0}^{n} |X_k| = |X|$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

3. Podpunkt 3
   Rozważmy zbiór X taki, że:
   $$X := \{A \subset [m+n] : |A| = k\}$$
   Zauważmy, że $|X| = \binom{m+n}{k}$.
   Teraz rozważmy rodzinę zbiorów $\{X_i\}_{i=0}^{n}$:
   $$X_i := \{A \in X : |A \cap [m]| = i\}$$
   Żeby policzyć moc zbioru X_i (dla danego i) najpierw wybieramy i elementów z $[m]$, a potem $k-i$ elementów z $\{m+1, m+2, ..., m+n\}$, zatem $|X_i| = \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$.
   Rodzina X_i jest rozłącznym pokryciem zbioru X, więc otrzymujemy:
   $$|X| = \sum_{i=0}^{n} |X_i|$$
   $$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2
3. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 3

3. Zestaw

Zadanie 3.1 (Autor 1, Autor 2). *Wykaż, że dla dowolnego $n \geqslant 1$ istnieje $k \geqslant 1$ takie, że:*

$$S(n,0) < S(n,1) < ... < S(n,k-1) \leqslant S(n,k) > S(n,k+1) > ... > S(n,n)$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 3.2 (Bartłomiej Sokołowski , Autor 2). *Wykaż, że:*

$$B(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B(i)$$

Dowód:
Niech $X = \pi([n])$, wtedy $|X| = B(n)$
Niech $X_i = \{\pi([n]) : \exists_{A \in \pi([n])} (n \in A \wedge |A| = i+1)\}$
Jest to zbiór wszystkich podziałów, które zawierają n oraz mają wielkość i+1
Jest to rozłączne pokrycie zbioru X

$$|X_i| = \binom{n-1}{i} \times B(n-i-1)$$

gdzie $\binom{n-1}{i}$ reprezentuje wybór i elementów z bloku z n, a $B(n-i-1)$ reprezentuje podzielenie pozostałych elementów na bloki.

$$|X| = \sum_{i=0}^{n-1} |X_i| = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \times B(n-i-1) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-i-1} \times B(n-i-1) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \times B(i)$$

Ostatnie przejście to sumowanie ale od drugiej strony, dlatego można je wykonać.

Z lewej strony mamy liczbę podziałów zbioru n-elementowego na niepuste podzbiory, czyli $B(n)$

Spróbujmy uzyskać tą liczbę w inny sposób, najpierw utworzymy blok $k+1$ elementowy, który będzie zawierał element n, a pozostałe elementy podzielimy na dowolny niepusty podzbiór:

Weźmy zbiór $n-1$ elementowy. Wybieramy z niego k elementów, co można zrobić na $\binom{n-1}{k}$ sposobów. Następnie dołączamy do wybranych elementów element n. Pozostałe $n-k-1$ elementów możemy podzielić na $B(n-k-1)$ sposobów
Sumując po k:

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} B(n-k-1) \binom{n-1}{k}$$

Zmieńmy sumowanie na $i = n-k-1$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} B(i) \binom{n-1}{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1} B(i) \binom{n-1}{i}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób prawą stronę tezy, więc

$$B(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B(i)$$

Zadanie 3.3 (Karol Wójcik, Autor 2). *Wykaż, że dla $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi:*

$$S(n, k+1) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{0<i_0<\ldots<i_{k-1}<n} \binom{n}{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{i_{k_2}} \ldots \binom{i_1}{i_0}$$

Zapiszmy tezę jako:

$$(k+1)! \cdot S(n, k+1) = \sum_{0<i_0<\ldots<i_{k-1}<n} \binom{n}{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{i_{k_2}} \ldots \binom{i_1}{i_0}$$

Lewa strona tezy przedstawia liczbę sposobów podziału zbioru n-elementowego na $k+1$ niepustych, uporządkowanych podzbiorów. $S(n, k+1)$ zlicza liczbę podziałów na $k+1$ nieuporządkowanych podzbiorów, a mnożenie przez $(k+1)!$ nadaje tym podzbiorom kolejność.

Spróbujmy skonstruować to w inny sposób. Rozważmy ściśle rosnący ciąg liczb całkowitych i_0, i_1 $\ldots$,i_{k-1}, taki, że $0 < i_0$ oraz $i_{k-1} < n$ Teraz wybierzmy i_{k-1} elementów ze zbioru n-elementowego. Można to zrobić na $\binom{n}{i_{k-1}}$ sposobów, następnie z tego wybranego zbioru i_{k-1} elementowego wybieramy i_{k-2} elementów na $\binom{i_{k-1}}{i_{k-2}}$ sposobów. Kontynuujemy ten proces, aż ze zbioru i_1 elementowego wybierzemy i_0 elementów na $\binom{i_1}{i_0}$ sposobów. W ten sposób uzyskujemy łańcuch zagnieżdżonych podzbiorów:

$$[i_0] \subset [i_1] \subset \cdots \subset [i_{k-1}] \subset [n]$$

gdzie $|[i_j]| = i_j$
Taki łańcuch podzbiorów to uporządkowana kolekcja $k+1$ rozłącznych, niepustych podzbiorów zbioru $[n]$. Iloczyn $\binom{n}{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{i_{k_2}} \ldots \binom{i_1}{i_0}$ zlicza liczbę sposobów przeprowadzania tej sekwencji wyborów. Sumując po wszystich możliwych ciągach i_0, i_1 $\ldots$,i_{k-1} otrzymujemy

$$\sum_{0<i_0<\ldots<i_{k-1}<n} \binom{n}{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{i_{k_2}} \ldots \binom{i_1}{i_0}$$

co obejmuje wszystkie możliwe sposoby podziały zbioru $[n]$ na $k+1$ niepustych, uporządkowanych podzbiorów.
Zatem prawa strona również zlicza liczbę sposobów podziału zbioru n-elementowego na $k+1$ niepustych, uporządkowanych podzbiorów.
Zatem

$$(k+1)! \cdot S(n, k+1) = \sum_{0<i_0<\ldots<i_{k-1}<n} \binom{n}{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{i_{k_2}} \ldots \binom{i_1}{i_0}$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 3.4 (Autor 1, Autor 2). *Rozważ następującą procedurę generującą pewne liczby naturalne $\{a_{i,j}\}_{1 \geqslant i \geqslant j}$:*

1. $a_{0,0} = 1$,
2. $a_{n+1,0} = a_{n,n}$, *dla* $n \geqslant 0$,
3. $a_{n+1,k+1} = a_{n,k} + a_{n+1,k}$, *dla* $n \geqslant k \geqslant 0$.

