TEORIA KATEGORII

SERIA 4: KATEGORIE KARTEZJAŃSKO-DOMKNIĘTE

Problem 1. Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią CCC. Pokazać, że $\tilde{f} = f^A \circ \eta$, gdzie dla $f : Z \times A \to B$ strzałka $\tilde{f} : Z \to B^A$ oznaca transpozycję, $f^A : (Z \times A)^A \to B^A$ oraz $\eta : Z \to (Z \times A)^A$ są zdefiniowane jak na wykładzie.

Problem 2. Pokazać, że w dowolnej kategorii, która jest CCC zachodzi:

- $(A \times B)^C \cong A^C \times B^C$,
- $(A^B)^C \cong A^{B \times C}$.

Problem 3. Czy kategoria Mon jest CCC?

Problem 4. Pokazać, że kategoria $\omega\mathsf{CPO}$ jest CCC, natomiast kategoria $\omega\mathsf{CPO}_\perp$ nie jest CCC.[1]

Problem 5. Pokazać, że kategoria wszystkich małych kategorii i funktorów Cat jest CCC, gdzie $\mathsf{C}^\mathsf{D} = Fun(\mathsf{C}, \mathsf{D})$.

Problem 6. Udowodnić (dokończając dowód z Wykładu 10), że dla każdego $f : X \times A \to Y \times A$ i $g : Y \times A \to Z \times A$ zachodzi

$$\widetilde{g \circ f} = (\varepsilon_{Z \times A})^A \circ (\widetilde{g} \times \mathsf{id}_A)^A \circ \widetilde{f}$$

Problem 7. Niech State_A będzie złożeniem funktorów $(-) \times A$ i $(-)^A$ (czyli $\mathsf{State}_A(X) = (X \times A)^A$ oraz $\mathsf{State}_A(X \xrightarrow{f} Y) = \widetilde{(f \times \mathsf{id}_A) \circ \varepsilon_{X \times A}}$). Dla dwóch strzałek $f : X \to \mathsf{State}_A Y$ i $g : Y \to \mathsf{State}_A Z$ definiujemy:

$$g \cdot f = \mu_Z \circ \mathsf{State}_A(g) \circ f, \tag{0.1}$$

gdzie $\mu_X : \mathsf{State}_A \mathsf{State}_A X \to \mathsf{State}_A X; \mu_X = (\varepsilon_{X \times A})^A$. Pokazać, że tak zdefiniowane działanie jest łączne oraz, że $\eta_Y \cdot f = f \cdot \eta_X = f$ dla $\eta_X : X \to \mathsf{State}_A X$ zdefiniowanego przez $\eta_X = \widetilde{id_{X \times A}}$ (Podpowiedź: skorzystać z poprzedniego zadania).

---

22 grudnia 2020

[1]Poset $(P, \leqslant)$ nazywamy ωCPO jeśli każdy przeliczalny łańcuch $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots$ ma supremum. Przekształcenie $f : P \to Q$, które zachowuje porządek między dwoma posetami $(P, \leqslant)$ i $(Q, \leqslant)$, które dodatkowo są ωCPO nazywamy *ciągłym*, jeśli zachowuje suprema przeliczalnych łańchuchów, tj. $f(\bigvee_{i \in \mathbb{N}} x_i) = \bigvee_i f(x_i)$ dla każdego $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots$. Posety, które spełniają własność ωCPO wraz z ciągłymi przekształceniami jako morfizmami tworzą kategorię oznaczaną przez $\omega\mathsf{CPO}$.

Poset $(P, \leqslant)$, który jest ωCPO nazywamy *punktowym*, jeśli istnieje w nim element najmniejszy $\perp \in P$. Punktowe ωCPO tworzą kategorię w której strzałkami są wszystkie ciągłe przekształcenia dodatkowo zachowujące element najmniejszy, tj. $h(\perp) = \perp$. Tę kategorię oznaczamy przez $\omega\mathsf{CPO}_\perp$.