Grupa 3

Informatyka i Systemy Informacyjne — MiNI PW

Matematyka Dyskretna I

Studenckie rozwiązania zadań z ćwiczeń z Matematyki Dyskretnej I.
Ćwiczenia z *MD I* w gr. 3 prowadzi dr inż. Tomasz Brengos
i też oto pod jego opieką powstaje ten plik.
Ostatnia aktualizacja: 30 czerwca 2025

Spis treści

Lato 2025

1. Zestaw

Zadanie 1.1 (Krzysztof Wójtowicz, Autor 2)**.** *Na płaszczyźnie poprowadzono n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przechodzą przez ten sam punkt. Wyznacz liczbę:*

1. *obszarów, na które te proste dzielą płaszczyznę;*
2. *obszarów ograniczonych, na które te proste dzielą płaszczyznę.*

1. Zauważymy, że każda kolejna prosta przecina wszystkie poprzednie proste, a co za tym idzie również obszary, które są do nich "przyległe", dzieląc je na dwa. Każda poprzednia prosta ma dwa takie obszary, więc ich ogólna liczba to (odejmujemy obszary wspólne, czyli te "pośrodku" dwóch prostych, by ich nie duplikować):

$$2(n-1)-(n-1-1)=n$$

Zatem każda kolejna prosta dodaje n nowych obszarów:

$$P(n)=P(n-1)+n=P(0)+\sum_{k=1}^{n}k=1+\frac{n(n+1)}{2}$$

gdzie $P(n)$ to liczba obszarów dla n prostych.

2. Liczbę obszarów ograniczonych otrzymamy odejmując liczbę obszarów nieograniczonych z wyniku z podpunku 1. Każda prosta ma dwa "przyległe" obszary nieograniczone, więc liczba wszystkich takich obszarów to $2n$, zatem liczba wszystkich obszarów ograniczonych to:

$$1+\frac{n(n+1)}{2}-2n=\frac{n^2-3n+2}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

Zadanie 1.2 (Autor 1, Autor 2)**.** *Ciąg Fibonacciego $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zadany jest przez $F_0=0$, $F_1=1$ i $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. Udowodnij, że:*

1. $F_0+...+F_n=F_{n+2}-1$;
2. $5|F_{5n}$,
3. $F_n<2_n$.

1. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 2
3. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 3

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2
3. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 3

Zadanie 1.3 (Autor 1, Autor 2)**.** *Turniej n-wierzchołkowy to dowolny graf skierowany $G=(V,E)$, gdzie $|V|=n$ i w którym $(u,v)\in E$ lub $(v,u)\in E$ dla dowolnych $u,v\in V$. Pokaż, że w dowolnym niepustym turnieju istnieje wierzchołek z którego można "przejść" po krawędziach zgodnie z ich skierowaniem do dowolnego innego wierzchołka w co najwyżej dwóch krokach.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.4 (Autor 1, Autor 2). *Udowodnij, że każdy turniej ma ścieżkę Hamiltona.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.5 (Autor 1, Autor 2). *W każdym polu szachownicy rozmiaru nxn znajduje się jedna osoba. Część osób zarażona jest wirusem grypy. Wirus grypy rozprzestrzenia się w dyskretnych odstępach czasowych w sposób następujący:*

— *osoby zarażone pozostają zarażone,*
— *osoba ulega zarażeniu jeżeli co najmniej dwie sąsiadujące z nią osoby są już zarażone (przez osobę sąsiednią rozumiemy osobę siedzącą z przodu, z tyłu, z lewej lub prawej strony). Wykaż, że jeżeli na początku zarażonych jest istotnie mniej niż n osób, to w każdej chwili przynajmniej jedna osoba pozostaje niezarażona.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.6 (Krzysztof Wójtowicz, Autor 2). *Wykaż, że w grupie n osób istnieją dwie, które mają taką samą liczbę znajomych.*

Dowód:
W grupie n osób każda osoba może mieć od 0 do $n-1$ znajomych, ale wtedy:

1. Jeśli ktoś ma 0 znajomych to maksymalna liczba znajomych to $n-2$, bo osoba mająca $n-1$ znajomych musiałaby być znajomym z osobą, która ma ich 0, co jest niemożliwe
2. Jeśli minimalna liczba znajomych to 1 to wtedy maksymalna liczba znajomych to $n-1$

W obydwu przypadkach mamy $n-1$ wartości oraz n osób. Zatem na mocy zasady Dirichleta conajmniej dwie osoby muszą mieć tę samą liczbę znajomych. ■

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.7 (Karol Sęk, Autor 2). *Przy okrągłym stole jest n miejsc oznaczonych proporczykami różnych państw. Ambasadorowie tych państw usiedli przy tym stole tak, że żaden z nich nie siadł przy właściwym proporczyku. Wykaż, że można tak obrócić stołem, że co najmniej 2 ambasadorów znajdzie się przed proporczykiem swojego państwa.*

Rozważmy permutację $f : [n] \to [n]$, taką że $\forall_{k\in[n]} f(k) \neq k$.
Funkcja f reprezentuje przyporządkowanie ambasadorów do proporczyków.
Rozważmy permutacje $g : [n] \to [n]$ o wzorze $(12345...(n-1)n)$.
Niech $i \in \mathbb{N}$, $f_i = f \circ g \circ g ... \circ g$ (złożenie f z g i razy);
Zauważmy, że $\forall_{k\in[n]}\ \exists_{i\in[n]}\ f_i(k) = k$.
W kontekście treści zadania, oznacza to, że dla każdego ambasadora istnieje obrót o i miejsc, taki, że ten ambasador siedzi przy własciwym proporczyku.
Zauważmy, że $f_n = f\ f_{n+1} = f_1\ f_{n+2} = f_2$ ...
Oznacza to, że istnieje dokładnie tylko $n-1$ różnych funkcji f_i.
Jeżeli przyporządkujemy każdej liczbie $k \in [n]$ liczbę $i \in [n-1]$, taką, że $f_i(k) = k$, to na mocy ... zasady Dirichleta będą istnieć dwie liczby z takim samym przyporządkowanym i.
■

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.8 (Autor 1, Autor 2)**.** *Pokaż, że w dowolnym ciągu n liczb całkowitych istnieje (niepusty) podciąg kolejnych elementów taki, że suma wyrazów podciągu jest wielokrotnością n.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.9 (Autor 1, Autor 2)**.** *Rozważ dowolną rodzinę podzbiorów zbioru n–elementowego zawierającą więcej niż połowę wszystkich podzbiorów. Wykaż, że w tej rodzinie muszą być dwa zbiory takie, że jeden zawiera się w drugim.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.10 (Autor 1, Autor 2)**.** *Dla n–elementowego zbioru X rozważ pewną rodzinę jego podzbiorów $\mathcal{F}$, gdzie $|F| > n/2$ dla każdego $F \in \mathcal{F}$. Wykaż, że istnieje $x \in X$ należący do co najmniej połowy zbiorów z $\mathcal{F}$.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.11 (Autor 1, Autor 2)**.** *Dana jest kwadratowa szachownica $n \times n$. Dla jakich wartosci $n \geqslant 1$ możemy pokryć tę szachownicę kostkami wielkości 2×2 oraz 3×3.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 1.12 (Autor 1, Autor 2)**.** *Dana jest kwadratowa szachownica $2n \times 2n$ z wyciętym jednym polem. Wykaż, że dla wszystkich wartości $n \geqslant 1$ możemy pokryć tę szachownicę kostkami w kształcie litery L (czyli kwadrat 2×2 bez jednego pola).*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

2. Zestaw

Zadanie 2.1 (Filip Sajko, Bartłomiej Sokołowski). *Na ile sposobów można ustawić n wież na szachownicy $n \times n$ tak, by żadne dwie nie znajdowały się w polu wzajemnego rażenia.*

Starczy zauważyć, że dla każdej wieży wybieramy rząd i kolumnę w której się znajduje – i tym samym zmniejsza liczbę dostępnych o jeden. Tak więc odpowiedź wynosi:

$$n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = n! \cdot n!$$

Musimy wybrać n pozycji z n^2 dostępnych pól na szachownicy. Wybierając 1 pozycję automatycznie eliminujemy całą kolumnę oraz wiersz, w którym znajduje się wybrane pole.
Pierwszą wieżę wybieramy z $n \times n = n^2$ dostępnych pozycji.
Następną wieżę wybieramy na $(n-1) \times (n-1) = (n-1)^2$ sposobów, ponieważ wykluczamy wybraną już kolumnę i wiersz.
Powtarzając proces n razy dostajemy:

$$n \times n \times (n-1) \times (n-1) \times ... \times 1 \times 1 = n! \times n! = (n!)^2$$

Zadanie 2.2 (Filip Sajko, Autor 2). *Na ile sposobów można ustawić k wież na szachownicy $n \times m$ tak, by żadne dwie nie znajdowały się w polu wzajemnego rażenia.*

Zadanie analogiczne od poprzedniego - z tym, że zmienił nam się rozmiar planszy, a ponadto nie wypełniamy jej całej. Zasada pozostaje jednak ta sama. Na start jednak warto założyć, że $k \leqslant max\{n, m\}$ (choć w sumie jeżeli tak nie jest, to odpowiedź to 0). Mając to już za sobą:

$$n \cdot m \cdot (n-1) \cdot (m-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot (m-k+1)$$

(wykonujemy mnożenie $k + k$ elementów – stąd to $-k+1$).

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.3 (Filip Sajko, Autor 2). *Znaleźć definicje rekurencyjne następujących ciągów:*

1. *$a(n)$ – liczba słów długości n nad alfabetem $\{0, 1\}$, które nie zawierają dwóch jedynek koło siebie.*
2. *$b(n)$ – liczba różnych pokryć prostokąta o wymiarze $2 \times n$ dominami wymiaru 2×1.*

1. Oczywiście $a(1) = 2$, $a(2) = 3$. Rozważmy słowo n elementowe. Zauważamy, że jeżeli ono kończy sie ono zerem to poprzedzające słowo $n-1$ elementowe jest dowolne. Jeżeli natomiast kończy się jedynką, to poprzedzające słowo $n-2$ elementowe jest dowolne (tak jakby cofamy się krok dalej by mieć dowolność). Stąd: $a(n) = a(n-1) + a(n-2)$.
2. Analogicznie do poprzedniego. Jak wiemy $a(1) = 1$, $a(2) = 2$. Zastanówmy się nad $a(n)$: Rozważamy ciąg o długości n. Jeżeli na końcu jest blok poziomy, to wiemy że powstał on z ciągu długości $a(n-2)$. Jeżeli jest pionowy, to wiemy, że musiał on powstać z ciągu długości $n-1$. A stąd $a(n) = a(n-1) + a(n-2)$.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.4 (Autor 1, Autor 2). *Ile rozwiązań ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$:*

1. *gdzie x_i są liczbami naturalnymi?*
2. *gdzie x_i są dodatnimi liczbami naturalnymi?*

1. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 2

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

Zadanie 2.5 (Autor 1, Autor 2)**.** *Rozważmy czekoladę złożoną z $m \times n$ kostek. Na ile sposobów można wykroić prostokąt złożony z $k \times k$ sąsiadujących ze sobą kostek czekolady?*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.6 (Maciej Wełpa, Autor 2)**.** *(Reguła sumowania po górnym indeksie). Udowodnij, że dla $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Lewa strona: Niech X to zbiór wszystkich k + 1 elementów z ze zbioru n + 1 elementów, $|X| = \binom{n+1}{k+1}$.
Prawa strona: Niech X_j to podzbiory $|k+1|$ elementowe ze zbioru X, które zawierają maksymalny element j+1. np. dla k = 2 $X_3 = \{1, 2, 4\}$, $X_4 = \{1, 3, 5\}$ - ostatni element jest największy, pozostałe dwa to wybrane z {1...j}. Rozważamy j elementów mniejszych od j+1, spośród nich wybieramy k elementów - mamy $\binom{j}{k}$ możliwości. Sumując po j dodajemy do siebie wszystkie możliwości.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.7 (Bartłomiej Sokołowski, Autor 2)**.** *(Reguła sumowania równoległego). Udowodnij, że dla $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n+j}{j} = \binom{n+k+1}{k}$$

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.
k = 0:

$$L = \sum_{j=0}^{0} \binom{n+j}{j} = \binom{n}{0} = 0$$

$$P = \binom{n+0+1}{0} = \binom{n+1}{0} = 0$$

Zał. indukcyjne :

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{j} = \binom{n+k+1}{k}$$

Teza indukcyjna :

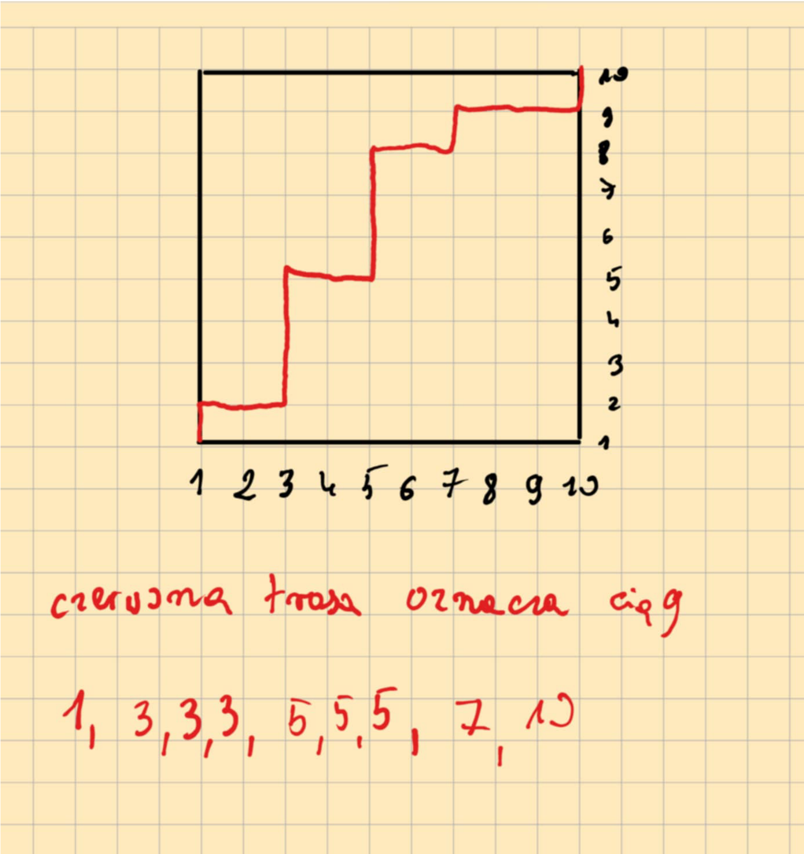
$$\sum_{j=0}^{k+1} \binom{n+j}{j} = \binom{n+k+2}{k+1}$$

$$\sum_{j=0}^{k+1} \binom{n+j}{j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n+j}{j} + \binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k+1}{k} + \binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k+2}{k+1}$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.8 (Krzysztof Wojczakowski, Autor 2). *Ile jest funkcji $f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ monotonicznych takich, że $f(i) \leqslant f(j)$ dla $i < j$?*

Zauważmy, że te funkcje tworza tak jakby jakby ciąg , który ma być niemalejący. Możemy to zobrazować jako kratę gdzie wartości na dole to liczby od 1 do n , a idąc do góry mozemy tylko iść w prawo lub w górę. , gdie tyle ile kresek w górę przy danej liczbie to tyle ile razy tą liczbę wybieramy.



Końcowo poszliśmy $n-1$ razy w prawo i $n-1$ razy w górę, czyli mamy $n-1+n-1 = 2n-2$ kroków W rezultacie takich funkcji jest: $\binom{2n-2}{n-1}$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.9 (Krzysztof Wojczakowski, Autor 2). *Ile jest k–elementowych podzbiorów zbioru n–elementowego, które nie zawierają dwóch sąsiednich liczb?*

Zauważmy, że jeżeli mamy mamy do wybrania k elementow , to równolegle to oznacza , że musimy zrobić $k-1$ "przerw" pomiędzy nimi. Wygląda to tak: `_0_0_0_..._0_0_` gdzie zero to oznacza ze liczby nie bierzemy, a podłoga oznacza, że bierzemy. Zostaje nam $n-(k+1)$ miejsc do wyboru, czyli $n-k+1$ miejsc. w takim razie ilość k elementowych podzbiorów jest : $\binom{n-k+1}{k}$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 2.10 (Karol Sęk, Wiktor Szymonek). *Posługując się interpretacją kombinatoryczną udowodnij, że:*

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = 2^k \binom{n}{k}$$

Niech $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$.
Rozważmy zbiór:

$$P = \{(x, y) \in P_k([n]) \times P([n]) | y \subseteq x\}.$$

Oczywiście $|P| = \binom{n}{k}2^k = 2^k\binom{n}{k}$.

Niech $i \in [k] \cup \{0\}$.
Rozważmy rodzinę zbiorów $L_i = \{(x, y) \in P||y| = i\}$.
Zauważmy, że ta rodzina tworzy rozłączne pokrycie P.
Oznacza to, że $\bigcup_{i\in[k]} L_i = P$

Chcemy policzyć $|L_i|$.
Drugi element pary uporządkowanej L_i "y" jest podzbiorem i elementowym $[n] \implies \binom{n}{i}$.
Pierwszy element pary uporządkowanej L_i "x" musi zawierać y i być mocy k.
Należy więc z pozostałych $n - i$ elementów wybrać $k - i$ elementów $\implies \binom{n-i}{k-i}$.