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 3.5 (Bartosz Wójcik, Autor 2). *Wykaż, że liczba podziałów zbioru $(n-1)$ elementowego jest równa liczbie podziałów zbioru $\{1, ..., n\}$ niezawierających sąsiednich liczb w jednym bloku.*

Niech X będzie zbiorem podziałów zbioru $[n]$, takich że sąsiednie liczby nie znajdują się w jednym bloku. Niech Y będzie zbiorem podziałów zbioru $[n-1]$. Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją taką że jeśli $f(x) = y$:

— Dla każdego i, które należy do tego samego bloku co n w zbiorze x w zbiorze y istnieje blok A taki że $i, i+1 \in A$
— Jeśli i należy do bloku B w zbiorze x, który nie zawiera n to istnieje blok $B' \in y$, taki że $B \subseteq B'$

Przykładowo:

$$\{\{2,4\},\{1,3\}\} \mapsto \{\{1,2,3\}\}$$

Funkcja f jest dobrze zdefiniowana, ponieważ dla każdego i jednoznacznie wyznaczony jest blok, w którym się znajdzie - jeśli i należało do bloku z n, to zostanie przerzucone do bloku z $i+1$ ($i+1$ nie może się znajdować w tym samym bloku co n, ponieważ elementy nie sąsiadują). W przeciwnym wypadku i zostaje w tym bloku co było.

Udowodnimy, że f jest bijekcją. Niech $x_1, x_2 \in X$. Niech każdy blok A_i będzie indeksowany najwyższym elementem w danym bloku. Dla danego podziału x indeksowanie bloków się nie zmienia (poza blokiem A_n, który znika), ponieważ bloki po funkcji f tylko zyskują elementy niższe niż najwyższy element. Załóżmy, że $x_1 \neq x_2$. Jeśli x_1 i x_2 różnią sie na bloku A_n (który zawsze należy do podziału) to $f(x_1)$ będzie miało różny zbiór elementów, które ze sobą sąsiadują. W przeciwnym wypadku istnieją i_1 oraz i_2, które w x_1 są w tym samym bloku, a w x_2 nie (lub na odwrót). Funkcja f nie przestawia tych elementów, więc $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Rozważmy $y \in Y$. Znajdziemy $x \in X$, takie że $f(x) = y$. Rozważmy zbiór S wszystkich elementów, które mają swojego sąsiada w tym samym bloku w y. Skonstruujmy podział x w następujący sposób:

— Utwórzmy nowy blok A_n, taki że $n \in A_n$
— Weźmy najmniejszy element z S i dodajmy go do A_n. Proces powtórzmy dla kolejnego najmniejszego elementu w S, takiego że ten element nie ma już swojego sąsiada w A_n. Procedura kończy się, kiedy skonstruowany podział nie ma już elementów sąsiadujących.

Wtedy $f(x) = y$, więc f jest bijekcją, co kończy dowód.

Rozwiązanie Autora 2.

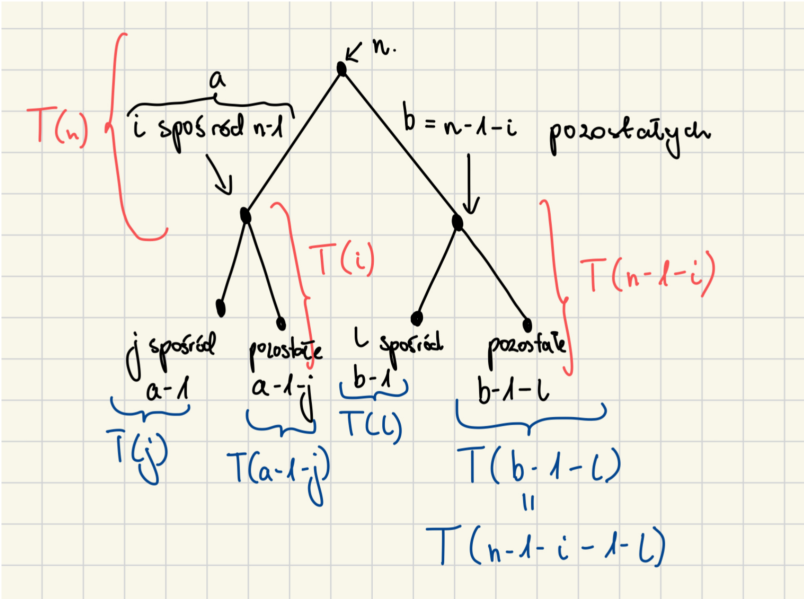
Zadanie 3.6 (Maciej Wełpa, Autor 2). *Udowodnij, że liczba ukorzenionych drzew binarnych na n wierzchołkach to n-ta liczba Catalana.*

Ukorzenione drzewo jest drzewem binarnym, jeśli każdy wierzchołek ma co najwyżej dwójkę dzieci przy czym co najwyżej jedno lewe dziecko i co najwyżej jedno prawe dziecko.

Spośród n wierzchołków, jeden wykorzystujemy na wierzchołek.
Spośród pozostałych n-1 wybieramy i na lewe poddrzewo, a pozostałe n-1-i na prawe. W ten sposób możemy postępować rekurencyjnie
Załóżmy funkcję $T(k)$, która liczy ilość drzew. Jest ona rekurencyjna, bo każdy nowy korzeń może utworzyć nowe drzewo, a ilość korzeni lewo/prawo może się zmieniać, więc aby policzyć wszystkie możliwości skorzystamy z sumy.

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) \cdot T(n-1-i)$$

a to odpowiada rekurencyjnemu wzorowi Catalana.



Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 3.7 (Autor 1, Autor 2). *Triangulacją n – wierzchołkowego wielokąta wypukłego nazywamy zbiór $(n-3)$ wzajemnie nieprzecinających się jego przekątnych, które dzielą jego obszar na $(n-2)$ trójkątów.*

1. *ile jest triangulacji n–wierzchołkowego wielokąta wypukłego?*
2. *Ile jest triangulacji n–wierzchołkowego wielokąta wypukłego, w których każdy trójkąt triangulacji ma przynajmniej jeden bok na brzegu wielokąta?*

1. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 2

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

Zadanie 3.8 (Autor 1, Autor 2). *Wykaż, że liczba drzew etykietowanych na zbiorze $1, ..., n$ wynosi n^{n-2}.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

4. Zestaw

Zadanie 4.1 (Julian Sowiński, Autor 2). *Oblicz $S(n, 2)$.*

Liczba Stirlinga drugiego rodzaju $S(n, k)$ dla $k = 2$ to tak właściwie liczba sposobów na podzielenie zbioru n-elementowego na 2 niepuste podzbiory.

$$S(n,2) = \frac{\overbrace{2^n}^{\text{wszystkie podzbiory}} - \overbrace{2}^{\text{bez pustego i całego}}}{\underbrace{2}_{\text{nie bierzemy pod uwagę kolejności}}} = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 4.2 (Konstanty Sobczyński, Krzysztof Wójtowicz). *Wykaż, że mamy dokładnie*

$$\frac{n!}{1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot ... \cdot n^{\lambda_n} \cdot \lambda_1! \cdot ... \cdot \lambda_n!}$$

permutacji zbioru $[n]$ o typie $1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot ... \cdot n^{\lambda_n}$ (mających λ_i cykli długości i dla $i \in [n]$).

Najpierw rozważmy wszystkie możliwe permutacje zbioru $[n]$. Jest ich $n!$.

