TEORIA KATEGORII

SERIA 1

Problem 1. Pokazać, że kategoria Set nie jest izomorficzna z kategorią Set^{op}. Pokazać, że $\mathsf{Rel} \cong \mathsf{Rel}^{op}$.

Problem 2. Niech A będzie zbiorem. Pokazać, że przyporządkowania $\mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ zdefiniowane na obiektach i morfizmach jak poniżej są funktorami:

- $X \mapsto A \times X$ oraz $(f : X \to Y) \mapsto ((id \times f) : A \times X \to A \times Y; (a, x) \mapsto (a, f(x)))$,
- $X \mapsto A + X$ oraz
$$(f : X \to Y) \mapsto (id + f) : A + X \to A + Y; x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{jeśli } x \in X, \\ x & \text{jeśli } x \in A \end{cases}$$
- $X \mapsto X^A$ oraz
$$f : X \to Y \quad \mapsto \quad f^A : X^A \to Y^A; \phi \mapsto f \circ \phi.$$
- $X \mapsto \mathcal{P}X \overset{def}{=} \{A \subseteq X\}$ oraz
$$(f : X \to Y) \quad \mapsto \quad \mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y); A \mapsto f(A).$$

Problem 3. Pokazać, że każdy izomorfizm jest mono i epi.

Problem 4. Pokazać, że w Set przekształcenie $f : X \to Y$ jest "na" wtedy i tylko wtedy, gdy jest epimorfizmem.

Problem 5. Niech $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ oraz $h : X \to Z$ spełniają $h = g \circ f$. Pokazać, że

- jeśli f, g są izo to h też jest izo,
- jeśli h jest mono, to f jest mono,
- jeśli h jest mono to g *nie* musi być mono.

Problem 6. Pokazać, że każde dwa obiekty początkowe w danej kategorii są izomorficzne.

Problem 7. Znaleźć obiekty początkowe i końcowe (jeśli istnieją) w następujących kategoriach: $\mathsf{Rel}, \mathsf{Mon}, \mathsf{CoAlg}(\Sigma \times \mathcal{I}d), \mathsf{Alg}(\Sigma \times \mathcal{I}d + 1)$.[1]

Problem 8. Zdefiniować korekurencyjnie funkcję $\mathsf{merge} : \Sigma^\omega \times \Sigma^\omega \to \Sigma^\omega$, która każdej parze $(\sigma, \tau) = (\sigma_0\sigma_1 \ldots, \tau_0\tau_1 \ldots)$ nieskończonych ciągów nad alfabetem Σ przyporządkowuje ciąg
$$\mathsf{merge}(\sigma, \tau) = \sigma_0\tau_0\sigma_1\tau_1 \ldots.$$
Podpowiedź: Jaki jest obiekt końcowy w $\mathsf{CoAlg}(\Sigma \times \mathcal{I}d)$?

Problem 9. Niech $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ będzie funktorem. Udowodnić, że jeśli $(A, a : FA \to A)$ jest obiektem początkowym w $\mathsf{Alg}(F)$ to morfizm $a : FA \to A$ jest izomorfizmem w C. Czy istnieje obiekt początkowy w $\mathsf{Alg}(\mathcal{P})$?

Problem 10. Pokazać, że w każdej kategorii w której mamy skończone produkty zachodzi:
$$A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C$$

Problem 11. Podać definicję uogólnionego produktu dla dowolnej rodziny $\{X_i\}_{i \in I}$ obiektów z kategorii C.

[1] Niech $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ będzie funktorem. F-algebrą nazywamy parę $(A, a : FA \to A)$ dla obiektu $A \in \mathsf{C}$. Dla dwóch F-algebr $(A, a : FA \to A)$, $(B, b : FB \to B)$ morfizm $h : A \to B$ nazywamy *homomorfizmem* o dziedzinie $(A, a : FA \to A)$ i przeciwdziedzinie $(B, b : FB \to B)$ jeśli $h \circ a = b \circ F(h)$. Kategorię wszystkich F-algebr i homomorfizmów miedzy nimi oznaczamy przez $\mathsf{Alg}(F)$. Kategorię F-*koalgebr* $\mathsf{CoAlg}(F)$ definiujemy dualnie.