Ostatecznie $|L_i| = \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$.
$|\bigcup_{i\in[k]} L_i| = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$
$\bigcup_{i\in[k]} L_i = P \implies \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = 2^k\binom{n}{k}$

Niech: $A = [n]$ oraz $B = \{(x, y) : x \subseteq A \wedge |x| = k \wedge y \subseteq x\}$ Ustalmy ile wynosi $|B|$:

1. Z jednej strony: Ilość możliwych x, czyli k-elementowych podzbiorów $[n]$ wynosi $\binom{n}{k}$. Z każdego takiego x chcemy wybrać y będący jego dowolnym podzbiorem. Jest ich 2^k Zatem par uporządkowanych (x, y) jest:
$$|B| = 2^k\binom{n}{k}$$
2. Z drugiej strony: Weźmy $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$. Wiemy, że zawsze będzie istnieć i-elementowe przecięcie $x \cap y = y$, zatem możemy najpierw wybrać przecięcie a następnie dobrać kolejne elementy do x. Wybierzmy pewne i elementów z $[n]$ i umieśćmy je zarówno w x jak i w y na $\binom{n}{i}$ sposobów. Następnie dobierzmy pozostałe $k - i$ elementy, które powinny się znaleźć w x na $\binom{n-i}{k-i}$ sposobów. Mamy takich par:
$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$$
Aby zliczyć wszystkie możliwe pary, musimy uwzględnić wszystkie możliwe i, stąd otrzymujemy:
$$|B| = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$$

$\square$

Zadanie 2.11 (Katarzyna Szwed, Mateusz Rabantek). *Udowodnij poniższe tożsamości na dwa sposoby: posługując się interpretacją kombinatoryczną albo rozwinięciem dwumianu $(1 + x)^n$:*

1.
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

2.
$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = (n + n^2)2^{n-2}$$

3.
$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

1. Podpunkt 1
   Rozważmy zbiór X taki, że:
   $$X := \{(A, x) : x \in A \wedge A \subset [n]\}$$
   Żeby policzyć jego moc najpierw wybierzemy element $x \in [n]$ na n sposobów, a potem resztę elementów zbioru A, czyli dowolny podzbiór $[n] - \{x\}$
   $$|X| = n \cdot 2^{n-1}$$
   Teraz rozważmy rodzinę zbiorów $\{X_k\}_{k=0}^{n}$:
   $$X_k := \{(A, x) \in X : |A| = k\}$$
   Żeby policzyć moc zbioru X_k (dla danego k) najpierw wybieramy k-elementowy zbiór A będący podzbiorem $[n]$, a potem należący do niego element x:
   $$|X_k| = \binom{n}{k} \cdot k$$
   Rodzina X_k jest rozłącznym pokryciem zbioru X, zatem mamy:
   $$|X| = \sum_{k=0}^{n} |X_k|$$
   $$n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}$$
2. Podpunkt 2
   Rozważmy zbiór X taki, że:
   $$X := \{(A, x_1, x_2) : A \subset [n] \wedge x_1, x_2 \in A\}$$
   Żeby policzyć moc zbioru X osobno policzymy przypadki kiedy $x_1 = x_2$ i $x_1 \neq x_2$.
   Dla $x_1 = x_2$ wybieramy najpierw wyróżniony element na n sposobów, a potem dobieramy resztę elementów z A, dostajemy $n2^{n-1}$.
   Dla $x_1 \neq x_2$ wybieramy x_1 na n sposobów, x_2 na $n - 1$ sposobów, a potem dobieramy resztę elementów z A, dostajemy $n(n-1)2^{n-2}$. Zatem mamy:
   $$|X| = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = (2n + n^2 - n)2^{n-2} = (n + n^2)2^{n-2}$$
   Teraz rozważmy rodzinę zbiorów $\{X_k\}_{k=0}^{n}$:
   $$X_k := \{(A, x_1, x_2) \in X : |A| = k\}$$
   Żeby policzyć moc zbioru X_k (dla danego k) najpierw wybierzemy k-elementowy zbiór $A \subset [n]$, a potem wybierzemy z niego elementy x_1 i x_2 (przy czym mogą być one sobie równe):
   $$|X_k| = \binom{n}{k} \cdot k \cdot k$$
   Rodzina X_k jest rozłącznym pokryciem zbioru X, więc otrzymujemy:
   $$\sum_{k=0}^{n} |X_k| = |X|$$
   $$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

3. Podpunkt 3
Rozważmy zbiór X taki, że:
$$X := \{A \subset [m+n] : |A| = k\}$$
Zauważmy, że $|X| = \binom{m+n}{k}$.
Teraz rozważmy rodzinę zbiorów $\{X_i\}_{i=0}^{n}$:
$$X_i := \{A \in X : |A \cap [m]| = i\}$$
Żeby policzyć moc zbioru X_i (dla danego i) najpierw wybieramy i elementów z $[m]$, a potem $k-i$ elementów z $\{m+1, m+2, ..., m+n\}$, zatem $|X_i| = \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$.
Rodzina X_i jest rozłącznym pokryciem zbioru X, więc otrzymujemy:
$$|X| = \sum_{i=0}^{n} |X_i|$$
$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

Podpunkt 1:
Zacznijmy od rozwinięcia dwumianu Newtona:
$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \tag{1}$$
Różniczkujemy obie strony względem x:
$$\frac{d}{dx}(1+x)^n = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \tag{2}$$
$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} \tag{3}$$
Podstawiamy $x = 1$:
$$n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \cdot 1^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \tag{4}$$
Zatem:
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}} \tag{5}$$

Podpunkt 2:
Z podpunktu 1 wiemy, że:
$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} \tag{6}$$
Mnożymy obie strony przez x:
$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k} \tag{7}$$

Różniczkujemy obie strony względem x:

$$\frac{d}{dx}[nx(1+x)^{n-1}] = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k \tag{8}$$

$$n(1+x)^{n-1} + nx(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}x^{k-1} \tag{9}$$

Podstawiamy $x = 1$:

$$n \cdot 2^{n-1} + n(n-1)\cdot 2^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} \tag{10}$$

Upraszczamy lewą stronę:

$$\begin{aligned} n \cdot 2^{n-1} + n(n-1)\cdot 2^{n-2} &= n\cdot 2^{n-2}\cdot 2 + n(n-1)\cdot 2^{n-2} && (11)\\ &= 2^{n-2}[2n + n(n-1)] && (12)\\ &= 2^{n-2}[2n + n^2 - n] && (13)\\ &= 2^{n-2}(n + n^2) && (14) \end{aligned}$$

Zatem:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = (n+n^2)2^{n-2}} \tag{15}$$

Podpunkt 3:
Rozważmy iloczyn dwóch rozwinięć dwumianowych:

$$(1+x)^m \cdot (1+x)^n = (1+x)^{m+n} \tag{16}$$

Lewa strona:

$$(1+x)^m \cdot (1+x)^n = \left(\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}x^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\right) \tag{17}$$

Przy mnożeniu tych sum, współczynnik przy x^k otrzymujemy jako sumę wszystkich iloczynów postaci $\binom{m}{i}\binom{n}{j}$, gdzie $i + j = k$. Oznacza to, że $j = k - i$, więc:
Współczynnik przy x^k w lewej stronie:

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i} \tag{18}$$

Prawa strona:

$$(1+x)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}x^k \tag{19}$$

Współczynnik przy x^k w prawej stronie to $\binom{m+n}{k}$.
Porównując współczynniki przy x^k w obu stronach równania:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}} \tag{20}$$

3. Zestaw

Zadanie 3.1 (Autor 1, Autor 2). *Wykaż, że dla dowolnego* $n \geqslant 1$ *istnieje* $k \geqslant 1$ *takie, że:*

$$S(n,0) < S(n,1) < ... < S(n,k-1) \leqslant S(n,k) > S(n,k+1) > ... > S(n,n)$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 3.2 (Bartłomiej Sokołowski , Autor 2). *Wykaż, że:*

$$B(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B(i)$$

Dowód:
Niech $X = \pi([n])$, wtedy $|X| = B(n)$
Niech $X_i = \{\pi([n]) : \exists_{A \in \pi([n])} (n \in A \wedge |A| = i+1)\}$
Jest to zbiór wszystkich podziałów, które zawierają n oraz mają wielkość i+1
Jest to rozłączne pokrycie zbioru X

$$|X_i| = \binom{n-1}{i} \times B(n-i-1)$$

gdzie $\binom{n-1}{i}$ reprezentuje wybór i elementów z bloku z n, a $B(n-i-1)$ reprezentuje podzielenie pozostałych elementów na bloki.

$$|X| = \sum_{i=0}^{n-1} |X_i| = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \times B(n-i-1) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-i-1} \times B(n-i-1) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \times B(i)$$

Ostatnie przejście to sumowanie ale od drugiej strony, dlatego można je wykonać.

Z lewej strony mamy liczbę podziałów zbioru n-elementowego na niepuste podzbiory, czyli $B(n)$

Spróbujmy uzyskać tą liczbę w inny sposób, najpierw utworzymy blok $k+1$ elementowy, który będzie zawierał element n, a pozostałe elementy podzielimy na dowolny niepusty podzbiór:

Weźmy zbiór $n-1$ elementowy. Wybieramy z niego k elementów, co można zrobić na $\binom{n-1}{k}$ sposobów. Następnie dołączamy do wybranych elementów element n. Pozostałe $n-k-1$ elementów możemy podzielić na $B(n-k-1)$ sposobów
Sumując po k:

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} B(n-k-1) \binom{n-1}{k}$$

Zmieńmy sumowanie na $i = n-k-1$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} B(i) \binom{n-1}{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1} B(i) \binom{n-1}{i}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób prawą stronę tezy, więc

$$B(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B(i)$$

Zadanie 3.3 (Karol Wójcik, Autor 2). *Wykaż, że dla $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi:*

$$S(n, k+1) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{0<i_0<\ldots<i_{k-1}<n} \binom{n}{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{i_{k_2}} \ldots \binom{i_1}{i_0}$$

Zapiszmy tezę jako:

$$(k+1)! \cdot S(n, k+1) = \sum_{0<i_0<\ldots<i_{k-1}<n} \binom{n}{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{i_{k_2}} \ldots \binom{i_1}{i_0}$$

Lewa strona tezy przedstawia liczbę sposobów podziału zbioru n-elementowego na $k+1$ niepustych, uporządkowanych podzbiorów. $S(n, k+1)$ zlicza liczbę podziałów na $k+1$ nieuporządkowanych podzbiorów, a mnożenie przez $(k+1)!$ nadaje tym podzbiorom kolejność.

Spróbujmy skonstruować to w inny sposób. Rozważmy ściśle rosnący ciąg liczb całkowitych i_0, i_1 $\ldots$,i_{k-1}, taki, że $0 < i_0$ oraz $i_{k-1} < n$ Teraz wybierzmy i_{k-1} elementów ze zbioru n-elementowego. Można to zrobić na $\binom{n}{i_{k-1}}$ sposobów, następnie z tego wybranego zbioru i_{k-1} elementowego wybieramy i_{k-2} elementów na $\binom{i_{k-1}}{i_{k-2}}$ sposobów. Kontynuujemy ten proces, aż ze zbioru i_1 elementowego wybierzemy i_0 elementów na $\binom{i_1}{i_0}$ sposobów. W ten sposób uzyskujemy łańcuch zagnieżdżonych podzbiorów:

$$[i_0] \subset [i_1] \subset \cdots \subset [i_{k-1}] \subset [n]$$

gdzie $|[i_j]| = i_j$
Taki łańcuch podzbiorów to uporządkowana kolekcja $k+1$ rozłącznych, niepustych podzbiorów zbioru $[n]$. Iloczyn $\binom{n}{i_{k-1}}\binom{i_{k-1}}{i_{k_2}}\ldots\binom{i_1}{i_0}$ zlicza liczbę sposobów przeprowadzania tej sekwencji wyborów. Sumując po wszystich możliwych ciągach i_0, i_1 $\ldots$,i_{k-1} otrzymujemy

$$\sum_{0<i_0<\ldots<i_{k-1}<n} \binom{n}{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{i_{k_2}} \ldots \binom{i_1}{i_0}$$

co obejmuje wszystkie możliwe sposoby podziały zbioru $[n]$ na $k+1$ niepustych, uporządkowanych podzbiorów.
Zatem prawa strona również zlicza liczbę sposobów podziału zbioru n-elementowego na $k+1$ niepustych, uporządkowanych podzbiorów.
Zatem

$$(k+1)! \cdot S(n, k+1) = \sum_{0<i_0<\ldots<i_{k-1}<n} \binom{n}{i_{k-1}} \binom{i_{k-1}}{i_{k_2}} \ldots \binom{i_1}{i_0}$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 3.4 (Autor 1, Autor 2). *Rozważ następującą procedurę generującą pewne liczby naturalne $\{a_{i,j}\}_{1 \geqslant i \geqslant j}$:*

1. $a_{0,0} = 1$,
2. $a_{n+1,0} = a_{n,n}$, *dla* $n \geqslant 0$,
3. $a_{n+1,k+1} = a_{n,k} + a_{n+1,k}$, *dla* $n \geqslant k \geqslant 0$.

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 3.5 (Bartosz Wójcik, Autor 2). *Wykaż, że liczba podziałów zbioru* $(n-1)$ *elementowego jest równa liczbie podziałów zbioru* $\{1,...,n\}$ *niezawierających sąsiednich liczb w jednym bloku.*

Niech X będzie zbiorem podziałów zbioru $[n]$, takich że sąsiednie liczby nie znajdują się w jednym bloku. Niech Y będzie zbiorem podziałów zbioru $[n-1]$. Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją taką że jeśli $f(x) = y$:

— Dla każdego i, które należy do tego samego bloku co n w zbiorze x w zbiorze y istnieje blok A taki że $i, i+1 \in A$
— Jeśli i należy do bloku B w zbiorze x, który nie zawiera n to istnieje blok $B' \in y$, taki że $B \subseteq B'$

Przykładowo:

$$\{\{2,4\},\{1,3\}\} \mapsto \{\{1,2,3\}\}$$

Funkcja f jest dobrze zdefiniowana, ponieważ dla każdego i jednoznacznie wyznaczony jest blok, w którym się znajdzie - jeśli i należało do bloku z n, to zostanie przerzucone do bloku z $i+1$ ($i+1$ nie może się znajdować w tym samym bloku co n, ponieważ elementy nie sąsiadują). W przeciwnym wypadku i zostaje w tym bloku co było.

Udowodnimy, że f jest bijekcją. Niech $x_1, x_2 \in X$. Niech każdy blok A_i będzie indeksowany najwyższym elementem w danym bloku. Dla danego podziału x indeksowanie bloków się nie zmienia (poza blokiem A_n, który znika), ponieważ bloki po funkcji f tylko zyskują elementy niższe niż najwyższy element. Załóżmy, że $x_1 \neq x_2$. Jeśli x_1 i x_2 różnią sie na bloku A_n (który zawsze należy do podziału) to $f(x_1)$ będzie miało różny zbiór elementów, które ze sobą sąsiadują. W przeciwnym wypadku istnieją i_1 oraz i_2, które w x_1 są w tym samym bloku, a w x_2 nie (lub na odwrót). Funkcja f nie przestawia tych elementów, więc $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Rozważmy $y \in Y$. Znajdziemy $x \in X$, takie że $f(x) = y$. Rozważmy zbiór S wszystkich elementów, które mają swojego sąsiada w tym samym bloku w y. Skonstruujmy podział x w następujący sposób:

— Utwórzmy nowy blok A_n, taki że $n \in A_n$
— Weźmy najmniejszy element z S i dodajmy go do A_n. Proces powtórzmy dla kolejnego najmniejszego elementu w S, takiego że ten element nie ma już swojego sąsiada w A_n. Procedura kończy się, kiedy skoonstruowany podział nie ma już elementów sąsiadujących.

Wtedy $f(x) = y$, więc f jest bijekcją, co kończy dowód.

Rozwiązanie Autora 2.

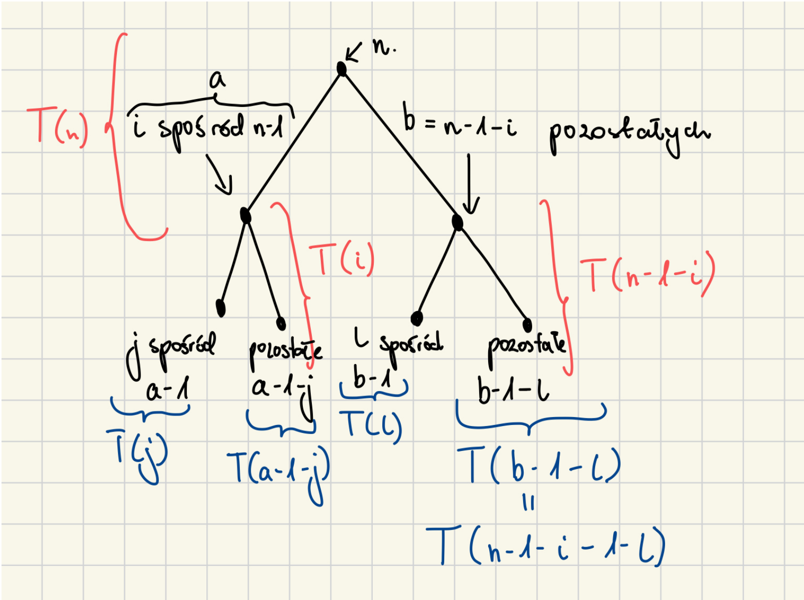
Zadanie 3.6 (Maciej Wełpa, Autor 2). *Udowodnij, że liczba ukorzenionych drzew binarnych na n wierzchołkach to n-ta liczba Catalana.*

Ukorzenione drzewo jest drzewem binarnym, jeśli każdy wierzchołek ma co najwyżej dwójkę dzieci przy czym co najwyżej jedno lewe dziecko i co najwyżej jedno prawe dziecko.

Spośród n wierzchołków, jeden wykorzystujemy na wierzchołek.
Spośród pozostałych n-1 wybieramy i na lewe poddrzewo, a pozostałe n-1-i na prawe. W ten sposób możemy postępować rekurencyjnie
Załóżmy funkcję $T(k)$, która liczy ilość drzew. Jest ona rekurencyjna, bo każdy nowy korzeń może utworzyć nowe drzewo, a ilość korzeni lewo/prawo może się zmieniać, więc aby policzyć wszystkie możliwości skorzystamy z sumy.