Aby uzyskać permutacje o typie $1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot ... \cdot n^{\lambda_n}$, dzielimy nasz ciag (operujemy na jednym ciągu, ale jest to uogólnienie na wszystkie powstałe po $n!$ permutacjach) na kolejno λ_1 cykli długości 1, λ_2 cykli długości 2, ..., λ_n cykli długości n. Jednak aby były to permutacje, to musimy podzielić początkowe $n!$ przez $\lambda_i!$ dla $i \in [n]$, ponieważ cykle długości i są dla nas nierozrónialne, to znaczy, że dla na przykład n = 3 i $\lambda_1 = 3$ otrzymamy (1)(2)(3) oraz (2)(1)(3) jako różne permutacje, ale dla nas to to samo.

Dodatkowo musimy podzielić przez i^{λ_i}, ponieważ w każdej uzyskanej permutacji chwilowo wyróżniamy element pierwszy (tzn przykladowo cykle (13) i (31) są dla nas różne), więc każdy z tych cykli musimy podzielić przez i.

Zatem otrzymujemy wzór:

$$\frac{n!}{1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot ... \cdot n^{\lambda_n} \cdot \lambda_1! \cdot ... \cdot \lambda_n!} \quad \blacksquare$$

.

Niech A będzie zbiorem wszystkich permutacji zbioru $[n]$ o typie jak w poleceniu. Niech $a_i \in [n]$, policzymy ilość cykli długości k: $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ w zbiorze n elementowych:

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{k!}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k}$$

Wybieramy k elementów do cyklu i następnie wybieramy ich kolejność (pierwszy element nie ma znaczenia w cyklu), stąd powyższy wynik.

Policzymy ilość wszystkich możliwych cykli długości $1, 2, \ldots, n$:

$$\underbrace{\frac{n!}{(n-1)! \cdot 1} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-2)! \cdot 1} \cdot \ldots}_{\lambda_1} \cdot \underbrace{\frac{(n-\lambda_1)!}{(n-\lambda_1-2)! \cdot 2} \cdot \ldots}_{\lambda_2} \cdot \ldots = \frac{n!}{1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n}}$$

Czyli mnożymy ilość możliwych cykli k elementowych dla λ_k ich ilości.

W celu otrzymania liczby $|A|$ musimy jeszcze uwzględnić brak znaczenia kolejności występowania cykli w permutacji, liczba możliwych ustawień to:

$$\lambda_1! \cdot \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!$$

Zatem liczba wszystkich permutacji $a \in A$:

$$|A| = \frac{n!}{1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n} \cdot \lambda_1! \cdot \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \quad \blacksquare$$

Zadanie 4.3 (Maciej Wełpa, Konstanty Sobczyński)**.** *Posługując się interpretacją kombinatoryczną, wykaż tożsamość:*

$$S(n+1, m+1) = \sum_k \binom{n}{k} S(k, m)$$

Lewa strona: Podział zbioru n+1-elementowego na m+1 niepustych podzbiorów
Prawa strona: Bierzemy n+1 element i tworzymy z niego nowy zbiór (domyślnie podzbiór nr m+1). Z pozostałych n elementów wybieramy n-k ($\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$), które będą w zbiorze nr m+1 z elementem n+1. Pozostałe k elementów dzielimy na m niepustych podzbiorów. Używamy sumy, aby rozważyć wszystkie możliwości podzielenia elementów.

Rozważmy takie S(n+1,m+1), że $n+1 \in A$. $|A| = k+1$ gdzie $0 \leqslant k \leqslant n$. Wówczas na $\binom{n}{k}$ sposobów możemy wybrać k elementów z n pozostałych elementów zbioru A. pozostałe m podziałów uzyskujemy z $n-k$ elementów. Zatem $S(n-k, m)$ sposobów. Otrzymaliśmy, że: dla $n+1 \in A, |A| = k+1$ mamy $\binom{n}{k} S(k, m)$ sposobów. Zatem sumujemy po k (bo przypadki są rozłączne i pokrywają wszystkie możliwe podziały na m+1 podzbiorów) i mamy:

$$S(n+1, m+1) = \sum_k \binom{n}{k} S(n-k, m) = \sum_k \binom{n}{n-k} S(n-k, m) = \sum_k \binom{n}{k} S(k, m) \quad \blacksquare$$

Zadanie 4.4 (Autor 1, Autor 2)**.** *Zakładając, że zachodzi równość:*

$$(x_1 + ... + x_k)^n = \sum_{n_1 + ... + n_k = n} \binom{n}{n_1 n_2 ... n_k} x_1^{n_1} \cdot ... \cdot x_k^{n_k}$$

podaj ile wynosi $\binom{n}{n_1 n_2 ... n_k}$.

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 4.5 (Katarzyna Szwed, Autor 2)**.** *Wykaż, że*

$$\sum_{i=0}^{n} i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = n! H_n,$$

gdzie $H_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$.

Rozważmy zbiór $X := \{(\sigma, c) : \sigma$ - permutacja zbioru $[n]$, c - wyróżniony cykl z permutacji $\sigma\}$.

Rozważmy rodzinę zbiorów $\{A_i\}_{i=0}^n$ taką, że $A_i = \{(\sigma, c) \in X :$ permutacja σ ma i cykli$\}$. Zauważmy, że $|A_i| = i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$ (najpierw liczymy liczbę permutacji $[n]$ o i cyklach, a potem wybieramy jeden z i cykli).

Rodzina A_i jest rozłącznym pokryciem zbioru X, zatem:

$$|X| = \sum_{i=0}^{n} |A_i| = \sum_{i=0}^{n} i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$$

.

Teraz rozważmy rodzinę zbiorów $\{B_k\}_{k=1}^n$ taką, że $B_k = \{(\sigma, c) \in X : \text{cykl } c \text{ ma } k \text{ elementów}\}$. Zauważmy, że $|B_k| = \binom{n}{k}\frac{k!}{k}(n-k)!$, ponieważ najpierw wybieramy k elementów do cyklu c, potem permutujemy je, ale usuwamy kolejność pierwszego elementu, na koniec permutujemy resztę elementów zbioru $[n]$.

Rodzina B_k jest rozłącznym pokryciem zbioru X, zatem:

$$|X| = \sum_{k=1}^{n} |B_k| = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{k!}{k}(n-k)! = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{k}(n-k)! = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k} = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = n! H_n$$

Otrzymujemy więc:

$$\sum_{i=0}^{n} i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = n! H_n$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 4.6 (Julian Sowiński, Autor 2). *Wykaż, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi:*

1. $x^n = \sum_k S(n,k) x^{\underline{k}}$
2. $x^{\bar{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$.

1.

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) x^{\underline{k}}$$

Dowód indukcyjny:

1) Dla $n = 0$:
L = $x^{\underline{0}} = 1$
P = $S(0,0) \cdot x^{\underline{0}} = 1 \cdot 1 = 1$
L = P
2) Dla $n > 0$:
Założenie:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) x^{\underline{k}}$$

Teza:

$$x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} S(n+1,k) x^{\underline{k}}$$

Rozpoczynamy od lewej strony, używając założenia indukcyjnego:

$$L = x \cdot x^n = x \cdot \sum_{k=0}^{n} S(n,k) x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x \cdot x^{\underline{k}}) \quad (*)$$

Zauważmy, że:

$$\cdot x^{\underline{k}} * x = (x-k+k)x^{\underline{k}} = (x-k)x^{\underline{k}} + kx^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}$$

Kontynuujemy z (*), podstawiając znalezioną tożsamość:

$$\begin{aligned}(*) &= \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} S(n,k) x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=0}^{n} kS(n,k) x^{\underline{k}}\end{aligned}$$

Teraz zmienimy przedziały sumowania:

$$\begin{aligned}
\star &= \sum_{k=1}^{n+1} S(n,k-1)x^{\underline{k}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} kS(n,k)x^{\underline{k}}}_{\text{ponieważ } S(n,n+1)=0} \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} S(n,k-1)x^{\underline{k}}}_{\text{ponieważ } S(n,-1)=0} + \sum_{k=0}^{n+1} kS(n,k)x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (S(n,k-1) + kS(n,k))x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} S(n+1,k)x^{\underline{k}} = P
\end{aligned}$$

Co dowodzi tezy indukcyjnej.

2.

$$x^{\bar{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

Dowód indukcyjny:
1) Dla $n = 0$:
L $= x^{\overline{0}} = 1$
P $= \sum_{k=0}^{0} \left[{0 \atop k}\right] x^k = \left[{0 \atop 0}\right] x^0 = 1 \cdot 1 = 1.$
L = P

2) Dla $n > 0$:
Założenie:

$$x^{\overline{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left[{n-1 \atop k}\right] x^k$$

Teza:

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k$$

Rozpoczynamy od lewej strony:

$$\begin{aligned}
L = x^{\overline{n}} = (x+n-1)x^{\overline{n-1}} &= (x+n-1)\sum_{k=0}^{n-1} \left[{n-1 \atop k}\right] x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (x+n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[{n-1 \atop k}\right] x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] x^k \quad (*)
\end{aligned}$$

Teraz zmieniamy przedziały sumowania, aby później zastosować wzór rekurencyjny:

$$\begin{aligned}
(*) &= \sum_{k=0}^{n} \left[{n-1 \atop k-1}\right] x^k + \sum_{k=0}^{n} (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\left[{n-1 \atop k-1}\right] + (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] \right) x^k
\end{aligned}$$

Stosujemy wzór rekurencyjny dla liczb Stirlinga I rodzaju:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

Podstawiając to do naszego wyrażenia, otrzymujemy:

$$= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = P$$

Co kończy dowód indukcyjny.

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

5. Zestaw

Zadanie 5.1 (Autor 1, Autor 2). *Wykaż zasadę włączeń i wyłączeń korzystając z indukcji po liczbie zbiorów.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 5.2 (Autor 1, Konstanty Sobczyński). *Wykaż, że mamy*

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}(m-j)^n$$

suriekcji ze zbioru $[n]$ *w zbiór* $[m]$.

Rozwiązanie Autora 1.

Skorzystamy z zasady włączeń i wyłączeń. Niech U - zbiór funkcji z $[n]$ w $[m]$.

Niech A_i - zbiór funkcji $[n]$ w $[m]$, $f \in [m]$, takich, że $i \notin Im(f)$.

Niech W - zbiór surjekcji z $[n]$ w $[m]$.

Wówczas $|W| = |U| - |\bigcup_{i=1}^m A_i|$. $|U| = m^n$ - każda funkcja z $[n]$ w $[m]$ ma m możliwości dla każdego elementu, więc m^n.

$|\bigcup_{i=1}^m A_i| = \sum_{\substack{I\subseteq[m]\\ I\neq\emptyset}}(-1)^{|I|+1}|\bigcap_{i\in I} A_i| = \sum_{\substack{I\subseteq[m]\\ I\neq\emptyset}}(-1)^{|I|+1}(m-|I|)^n = \sum_{j=1}^m(-1)^{j+1}\binom{m}{j}(m-j)^n$

Zatem $|W| = m^n - \sum_{j=1}^m(-1)^{j+1}\binom{m}{j}(m-j)^n = \sum_{j=0}^m(-1)^j\binom{m}{j}(m-j)^n \quad \blacksquare$.

Zadanie 5.3 (Bartosz Wójcik, Autor 2). *Ile jest ciągów długości* $2n$ *takich, że każda liczba* $i \in [n]$ *występuje dokładnie dwa razy oraz każde sąsiednie dwa wyrazy są różne.*

Niech Ω będzie zbiorem ciągów długości $2n$, że każda liczba $i \in [n]$ występuje dokładnie dwa razy. Niech $X \subseteq \Omega$ będzie zbiorem ciągów, w których żadne sąsiadujące wyrazy nie są równe (zbiór jak w treści zadania). Niech $A_i \subseteq \Omega$, będzie rodziną zbiorów, takich że:

$$A_i = \{a \in X| \text{ liczba i sąsiaduje ze sobą w ciągu a }\}$$

Zbiór X zawiera wszystkie ciągi, które należą do Ω, ale nie należą do żadnego A_i:

$$X = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i$$

Obliczmy moc sumy A_i:

$$(*)\ |\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq[n]}(-1)^{|I|+1}\ |\bigcap_{i\in I} A_i|$$

Wybierzmy ciąg $a \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Wszystkie $i \in I$ sąsiadują ze sobą, więc można je potraktować jako jeden znak. W ciągu a mamy więc $2n-|I|$ znaków, które można przepermutować na $(2n-|I|)!$ sposobów. Każdą parę $\notin I$ można ustawić na 2 sposoby każdą. Sumarycznie:

$$|\bigcap_{i\in I} A_i| = \frac{(2n-|I|)!}{2^{n-|I|}}$$

Zmieńmy indeksowanie sumy $(*)$ z indeksowania po zbiorach I na indeksowanie po mocy zbioru I. Jest $\binom{n}{i}$ zbiorów $I \subseteq [n], |I| = i$:

$$(*) \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \, |\bigcap_{i \in I} A_i| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \frac{(2n-i)!}{2^{n-i}}$$

Dodatkowo $|\Omega| = \frac{(2n)!}{2^n}$. Otrzymujemy:

$$(*) \; |X| = \frac{(2n)!}{2^n} - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \frac{(2n-i)!}{2^{n-i}} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} \binom{n}{i} \frac{(2n-i)!}{2^{n-i}}$$

co było do policzenia. ■

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 5.4 (Karol Wójcik, Autor 2). *Wykaż, że dla $n \geqslant 3$ zachodzi tożsamość*

$$D(n) = (n-1)(D(n-1) + D(n-2))$$

gdzie $D(n)$ jest liczbą permutacji zboru $[n]$ bez punktów stałych.