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) \cdot T(n-1-i)$$

a to odpowiada rekurencyjnemu wzorowi Catalana.



Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 3.7 (Mateusz Rabantek, Autor 2). *Triangulacją n – wierzchołkowego wielokąta wypukłego nazywamy zbiór $(n-3)$ wzajemnie nieprzecinających się jego przekątnych, które dzielą jego obszar na $(n-2)$ trójkątów.*

1. *ile jest triangulacji n–wierzchołkowego wielokąta wypukłego?*
2. *Ile jest triangulacji n–wierzchołkowego wielokąta wypukłego, w których każdy trójkąt triangulacji ma przynajmniej jeden bok na brzegu wielokąta?*

Podpunkt 1:
$n+2$ wierzchołków
T_{n+2} - triangulacje z krawędzią kończącą się w 1. Weźmy bok 12 - jest on częścią pewnego trójkąta 12i. Jeśli T_{n+2} = wszystkie triangulacje, T^i_{n+2} = te triangulacje z T_n+2, które zawierają trójkąt 12i. Stąd T^i_{n+2} są parami rozłączne oraz $T_{n+2} = \bigcup_{i=3}^{n+2} T^i_{n+2}$
Mamy:

$$|T_{n+2}| = \sum_{i=3}^{n+2} |T^i_{n+2}| = \sum_{i=3}^{n+2} (|T_{i-1}| \cdot |T_{n+3-i}|)$$

$|T_2| = 1$, $|T_3| = 1$. Otrzymujemy rekurencje dla liczb Catalana z przesuniętymi indeksami.

Podpunkt 2:
n wierzchołków
Wybierzmy bok 12 i zauważmy, że 12 jest częscią pewnego trójkąta 12i.
i = 3,n:
Zauważmy, że w przypadku $i=3$, krawędź musi być częscią trójkąta 134 lub 13n. Stąd liczba triangulacji 2^{n-4} (analogicznie dla i=n)
i $\neq$ 3, i $\neq$ n
Wybieramy lewa/prawa strone: $2^{i-4} \cdot 2^{n-i-1} = 2^{n-5}$
Wynik: $2^{n-4} + 2^{n-4} + (n-4) \cdot 2^{n-5} = n2^{n-5}$

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

Zadanie 3.8 (Autor 1, Autor 2). *Wykaż, że liczba drzew etykietowanych na zbiorze $1, ..., n$ wynosi n^{n-2}.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

4. Zestaw

Zadanie 4.1 (Julian Sowiński, Autor 2). *Oblicz* $S(n,2)$.

Liczba Stirlinga drugiego rodzaju $S(n,k)$ dla $k=2$ to tak właściwie liczba sposobów na podzielenie zbioru n-elementowego na 2 niepuste podzbiory.

$$S(n,2) = \frac{\overbrace{2^n}^{\text{wszystkie podzbiory}} - \overbrace{2}^{\text{bez pustego i całego}}}{\underbrace{2}_{\text{nie bierzemy pod uwagę kolejności}}} = \frac{2^n-2}{2} = 2^{n-1}-1$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 4.2 (Konstanty Sobczyński, Krzysztof Wójtowicz). *Wykaż, że mamy dokładnie*

$$\frac{n!}{1^{\lambda_1}\cdot 2^{\lambda_2}\cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n}\cdot \lambda_1!\cdot \ldots \cdot \lambda_n!}$$

permutacji zbioru $[n]$ *o typie* $1^{\lambda_1}\cdot 2^{\lambda_2}\cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n}$ *(mających* λ_i *cykli długości i dla* $i\in[n]$*).*

Najpierw rozważmy wszystkie możliwe permutacje zbioru $[n]$. Jest ich $n!$.

Aby uzyskać permutacje o typie $1^{\lambda_1}\cdot 2^{\lambda_2}\cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n}$, dzielimy nasz ciag (operujemy na jednym ciągu, ale jest to uogólnienie na wszystkie powstałe po $n!$ permutacjach) na kolejno λ_1 cykli długości 1, λ_2 cykli długości 2, ..., λ_n cykli długości n. Jednak aby były to permutacje, to musimy podzielić początkowe $n!$ przez $\lambda_i!$ dla $i\in[n]$, ponieważ cykle długości i są dla nas nierozrónialne, to znaczy, że dla na przykład n = 3 i $\lambda_1 = 3$ otrzymamy (1)(2)(3) oraz (2)(1)(3) jako różne permutacje, ale dla nas to to samo.

Dodatkowo musimy podzielić przez i^{λ_i}, ponieważ w każdej uzyskanej permutacji chwilowo wyróżniamy element pierwszy (tzn przykladowo cykle (13) i (31) są dla nas różne), więc każdy z tych cykli musimy podzielić przez i.

Zatem otrzymujemy wzór:

$$\frac{n!}{1^{\lambda_1}\cdot 2^{\lambda_2}\cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n}\cdot \lambda_1!\cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \qquad \blacksquare$$

Niech A będzie zbiorem wszystkich permutacji zbioru $[n]$ o typie jak w poleceniu. Niech $a_i\in[n]$, policzymy ilość cykli długości k: $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ w zbiorze n elementowych:

$$\binom{n}{k}\cdot\frac{k!}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k}$$

Wybieramy k elementów do cyklu i następnie wybieramy ich kolejność (pierwszy element nie ma znaczenia w cyklu), stąd powyższy wynik.

Policzymy ilość wszystkich możliwych cykli długości $1,2,\ldots,n$:

$$\underbrace{\frac{n!}{(n-1)!\cdot 1}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-2)!\cdot 1}\cdot\ldots\cdot}_{\lambda_1}\underbrace{\frac{(n-\lambda_1)!}{(n-\lambda_1-2)!\cdot 2}\cdot\ldots\cdot}_{\lambda_2}\ldots = \frac{n!}{1^{\lambda_1}\cdot 2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot n^{\lambda_n}}$$

Czyli mnożymy ilość możliwych cykli k elementowych dla λ_k ich ilości.

W celu otrzymania liczby $|A|$ musimy jeszcze uwzględnić brak znaczenia kolejności występowania cykli w permutacji, liczba możliwych ustawień to:

$$\lambda_1! \cdot \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!$$

Zatem liczba wszystkich permutacji $a \in A$:

$$|A| = \frac{n!}{1^{\lambda_1} \cdot 2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot n^{\lambda_n} \cdot \lambda_1! \cdot \lambda_2! \cdot \ldots \cdot \lambda_n!} \quad \blacksquare$$

Zadanie 4.3 (Maciej Wełpa, Konstanty Sobczyński)**.** *Posługując się interpretacją kombinatoryczną, wykaż tożsamość:*

$$S(n+1, m+1) = \sum_k \binom{n}{k} S(k, m)$$

Lewa strona: Podział zbioru n+1-elementowego na m+1 niepustych podzbiorów
Prawa strona: Bierzemy n+1 element i tworzymy z niego nowy zbiór (domyślnie podzbiór nr m+1). Z pozostałych n elementów wybieramy n-k ($\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$), które będą w zbiorze nr m+1 z elementem n+1. Pozostałe k elementów dzielimy na m niepustych podzbiorów. Używamy sumy, aby rozważyć wszystkie możliwości podzielenia elementów.

Rozważmy takie S(n+1,m+1), że $n+1 \in A$. $|A| = k+1$ gdzie $0 \leqslant k \leqslant n$. Wówczas na $\binom{n}{k}$ sposobów możemy wybrać k elementów z n pozostałych elementów zbioru A. pozostałe m podziałów uzyskujemy z $n-k$ elementów. Zatem $S(n-k, m)$ sposobów. Otrzymaliśmy, że: dla $n+1 \in A, |A| = k+1$ mamy $\binom{n}{k} S(k, m)$ sposobów. Zatem sumujemy po k (bo przypadki są rozłączne i pokrywają wszystkie możliwe podziały na m+1 podzbiorów) i mamy:

$$S(n+1, m+1) = \sum_k \binom{n}{k} S(n-k, m) = \sum_k \binom{n}{n-k} S(n-k, m) = \sum_k \binom{n}{k} S(k, m) \quad \blacksquare$$

Zadanie 4.4 (Autor 1, Autor 2)**.** *Zakładając, że zachodzi równość:*

$$(x_1 + ... + x_k)^n = \sum_{n_1+...+n_k=n} \binom{n}{n_1 n_2 ... n_k} x_1^{n_1} \cdot ... \cdot x_k^{n_k}$$

podaj ile wynosi $\binom{n}{n_1 n_2 ... n_k}$.

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 4.5 (Katarzyna Szwed, Autor 2)**.** *Wykaż, że*

$$\sum_{i=0}^{n} i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = n! H_n,$$

gdzie $H_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$.

Rozważmy zbiór $X := \{(\sigma, c) : \sigma$ - permutacja zbioru $[n]$, c - wyróżniony cykl z permutacji $\sigma\}$.

Rozważmy rodzinę zbiorów $\{A_i\}_{i=0}^n$ taką, że $A_i = \{(\sigma, c) \in X :$ permutacja σ ma i cykli$\}$. Zauważmy, że $|A_i| = i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$ (najpierw liczymy liczbę permutacji $[n]$ o i cyklach, a potem wybieramy jeden z i cykli).

Rodzina A_i jest rozłącznym pokryciem zbioru X, zatem:

$$|X| = \sum_{i=0}^{n} |A_i| = \sum_{i=0}^{n} i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$$

.

Teraz rozważmy rodzinę zbiorów $\{B_k\}_{k=1}^n$ taką, że $B_k = \{(\sigma, c) \in X : \text{cykl } c \text{ ma } k \text{ elementów}\}$. Zauważmy, że $|B_k| = \binom{n}{k}\frac{k!}{k}(n-k)!$, ponieważ najpierw wybieramy k elementów do cyklu c, potem permutujemy je, ale usuwamy kolejność pierwszego elementu, na koniec permutujemy resztę elementów zbioru $[n]$.

Rodzina B_k jest rozłącznym pokryciem zbioru X, zatem:

$$|X| = \sum_{k=1}^n |B_k| = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}\frac{k!}{k}(n-k)! = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{k}(n-k)! = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k} = n!\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = n!H_n$$

Otrzymujemy więc:

$$\sum_{i=0}^n i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = n!H_n$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 4.6 (Julian Sowiński, Wiktor Szymonek)**.** *Wykaż, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi:*

1. $x^n = \sum_k S(n,k)x^{\underline{k}}$
2. $x^{\bar{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$.

1.

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n,k)x^{\underline{k}}$$

Dowód indukcyjny:

1) Dla $n = 0$:
L $= x^{\underline{0}} = 1$
P $= S(0,0) \cdot x^{\underline{0}} = 1 \cdot 1 = 1$
L = P
2) Dla $n > 0$:
Założenie:

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n,k)x^{\underline{k}}$$

Teza:

$$x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} S(n+1,k)x^{\underline{k}}$$

Rozpoczynamy od lewej strony, używając założenia indukcyjnego:

$$L = x \cdot x^n = x \cdot \sum_{k=0}^n S(n,k)x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^n S(n,k)(x \cdot x^{\underline{k}}) \quad (*)$$

Zauważmy, że:

$$\cdot x^{\underline{k}} * x = (x-k+k)x^{\underline{k}} = (x-k)x^{\underline{k}} + kx^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}$$

Kontynuujemy z (*), podstawiając znalezioną tożsamość:

$$\begin{aligned}(*) &= \sum_{k=0}^n S(n,k)(x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}) \\ &= \sum_{k=0}^n S(n,k)x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=0}^n kS(n,k)x^{\underline{k}}\end{aligned}$$

Teraz zmienimy przedziały sumowania:

$$\begin{aligned}
\star &= \sum_{k=1}^{n+1} S(n,k-1)x^{\underline{k}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} kS(n,k)x^{\underline{k}}}_{\text{ponieważ } S(n,n+1)=0} \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} S(n,k-1)x^{\underline{k}}}_{\text{ponieważ } S(n,-1)=0} + \sum_{k=0}^{n+1} kS(n,k)x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (S(n,k-1) + kS(n,k))x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} S(n+1,k)x^{\underline{k}} = P
\end{aligned}$$

Co dowodzi tezy indukcyjnej.

2.

$$x^{\overline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

Dowód indukcyjny:
1) Dla $n = 0$:
L $= x^{\overline{0}} = 1$
P $= \sum_{k=0}^{0} \left[{0 \atop k}\right] x^k = \left[{0 \atop 0}\right] x^0 = 1 \cdot 1 = 1.$
L = P

2) Dla $n > 0$:
Założenie:

$$x^{\overline{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left[{n-1 \atop k}\right] x^k$$

Teza:

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k$$

Rozpoczynamy od lewej strony:

$$\begin{aligned}
L = x^{\overline{n}} &= (x+n-1)x^{\overline{n-1}} = (x+n-1)\sum_{k=0}^{n-1} \left[{n-1 \atop k}\right] x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (x+n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[{n-1 \atop k}\right] x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] x^k \quad (*)
\end{aligned}$$

Teraz zmieniamy przedziały sumowania, aby później zastosować wzór rekurencyjny:

$$\begin{aligned}
(*) &= \sum_{k=0}^{n} \left[{n-1 \atop k-1}\right] x^k + \sum_{k=0}^{n} (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\left[{n-1 \atop k-1}\right] + (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] \right) x^k
\end{aligned}$$

Stosujemy wzór rekurencyjny dla liczb Stirlinga I rodzaju:

$$\left[{n \atop k}\right] = (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] + \left[{n-1 \atop k-1}\right]$$

Podstawiając to do naszego wyrażenia, otrzymujemy:

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k = P$$

Co kończy dowód indukcyjny.

1. Intepretacja kombinatoryczna (historyjka + zarys rozwiązania formalnego):
Najpierw udowodnimy następującą tożsamość dla $x \in \mathbb{N}$:

Rozważmy problem rozmieszczenia n osób w x pokojach, przy czym każda osoba musi znaleźć się w jakimś pokoju. Dozwolone jest, aby w pokoju znajdowało się dowolnie wiele osób (w tym zero lub wszystkie).

— Z jednej strony, każda z n osób ma do wyboru jeden z x pokoi. Stąd liczba wszystkich możliwych rozmieszczeń wynosi:

$$x^n$$

— Z drugiej strony, możemy zliczyć możliwości inną procedurą. Najpierw dzielimy n osób na k grup (niepustych oraz rozłącznych), gdzie $k = 1, 2, \ldots, n$. Takich podziałów jest oczywiście: $S(n, k)$.
Następnie każdą z tych k grup umieszczamy w jednym z x dostępnych pokoi. Możemy to zrobić na

$$x^{\underline{k}} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)$$

sposobów (kolejno wybieramy unikalny pokój dla każdej grupy).
Zatem dla ustalonego k, liczba możliwych rozmieszczeń to:

$$S(n, k) \cdot x^{\underline{k}}$$

Sumując po wszystkich możliwych wartościach k, otrzymujemy:

$$\sum_{k=1}^{n} S(n, k) \cdot x^{\underline{k}}$$

Porównując oba równoważne sposoby zliczania, stwierdzamy, że:

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n, k) \cdot x^{\underline{k}}$$

Zatem udowodniliśmy, że równość ta zachodzi dla wszystkich $x \in \mathbb{N}$. Ponieważ obie strony są wielomianami stopnia n, a równość zachodzi dla nieskończenie wielu wartości naturalnych, stąd zgodnie z zasadniczym twierdzeniem algebry równość ta jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych (a nawet zespolonych). $\square$

(Bardziej formalnie można zrobić to zadanie rozważając zbiór wszystkich funkcji $f : [n] \longmapsto [x]$. Zliczenie z lewej strony trywialne a z drugiej zauważamy, że możemy podzielić dziedzinę na niepuste, rozłączne podzbiory argumentów o tych samych wartościach f)

2. Tak jak w podpunkcie 1. udowodnię najpierw że dla $x \in \mathbb{N}$

$$x^{\bar{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

Niech $x \in \mathbb{N}$ Rozważmy problem rozmieszczenia n gości przy k okrągłych stołach ponumerowanych liczbami ze zbioru $\{1, 2, \ldots, x\}$, wg następujących zasad:
— różne stoły mogą mieć ten sam numer,
— przy stołach liczy się wzajemne położenie gości ale nie rozróżniamy rotacji

Mając na uwadze te założenia spróbujmy zliczyć możliwości:
— Z jednej strony rozważmy następującą procedurę:
Zakładając, że mamy wcześniej ustalony porządek sadzania gości, weźmy pierwszego, usadźmy go przy stole i wybierzmy numer stołu. Możemy to zrobić na x sposobów. Biorąc drugiego gościa mamy wybór - możemy usadzić go przy nowym stole wybierając numer lub posadzić go po prawej stronie pierwszego gościa - możemy to zrobić na $x + 1$ sposobów. Kolejnego gościa - analogicznie - możemy usadzić przy nowym stole i wybrać mu numer lub posadzić go po prawej stronie pierwszego lub po prawej stronie drugiego - mamy $x + 2$ opcji. Proces powtarzamy do wyczerpania ludzi. Zauważając, że w i-tym kroku mamy $x + i - 1$ możliwości możemy łatwo zliczyć wszystkie kombinacje, których jest:

$$\prod_{i=1}^{n} (x + i - 1) = x(x + 1)(x + 2) \ldots (x + n - 1) = x^{\bar{n}}$$

— Licząc z drugiej strony: Rozważmy ustawienie gości dla k stołów. Ustawienia ludzi przy stole można rozróżnić ustalając kto znajduje się po prawej stronie danego gościa, zatem możemy każdemu ustawieniu przyporządkować pewien cykl. Zatem aby zliczyć ilość ustawień gości dla danej ilości stołów wystarczy wyznaczyć ilość wszystkich permutacji gości, którzy podzieleni są na k cykli, czyli $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$. Dla każdego stołu musimy dodatkowo wybrać numer, stąd ostateczny wynik to:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

Ponieważ stołów może być $k = 1, 2, \ldots, n$ jeśli zsumujemy wszystkie takie przypadki otrzymamy finalny wynik:

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

Udowodniliśmy równość dla $x \in \mathbb{N}$, jednak jak w 1. zachodzi ona również dla $x \in \mathbb{R}$ $\square$

(Sposób bardziej formalny polegałby na zamianie problemu gości i stolików na problem permutacji $[n]$ podzielonych na ponumerowane cykle (liczbami ze zbioru $[x]$) - sposób analogiczny i raczej wymagający mniej pisania.)