Dla $n \geqslant 3$: $D(n) = (n-1)(D(n-1) + D(n-2))$

D(n) - liczba nieporządków

$D(1) = 0$ $D(2) = 1$

D_n – zbiór nieporządków na n elementach

Weźmy zbiór $D_n = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$.
X – zbiór, gdzie n znajduje się w 2-elementowym cyklu,
Y – zbiór, gdzie n znajduje się w $>$ 2-elementowym cyklu

$X = \{(i,n) * \sigma \mid \sigma \text{ jest permutacją na } [n] \setminus \{i,n\} \text{ bez punktów stałych}, i \in [n-1]\}$
$|X| = |[n-1]| \cdot |D(n-2)| = (n-1)D(n-2)$

$Y = \{\sigma \mid \sigma(j) = n, \sigma(n) = i, i \neq j\}$
$|Y| = (n-1)D(n-1)$

$D(n) = |X \cup Y| = (n-1)(D(n-1) + D(n-2))$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 5.5 (Autor 1, Autor 2). *Wykaż (najlepiej kombinatorycznie), że dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi:*

1. $S(n,k) = \sum_{0 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_{n-k} \leqslant k} m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_{n-k}$
2. $c(n,k) = \sum_{0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_{n-k} < k} m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_{n-k}$

1. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 2

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

Zadanie 5.6 (Autor 1, Autor 2)**.** *Ciąg podziałów zbioru* $1, ..., n$ *tworzymy następująco. Startujemy od podziału zawierającego tylko zbiór* $1, ..., n$*. Podział* $(i + 1)$*–wszy otrzymujemy z podziału* i*-tego poprzez:*

1. *wybranie jednego, co najmniej* 2*-elementowego zbioru z podziału* i*-tego i podzielenie go na dwa niepuste podzbiory,*
2. *podzielenie każdego, co najmniej* 2*-elementowego zbioru z podziału* i*-tego na dwa niepuste podzbiory.*

W obu przypadkach procedura kończy swoje działanie jeżeli wszystkie zbiory podziału są jednoelementowe. Na ile sposobów można wykonać powyższe procedury? Na ile sposobów możemy wykonać powyższe procedury zakładając, że po każdym kroku zbiory podziałów zawierają kolejne liczby naturalne?

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

6. Zestaw

7. Zestaw

8. Zestaw

Zadanie 8.1 (Krzysztof Wójtowicz, Autor 2). *Wykorzystaj funkcje tworzące aby policzyć na ile sposobów można wyciągnąć 70 kul z urny zawierającej 30 kul czerwonych, 40 kul niebieskich i 50 kul białych. Kule tego samego koloru są nierozróżnialne. Kolejność wyciągania jest nieistotna.*

Zapiszemy funkcje tworzące $C(x)$, $N(x)$ oraz $B(x)$ odpowiednio dla kul czerwonych(1), niebieskich(2) oraz białych(3):

$$C(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{30} = \frac{1 - x^{31}}{1 - x} \tag{1}$$

$$N(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{40} = \frac{1 - x^{41}}{1 - x} \tag{2}$$

$$B(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{50} = \frac{1 - x^{51}}{1 - x} \tag{3}$$

Stworzymy funkcję $K(x)$, która będzie generować nam ciąg liczby sposóbów wyciągania danej ilości kul, odpowiedzią dla 70 kul będzie współczynnik przy x^{70}.

$$K(x) = C(x) \cdot N(x) \cdot B(x) = \frac{(1 - x^{31})(1 - x^{41})(1 - x^{51})}{(1 - x)^3} =$$
$$= (1 - x^{31} - x^{41} - x^{51} + x^{72} + x^{82} + x^{92} - x^{123}) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k$$

Po wymnożeniu x^{70} wystąpi cztery razy:

1. dla $k = 70$:
$$1 \cdot \binom{72}{2} x^{70} = \binom{72}{2} x^{70}$$
2. dla $k = 39$:
$$-x^{31} \cdot \binom{41}{2} x^{39} = -\binom{41}{2} x^{70}$$
3. dla $k = 29$:
$$-x^{41} \cdot \binom{31}{2} x^{29} = -\binom{31}{2} x^{70}$$
4. dla $k = 19$:
$$-x^{51} \cdot \binom{21}{2} x^{19} = -\binom{21}{2} x^{70}$$

Więc współczynnik przy x^{70} wynosi:

$$\binom{72}{2} - \binom{41}{2} - \binom{31}{2} - \binom{21}{2} = \frac{72!}{2! \cdot 70!} - \frac{41!}{2! \cdot 39!} - \frac{31!}{2! \cdot 29!} - \frac{21!}{2! \cdot 19!} =$$
$$= 2556 - 820 - 465 - 210 = 1061$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 8.2 (Krzysztof Wójtowicz, Autor 2). *Jaki jest współczynnik*

1. *przy* x^5 *w* $(1 - 2x)^{-2}$;
2. *przy* x^4 *w* $\sqrt[3]{1 + x}$;
3. *przy* x^3 *w* $(2 + x)^{3/2}/(1 - x)$?

Podpunkt 1.
Niech:

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-2x} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$$

Wtedy:

$$F'(x) = \frac{1}{(1-2x)^2} = (1-2x)^{-2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (2^n \cdot n \cdot x^{n-1}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\underbrace{2^n \cdot (n+1)}_{a_n} \cdot x^n)$$

Więc:

$$a_5 = 2^5 \cdot 6 = 192$$

Podpunkt 2.
Użyjemy rozwinięcia binomial series:

$$(1+x)^{1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{\frac{1}{3}}{n}}_{a_n} \cdot x^n$$

Więc:

$$a_4 = \binom{\frac{1}{3}}{4} = \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)(\frac{1}{3}-3)}{4!} = \frac{-10}{243}$$

Podpunkt 3.
Rozwiniemy osobno mianownik i licznik:

$$(2+x)^{3/2} = 2^{3/2}(1+\frac{x}{2})^{3/2} = 2\sqrt{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{3}{2}}{n} (\frac{x}{2})^n$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Wtedy:

$$\frac{(2+x)^{3/2}}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$$

Gdzie c_n jest równe (iloczyn Cauchy'ego):

$$c_n = 2\sqrt{2} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{3}{2}}{k} \cdot \frac{1}{2^k}$$

Stąd otrzymujemy:

$$c_3 = 2\sqrt{2} \cdot \sum_{k=0}^{3} \binom{\frac{3}{2}}{k} \frac{1}{2^k} = 2\sqrt{2} \cdot (1 \cdot \binom{\frac{3}{2}}{0} + \frac{1}{2} \cdot \binom{\frac{3}{2}}{1} + \frac{1}{4} \cdot \binom{\frac{3}{2}}{2} + \frac{1}{8} \cdot \binom{\frac{3}{2}}{3}) =$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot (1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{32} - \frac{1}{128}) = 2\sqrt{2} \cdot \frac{235}{128} = \frac{235\sqrt{2}}{64}$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 8.3 (Filip Sajko, Autor 2)**.** *Polecenie*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 8.4 (Filip Sajko, Autor 2). *Polecenie*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 8.5 (Maciej Wełpa, Autor 2). *Niech a_n będzie liczbą trójek (i,j,k) liczb całkowitych takich, że $i \geqslant 0, j \geqslant 1, k \geqslant 1$ oraz $i+3j+3k=n$. Znajdź funkcję tworzącą ciągu $(a_0, a_1, \dots)$ i wyznacz wzór na a_n.*

Równanie: $i+3j+3k=n$, gdzie $i \geqslant 0, j \geqslant 1, k \geqslant 1$.
Funkcja tworząca dla zmiennej i (dla $i \geqslant 0$):

$$I(x) = \sum_{a=0}^{\infty} x^a = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

Funkcja tworząca dla zmiennej j (dla $j \geqslant 1$ i $3j$ w równaniu):

$$J(x) = \sum_{b=1}^{\infty} x^{3b} = x^3 + x^6 + x^9 + \cdots = x^3(1 + x^3 + x^6 + \dots) = x^3 \sum_{c=0}^{\infty} (x^3)^c = \frac{x^3}{1-x^3}$$

Funkcja tworząca dla zmiennej k (dla $k \geqslant 1$ i $3k$ w równaniu):

$$K(x) = \sum_{d=1}^{\infty} x^{3d} = x^3 + x^6 + x^9 + \cdots = \frac{x^3}{1-x^3}$$

Funkcja tworząca $a(x)$ dla liczby rozwiązań równania $i+3j+3k=n$ jest iloczynem funkcji tworzących dla poszczególnych zmiennych:

$$a(x) = I(x) \cdot J(x) \cdot K(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x^3}{1-x^3} \cdot \frac{x^3}{1-x^3}$$

Zatem:

$$a(x) = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^3)^2}$$

Aby znaleźć współczynnik a_n (liczbę rozwiązań), należy rozłożyć $a(x)$ na ułamki proste. Mianownik możemy zapisać jako: $(1-x)(1-x^3)^2 = (1-x)((1-x)(1+x+x^2))^2 = (1-x)(1-x)^2(1+x+x^2)^2 = (1-x)^3(1+x+x^2)^2$ Stąd:

$$a(x) = \frac{x^6}{(1-x)^3(1+x+x^2)^2}$$

Rozkład na ułamki proste dla tego typu wyrażenia będzie zawierał składniki postaci:

$$\frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3} + \frac{Dx+E}{1+x+x^2} + \frac{Fx+G}{(1+x+x^2)^2}$$

Wyznaczenie stałych A, B, C, D, E, F, G jest procesem arytmetycznym i czasochłonnym, wymagającym podstawiania wartości x lub porównywania współczynników. Po wyznaczeniu tych stałych, każdy z ułamków prostych powinno przekształcić się z powrotem do szeregu potęgowego.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 8.6 (Krzysztof Wójtowicz, Autor 2)**.** *Ustal liczbę naturalną $r \geqslant 2$ i niech a_n będzie liczbą r-tupli $(i_1, \ldots, i_r)$ nieujemnych liczb całkowitych takich, że $i_1 + \cdots + i_r = n$*

1. *Wyznacz funkcję tworzącą ciągu $(a_0, a_1, \ldots)$*
2. *Przy pomocy tej funkcji wyznacz wzór na a_n.*

Podpunkt 1.
Funkcja tworzącą ciągu $(a_0, a_1, \ldots)$:

$$A(x) = (1 + x + x^2 + \ldots)^r = (\frac{1}{1-x})^r = \frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n+r-1}{n}}_{a_n} x^n$$

Podpunkt 2.
Wzór na a_n:

$$a_n = \binom{n+r-1}{n}$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 8.7 (Maciej Wełpa (i), Autor 2)**.** *Niech $a(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu $(a_0, a_1, \ldots)$. Wytłumacz dlaczego $a(x) \cdot \frac{1}{1-x}$ jest funkcją tworzącą $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots)$. Korzystając z tej obserwacji wyznacz wzór zwarty na:*

1. $\sum_{k=1}^{n} k^2$
2. $\sum_{k=1}^{n} k^3$

Wyjaśnienie właściwości funkcji tworzącej:
Niech $a(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, czyli $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozważmy funkcję $\frac{1}{1-x}$, która jest funkcją tworzącą ciągu $(1, 1, 1, \ldots)$, czyli $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot x^n$. Iloczyn dwóch funkcji tworzących odpowiada splotowi ciągów, dla których są one funkcjami tworzącymi. Zatem, współczynniki c_n w rozwinięciu $a(x) \cdot \frac{1}{1-x}$ będą wynosić:

Rozważmy iloczyn dwóch szeregów potęgowych: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ oraz $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$. Zgodnie z definicją iloczynu Cauchy'ego, ich iloczyn jest nowym szeregiem, którego n-ty (lub w tym przypadku i-ty) współczynnik jest sumą:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j x^j \cdot x^{i-j}\right)$$

Dalsze przekształcenie:

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j x^i\right)$$

Wyciągając x^i przed wewnętrzną sumę:

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left[x^i \left(\sum_{j=0}^{i} a_j\right)\right]$$

Widać, że suma ta to ciąg sum częściowych szeregu.
Podpunkt 1.
Aby wyznaczyć wzór zwarty na $\sum_{k=1}^{n} k^2$, możemy wykorzystać tę obserwację, że szukamy funkcji tworzącej dla ciągu sum częściowych. Najpierw potrzebujemy funkcji tworzącej dla ciągu $a_k = k^2$. Wiemy, że (różniczkowanie szeregów, a następnie mnożenie przez x):

— $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

— $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$
— $\sum_{k=0}^{\infty} k^2x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ (jest to wynik różniczkowania $\sum kx^k$ i pomnożenia przez x)

Zatem, funkcja tworząca dla ciągu $(k^2)_{k\geqslant 0}$ to $A(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$. Szukamy sumy częściowej $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Oznacza to, że potrzebujemy funkcji tworzącej dla ciągu $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$. Zgodnie z powyższą właściwością, funkcja tworząca dla ciągu sum częściowych $S(x)$ jest równa $A(x) \cdot \frac{1}{1-x}$.

$$S(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$$

Po przekształceniu metodą ułamków prostych i doprowadzeniu do szeregu potęgowego:

$$S(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 8.8 (Konstanty Sobczyński, Autor 2)**.** *Polecenie*

Przykład (i)
$a_0 = 2, a_1 = 3, a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$, Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. Rozpiszmy $a(x)$ jako sumę początkowych wyrazów i reszty szeregu:

$$a(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n$$

Podstawiamy warunki początkowe:

$$a(x) = 2 + 3x + \sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n$$

$$a(x) = 2 + 3x + \sum_{n=2}^{\infty}(3a_{n-2} - 2a_{n-1})x^n$$

$$a(x) = 2 + 3x + \sum_{n=2}^{\infty}(3a_{n-2})x^n - \sum_{n=2}^{\infty}(2a_{n-1})x^n$$

$$a(x) = 2 + 3x + \sum_{n=0}^{\infty}(3a_n)x^{n+2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)x^{n+1}$$

$$a(x) = 2 + 3x + 3x^2\sum_{n=0}^{\infty}(a_n)x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)x^{n+1} + 2xa_0 - 2xa_0$$