5. Zestaw

Zadanie 5.1 (Autor 1, Autor 2). *Wykaż zasadę włączeń i wyłączeń korzystając z indukcji po liczbie zbiorów.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 5.2 (Karol Sęk, Konstanty Sobczyński). *Wykaż, że mamy*

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}(m-j)^n$$

suriekcji ze zbioru $[n]$ *w zbiór* $[m]$.

Niech $X = \{f \in [m]^{[n]} | \forall_{i\in[m]}\exists_{j\in[n]} f(j) = i\}$
Niech $U = [m]^{[n]}$
Niech $i \in [m]$ oraz $X_i = \{f \in [m]^{[n]} | \exists_{j\in[n]} f(j) = i\}$
Zauważmy, że $\bigcap_{i=1}^{m} X_i = X$

Korzystając z zasady włączeń i wyłączeń:

$$|\bigcap_{i=1}^{m} X_i| = \sum_{I\subseteq[n]}(-1)^{|I|}|\bigcap_{i\in I}(U \setminus X_i)|$$

Zauważmy, że

$$|U \setminus X_i| = (m-1)^n$$

$U \setminus X_i$ jest zbiorem wszystkich funkcji z $[n]$ do $[m]$ takich, że wartość $i \in [m]$ jest nieosiągalna ... jest to więc zbiór wszystkich funkcji gdzie przeciwdziedzina jest mniejsza o jeden element.

Analogicznie

$$|\bigcap_{i\in I}(U \setminus X_i)| = (m-[I])^n$$

Podstawiając do wzoru:

$$\sum_{I\subseteq[n]}(-1)^{|I|}|\bigcap_{i\in I}(U \setminus X_i)| = \sum_{I\subseteq[n]}(-1)^{|I|}(m-[I])^n$$

Zauważmy, że we wzorze znaczenie ma tylko moc I, możemy go więc uprościć w zależności od $|I|$

$$|\bigcap_{i=1}^{m} X_i| = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}(m-j)^n$$

$$|\bigcap_{i=1}^{m} X_i| = |X|$$

■

Skorzystamy z zasady włączeń i wyłączeń. Niech U - zbiór funkcji z $[n]$ w $[m]$.

Niech A_i - zbiór funkcji $[n]$ w $[m]$, $f \in [m]$, takich, że $i \notin Im(f)$.

Niech W - zbiór surjekcji z $[n]$ w $[m]$.

Wówczas $|W| = |U| - |\bigcup_{i=1}^{m} A_i|$. $|U| = m^n$ - każda funkcja z $[n]$ w $[m]$ ma m możliwości dla każdego elementu, więc m^n.

$|\bigcup_{i=1}^{m} A_i| = \sum_{\substack{I\subseteq[m]\\ I\neq\emptyset}}(-1)^{|I|+1}|\bigcap_{i\in I} A_i| = \sum_{\substack{I\subseteq[m]\\ I\neq\emptyset}}(-1)^{|I|+1}(m-|I|)^n = \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\binom{m}{j}(m-j)^n$
Zatem $|W| = m^n - \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\binom{m}{j}(m-j)^n = \sum_{j=0}^{m}(-1)^{j}\binom{m}{j}(m-j)^n$ ■.

Zadanie 5.3 (Bartosz Wójcik, Autor 2). *Ile jest ciągów długości $2n$ takich, że każda liczba $i \in [n]$ występuje dokładnie dwa razy oraz każde sąsiednie dwa wyrazy są różne.*

Niech Ω będzie zbiorem ciągów długości $2n$, że każda liczba $i \in [n]$ występuje dokładnie dwa razy. Niech $X \subseteq \Omega$ będzie zbiorem ciągów, w których żadne sąsiadujące wyrazy nie są równe (zbiór jak w treści zadania). Niech $A_i \subseteq \Omega$, będzie rodziną zbiorów, takich że:

$$A_i = \{a \in X| \text{ liczba i sąsiaduje ze sobą w ciągu a } \}$$

Zbiór X zawiera wszystkie ciągi, które należą do Ω, ale nie należą do żadnego A_i:

$$X = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Obliczmy moc sumy A_i:

$$(*)\ |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq[n]} (-1)^{|I|+1}\ |\bigcap_{i\in I} A_i|$$

Wybierzmy ciąg $a \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Wszystkie $i \in I$ sąsiadują ze sobą, więc można je potraktować jako jeden znak. W ciągu a mamy więc $2n-|I|$ znaków, które można przepermutować na $(2n-|I|)!$ sposobów. Każdą parę $\notin I$ można ustawić na 2 sposoby każdą. Sumarycznie:

$$|\bigcap_{i\in I} A_i| = \frac{(2n-|I|)!}{2^{n-|I|}}$$

Zmieńmy indeksowanie sumy $(*)$ z indeksowania po zbiorach I na indeksowanie po mocy zbioru I. Jest $\binom{n}{i}$ zbiorów $I \subseteq [n], |I| = i$:

$$(*)\ \sum_{\emptyset\neq I\subseteq[n]} (-1)^{|I|+1}\ |\bigcap_{i\in I} A_i| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\frac{(2n-i)!}{2^{n-i}}$$

Dodatkowo $|\Omega| = \frac{(2n)!}{2^n}$. Otrzymujemy:

$$(*)\ |X| = \frac{(2n)!}{2^n} - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\frac{(2n-i)!}{2^{n-i}} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}\frac{(2n-i)!}{2^{n-i}}$$

co było do policzenia. ■

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 5.4 (Karol Wójcik, Autor 2). *Wykaż, że dla $n \geqslant 3$ zachodzi tożsamość*

$$D(n) = (n-1)(D(n-1) + D(n-2))$$

gdzie $D(n)$ jest liczbą permutacji zboru $[n]$ bez punktów stałych.

Dla $n \geqslant 3$: $D(n) = (n-1)(D(n-1) + D(n-2))$

D(n) - liczba nieporządków

$D(1) = 0$ $D(2) = 1$

D_n – zbiór nieporządków na n elementach

Weźmy zbiór $D_n = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$.
X – zbiór, gdzie n znajduje się w 2-elementowym cyklu,
Y – zbiór, gdzie n znajduje się w $>$ 2-elementowym cyklu

$X = \{(i,n) * \sigma \mid \sigma$ jest permutacją na $[n] \setminus \{i,n\}$ bez punktów stałych, $i \in [n-1]\}$
$|X| = |[n-1]| \cdot |D(n-2)| = (n-1)D(n-2)$

$Y = \{\sigma \mid \sigma(j) = n, \sigma(n) = i, i \neq j\}$
$|Y| = (n-1)D(n-1)$

$D(n) = |X \cup Y| = (n-1)(D(n-1) + D(n-2))$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 5.5 (Autor 1, Autor 2). *Wykaż (najlepiej kombinatorycznie), że dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzi:*

1. $S(n,k) = \sum_{0 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_{n-k} \leqslant k} m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_{n-k}$
2. $c(n,k) = \sum_{0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_{n-k} < k} m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_{n-k}$

1. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 1 podpunktu 2

1. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 1
2. Rozwiązanie Autora 2 podpunktu 2

Zadanie 5.6 (Autor 1, Autor 2). *Ciąg podziałów zbioru $1, \ldots, n$ tworzymy następująco. Startujemy od podziału zawierającego tylko zbiór $1, \ldots, n$. Podział $(i+1)$–wszy otrzymujemy z podziału i-tego poprzez:*

1. *wybranie jednego, co najmniej 2-elementowego zbioru z podziału i-tego i podzielenie go na dwa niepuste podzbiory,*
2. *podzielenie każdego, co najmniej 2-elementowego zbioru z podziału i-tego na dwa niepuste podzbiory.*

W obu przypadkach procedura kończy swoje działanie jeżeli wszystkie zbiory podziału są jednoelementowe. Na ile sposobów można wykonać powyższe procedury? Na ile sposobów możemy wykonać powyższe procedury zakładając, że po każdym kroku zbiory podziałów zawierają kolejne liczby naturalne?

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

6. Zestaw 6

Zadanie 6.1. *(nie kolos) Wykaż, że spośród dowolnych trzech permutacji zbioru $[n]$ istnieją dwie zawierające wspólny podciąg o długości co najmniej $n^{\frac{1}{3}}$.*

Zadanie 6.2 (Katarzyna Szwed, Autor 2). *Niech I będzie rodziną n przedziałów osi rzeczywistej. Wykaż, że I zawiera co najmniej $\sqrt{n}$ przedziałów parami rozłącznych lub I zawiera co najmniej $\sqrt{n}$ przedziałów takich, że wszystkie posiadają wspólny punkt.*

Rodzina podzbiorów $\mathcal{F}$ jest przecinająca się, jeśli dla dowolnych $A, B \in \mathcal{F}$ mamy $A \cap B \neq \emptyset$

Zdefiniujmy relację

$$X \preceq Y \;\Leftrightarrow\; \forall(x \in X, y \in Y)(x < y) \;\vee\; X = Y$$

gdzie X i Y - przedziały.

Relacja $\preceq$ jest relacją częściowego porządku, ponieważ:

1. jest zwrotna ($X = Y \Rightarrow X \preceq Y$)
2. jest antysymetryczna

$$X \neq Y \wedge X \preceq Y \Rightarrow \forall(x \in X, y \in Y)(x < y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \neg\exists(x \in X, y \in Y)(x > y) \Rightarrow Y \npreceq X$$

3. jest przechodnia

$$X \preceq Y \wedge Y \preceq Z \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall(x \in X, y \in Y)(x < y) \;\vee\; X = Y) \wedge (\forall(y \in Y, z \in Z)(y < z) \;\vee\; Y = Z) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall(x \in X, z \in Z)(x < z) \vee X = Z) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X \preceq Z$$

Zatem $P := (I, \preceq)$ jest posetem. Z lematu udowodnionego na wykładzie wiemy, że:

$$height(P) \cdot width(P) \geqslant |I| = n$$

Zatem:

$$height(P) \geqslant \sqrt{n} \;\vee\; width(P) \geqslant \sqrt{n}$$

Przy czym $height(P)$ to długość najdłuższego łańcucha, w tym przypadku liczność największego podzbioru I takiego, że przedziały do niego należące są parami rozłączne, a $width(P)$ to długość najdłuższego antyłańcucha, tutaj będzie to liczność największego takiego podzbioru I, że każde dwa przedziały do niego należące mają wspólny punkt, czyli przecięcie po wszyskich przedziałach należących do tego podzbioru nie jest zbiorem pustym.

Zadanie 6.3 (Katarzyna Szwed, Wiktor Szymonek). *Niech $\mathcal{F}$ będzie maksymalną przecinającą się rodziną podzbiorów $[n]$. Wykaż, że:*

$$|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$$

Weźmy $A \subset [n]$. Zauważmy, że $A \cap ([n] - A) = \emptyset$. Zatem tylko jeden z tych zbiorów może należeć do $\mathcal{F}$, czyli $|\mathcal{F}| \leqslant 2^{n-1}$.

Zauważmy, że rodzina zbiorów $\{A \subset [n] : n \in A\}$ spełnia warunek zadania, zatem $|\mathcal{F}| \geqslant 2^{n-1}$. Oznacza to, że $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$.

Rozważmy następujący zbiór:

$$M = \{A \in M : 1 \in A\}$$

Wówczas dla dowolnego $A, B \in M$ zachodzi $1 \in A \cap B \implies A \cap B \neq \emptyset$ zatem M jest przecinającą się rodziną.
Udowodnię, że M jest maksymalną taką rodziną. Załóżmy, że zbiór $X \subseteq P([n])$ jest w relacji "$\subseteq$" ostro większy od M i jest zbiorem o szukanych własnościach.
Zatem $M \neq X \wedge M \subset X \implies \exists_{x \in X}\ 1 \notin x$. Zauważmy, że $\{1\} \in M \implies \{1\} \in X$ oraz $\{1\} \cap x = \emptyset$ co daje sprzeczność. Stąd M jest maksymalnym takim zbiorem.
Moc zbioru wszystkich podzbiorów $[n]$ zawierających 1 to 2^{n-1} stąd:

$$|\mathcal{F}| = |M| = 2^{n-1}$$

□

Zadanie 6.4 (Katarzyna Szwed, Wiktor Szymonek). *Niech $\mathcal{F}$ będzie maksymalną rodziną podzbiorów zbioru $[n]$ taką, że dla dowolnych $A, B \in \mathcal{F}$ mamy $A \cup B \neq [n]$. Wyznacz $|\mathcal{F}|$.*

Weźmy $A \subset [n]$. Zauważmy, że istnieje dokładnie jeden zbiór B taki, że $B \subset [n] \wedge A \cap B = [n]$. Zatem tylko jeden z tych zbiorów może należeć do $\mathcal{F}$, czyli $|\mathcal{F}| \leqslant 2^{n-1}$.

Zauważmy, że rodzina wszystkich podzbiorów $[n-1]$ spełnia warunek z zadania, zatem $|\mathcal{F}| \geqslant 2^{n-1}$. Oznacza to, że $|\mathcal{F}| = 2^{n-1}$.

Dowód analogiczny jak 6.3:

Rozważmy następujący zbiór:

$$M = \{A \in M : 1 \notin A\}$$

Wówczas dla dowolnego $A, B \in M$ zachodzi $1 \notin A \cup B \implies A \cup B \neq [n]$
Udowodnię, że M jest zbiorem maksymalnym o takich własnościach. Załóżmy, że zbiór $X \subseteq P([n])$ jest w relacji "$\subseteq$" ostro większy od M i jest zbiorem o szukanych własnościach.
Zatem $M \neq X \wedge M \subset X \implies \exists_{x \in X}\ 1 \in x$, ponadto ponieważ M zawiera w sobie wszystkie podzbiory $[n]$ nie zawierające jedynki to wiemy że $[n] - x \in M \implies [n] - x \in X$ oraz $[n] \cup ([n] - x) = [n]$ co daje sprzeczność. Stąd M jest maksymalnym takim zbiorem. □
Moc zbioru wszystkich podzbiorów $[n]$ nie zawierających 1 to 2^{n-1} stąd:

$$|\mathcal{F}| = |M| = 2^{n-1}$$

Zadanie 6.5. *Rodzina podzbiorów $\mathcal{F}$ zbioru $[n]$ jest rozróżniająca jeśli dla dowolnych $x \neq y \in [n]$ istnieje $F \in \mathcal{F}$ taki, że $|F \cap \{x, y\}| = 1$. Rodzina podzbiorów $\mathcal{F}$ zbioru $[n]$ jest silenie rozróżniająca jeśli dla dowolnych $x \neq y \in [n]$ istnieje $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ takie, że $x \in F_1 - F_2$ i $y \in F_2 - F_1$.*

1. *Jaki jest rozmiar najmniejszej rodziny rozróżniającej $[n]$?*
2. *Jaki jest rozmiar najmniejszej rodziny silnie rozróżniającej $[n]$?*

Zadanie 6.6. *Niech $1 \leqslant s < r < n$ i niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów r–elementowych zbioru $[n]$ taką, że dla dowolnych $A \neq B \in \mathcal{F}$ mamy $|A \cap B| \leqslant s$. Wykaż, że*

$$|\mathcal{F}| \leqslant \frac{\binom{n}{s+1}}{\binom{r}{s+1}}.$$

7. Zestaw 7

Nie ma XD
Ponoć Profesor coś zakręcił i nie ma tego zestawu.

8. Zestaw

Zadanie 8.1 (Krzysztof Wójtowicz, Karol Sęk)**.** *Wykorzystaj funkcje tworzące aby policzyć na ile sposobów można wyciągnąć 70 kul z urny zawierającej 30 kul czerwonych, 40 kul niebieskich i 50 kul białych. Kule tego samego koloru są nierozróżnialne. Kolejność wyciągania jest nieistotna.*

Zapiszemy funkcje tworzące $C(x)$, $N(x)$ oraz $B(x)$ odpowiednio dla kul czerwonych(1), niebieskich(2) oraz białych(3):

$$C(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{30} = \frac{1 - x^{31}}{1 - x} \tag{21}$$

$$N(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{40} = \frac{1 - x^{41}}{1 - x} \tag{22}$$

$$B(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{50} = \frac{1 - x^{51}}{1 - x} \tag{23}$$

Stworzymy funkcję $K(x)$, która będzie generować nam ciąg liczby sposóbów wyciągania danej ilości kul, odpowiedzią dla 70 kul będzie współczynnik przy x^{70}.

$$K(x) = C(x) \cdot N(x) \cdot B(x) = \frac{(1 - x^{31})(1 - x^{41})(1 - x^{51})}{(1 - x)^3} =$$
$$= (1 - x^{31} - x^{41} - x^{51} + x^{72} + x^{82} + x^{92} - x^{123}) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k$$

Po wymnożeniu x^{70} wystąpi cztery razy:

1. dla $k = 70$:
$$1 \cdot \binom{72}{2} x^{70} = \binom{72}{2} x^{70}$$
2. dla $k = 39$:
$$-x^{31} \cdot \binom{41}{2} x^{39} = -\binom{41}{2} x^{70}$$
3. dla $k = 29$:
$$-x^{41} \cdot \binom{31}{2} x^{29} = -\binom{31}{2} x^{70}$$
4. dla $k = 19$:
$$-x^{51} \cdot \binom{21}{2} x^{19} = -\binom{21}{2} x^{70}$$

Więc współczynnik przy x^{70} wynosi:

$$\binom{72}{2} - \binom{41}{2} - \binom{31}{2} - \binom{21}{2} = \frac{72!}{2! \cdot 70!} - \frac{41!}{2! \cdot 39!} - \frac{31!}{2! \cdot 29!} - \frac{21!}{2! \cdot 19!} =$$
$$= 2556 - 820 - 465 - 210 = 1061$$

Niech ciąg r_n wyznacza ilość wyborów n czerwonych kul
Funkcja tworząca dla r_n ma postać

$$R(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{30} = \frac{1 - x^{31}}{1 - x}$$

Niech ciąg b_n wyznacza ilośc wyborów n niebieskich kul
Funkcja tworząca dla b_n ma postać

$$B(X) = 1 + x + x^2 + ... + x^{40} = \frac{1 - x^{41}}{1 - x}$$

Niech ciąg w_n wyznacza ilośc wyborów n niebieskich kul
Funkcja tworząca dla w_n ma postać

$$W(X) = 1 + x + x^2 + ... + x^{50} = \frac{1 - x^{51}}{1 - x}$$

Niech ciąg $o_n = r_n \star b_b \star w_n$ jest splotem tych ciągów, wyznacza on ilość wyborów n kul o dowolnym kolorze
Funkcja tworząca dla o_n ma postać

$$O(X) = R(X) * B(X) * W(X) = \frac{(1 - x^{31})(1 - x^{41})(1 - x^{51})}{(1 - x)^3} =$$

$$(1 - x^{31})(1 - x^{41})(1 - x^{51}) * \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n$$

Zauważmy, że liczbę 70 można przedstawić poprzez następujące podziały:

$$70 = 0 + 0 + 0 + 70$$
$$70 = 0 + 0 + 51 + 19$$
$$70 = 0 + 41 + 0 + 29$$
$$70 = 31 + 0 + 0 + 39$$

Opowiadają tym podziałom następujące współczynniki

$$1 * 1 * 1 * \binom{72}{2}$$
$$1 * 1 * (-1) * \binom{21}{2}$$
$$1 * (-1) * 1 * \binom{31}{2}$$
$$(-1) * 1 * 1 * \binom{41}{2}$$

Po zsumowaniu otrzymujemy wynik 1061

Zadanie 8.2 (Krzysztof Wójtowicz, Autor 2). *Jaki jest współczynnik*

1. *przy* x^5 *w* $(1 - 2x)^{-2}$*;*
2. *przy* x^4 *w* $\sqrt[3]{1 + x}$*;*
3. *przy* x^3 *w* $(2 + x)^{3/2}/(1 - x)$*?*

Podpunkt 1.
Niech:

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 2x} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$$

Wtedy:

$$F'(x) = \frac{1}{(1-2x)^2} = (1-2x)^{-2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(2^n \cdot n \cdot x^{n-1}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(\underbrace{2^n \cdot (n+1)}_{a_n} \cdot x^n)$$

Więc:

$$a_5 = 2^5 \cdot 6 = 192$$

Podpunkt 2.
Użyjemy rozwinięcia binomial series:

$$(1+x)^{1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{\frac{1}{3}}{n}}_{a_n} \cdot x^n$$

Więc:

$$a_4 = \binom{\frac{1}{3}}{4} = \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)(\frac{1}{3}-3)}{4!} = \frac{-10}{243}$$

Podpunkt 3.
Rozwiniemy osobno mianownik i licznik:

$$(2+x)^{3/2} = 2^{3/2}(1+\frac{x}{2})^{3/2} = 2\sqrt{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{3}{2}}{n} (\frac{x}{2})^n$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Wtedy:

$$\frac{(2+x)^{3/2}}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n$$

Gdzie c_n jest równe (iloczyn Cauchy'ego):

$$c_n = 2\sqrt{2} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{3}{2}}{k} \cdot \frac{1}{2^k}$$

Stąd otrzymujemy:

$$c_3 = 2\sqrt{2} \cdot \sum_{k=0}^{3} \binom{\frac{3}{2}}{k} \frac{1}{2^k} = 2\sqrt{2} \cdot (1 \cdot \binom{\frac{3}{2}}{0} + \frac{1}{2} \cdot \binom{\frac{3}{2}}{1} + \frac{1}{4} \cdot \binom{\frac{3}{2}}{2} + \frac{1}{8} \cdot \binom{\frac{3}{2}}{3}) =$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot (1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{32} - \frac{1}{128}) = 2\sqrt{2} \cdot \frac{235}{128} = \frac{235\sqrt{2}}{64}$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 8.3 (Filip Sajko). *Wyznacz funkcje tworzące następujących ciągów. (Znajdź zwartą postać tych funkcji, to jest bez nieskończonych sum.)*

1. $(0, 0, 0, 0, -6, 6, -6, 6...)$
2. $(1, 0, 1, 0...)$
3. $(1, 2, 1, 4, 1, 8...)$
4. $(\binom{c}{0}, \binom{c}{1}, \binom{c}{2}, ...)$
5. $(1, \binom{c}{1}, \binom{c+1}{1}, \binom{c+2}{2}, ...)$

6. $(1, c, c^2, ...)$
7. $(1, \binom{m+1}{m}, \binom{m+2}{m}, ...)$
8. $(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$
9. $(1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, ...)$

1. $(0, 0, 0, 0, -6, 6, -6, 6...)$

$$-6x^4 + 6x^5 - 6x^6 + 6x^7 =$$

$$= -6x^4(1 - x + x^2 - x^3 + ...) = \frac{-6x^4 + 6x^5}{1 - x^2} = \frac{-6x^4}{1 + x}$$

2. $(1, 0, 1, 0...)$

$$1 + x^2 + x^4 + ... = \frac{1}{1 - x^2}$$

3. $(1, 2, 1, 4, 1, 8...)$

$$1+2x+1x^2+4x^3+1x^4+8x^5+... = (1+x^2+x^4+x^6+...)+(2x+4x^3+8x^5+...) = \frac{1}{1 - x^2}+\frac{2x}{1 - 2x^2}$$

4. $(\binom{c}{0}, \binom{c}{1}, \binom{c}{2}, ...)$

$$1 + \binom{c}{1} + \binom{c+1}{1}x + \binom{c+2}{2}x^2 + ... = \sum_n \binom{c}{n}x^n = (1 + x)^c$$

5. $(1, \binom{c}{1}, \binom{c+1}{1}, \binom{c+2}{2}, ...)$

$$a_n = \binom{c+n-1}{n-1}$$

$$1 + \sum_{n\geqslant 1} \binom{c+n-1}{n-1}x^n = 1 + x \sum_{n-1\leqslant 0} \binom{c+n-1}{n-1}x^{n-1} = 1 + \frac{1}{(1 - x)^{c+1}}$$

6. $(1, c, c^2, ...)$

$$1 + cx + c^2x^2 + ... = 1 + (cx)^2 + (cx)^3 + ... = \frac{1}{1 - cx}$$

7. $(1, \binom{m+1}{m}, \binom{m+2}{m}, ...)$

$$a_n = \binom{m+n}{m} = \binom{n+m}{n}$$

$$\sum a_n x^n = \sum \binom{m+n}{n}x^n = \frac{1}{(1 - x)^{m+1}}$$

8. $(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$

$$0 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... = 1 + \sum_{n=1} \frac{x^n}{n} = 1 - \ln(1 - x)$$

9. $(1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, ...)$

$$1 + 1x + \frac{1}{2!}x + ... = \sum \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 8.4 (Filip Sajko, Julian Sowiński). *Niech $G(z)$ będzie funkcją tworzącą ciągu $\{g_n\}_{n\geqslant 0}$. Jaki ciąg generuje funkcja $G(z) + G(-z)$, a jaki $G(z) - G(-z)$?*

$$G(z) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 + ...$$

$$G(-z) = g_0 - g_1x + g_2x^2 - g_3x^3 + ...$$

Stąd, po prostu dodając i odejmując stronami otrzymujemy:

$$G(z) + G(-z) = 2(g_0 + g_2x^2 + g_4x^4 + ...)$$

$$G(z) - G(-z) = 2(g_1x + g_3x^3 + g_5x^5 + ...)$$

$$G(z) = g_0 + g_1z + g_2z^2 + g_3z^3 + g_4z^4 + \dots$$

a) Funkcja tworząca $G(z) + G(-z)$

Najpierw zapiszmy postać funkcji $G(-z)$, podstawiając $-z$ w miejsce z:

$$G(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(-z)^n = g_0 - g_1z + g_2z^2 - g_3z^3 + g_4z^4 - \dots$$

Teraz dodajmy obie funkcje stronami. Zauważmy, że wszystkie wyrazy z nieparzystymi potęgami z się skrócą:

$$G(z) + G(-z) = (g_0 + g_1z + g_2z^2 + \dots) + (g_0 - g_1z + g_2z^2 - \dots)$$

$$G(z) + G(-z) = (g_0 + g_0) + (g_1 - g_1)z + (g_2 + g_2)z^2 + (g_3 - g_3)z^3 + \dots$$

$$G(z) + G(-z) = 2g_0 + 2g_2z^2 + 2g_4z^4 + \dots = 2(g_0 + g_2x^2 + g_4x^4 + ...)$$

b) Funkcja tworząca $G(z) - G(-z)$

Postępujemy analogicznie, tym razem odejmując funkcje. W tym przypadku skrócą się wyrazy z parzystymi potęgami z:

$$G(z) - G(-z) = (g_0 + g_1z + g_2z^2 + \dots) - (g_0 - g_1z + g_2z^2 - \dots)$$

$$G(z) - G(-z) = (g_0 - g_0) + (g_1 - (-g_1))z + (g_2 - g_2)z^2 + (g_3 - (-g_3))z^3 + \dots$$

$$G(z) - G(-z) = 2g_1z + 2g_3z^3 + 2g_5z^5 + \dots = 2(g_1x + g_3x^3 + g_5x^5 + ...)$$

Zadanie 8.5 (Maciej Wełpa, Karol Sęk)**.** *Niech a_n będzie liczbą trójek (i, j, k) liczb całkowitych takich, że $i \geqslant 0, j \geqslant 1, k \geqslant 1$ oraz $i + 3j + 3k = n$. Znajdź funkcję tworzącą ciągu $(a_0, a_1, \dots)$ i wyznacz wzór na a_n.*

Równanie: $i + 3j + 3k = n$, gdzie $i \geqslant 0, j \geqslant 1, k \geqslant 1$.
Funkcja tworząca dla zmiennej i (dla $i \geqslant 0$):

$$I(x) = \sum_{a=0}^{\infty} x^a = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Funkcja tworząca dla zmiennej j (dla $j \geqslant 1$ i $3j$ w równaniu):

$$J(x) = \sum_{b=1}^{\infty} x^{3b} = x^3 + x^6 + x^9 + \dots = x^3(1 + x^3 + x^6 + \dots) = x^3 \sum_{c=0}^{\infty} (x^3)^c = \frac{x^3}{1-x^3}$$

Funkcja tworząca dla zmiennej k (dla $k \geqslant 1$ i $3k$ w równaniu):

$$K(x) = \sum_{d=1}^{\infty} x^{3d} = x^3 + x^6 + x^9 + \dots = \frac{x^3}{1-x^3}$$

Funkcja tworząca $a(x)$ dla liczby rozwiązań równania $i+3j+3k=n$ jest iloczynem funkcji tworzących dla poszczególnych zmiennych:

$$a(x) = I(x) \cdot J(x) \cdot K(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x^3}{1-x^3} \cdot \frac{x^3}{1-x^3}$$

Zatem:

$$a(x) = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^3)^2}$$

Aby znaleźć współczynnik a_n (liczbę rozwiązań), należy rozłożyć $a(x)$ na ułamki proste. Mianownik możemy zapisać jako: $(1-x)(1-x^3)^2 = (1-x)((1-x)(1+x+x^2))^2 = (1-x)(1-x)^2(1+x+x^2)^2 = (1-x)^3(1+x+x^2)^2$ Stąd:

$$a(x) = \frac{x^6}{(1-x)^3(1+x+x^2)^2}$$

Rozkład na ułamki proste dla tego typu wyrażenia będzie zawierał składniki postaci:

$$\frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3} + \frac{Dx+E}{1+x+x^2} + \frac{Fx+G}{(1+x+x^2)^2}$$

Wyznaczenie stałych A, B, C, D, E, F, G jest procesem arytmetycznym i czasochłonnym, wymagającym podstawiania wartości x lub porównywania współczynników. Po wyznaczeniu tych stałych, każdy z ułamków prostych powinno przekształcić się z powrotem do szeregu potęgowego.

Rozważmy ciagi b_n, c_n i d_n takie, że

$$b_n = |\{i \in \mathbb{N} \cup \{0\} | i = n\}|$$
$$c_n = |\{j \in \mathbb{N} | 3j = n\}$$
$$d_n = |\{k \in \mathbb{N} | 3k = n\}$$

Ciągowi b_n odpowiada funkcja tworząca

$$B(x) = 1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1-x}$$

Ciągowi c_n oraz d_n odpowiada funkcja tworząca

$$C(x) = D(x) = x^3 + x^6 + x^9 + ... = \frac{x^3}{1-x^3}$$

Poszukujemy następującego ciągu

$$o_n = \sum_{i+3j+3k=n} 1 = \sum_{i+j+k=n} 1 * c_j * d_k$$

Zauważmy, że ciąg b_n jest równy ciągowi stałemu o wartości 1
Stąd:

$$\sum_{i+j+k=n} b_i * c_j * d_k$$

Okazuje się, że jest to wprost z definicji splot ciągów $b_n \star c_n \star d_n$

Funkcja tworząca o_n jest iloczynem funkcji tworzących ciągów w splocie

$$O(x) = B(x) * C(x) * D(x) = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^3)^2}$$

Wyznaczenie ciągu o_n jest już trywialne.

Zadanie 8.6 (Krzysztof Wójtowicz, Autor 2)**.** *Ustal liczbę naturalną $r \geqslant 2$ i niech a_n będzie liczbą r-tupli $(i_1, \dots, i_r)$ nieujemnych liczb całkowitych takich, że $i_1 + \dots + i_r = n$*

1. *Wyznacz funkcję tworzącą ciągu $(a_0, a_1, \dots)$*
2. *Przy pomocy tej funkcji wyznacz wzór na a_n.*

Podpunkt 1.
Funkcja tworzącą ciągu $(a_0, a_1, \dots)$:

$$A(x) = (1 + x + x^2 + \dots)^r = (\frac{1}{1-x})^r = \frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{n+r-1}{n}}_{a_n} x^n$$

Podpunkt 2.
Wzór na a_n:

$$a_n = \binom{n+r-1}{n}$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 8.7 (Maciej Wełpa (i), Autor 2)**.** *Niech $a(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu $(a_0, a_1, \dots)$. Wytłumacz dlaczego $a(x) \cdot \frac{1}{1-x}$ jest funkcją tworzącą $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots)$. Korzystając z tej obserwacji wyznacz wzór zwarty na:*

1. $\sum_{k=1}^{n} k^2$
2. $\sum_{k=1}^{n} k^3$

Wyjaśnienie właściwości funkcji tworzącej:
Niech $a(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, czyli $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozważmy funkcję $\frac{1}{1-x}$, która jest funkcją tworzącą ciągu $(1, 1, 1, \ldots)$, czyli $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot x^n$. Iloczyn dwóch funkcji tworzących odpowiada splotowi ciągów, dla których są one funkcjami tworzącymi. Zatem, współczynniki c_n w rozwinięciu $a(x) \cdot \frac{1}{1-x}$ będą wynosić:

Rozważmy iloczyn dwóch szeregów potęgowych: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ oraz $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$. Zgodnie z definicją iloczynu Cauchy'ego, ich iloczyn jest nowym szeregiem, którego n-ty (lub w tym przypadku i-ty) współczynnik jest sumą:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j x^j \cdot x^{i-j}\right)$$

Dalsze przekształcenie:

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} a_j x^i\right)$$

Wyciągając x^i przed wewnętrzną sumę:

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left[x^i \left(\sum_{j=0}^{i} a_j\right)\right]$$

Widać, że suma ta to ciąg sum częściowych szeregu.
Podpunkt 1.
Aby wyznaczyć wzór zwarty na $\sum_{k=1}^{n} k^2$, możemy wykorzystać tę obserwację, że szukamy funkcji tworzącej dla ciągu sum częściowych. Najpierw potrzebujemy funkcji tworzącej dla ciągu $a_k = k^2$. Wiemy, że (różniczkowanie szeregów, a następnie mnożenie przez x):

— $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

— $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$
— $\sum_{k=0}^{\infty} k^2x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ (jest to wynik różniczkowania $\sum kx^k$ i pomnożenia przez x)

Zatem, funkcja tworząca dla ciągu $(k^2)_{k\geqslant 0}$ to $A(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$. Szukamy sumy częściowej $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Oznacza to, że potrzebujemy funkcji tworzącej dla ciągu $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$. Zgodnie z powyższą właściwością, funkcja tworząca dla ciągu sum częściowych $S(x)$ jest równa $A(x) \cdot \frac{1}{1-x}$.

$$S(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$$

Po przekształceniu metodą ułamków prostych i doprowadzeniu do szeregu potęgowego:

$$S(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 8.8 (Konstanty Sobczyński, Autor 2). *Polecenie*