$$a(x) = 2 + 3x + 3x^2a(x) - 2\sum_{n=0}^{\infty}(a_n)x^{n+1} + 2xa_0$$

$$a(x) = 2 + 3x + 3x^2a(x) - 2x\sum_{n=0}^{\infty}(a_n)x^n + 2xa_0$$

$$a(x) = 2 + 3x + 3x^2a(x) - 2xa(x) + 2xa_0$$

$$a(x)(1 - 3x^2 + 2x) = 2 + 3x + 4x$$

$$a(x)(1 - 3x^2 + 2x) = 2 + 7x$$

$$a(x) = \frac{2 + 7x}{1 - 3x^2 + 2x}$$

Przykład (ii)
$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozpiszmy $a(x)$ jako sumę początkowych wyrazów i reszty szeregu:

$$a(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

$$a(x) = 2 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

$$a(x) = 2 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} (4a_{n-1} - 4a_{n-2}) x^n$$

$$a(x) = 2 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 4a_{n-2} x^n$$

$$a(x) = 2 + 2x + 4\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} - 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$a(x) = 2 + 2x + 4\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + 4xa_o - 4xa_0 - 4x^2 a(x)$$

$$a(x) = 2 + 2x + 4x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 4xa_0 - 4x^2 a(x)$$

$$a(x) = 2 + 2x + 4xa(x) - 4x^2 a(x)$$

$$a(x)(1 - 4x + 4x^2) = 2 + 2x$$

$$a(x)(1 - 4x + 4x^2) = 2 + 2x$$

$$a(x) = \frac{2 + 2x}{(1 - 4x + 4x^2)}$$

Przykład (iii)
$a_0 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3$, Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozpiszmy $a(x)$ jako sumę początkowych wyrazów i reszty szeregu:

$$a(x) = a_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Podstawiamy warunki początkowe:

$$a(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

$$a(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n-1} + 3) x^n$$

$$a(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n-1} + 3) x^n$$

$$a(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + 3\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$$a(x) = 1 + 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \frac{3}{1 - x}$$

$$a(x) = 1 + 2xa(x) + \frac{3}{1-x}$$

$$a(x)(1-2x) = 1 + \frac{3}{1-x}$$

$$a(x) = \frac{1 + \frac{3}{1-x}}{(1-2x)}$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 8.9 (Konstanty Sobczyński (i-iii), Julian Sowiński (iv-vi), Maciej Wełpa (vii-ix), Autor 2)**.**
Rozwiąż równania rekurencyjne:

1. $a_0 = 4, a_1 = 4, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$,
2. $a_0 = 2, a_1 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$,
3. $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 1$,
4. $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$,
5. $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$,
6. $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 11, a_{n+3} = 3a_{n+2} + 2a_{n+1} - 2a_n$,
7. $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n$,
8. $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - n$,
9. $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 4^n$.

Rozwiązania Rekurencji Liniowych za Pomocą Funkcji Tworzących

Poniżej przedstawiono rozwiązania podanych rekurencji liniowych z wykorzystaniem funkcji tworzących, odwzorowując styl i kolejność kroków z przedstawionych zdjęć.

Przykład (i)

Dana rekurencja: $a_0 = 4, a_1 = 4,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \quad \text{dla } n \geqslant 2$.

Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozpiszmy $a(x)$ jako sumę początkowych wyrazów i reszty szeregu:

$$a(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Podstawiamy warunki początkowe $a_0 = 4, a_1 = 4$:

$$a(x) = 4 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Teraz, bazując na rekurencji, podstawiamy za a_n w sumie (dla $n \geqslant 2$, $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$):

$$= 4 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + 6a_{n-2})x^n$$

Rozbijamy sumę:

$$= 4 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1}x^n) + 6\sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2}x^n)$$

$$= 4 + 4x + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x^{n+1}) + 6\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^{n+2})$$

$$= 4 + 4x + (xa_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x^{n+1}) - xa_0) + 6x^2\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)$$

$$= 4 + 4x + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^{n+1}) - xa_0 + 6x^2 a(x)$$

$$= 4 + 4x + x\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n) - 4x + 6x^2 a(x)$$
$$= 4 + 4x + xa(x) - 4x + 6x^2 a(x)$$
$$a(x) = 4 + xa(x) + 6x^2 a(x)$$
$$a(x)(1 - x - 6x^2) = 4$$
$$a(x) = \frac{4}{1 - x - 6x^2}$$

Przykład (ii)
Dana rekurencja: $a_0 = 2, a_1 = 2,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \quad$ dla $n \geqslant 2$.

Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozpiszmy $a(x)$ jako sumę początkowych wyrazów i reszty szeregu:

$$a(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Podstawiamy warunki początkowe $a_0 = 2, a_1 = 2$:

$$a(x) = 2 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

$$a(x) = 2 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty}(2a_{n-1} - a_{n-2})x^n$$
$$= 2 + 2x + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$$
$$= 2 + 2x + 2xa_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} - 2xa_0 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$
$$= 2 + 2x + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - 4x - x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
$$= 2 + 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 2x - x^2 a(x)$$
$$= 2 + 2xa(x) - 2x - x^2 a(x)$$
$$a(x) = 2 + 2xa(x) - 2x - x^2 a(x)$$
$$a(x)(1 - 2x + x^2) = 2 - 2x$$
$$a(x) = \frac{2 - 2x}{1 - 2x + x^2}$$

Przykład (iii)
$a_0 = 0, a_1 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 1 \quad$ dla $n \geqslant 2$.

Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozpiszmy $a(x)$ jako sumę początkowych wyrazów i reszty szeregu:

$$a(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Podstawiamy warunki początkowe $a_0 = 0, a_1 = 1$:

$$a(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-1} + a_{n-2} + 1)x^n$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} + \frac{1}{1-x}$$

$$= x + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} + \frac{1}{1-x}$$

$$= x + xa(x) + x^2 a(x) + \frac{1}{1-x}$$

$$a(x) - xa(x) - x^2 a(x) = x + \frac{1}{1-x}$$

$$a(x)(1 - x - x^2) = x + \frac{1}{1-x}$$

$$a(x) = \frac{x + \frac{1}{1-x}}{1 - x - x^2}$$

Przykład (vii)
Dana rekurencja: $a_0 = 1, a_1 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n \quad$ dla $n \geqslant 0$.

Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozpiszmy $a(x)$ jako sumę początkowych wyrazów i reszty szeregu:

$$a(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Podstawiamy warunki początkowe $a_0 = 1, a_1 = 1$:

$$a(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Teraz, bazując na rekurencji, podstawiamy za a_n w sumie (dla $n \geqslant 2$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^{n-2}$):

$$= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^{n-2})x^n$$

Rozbijamy sumę na trzy części i wyciągamy odpowiednie potęgi x przed sumy, a następnie zmieniamy indeksy:

$$= 1 + x + x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + 2x^2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} + x^2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-2}x^{n-2}$$

Wprowadzamy nowy indeks k (lub j jak na zdjęciu):

$$x\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = x(a(x) - a_0)$$

$$2x^2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 2x^2 a(x)$$

$$x^2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = x^2\frac{1}{1-(-x)} = \frac{x^2}{1+x}$$