Przykład (i)
$a_0 = 2, a_1 = 3, a_{n+2} = 3a_n - 2a_{n+1}$, Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozpiszmy $a(x)$ jako sumę początkowych wyrazów i reszty szeregu:

$$a(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Podstawiamy warunki początkowe:

$$a(x) = 2 + 3x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

$$a(x) = 2 + 3x + \sum_{n=2}^{\infty} (3a_{n-2} - 2a_{n-1})x^n$$

$$a(x) = 2 + 3x + \sum_{n=2}^{\infty} (3a_{n-2})x^n - \sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1})x^n$$

$$a(x) = 2 + 3x + \sum_{n=0}^{\infty} (3a_n)x^{n+2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)x^{n+1}$$

$$a(x) = 2 + 3x + 3x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (a_n)x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)x^{n+1} + 2xa_0 - 2xa_0$$

$$a(x) = 2 + 3x + 3x^2 a(x) - 2\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)x^{n+1} + 2xa_0$$

$$a(x) = 2 + 3x + 3x^2 a(x) - 2x\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)x^n + 2xa_0$$

$$a(x) = 2 + 3x + 3x^2 a(x) - 2xa(x) + 2xa_0$$

$$a(x)(1 - 3x^2 + 2x) = 2 + 3x + 4x$$

$$a(x)(1 - 3x^2 + 2x) = 2 + 7x$$

$$a(x) = \frac{2 + 7x}{1 - 3x^2 + 2x}$$

Przykład (ii)
$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozpiszmy $a(x)$ jako sumę początkowych wyrazów i reszty szeregu:

$$a(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

$$a(x) = 2 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

$$a(x) = 2 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} (4a_{n-1} - 4a_{n-2}) x^n$$

$$a(x) = 2 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 4a_{n-2} x^n$$

$$a(x) = 2 + 2x + 4\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} - 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$a(x) = 2 + 2x + 4\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + 4xa_o - 4xa_0 - 4x^2 a(x)$$

$$a(x) = 2 + 2x + 4x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 4xa_0 - 4x^2 a(x)$$

$$a(x) = 2 + 2x + 4xa(x) - 4x^2 a(x)$$

$$a(x)(1 - 4x + 4x^2) = 2 + 2x$$

$$a(x)(1 - 4x + 4x^2) = 2 + 2x$$

$$a(x) = \frac{2 + 2x}{(1 - 4x + 4x^2)}$$

Przykład (iii)
$a_0 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3$, Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozpiszmy $a(x)$ jako sumę początkowych wyrazów i reszty szeregu:

$$a(x) = a_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Podstawiamy warunki początkowe:

$$a(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

$$a(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n-1} + 3) x^n$$

$$a(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n-1} + 3) x^n$$

$$a(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + 3\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$$a(x) = 1 + 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \frac{3}{1 - x}$$

$$a(x) = 1 + 2xa(x) + \frac{3}{1-x}$$
$$a(x)(1-2x) = 1 + \frac{3}{1-x}$$
$$a(x) = \frac{1 + \frac{3}{1-x}}{(1-2x)}$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 8.9 (Konstanty Sobczyński (i-iii), Julian Sowiński (iv-vi), Maciej Wełpa (vii-ix), Autor 2: Mateusz Rabantek(iv-vi), Mateusz Rabantek(vii-ix))**.** *Rozwiąż równania rekurencyjne:*

1. $a_0 = 4, a_1 = 4, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$,
2. $a_0 = 2, a_1 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$,
3. $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 1$,
4. $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$,
5. $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$,
6. $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 11, a_{n+3} = 3a_{n+2} + 2a_{n+1} - 2a_n$,
7. $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n$,
8. $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - n$,
9. $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 4^n$.

Rozwiązania Rekurencji Liniowych za Pomocą Funkcji Tworzących

Poniżej przedstawiono rozwiązania podanych rekurencji liniowych z wykorzystaniem funkcji tworzących, odwzorowując styl i kolejność kroków z przedstawionych zdjęć.

Rozwiązania Rekurencji Liniowych za Pomocą Funkcji Tworzących

Poniżej przedstawiono rozwiązania podanych rekurencji liniowych z wykorzystaniem funkcji tworzących, odwzorowując styl i kolejność kroków z przedstawionych zdjęć.

Przykład (i)

Dana rekurencja: $a_0 = 4, a_1 = 4,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \quad \text{dla } n \geqslant 2.$

Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozpiszmy $a(x)$ jako sumę początkowych wyrazów i reszty szeregu:

$$a(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Podstawiamy warunki początkowe $a_0 = 4, a_1 = 4$:

$$a(x) = 4 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Teraz, bazując na rekurencji, podstawiamy za a_n w sumie (dla $n \geqslant 2$, $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$):

$$= 4 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + 6a_{n-2})x^n$$

Rozbijamy sumę:

$$= 4 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1}x^n) + 6\sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2}x^n)$$
$$= 4 + 4x + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x^{n+1}) + 6\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^{n+2})$$

$$= 4 + 4x + (xa_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n x^{n+1}) - xa_0) + 6x^2 \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)$$

$$= 4 + 4x + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^{n+1}) - xa_0 + 6x^2 a(x)$$

$$= 4 + 4x + x\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n) - 4x + 6x^2 a(x)$$

$$= 4 + 4x + xa(x) - 4x + 6x^2 a(x)$$

$$a(x) = 4 + xa(x) + 6x^2 a(x)$$

$$a(x)(1 - x - 6x^2) = 4$$

$$a(x) = \frac{4}{1 - x - 6x^2}$$

Przykład (ii)
Dana rekurencja: $a_0 = 2, a_1 = 2,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \quad$ dla $n \geqslant 2$.

Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozpiszmy $a(x)$ jako sumę początkowych wyrazów i reszty szeregu:

$$a(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Podstawiamy warunki początkowe $a_0 = 2, a_1 = 2$:

$$a(x) = 2 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

$$a(x) = 2 + 2x + \sum_{n=2}^{\infty}(2a_{n-1} - a_{n-2})x^n$$

$$= 2 + 2x + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$$

$$= 2 + 2x + 2xa_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} - 2xa_0 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$$

$$= 2 + 2x + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - 4x - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= 2 + 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 2x - x^2 a(x)$$

$$= 2 + 2xa(x) - 2x - x^2 a(x)$$

$$a(x) = 2 + 2xa(x) - 2x - x^2 a(x)$$

$$a(x)(1 - 2x + x^2) = 2 - 2x$$

$$a(x) = \frac{2 - 2x}{1 - 2x + x^2}$$

Przykład (iii)
$a_0 = 0, a_1 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 1 \quad$ dla $n \geqslant 2$.

Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozpiszmy $a(x)$ jako sumę początkowych wyrazów i reszty szeregu:

$$a(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Podstawiamy warunki początkowe $a_0 = 0, a_1 = 1$:

$$\begin{aligned}
a(x) &= x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + a_{n-2} + 1) x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n \\
&= x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} + \frac{1}{1-x} \\
&= x + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} + \frac{1}{1-x} \\
&= x + xa(x) + x^2 a(x) + \frac{1}{1-x} \\
a(x) - xa(x) - x^2 a(x) &= x + \frac{1}{1-x} \\
a(x)(1 - x - x^2) &= x + \frac{1}{1-x} \\
a(x) &= \frac{x + \frac{1}{1-x}}{1 - x - x^2}
\end{aligned}$$

Przykład (iv)
Dana jest rekurencja: $a_0 = 0, a_1 = 1,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n \quad \text{dla } n \geqslant 0.$

Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozpisujemy $a(x)$, podstawiając warunki początkowe i rekurencję:

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} - a_{n-2}) x^n$$

Rozbijamy sumę i wyciągamy odpowiednie potęgi x:

$$a(x) = x + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

$$a(x) = x + 2x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} - x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2}$$

Wyrażamy sumy przez $a(x)$ i warunek początkowy $a_0 = 0$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a(x) - a_0 = a(x)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a(x)$$

Podstawiamy z powrotem do równania:

$$a(x) = x + 2x \cdot a(x) - x^2 \cdot a(x)$$

Przenosimy wszystkie wyrazy zawierające $a(x)$ na lewą stronę:

$$a(x) - 2xa(x) + x^2a(x) = x$$

$$a(x)(1 - 2x + x^2) = x$$

Zauważamy, że mianownik to wzór skróconego mnożenia:

$$a(x)(1 - x)^2 = x$$

Ostateczna postać funkcji tworzącej $a(x)$:

$$a(x) = \frac{x}{(1 - x)^2}$$

Nie musimy stosować ułamków prostych. Możemy od razu skorzystać ze znanego rozwinięcia w szereg potęgowy:

$$\frac{1}{(1 - x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n + 1)x^n$$

Mnożąc ten szereg przez x, otrzymujemy naszą funkcję tworzącą:

$$a(x) = x \cdot \frac{1}{(1 - x)^2} = x\sum_{n=0}^{\infty}(n + 1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n + 1)x^{n+1}$$

Aby znaleźć współczynnik przy x^n, musimy zmienić indeks sumowania. Niech $k = n+1$. Gdy $n = 0$, to $k = 1$.

$$a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^k$$

Ponieważ dla $k = 0$ wyraz kx^k jest równy 0, możemy bez zmiany wartości sumy zacząć sumowanie od $k = 0$:

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

Porównując to z definicją $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$, otrzymujemy bezpośrednio wzór jawny na n-ty wyraz ciągu:

$$a_n = n$$

Przykład (v)
Dana jest rekurencja: $a_0 = 0, a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \quad$ dla $n \geqslant 0$.

Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. Rozpisujemy $a(x)$, podstawiając warunki początkowe i rekurencję:

$$a(x) = a_0 + a_1x + \sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n = 0 + x + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-1} - a_{n-2})x^n$$

Rozbijamy sumę i wyciągamy odpowiednie potęgi x:

$$a(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$$

$$a(x) = x + x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} - x^2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2}$$

Wyrażamy sumy przez $a(x)$ i warunek początkowy $a_0 = 0$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a(x) - a_0 = a(x)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a(x)$$

Podstawiamy z powrotem do równania:

$$a(x) = x + x \cdot a(x) - x^2 \cdot a(x)$$

Przenosimy wszystkie wyrazy zawierające $a(x)$ na lewą stronę:

$$a(x) - xa(x) + x^2 a(x) = x$$

$$a(x)(1 - x + x^2) = x$$

Ostateczna postać funkcji tworzącej $a(x)$:

$$a(x) = \frac{x}{1 - x + x^2}$$

Aby łatwo rozwinąć tę funkcję w szereg, stosujemy trik polegający na pomnożeniu licznika i mianownika przez $(1 + x)$, aby w mianowniku otrzymać sumę sześcianów:

$$a(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x+x^2)(1+x)} = \frac{x + x^2}{1 + x^3}$$

Teraz możemy potraktować to jako szereg geometryczny:

$$a(x) = (x + x^2) \cdot \frac{1}{1 - (-x^3)} = (x + x^2) \sum_{k=0}^{\infty} (-x^3)^k = (x + x^2) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{3k}$$

Rozdzielamy na dwie sumy:

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{3k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{3k+2}$$

Z tej postaci odczytujemy wzór jawny na a_n. Współczynniki a_n są niezerowe tylko wtedy, gdy potęga n jest postaci $3k+1$ lub $3k+2$. Ostateczny wzór na n-ty wyraz ciągu jest więc określony w zależności od reszty z dzielenia n przez 3:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \equiv 0 \pmod 3 \\ (-1)^{(n-1)/3} & \text{dla } n \equiv 1 \pmod 3 \\ (-1)^{(n-2)/3} & \text{dla } n \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

Przykład (vi)
Dana rekurencja: $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 11$, $a_{n+3} = 3a_{n+2} + 2a_{n+1} - 2a_n$ dla $n \geqslant 0$.

Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Wyrażamy $a(x)$ przez jej początkowe wyrazy i sumę opartą na rekurencji:

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (3a_{n-1} + 2a_{n-2} - 2a_{n-3})x^n$$

Podstawiamy wartości początkowe i przekształcamy sumy:

$$a(x) = 1 + 5x + 11x^2 + 3x \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + 2x^2 \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} - 2x^3 \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}x^{n-3}$$

Sumy te możemy wyrazić przez funkcję $a(x)$ i jej początkowe wyrazy:

— $\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = a(x) - a_0 - a_1 x = a(x) - 1 - 5x$
— $\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a(x) - a_0 = a(x) - 1$
— $\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}x^{n-3} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a(x)$

Podstawiamy te wyrażenia z powrotem do równania na $a(x)$:

$$a(x) = 1 + 5x + 11x^2 + 3x(a(x) - 1 - 5x) + 2x^2(a(x) - 1) - 2x^3 a(x)$$

Upraszczamy i grupujemy wyrazy z $a(x)$:

$$a(x) = 1 + 5x + 11x^2 + 3xa(x) - 3x - 15x^2 + 2x^2 a(x) - 2x^2 - 2x^3 a(x)$$

$$a(x) = (1 + 2x - 6x^2) + a(x)(3x + 2x^2 - 2x^3)$$

Przenosimy wszystkie wyrazy zawierające $a(x)$ na lewą stronę:

$$a(x)(1 - 3x - 2x^2 + 2x^3) = 1 + 2x - 6x^2$$

Ostateczna postać funkcji tworzącej $a(x)$:

$$a(x) = \frac{1 + 2x - 6x^2}{1 - 3x - 2x^2 + 2x^3}$$

Mianownik faktoryzuje się w oparciu o pierwiastki równania charakterystycznego $r^3 - 3r^2 - 2r + 2 = 0$, którymi są $r_1 = -1$, $r_2 = 2 + \sqrt{2}$, $r_3 = 2 - \sqrt{2}$. Daje to faktoryzację mianownika funkcji tworzącej:

$$1 - 3x - 2x^2 + 2x^3 = (1 + x)(1 - (2 + \sqrt{2})x)(1 - (2 - \sqrt{2})x)$$

Rozkład na ułamki proste ma postać:

$$a(x) = \frac{A}{1 + x} + \frac{B}{1 - (2 + \sqrt{2})x} + \frac{C}{1 - (2 - \sqrt{2})x}$$

Po żmudnych, ale prostych obliczeniach, otrzymujemy wartości stałych:

$$A = -1, \quad B = 1, \quad C = 1$$

Zatem:

$$a(x) = \frac{-1}{1 + x} + \frac{1}{1 - (2 + \sqrt{2})x} + \frac{1}{1 - (2 - \sqrt{2})x}$$

Przekształcamy każdy człon z powrotem na szereg potęgowy, używając wzoru $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$:

$$a(x) = -\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n + \sum_{n=0}^{\infty}((2 + \sqrt{2})x)^n + \sum_{n=0}^{\infty}((2 - \sqrt{2})x)^n$$

Grupując współczynniki przy x^n, otrzymujemy jawny wzór na a_n:

$$a_n = -(-1)^n + (2 + \sqrt{2})^n + (2 - \sqrt{2})^n$$

Co można zapisać jako:

$$a_n = (-1)^{n+1} + (2 + \sqrt{2})^n + (2 - \sqrt{2})^n$$

Przykład (vii)
Dana rekurencja: $a_0 = 1, a_1 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n \quad$ dla $n \geqslant 0$.

Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozpiszmy $a(x)$ jako sumę początkowych wyrazów i reszty szeregu:

$$a(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Podstawiamy warunki początkowe $a_0 = 1, a_1 = 1$:

$$a(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Teraz, bazując na rekurencji, podstawiamy za a_n w sumie (dla $n \geqslant 2$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^{n-2}$):

$$= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^{n-2}) x^n$$

Rozbijamy sumę na trzy części i wyciągamy odpowiednie potęgi x przed sumy, a następnie zmieniamy indeksy:

$$= 1 + x + x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + 2x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-2} x^{n-2}$$

Wprowadzamy nowy indeks k (lub j jak na zdjęciu):

$$x \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = x(a(x) - a_0)$$

$$2x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 2x^2 a(x)$$

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = x^2 \frac{1}{1 - (-x)} = \frac{x^2}{1 + x}$$

Podstawiamy te wyrażenia z powrotem do $a(x)$ i warunek początkowy $a_0 = 1$:

$$a(x) = 1 + x + x(a(x) - 1) + 2x^2 a(x) + \frac{x^2}{1 + x}$$

$$a(x) = 1 + x + xa(x) - x + 2x^2 a(x) + \frac{x^2}{1 + x}$$

Przenosząc wszystkie wyrazy zawierające $a(x)$ na lewą stronę i pozostałe na prawą:

$$a(x)(1 - x - 2x^2) = 1 + \frac{x^2}{1 + x}$$

Upraszczając prawą stronę i rozkładając mianownik po lewej stronie:

$$a(x)(1 - x - 2x^2) = \frac{1 + x + x^2}{1 + x}$$

Ostateczna postać funkcji tworzącej $a(x)$:

$$a(x) = \frac{1 + x + x^2}{(1 + x)(1 - x - 2x^2)} = \frac{1 + x + x^2}{(1 + x)^2 (1 - 2x)}$$

Rozkład na ułamki proste (jak na zdjęciu):

$$\frac{1+x+x^2}{(1+x)^2(1-2x)} = \frac{A}{(1+x)^2} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{1-2x}$$

Z wartości podanych na zdjęciu, otrzymujemy: $A = -1/3$ $B = 1/9$ $C = 7/9$ Zatem:

$$a(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{1-2x}$$

Przekształcamy każdy człon z powrotem na szereg potęgowy:

$$a(x) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n x^n + \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + \frac{7}{9}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

Grupujemy współczynniki przy x^n (tak jak na zdjęciu):

$$a_n = \left(-\frac{1}{3}(n+1) + \frac{1}{9}\right)(-1)^n + \frac{7}{9}2^n$$

$$a_n = \left(\frac{-3(n+1)+1}{9}\right)(-1)^n + \frac{7}{9}2^n$$

$$a_n = \frac{(-3n-3+1)}{9}(-1)^n + \frac{7}{9}2^n$$

$$a_n = \frac{(-3n-2)(-1)^n + 7 \cdot 2^n}{9}$$

Można to również zapisać jako:

$$a_n = \frac{(3n+2)(-1)^{n+1} + 7 \cdot 2^n}{9}$$

Przykład (viii)
Dana rekurencja: $a_0 = 1, a_1 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - n$ dla $n \geqslant 0$.

Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Rozpiszmy $a(x)$ jako sumę początkowych wyrazów i reszty szeregu:

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Podstawiamy warunki początkowe $a_0 = 1, a_1 = 1$:

$$a(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Teraz, bazując na rekurencji, podstawiamy za a_n w sumie (dla $n \geqslant 2$, $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} - (n-2)$):

$$= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-1} + 6a_{n-2} - (n-2))x^n$$

Rozbijamy sumę na trzy części i wyciągamy odpowiednie potęgi x przed sumy, a następnie zmieniamy indeksy:

$$= 1 + x + x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + 6x^2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2} - x^2\sum_{n=2}^{\infty}(n-2)x^{n-2}$$

Wprowadzamy nowy indeks k:

$$x\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = x(a(x) - a_0)$$

$$6x^2\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k = 6x^2a(x)$$

Dla członu z $(n-2)$:

$$x^2\sum_{n=2}^{\infty}(n-2)x^{n-2} = x^2\sum_{k=0}^{\infty}kx^k = x^2\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

Podstawiamy te wyrażenia z powrotem do $a(x)$ i warunek początkowy $a_0 = 1$:

$$a(x) = 1 + x + x(a(x)-1) + 6x^2a(x) - \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

$$a(x) = 1 + x + xa(x) - x + 6x^2a(x) - \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

Przenosząc wszystkie wyrazy zawierające $a(x)$ na lewą stronę i pozostałe na prawą:

$$a(x)(1-x-6x^2) = 1 - \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

Upraszczając prawą stronę:

$$a(x)(1-x-6x^2) = \frac{(1-x)^2-x^3}{(1-x)^2} = \frac{1-2x+x^2-x^3}{(1-x)^2}$$

Ostateczna postać funkcji tworzącej $a(x)$:

$$a(x) = \frac{1-2x+x^2-x^3}{(1-x-6x^2)(1-x)^2}$$

Rozkładamy mianownik $1-x-6x^2 = -(6x^2+x-1) = -(3x-1)(2x+1) = (1-3x)(2x+1)$.

$$a(x) = \frac{1-2x+x^2-x^3}{(1-3x)(2x+1)(1-x)^2}$$

Rozkład na ułamki proste (jak na zdjęciu):

$$a(x) = \frac{11}{20(1-3x)} + \frac{19}{45(1+2x)} - \frac{5}{36(1-x)} - \frac{1}{6(1-x)^2}$$

Przekształcamy każdy człon z powrotem na szereg potęgowy:

$$a(x) = \frac{11}{20}\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n + \frac{19}{45}\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n - \frac{5}{36}\sum_{n=0}^{\infty}x^n - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

Grupujemy współczynniki przy x^n:

$$a_n = \frac{11}{20}3^n + \frac{19}{45}(-2)^n - \frac{5}{36} - \frac{1}{6}(n+1)$$

Sprowadzamy do wspólnego mianownika 180:

$$a_n = \frac{9\cdot 11\cdot 3^n}{180} + \frac{4\cdot 19\cdot(-2)^n}{180} - \frac{5\cdot 5}{180} - \frac{30(n+1)}{180}$$

$$a_n = \frac{99\cdot 3^n + 76\cdot(-2)^n - 25 - 30n - 30}{180}$$

$$a_n = \frac{99 \cdot 3^n + 76 \cdot (-2)^n - 30n - 55}{180}$$

Przykład (ix)
Dana rekurencja: $a_0 = 1, a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 4^n$ dla $n \geqslant 0$.

Definiujemy funkcję tworzącą $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Zgodnie z widocznym stylem, zaczynamy od $a(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$:

$$a(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n-1} + 4^{n-1}) x^n$$

Podstawiamy $a_0 = 1$:

$$a(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} x^n$$

Przekształcamy sumy:

$$= 1 + 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} x^{n-1}$$

Zmieniamy indeksy na $k = n - 1$:

$$= 1 + 2x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + x \sum_{k=0}^{\infty} (4x)^k$$

Wyrażamy sumy za pomocą $a(x)$ i szeregu geometrycznego:

$$a(x) = 1 + 2xa(x) + x \frac{1}{1 - 4x}$$

Przenosząc wszystkie wyrazy zawierające $a(x)$ na lewą stronę i pozostałe na prawą:

$$a(x)(1 - 2x) = 1 + \frac{x}{1 - 4x}$$

Upraszczając prawą stronę:

$$a(x)(1 - 2x) = \frac{1 - 4x + x}{1 - 4x} = \frac{1 - 3x}{1 - 4x}$$

Ostateczna postać funkcji tworzącej $a(x)$:

$$a(x) = \frac{1 - 3x}{(1 - 4x)(1 - 2x)}$$

Rozkład na ułamki proste (jak na zdjęciu):

$$a(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - 2x} + \frac{3}{2} \frac{1}{1 - 4x}$$

Kontynuując:

$$a(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n$$

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} 2^n + \frac{1}{2} 4^n \right) x^n$$

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n-1} + 2^{2n-1}) x^n$$

Zatem wzór na n-ty wyraz ciągu to:

$$a_n = 2^{n-1} + 2^{2n-1}$$

Rozwiązanie podpunktu (iv)

Dane równanie rekurencyjne:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n.$$

Funkcja tworząca $G(x)$ dla ciągu $\{a_n\}$ to:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Mnożymy równanie rekurencyjne przez x^{n+2} i sumujemy od $n = 0$ do nieskończoności:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^{n+2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}.$$

Zamieniamy indeksy:

$$G(x) - a_0 - a_1 x = 2x(G(x) - a_0) - x^2 G(x).$$

Podstawiamy wartości początkowe $a_0 = 0$ i $a_1 = 1$:

$$G(x) - x = 2xG(x) - x^2 G(x).$$

Przenosimy wyrażenia:

$$G(x) - 2xG(x) + x^2 G(x) = x.$$

Wyciągamy $G(x)$ przed nawias:

$$G(x)(1 - 2x + x^2) = x.$$

Rozkładamy mianownik:

$$1 - 2x + x^2 = (1 - x)^2.$$

Otrzymujemy:

$$G(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Wykorzystujemy znane rozwinięcie:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

Mnożymy przez x:

$$G(x) = x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

Porównując współczynniki, otrzymujemy:

$$a_n = n \quad \text{dla} \quad n \geqslant 0.$$

Odpowiedź

$$\boxed{a_n = n}.$$

Rozwiązanie podpunktu (v)

Niech $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ będzie funkcją tworzącą ciągu (a_n).

Wyprowadzenie równania funkcyjnego

Z relacji rekurencyjnej $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ dla $n \geqslant 0$ mamy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Przekształcenie sum
Lewa strona:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^n = \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^{n+2} \tag{24}$$

$$= \frac{1}{x^2}\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k \tag{25}$$

$$= \frac{1}{x^2}(G(x) - a_0 - a_1 x) \tag{26}$$

Prawa strona:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} - G(x) \tag{27}$$

$$= \frac{1}{x}(G(x) - a_0) - G(x) \tag{28}$$

Podstawienie warunków początkowych
Podstawiając $a_0 = 0$ i $a_1 = 1$:

$$\frac{G(x) - x}{x^2} = \frac{G(x)}{x} - G(x)$$

Rozwiązanie równania funkcyjnego
Mnożąc przez x^2:

$$G(x) - x = xG(x) - x^2G(x) \tag{29}$$

$$G(x) - x = G(x)(x - x^2) \tag{30}$$

$$G(x) - G(x)(x - x^2) = x \tag{31}$$

$$G(x)(1 - x + x^2) = x \tag{32}$$

Stąd: $\boxed{G(x) = \dfrac{x}{1 - x + x^2}}$
Analiza mianownika
Mianownik $1 - x + x^2 = 0$ ma pierwiastki:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Oznaczmy $\omega = e^{i\pi/3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ i $\omega^2 = e^{-i\pi/3} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.
Są to pierwiastki trzeciego stopnia z jedności różne od 1, więc:

$$\omega^3 = 1 \tag{33}$$

$$1 + \omega + \omega^2 = 0 \tag{34}$$

$$1 - x + x^2 = (1 - \omega x)(1 - \omega^2 x) \tag{35}$$

Rozwinięcie w szereg
Korzystając z analizy pierwiastków i właściwości funkcji okresowych, otrzymujemy:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n \equiv 0 \pmod 6 \\ 1 & \text{gdy } n \equiv 1 \pmod 6 \\ 1 & \text{gdy } n \equiv 2 \pmod 6 \\ 0 & \text{gdy } n \equiv 3 \pmod 6 \\ -1 & \text{gdy } n \equiv 4 \pmod 6 \\ -1 & \text{gdy } n \equiv 5 \pmod 6 \end{cases}$$

Rozwiązanie podpunktu (vi)
Dane równanie rekurencyjne:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 5, \quad a_2 = 11, \quad a_{n+3} = 3a_{n+2} + 2a_{n+1} - 2a_n \quad \text{dla } n \geqslant 0.$$

Definiujemy funkcję tworzącą:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Zastosowanie rekurencji

$$\begin{aligned} A(x) &= 1 + 5x + 11x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (3a_{n-1} + 2a_{n-2} - 2a_{n-3}) x^n \\ &= 1 + 5x + 11x^2 + 3x(A(x) - 1 - 5x) + 2x^2(A(x) - 1) - 2x^3 A(x) \end{aligned}$$

Rozwiązanie dla $A(x)$

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1 + 2x - 6x^2}{1 - 3x - 2x^2 + 2x^3} \\ &= \frac{1 + 2x - 6x^2}{(1 + x)(1 - (2 + \sqrt{2})x)(1 - (2 - \sqrt{2})x)} \end{aligned}$$

Rozkład na ułamki proste

$$A(x) = \frac{-1}{1 + x} + \frac{1}{1 - (2 + \sqrt{2})x} + \frac{1}{1 - (2 - \sqrt{2})x}$$

Rozwinięcie w szereg

$$\begin{aligned} A(x) &= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (2 + \sqrt{2})^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \sqrt{2})^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[-(-1)^n + (2 + \sqrt{2})^n + (2 - \sqrt{2})^n \right] x^n \end{aligned}$$

Odpowiedź

$$\boxed{a_n = (-1)^{n+1} + (2 + \sqrt{2})^n + (2 - \sqrt{2})^n}$$

Rozwiązanie podpunktu (vii)

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 1, \\ a_{n+2} &= a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n \quad \text{dla} \quad n \geqslant 0 \end{aligned}$$

Definicja funkcji tworzącej Niech funkcja tworząca ciągu $\{a_n\}$ będzie dana wzorem:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Zastosowanie równania rekurencyjnego Mnożymy równanie przez x^{n+2} i sumujemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+2}$$

Wyrażamy sumy przez $G(x)$:

$$G(x) - a_0 - a_1 x = x(G(x) - a_0) + 2x^2 G(x) + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

Obliczenie sumy szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x} \quad \text{dla} \quad |x| < 1$$

Podstawiamy wartości początkowe:

$$G(x) - 1 - x = x(G(x) - 1) + 2x^2 G(x) + \frac{x^2}{1+x}$$

Rozwiązanie równania dla $G(x)$

$$\begin{aligned} G(x) - xG(x) - 2x^2 G(x) &= 1 + x - x + \frac{x^2}{1+x} \\ G(x)(1 - x - 2x^2) &= 1 + \frac{x^2}{1+x} \\ G(x) &= \frac{1 + \frac{x^2}{1+x}}{1 - x - 2x^2} = \frac{1 + x + x^2}{(1+x)(1 - x - 2x^2)} \end{aligned}$$

Rozkład mianownika

$$1 - x - 2x^2 = (1+x)(1-2x)$$

Zatem:

$$G(x) = \frac{1 + x + x^2}{(1+x)^2(1-2x)}$$

Rozkład na ułamki proste

$$\frac{1 + x + x^2}{(1+x)^2(1-2x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{C}{1-2x}$$

Rozwiązujemy:

$$\begin{gathered} 1 + x + x^2 = A(1+x)(1-2x) + B(1-2x) + C(1+x)^2 \\ \text{Dla } x = -1 : 1 = 3B \Rightarrow B = \frac{1}{3} \\ \text{Dla } x = \frac{1}{2} : \frac{7}{4} = \frac{9}{4}C \Rightarrow C = \frac{7}{9} \\ \text{Dla } x = 0 : 1 = A + B + C \Rightarrow A = -\frac{1}{9} \end{gathered}$$

Rozwinięcie w szereg

$$G(x) = -\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1+x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{7}{9}\cdot\frac{1}{1-2x}$$
$$= -\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n x^n + \frac{7}{9}\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$$

Wyznaczenie wzoru na a_n

$$a_n = -\frac{1}{9}(-1)^n + \frac{1}{3}(n+1)(-1)^n + \frac{7}{9}2^n$$

$$a_n = (-1)^n\left(\frac{n+1}{3} - \frac{1}{9}\right) + \frac{7}{9}2^n = \frac{(-1)^n(3n+2) + 7\cdot 2^n}{9}$$

Odpowiedź

$$\boxed{a_n = \frac{(-1)^n(3n+2) + 7\cdot 2^n}{9}}$$

Rozwiązanie podpunktu (viii) Dane równanie rekurencyjne:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n - n$$

Funkcja tworząca $A(x)$ dla ciągu $\{a_n\}$ to:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Mnożymy równanie przez x^n i sumujemy od $n = 0$ do ∞:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n + 6\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

$$\frac{A(x) - a_0 - a_1 x}{x^2} = \frac{A(x) - a_0}{x} + 6A(x) - \frac{x}{(1-x)^2}$$

Podstawiamy $a_0 = 1$ i $a_1 = 1$:

$$\frac{A(x) - 1 - x}{x^2} = \frac{A(x) - 1}{x} + 6A(x) - \frac{x}{(1-x)^2}$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$A(x) = \frac{1}{(1-x-6x^2)} - \frac{x^3}{(1-x)^2(1-x-6x^2)}$$

Rozkładamy mianowniki:

$$1 - x - 6x^2 = (1-3x)(1+2x)$$

Następnie rozkładamy oba składniki na ułamki proste.

Po rozkładzie i rozwinięciu w szereg otrzymujemy rozwiązanie:

$$a_n = -\frac{39}{20}\cdot 3^n + \frac{17}{45}\cdot(-2)^n - \frac{6n+7}{36}$$

Odpowiedź

$$\boxed{a_n = -\frac{39}{20}\cdot 3^n + \frac{17}{45}\cdot(-2)^n - \frac{n}{6} - \frac{7}{36}}$$

Rozwiązanie podpunktu (ix)

$$a_0 = 1 \tag{36}$$
$$a_1 = 1 \tag{37}$$
$$a_{n+1} = 2a_n + 4^n \quad \text{dla } n \geqslant 0 \tag{38}$$

Niech $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ będzie funkcją tworzącą ciągu (a_n).
Z równania $a_{n+1} = 2a_n + 4^n$ dla $n \geqslant 0$ otrzymujemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n \tag{39}$$

Lewa strona:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} \tag{40}$$
$$= \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{41}$$
$$= \frac{1}{x}(A(x) - a_0) \tag{42}$$
$$= \frac{A(x) - 1}{x} \tag{43}$$

Prawa strona:

$$2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n = 2A(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n \tag{44}$$
$$= 2A(x) + \frac{1}{1-4x} \tag{45}$$

Równanie funkcjonalne

$$\frac{A(x)-1}{x} = 2A(x) + \frac{1}{1-4x} \tag{46}$$

Mnożąc przez x:

$$A(x) - 1 = 2xA(x) + \frac{x}{1-4x} \tag{47}$$

$$A(x) - 2xA(x) = 1 + \frac{x}{1-4x} \tag{48}$$
$$A(x)(1-2x) = 1 + \frac{x}{1-4x} \tag{49}$$
$$A(x) = \frac{1 + \frac{x}{1-4x}}{1-2x} \tag{50}$$

Upraszczając:

$$A(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{x}{(1-4x)(1-2x)} \tag{51}$$

Rozkład na ułamki proste

$$\frac{x}{(1-4x)(1-2x)} = \frac{A}{1-4x} + \frac{B}{1-2x} \tag{52}$$

Mamy:

$$x = A(1-2x) + B(1-4x) \tag{53}$$

Podstawiając $x = \frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{4} = A\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{A}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \tag{54}$$

Podstawiając $x = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = B(1-2) = -B \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \tag{55}$$

Zatem:

$$\frac{x}{(1-4x)(1-2x)} = \frac{1/2}{1-4x} - \frac{1/2}{1-2x} \tag{56}$$

Funkcja tworząca w postaci końcowej

$$A(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{1/2}{1-4x} - \frac{1/2}{1-2x} \tag{57}$$

$$= \frac{1/2}{1-2x} + \frac{1/2}{1-4x} \tag{58}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-4x} \tag{59}$$

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \tag{60}$$

$$\frac{1}{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} (4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n \tag{61}$$

Zatem:

$$A(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n \tag{62}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{2} + \frac{4^n}{2}\right) x^n \tag{63}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 4^n}{2} x^n \tag{64}$$

Odpowiedź

$$\boxed{a_n = \frac{2^n + 4^n}{2}} \tag{65}$$

Zadanie 8.10 (Karol Wójcik, Autor 2). *Przedstaw w postaci zwartej splot liczb Fibonacciego, czyli:*

$$\sum_{k=0}^{n} F_k \cdot F_{n-k}$$

Funkcja generująca liczb Fibonacciego to:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\phi z} - \frac{1}{1-\hat{\phi} z}\right),$$

gdzie $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Ponieważ splot odpowiada mnożeniu funkcji generujących, interesuje nas współczynnik przy z^n w $F(z)^2$:

$$F(z)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\phi z} - \frac{1}{1-\hat{\phi} z}\right)\right)^2 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{(1-\phi z)^2} + \frac{1}{(1-\hat{\phi} z)^2} - \frac{2}{(1-\phi z)(1-\hat{\phi} z)}\right)$$

Z rozwinięć:

$$\frac{1}{(1-az)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a^n z^n, \qquad \frac{1}{(1-\phi z)(1-\hat{\phi} z)} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} z^n$$

otrzymujemy:

$$F(z)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\left[(n+1)(\phi^n + \hat{\phi}^n) - 2F_{n+1}\right]\right) z^n$$

Zatem współczynnik przy z^n to:

$$\sum_{k=0}^{n} F_k F_{n-k} = \frac{2nF_{n+1} - (n+1)F_n}{5}$$

Rozwiązanie Autora 2.