Podstawiamy te wyrażenia z powrotem do $a(x)$ i warunek początkowy $a_0 = 1$:

$$a(x) = 1 + x + x(a(x) - 1) + 2x^2 a(x) + \frac{x^2}{1+x}$$

$$a(x) = 1 + x + xa(x) - x + 2x^2 a(x) + \frac{x^2}{1+x}$$

Przenosząc wszystkie wyrazy zawierające $a(x)$ na lewą stronę i pozostałe na prawą:

$$a(x)(1 - x - 2x^2) = 1 + \frac{x^2}{1+x}$$

Upraszczając prawą stronę i rozkładając mianownik po lewej stronie:

$$a(x)(1 - x - 2x^2) = \frac{1 + x + x^2}{1+x}$$

Ostateczna postać funkcji tworzącej $a(x)$:

$$a(x) = \frac{1 + x + x^2}{(1+x)(1 - x - 2x^2)} = \frac{1 + x + x^2}{(1+x)^2(1-2x)}$$

Rozkład na ułamki proste (jak na zdjęciu):

$$\frac{1 + x + x^2}{(1+x)^2(1-2x)} = \frac{A}{(1+x)^2} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{1-2x}$$

Z wartości podanych na zdjęciu, otrzymujemy: $A = -1/3$ $B = 1/9$ $C = 7/9$ Zatem:

$$a(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{1-2x}$$

Przekształcamy każdy człon z powrotem na szereg potęgowy:

$$a(x) = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n x^n + \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{7}{9} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

Grupujemy współczynniki przy x^n (tak jak na zdjęciu):

$$a_n = \left(-\frac{1}{3}(n+1) + \frac{1}{9}\right)(-1)^n + \frac{7}{9}2^n$$

$$a_n = \left(\frac{-3(n+1) + 1}{9}\right)(-1)^n + \frac{7}{9}2^n$$

$$a_n = \frac{(-3n - 3 + 1)}{9}(-1)^n + \frac{7}{9}2^n$$

$$a_n = \frac{(-3n - 2)(-1)^n + 7 \cdot 2^n}{9}$$

Można to również zapisać jako:

$$a_n = \frac{(3n + 2)(-1)^{n+1} + 7 \cdot 2^n}{9}$$

Przykład (viii)
Dana rekurencja: $a_0 = 1, a_1 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - n \quad \text{dla } n \geqslant 0.$

Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozpiszmy $a(x)$ jako sumę początkowych wyrazów i reszty szeregu:

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Podstawiamy warunki początkowe $a_0 = 1, a_1 = 1$:

$$a(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Teraz, bazując na rekurencji, podstawiamy za a_n w sumie (dla $n \geqslant 2$, $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} - (n-2)$):

$$= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + 6a_{n-2} - (n-2))x^n$$

Rozbijamy sumę na trzy części i wyciągamy odpowiednie potęgi x przed sumy, a następnie zmieniamy indeksy:

$$= 1 + x + x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + 6x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} - x^2 \sum_{n=2}^{\infty} (n-2)x^{n-2}$$

Wprowadzamy nowy indeks k:

$$x\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = x(a(x) - a_0)$$

$$6x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 6x^2 a(x)$$

Dla członu z $(n-2)$:

$$x^2 \sum_{n=2}^{\infty} (n-2)x^{n-2} = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = x^2 \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

Podstawiamy te wyrażenia z powrotem do $a(x)$ i warunek początkowy $a_0 = 1$:

$$a(x) = 1 + x + x(a(x) - 1) + 6x^2 a(x) - \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

$$a(x) = 1 + x + xa(x) - x + 6x^2 a(x) - \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

Przenosząc wszystkie wyrazy zawierające $a(x)$ na lewą stronę i pozostałe na prawą:

$$a(x)(1 - x - 6x^2) = 1 - \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

Upraszczając prawą stronę:

$$a(x)(1 - x - 6x^2) = \frac{(1-x)^2 - x^3}{(1-x)^2} = \frac{1 - 2x + x^2 - x^3}{(1-x)^2}$$

Ostateczna postać funkcji tworzącej $a(x)$:

$$a(x) = \frac{1 - 2x + x^2 - x^3}{(1 - x - 6x^2)(1-x)^2}$$

Rozkładamy mianownik $1-x-6x^2 = -(6x^2+x-1) = -(3x-1)(2x+1) = (1-3x)(2x+1)$.

$$a(x) = \frac{1-2x+x^2-x^3}{(1-3x)(2x+1)(1-x)^2}$$

Rozkład na ułamki proste (jak na zdjęciu):

$$a(x) = \frac{11}{20(1-3x)} + \frac{19}{45(1+2x)} - \frac{5}{36(1-x)} - \frac{1}{6(1-x)^2}$$

Przekształcamy każdy człon z powrotem na szereg potęgowy:

$$a(x) = \frac{11}{20}\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n + \frac{19}{45}\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n - \frac{5}{36}\sum_{n=0}^{\infty}x^n - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

Grupujemy współczynniki przy x^n:

$$a_n = \frac{11}{20}3^n + \frac{19}{45}(-2)^n - \frac{5}{36} - \frac{1}{6}(n+1)$$

Sprowadzamy do wspólnego mianownika 180:

$$a_n = \frac{9\cdot 11\cdot 3^n}{180} + \frac{4\cdot 19\cdot(-2)^n}{180} - \frac{5\cdot 5}{180} - \frac{30(n+1)}{180}$$

$$a_n = \frac{99\cdot 3^n + 76\cdot(-2)^n - 25 - 30n - 30}{180}$$

$$a_n = \frac{99\cdot 3^n + 76\cdot(-2)^n - 30n - 55}{180}$$

Przykład (ix)
Dana rekurencja: $a_0 = 1, a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 4^n \quad$ dla $n \geqslant 0$.

Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Zgodnie z widocznym stylem, zaczynamy od $a(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$:

$$a(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(2a_{n-1} + 4^{n-1})x^n$$

Podstawiamy $a_0 = 1$:

$$a(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1}x^n$$

Przekształcamy sumy:

$$= 1 + 2x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + x\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1}x^{n-1}$$

Zmieniamy indeksy na $k = n-1$:

$$= 1 + 2x\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + x\sum_{k=0}^{\infty}(4x)^k$$

Wyrażamy sumy za pomocą $a(x)$ i szeregu geometrycznego:

$$a(x) = 1 + 2xa(x) + x\frac{1}{1-4x}$$

Przenosząc wszystkie wyrazy zawierające $a(x)$ na lewą stronę i pozostałe na prawą:

$$a(x)(1-2x) = 1 + \frac{x}{1-4x}$$

Upraszczając prawą stronę:

$$a(x)(1-2x) = \frac{1-4x+x}{1-4x} = \frac{1-3x}{1-4x}$$

Ostateczna postać funkcji tworzącej $a(x)$:

$$a(x) = \frac{1-3x}{(1-4x)(1-2x)}$$

Rozkład na ułamki proste (jak na zdjęciu):

$$a(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-2x} + \frac{3}{2}\frac{1}{1-4x}$$

Kontynuując:

$$a(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n$$

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2}4^n\right)x^n$$

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2^{n-1} + 2^{2n-1})x^n$$

Zatem wzór na n-ty wyraz ciągu to:

$$a_n = 2^{n-1} + 2^{2n-1}$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 8.10 (Karol Wójcik, Autor 2). *Polecenie*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.