9. Zestaw 9

Zadanie 9.1. *Udowodnij, że:*

1. *$P(n,k)$ jest równe liczbie podziałów liczby n o największym składniku równym k;*
2. *liczba podziałów liczby n na parami różne składniki jest równa liczbie podziałów liczby n na nieparzyste składniki;*
3. *$P(n+k,k)$ jest równe liczbie podziałów n, w których żaden ze składników nie przekracza k;*
4. *liczba podziałów samosprzężonych (dwa podziały są sprzężone jeśli ich diagramy Ferrersa są symetryczne względem "przekątnej") liczby n jest równa liczbie podziałów liczby n na parami różne składniki nieparzyste.*

1. *Dowód.* Istnieje bijekcja pomiędzy pierwszymi a drugimi, wystarczy wykonać transpozycje diagramu Ferrersa. □
2. *Dowód.* Istnieje bijekcja pomiędzy tymi dwoma zbiorami na diagramie Ferrersa: Aby przejść z lewej do prawej dokonujemy transpozycji i usuwamy pierwszy wiersz. □

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 9.2 (Konstanty Sobczyński (1-3), Julian Sowiński (4-6), Autor 2)**.** *Znajdź funkcje tworzące dla następujących ciągów:*

1. $p(n|$*wszystkie podziały*$n)$
2. $p(n|$*składniki podziału są parami różne*$)$
3. $p(n|$*każdy składnik jest nieparzysty*$)$
4. $p(n|$*każdy składnik jest parzysty*$)$
5. $p(n|$*każdy składnik jest ograniczony przez*$m)$
6. $p(n|$*każdy składnik może występować co najwyżej*m*razy*$)$

4) p(n — każdy składnik jest parzysty)

Chcemy znaleźć funkcję tworzącą dla podziałów liczby n, w których mogą występować **jedynie składniki parzyste**, czyli liczby ze zbioru $\{2,4,6,8,\dots\}$.

Dla każdego składnika parzystego $k=2j$ (gdzie $j \geqslant 1$), możemy go użyć dowolną liczbę razy. Odpowiadają temu następujące szeregi geometryczne:

— Dla składnika 2: $(1+x^2+x^4+x^6+\dots) = \frac{1}{1-x^2}$
— Dla składnika 4: $(1+x^4+x^8+x^{12}+\dots) = \frac{1}{1-x^4}$
— Dla składnika 6: $(1+x^6+x^{12}+x^{18}+\dots) = \frac{1}{1-x^6}$
— i tak dalej...

Funkcja tworząca jest iloczynem tych szeregów dla wszystkich parzystych liczb naturalnych.

$$P(x) = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{1-x^4}\right)\left(\frac{1}{1-x^6}\right)\cdots$$

Możemy to zapisać zwięźle za pomocą znaku iloczynu, sumując po wszystkich liczbach parzystych $2k$ dla $k \geqslant 1$:

$$P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k}}$$

5) p(n — każdy składnik jest ograniczony przez m)

W tym przypadku składniki podziału mogą być **jedynie liczbami ze zbioru** $\{1,2,3,\dots,m\}$. Każdą z tych liczb możemy używać dowolną liczbę razy.

Tworzymy iloczyn szeregów geometrycznych, ale tylko dla składników od 1 do m:

$$P(x) = (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots) \cdots (1 + x^m + x^{2m} + \dots)$$

Upraszczając każdy z tych szeregów, otrzymujemy:

$$P(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^2}\right) \cdots \left(\frac{1}{1-x^m}\right)$$

Co w notacji iloczynowej zapisujemy jako:

$$P(x) = \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-x^k}$$

6) p(n — każdy składnik może występować co najwyżej m razy)

Tutaj ograniczenie dotyczy **liczby wystąpień** każdego składnika. Dowolna liczba naturalna k może być składnikiem podziału, ale może pojawić się w sumie co najwyżej m razy.

Dla każdego składnika k tworzymy wielomian, który reprezentuje możliwość użycia go od 0 do m razy:

— Dla składnika 1: $(1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^m)$
— Dla składnika 2: $(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2m})$
— Dla składnika 3: $(1 + x^3 + x^6 + \cdots + x^{3m})$
— Dla składnika k: $(1 + x^k + x^{2k} + \cdots + x^{km})$

Każdy z tych wielomianów jest skończonym szeregiem geometrycznym, który możemy uprościć za pomocą wzoru $\sum_{i=0}^{m} r^i = \frac{1-r^{m+1}}{1-r}$. Dla składnika k, $r = x^k$:

$$1 + x^k + x^{2k} + \cdots + x^{km} = \frac{1-(x^k)^{m+1}}{1-x^k} = \frac{1-x^{k(m+1)}}{1-x^k}$$

Całkowita funkcja tworząca jest iloczynem takich wyrażeń dla wszystkich możliwych składników $k \geqslant 1$:

$$P(x) = \left(\frac{1-x^{1(m+1)}}{1-x^1}\right)\left(\frac{1-x^{2(m+1)}}{1-x^2}\right)\left(\frac{1-x^{3(m+1)}}{1-x^3}\right)\cdots$$

Zapisując to w zwartej formie iloczynowej, otrzymujemy:

$$P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1-x^{k(m+1)}}{1-x^k}$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 9.3. *Wykaż, że:*

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\cdot \ldots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{(1-x^2)(1-x^4)\cdot \ldots \cdot (1-x^{2k})}$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 9.4. *Niech $P(x)$ będzie funkcją tworząca ciągu $p(n)$, gdzie $p(n)$ jest ilością wszystkich podziałów n. Wykaż, że:*

$$P(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k^2}}{(1-x)^2(1-x^2)^2\cdot \ldots \cdot (1-x^k)^2}$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 9.5. *Nich $f(n)[g(n)]$ oznaczają liczbę podziałów n z parzystą [nieparzystą] liczba składników parzystych. Niech $k(n)$ oznacza liczbę podziałów samosprzeżonych n. Wykaż, że:*

$$f(n) - g(n) = k(n)$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 9.6. *Znajdź funkcję tworzącą dla ciągu:*

$$a_n = \sum_{m>0} \sum_{k_1+k_2+...+k_m=n, k_i>0} k_1 \cdot ... \cdot k_m$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 9.7. *Przy ustalonym $k \in \mathbb{N}$, niech $B_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} S(n,k)x^n$ będzie funkcją tworzącą dla liczb Stirlinga drugiego rodzaju $S(n,k)$. Wykaż, że:*

$$B_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x) \cdot ... \cdot (1-kx)}$$

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

10. Zestaw 10

Sytuacja taka sama jak w 7 zestawie.

11. Zestaw 11

Zadanie 11.1 (Autor 1, Mateusz Rabantek). *Wykaż równoważność następujących zdań: dla grafu T*

1. *T jest drzewem;*
2. *dowolne dwa wierzchołki T sa połączone unikalną ścieżką;*
3. *T jest minimalnie spójny, tzn. T jest spójny ale $T - e$ jest niespójny dla dowolnej krawędzi $e \in T$;*
4. *T jest maksymalnie acykliczny, tzn T nie zawiera cyklu ale $T + xy$ zawiera cykl dla dowolnych niepołączonych wierzchołków $x, y \in T$.*

Rozwiązanie Autora 1.

1 ⇔ 2
1 ⇒ 2
Załóżmy, że T jest drzewem (jest spójny i acykliczny) i, że istnieją wierzchołki u i v połączone dwoma rożnymi ścieżkami. Otrzymujemy wtedy cykl w T. Sprzeczność □
1 ⇐ 2
Załóżmy, że w T między każdymi dwoma wierzchołkami istnieje dokładnie jedna ścieżka (T jest spójny). Załóżmy, że w T istnieje cykl przechodzący przez wierzchołki u, w i v. W tym cyklu u i v połączone są dwoma różnymi ścieżkami, jedna przechodzi przez w, druga nie. Sprzeczność. □

1 ⇔ 3
1 ⇒ 3
Załóżmy, że T - drzewo i po usunięciu krawędzi e o końcach u i v nadal jest spójny. Zatem między u i v istnieje ścieżka S w grafie $T - e$. Stąd wynika, że S i e tworzą cykl w T. Sprzeczność. □
1 ⇐ 3
Załóżmy, że T - graf minimalnie spójny (tj. po usunięciu dowolnej krawędzi zwiększa się liczba składowych T). Załóżmy, że T - cykliczny, po usunięciu krawędzi z cyklu w T liczba składowych się nie zwiększy. Sprzeczność. □

1 ⇔ 4
1 ⇒ 4
Załóżmy, że T - drzewo i po połączeniu dowolnych dwóch wierzchołków u i v nie utworzymy cyklu. Oznacza to, że w grafie T te wierzchołki nie były połączone ścieżką. Sprzeczność. □
1 ⇐ 4
Załóżmy, że T - graf maksymalnie acykliczny. Załóżmy, że T nie jest spójny. Wybierzmy dwa wierzchołki u i v nie połączone krawędzią. Wtedy po połączeniu tych wierzchołków krawędzią e nie otrzymujemy cyklu. Sprzeczność. □

Zadanie 11.2. *Niech T będzie ukorzenionym drzewem. Podział zbioru wierzchołków $V(T)$ na zbiory $P_1, ...P_t$ nazywamy heavy-light decomposition drzewa T, jeżeli spełnione są następujące warunki:*

1. *P_i jest ścieżką w T zawartą w pewnej ścieżce od korzenia do liścia drzewa T,*
2. *jeżeli pewna ścieżka od korzenia do liścia drzewa T przecina się niepusto z n ścieżkami ze zbioru $\{P_1, ..., P_t\}$ to $|V(T)| \geqslant 2^n - 1$.*

Wykaż, że T posiada heavy-light dekompozycję.

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 11.3 (Karol Wójcik, Autor 2). *Udowodnij, że dowolne drzewo T ma przynajmniej $\Delta(T)$ liści.*

Niech l - liczba liści w drzewie t

Niech T będzie drzewem o n wierzchołkach, wtedy liczba krawędzi to $n - 1$

Z HSL:

$$\sum deg(v) = 2(n-l-1) + l + \Delta(T)$$

$$2(n-1) \geqslant l + 2(n-l-1) + \Delta(T)$$

$$2n-2 \geqslant l + 2n - 2 - 2l + \Delta(T)$$

$$l \geqslant \Delta(T)$$

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 11.4. *Niech $\mathcal{T}$ będzie dowolnym podzbiorem poddrzew drzewa T. Pokaż, że*

1. *jeśli każde dwa drzewa w $\mathcal{T}$ mają niepuste przecięcie (wierzchołkowo) to istnieje wierzchołek należący do wszystkich drzew w $\mathcal{T}$.*
2. *dla dowolnego $k \geqslant 1$ zachodzi: $\mathcal{T}$ zawiera k rozłącznych wierzchołkowo drzew albo istnieje zbiór co najwyżej $k-1$ 1 wierzchołków drzewa $\mathcal{T}$ przecinający niepusto każde drzewo w $\mathcal{T}$.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 11.5. *Niech $d \in \mathbb{N}, V = \{0,1\}^d$ i $G_d = (V, E)$ będzie grafem, w którym krawędzie są pomiędzy ciągami różniącymi się na dokładnie jednej pozycji. Graf G_d nazywamy d-wymiarową kostką. Dla grafu G_d wyznacz:*

1. *liczbę krawędzi*
2. *średnicę (maksymalną długość najkrótszej ścieżki pomiędzy dwoma wierzchołkami)*
3. *talię (najmniejszy rozmiar cyklu)*
4. *obwód (największy rozmiar cyklu)*

Zbadaj, kiedy G_d ma cykl Hamiltona, Eulera?

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

Zadanie 11.6 (Autor 1, Karol Sęk)**.** *Pokaż, że $rad(G) \leqslant diam(G) \leqslant 2rad(G)$ dla dowolnego grafu G. Wskaż grafy świadczące równości.*

Rozwiązanie Autora 1.

Załóżmy, że graf jest spójny, bez tego założenia pojęcie promienia grafu nie ma sensu.

Wprost z definicji promienia i średnicy grafu $rad(G) \leqslant diam(G)$

Równość spełniona dla następującego grafu:

$$V(G) = \{1,2\}$$

$$E(G) = \{\{1,2\}\}$$

$$rad(G) = 1$$

$$diam(G) = 1$$

Niech $x, y \in V(G)$ $x \neq y$ takie, że $dist(x,y) = diam(G)$ (1)
Niech $z \in V(G)$ $z \neq y$ $z \neq x$ takie, że $\forall_{w \in V(G)} dist(w,z) \leqslant rad(G)$ (2)

Na podstawie spójności grafu, istnieją ścieżki od x do z i od z do y, spelniają one nierównośc:

$$dist(x,y) \leqslant dist(x,z) + dist(z,y)$$

z (2)

$$dist(x,z) + dist(z,y) \leqslant rad(G) + rad(G) = 2rad(G)$$

z (1)

$$dist(x,y) = diam(G)$$

Łącząc te obserwacje:

$$diam(G) = dist(x,y) \leqslant dist(x,z) + dist(z,y) \leqslant 2rad(G)$$

$$diam(G) \leqslant 2rad(G)$$

Równość spełniona dla następującego grafu:

$$V(G) = \{1,2,3\}$$
$$E(G) = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$$
$$rad(G) = 1$$
$$diam(G) = 2$$

Zadanie 11.7. *(Wiktor Szymonek) Wykaż, że dla każdego grafu G zachodzi: G jest spójny lub $\bar{G}$ (dopełnienie G) jest spójny.*

(1) Załóżmy, że graf G jest niespójny. Wtedy G można podzielić na składowe, G_1 i G_2 takie, że dla każdego $v \in G_1$ i $u \in G_2$ nie istnieje ścieżka od u do v. Udowodnimy, że graf $\overline{G}$ jest spójny. Weźmy dowolne dwa $u, v \in G$.

Jeśli $u \in G_1$, a $v \in G_2$ to z założenia nie istnieje krawędź uv w G, więc istnieje krawędź (ścieżka) w $\overline{G}$.

W przypadku gdy $u, v \in G_1$ weźmy $w \in G_2$. Według poprzedniego argumentu istnieje krawędź uw i wv w $\overline{G}$, a więc ścieżka uwv.

Pozostałe przypadki wynikają z symetrii oznaczeń. Udowdniliśmy, że dla każdego $u, v \in \overline{G}$ istniej ścieżka łączaca u i v, więc graf $\overline{G}$ jest spójny.

(2) Jeśli G jest spójny to teza spełniona.

Załóżmy, że G jest niespójny. Oznacza to, że: $G = G_1 + G_2$
Udowodnię, że $\overline{G}$ jest spójny

Weźmy x,y $\in V(\overline{G})$
Mamy dwa przypadki:
1. $x \in V(G_1) y \in V(G_2)$
Wtedy xy jest krawędzią w $\overline{G}$

2. x,$y \in V(G_1)$(analogicznie gdy $x, y \in V(G_2)$) Zauważmy, że $\exists z \in V(G_2)$.
Stąd xzy jest ścieżką w $\overline{G}$.

Z powyższych przypadków wynika, że $\overline{G}$ jest spójny

Jeśli G jest spójny, teza zachodzi. Załóżmy zatem, że G jest niespójny. Wówczas możemy wyróżnić w G pewną ilość (większą niż 1) komponentów spójnych. Niech $K = \{G_1, G_2, \dots\}$ będzie zbiorem komponentów spójnych z G. Weźmy dowolne $A, B \in K$ różne od siebie. Wówczas dla dowolnych

$x \in A$, $u \in B$ zachodzi $xu \notin E(G) \implies xu \in E(\bar{G})$. Rozważmy teraz dowolne dwa wierzchołki w tym samym komponencie spójnym, B.S.O niech $x, y \in A$ oraz $u \in B$, wówczas $xu, uy \notin E(G) \implies xu, uy \in E(\bar{G})$ zatem w $\bar{G}$ istnieje ścieżka xuy. Stąd $\bar{G}$ jest spójny $\square$

Zadanie 11.8. *Niech G będzie grafem o maksymalnym stopniu Δ i niech $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + 1$. Pokaż, że $V(G)$ można podzielić na dwie części X_1 i X_2 takie, że $\Delta(G[X_1]) \leqslant \Delta_1$ i $\Delta(G[X_2]) \leqslant \Delta_2$. Wskazówka: badaj najpierw przypadek $\Delta_1 = \Delta_2$.*

Rozwiązanie Autora 1.

Rozwiązanie Autora 2.

12. Zestaw

Zadanie 12.1 (Bartosz Wójcik)**.** *Niech $G = (V, E, w)$ będzie ważonym grafem o funkcji wag $w : E \to \mathbb{R}^+$. Wykaż, że jeśli $w(e_1) \neq w(e_2)$ dla każdych dwóch krawędzi e_1 oraz e_2, to minimalne drzewo rozpinające w G jest wyznaczone jednoznacznie.*

Załóżmy, że teza nie jest spełniona i istnieją dwa minimalne drzewa rozpinające T_1 i T_2. Jeśli drzewa T_1 i T_2 są różne to grafy te różnią się krawędziami. Weźmy krawędź e_1, która leży tylko w jednym z grafów (załóżmy, że w T_1). Dodajmy e_1 do T_2. W $T_2 + e_1$ istnieje teraz cykl (bo T_2 to drzewo), w którym jest krawędź e_2, która nie należy do T_1. Po usunięciu e_2 z $T_2 + e_1$ T_2 ma mniejszą sumę wag (bo $w(e_1) < w(e_2)$) oraz jest drzewem rozpinającym. Jest to sprzeczne z założeniami, że T_2 było minimalnym drzewm rozpinającym.

Rozwiązanie Autora 2.