Teoria kategorii 2, 14.10.2020

Podstawowe konstrukcje kategoryjne

(1) Niech $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ - dwie kategorie. Def. nową kategorię $\mathbb{C} \times \mathbb{D}$ nazywaną produktem kategorii $\mathbb{C}$ i $\mathbb{D}$, której

(a) obiektami są (C, D), gdzie C jest obiektem $\mathbb{C}$, D — " — $\mathbb{D}$

(b) Strzałkami w $\mathbb{C} \times \mathbb{D}$ są

$$(f, g) : (C, D) \longrightarrow (C', D')$$

gdzie $f : C \to C'$ w $\mathbb{C}$, $g : D \to D'$ w $\mathbb{D}$

(c) dla $(f,g) : (C,D) \to (C',D')$

oraz $(f',g') : (C',D') \to (C'',D'')$

definiujemy:

$$(f',g') \circ (f,g) : (C,D) \to (C'',D'')$$

$$\stackrel{df}{=} (f' \circ f,\ g' \circ g)$$

skł. w $\mathbb{C}$

składowe w $\mathbb{D}$.

Dodatkowo,

$$id_{(C,D)} \stackrel{df}{=} (id_C,\ id_D).$$

Sprawdzić, że $\mathbb{C} \times \mathbb{D}$ jest kategorią.

Obs Dla $\mathbb{C} \times \mathbb{D}$ mamy dwa naturalne zadane funktory

$$\mathbb{C} \xleftarrow{\pi_1} \mathbb{C} \times \mathbb{D} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{D}$$

$$\pi_1(C, D) \overset{df}{=} C$$

$$\pi_1(f, g) \overset{df}{=} f$$

Pok, że π_1 / π_2 są funktorami.

(2) Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią.
Definiujemy $\mathbb{C}^{op}$ w następujący sposób:

(a) obiektami $\mathbb{C}^{op}$ są dokładnie obiekty $\mathbb{C}$.

(b) strzałka $f: C \to D$ w $\mathbb{C}^{op}$ jest strzałką $f: D \to C$ w $\mathbb{C}$. Inaczej

$$\mathbb{C}^{op}(C, D) \overset{df}{=} \mathbb{C}(D, C)$$

kolekcja strzałek o dziedzinie C i przeciwdziedzinie D w $\mathbb{C}^{op}$.

(c) dla dwóch strzałek

$f: C \to D$, $g: D \to E$ w $\mathbb{C}^{op}$

definiujemy

$$g \circ f \stackrel{df}{=} f \circ g$$

zł. w $\mathbb{C}^{op}$

stare zł. w $\mathbb{C}$.

$f: D \to C$ w $\mathbb{C}$

$g: E \to D$ w $\mathbb{C}$.

id_A w $\mathbb{C}^{op}$ jest id_A w $\mathbb{C}$.

Obs] Dla dowolnej $\mathbb{C}$ mamy zadane przyporządkowanie:

$$\overline{(-)} : \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C}^{op}$$

t. że

(a) $\overline{(A)} \stackrel{df}{=} A$

(b) $\overline{(f : C \to D)} = f : D \to C.$

Uwaga: to przyporządkowanie nie jest funktorem.

③ Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią i niech C będzie obiektem $\mathbb{C}$. Kategorią **slice** $\mathbb{C}/C$ kategorii $\mathbb{C}$ nad C nazywamy kat w której:

ⓐ obiektami są strzałki $f \in \mathbb{C}$ t.że $\mathrm{cod}(f) = C$

ⓑ strzałką g z $f: X \to C$ w $f': X' \to C$ nazywamy morfizm $g: X \to X'$ w $\mathbb{C}$ t.że

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & X' \arrow[dl, "f'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

jest przemienny.

(e) Mając dane dwie strzałki w $\mathcal{C}/C$ ich złożenie definiujemy następująco:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "g' \circ g"] \arrow[dr, "f"'] & X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & X'' \arrow[dl, "f''"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

$$\underbrace{f'' \circ g'} \circ g = \underbrace{f' \circ g} = f.$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "id_X"] \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

Identycznością we $f: X \to C$ jest id_X.

<u>Przykład</u> Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią otrzymaną z posetu $\mathbb{P} = (P, \le)$ oraz niech $p \in P$. Czym jest $\mathbb{P}/p$?

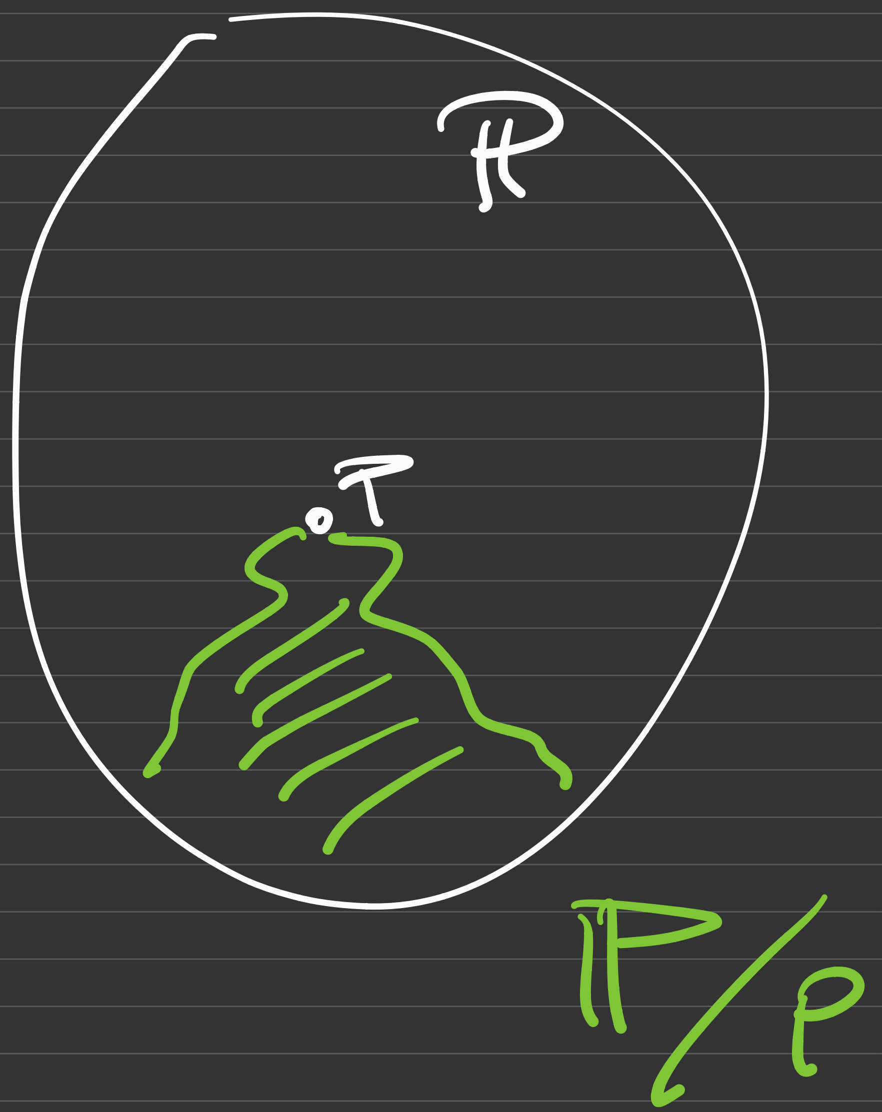
obiektami $\overset{x}{\circ}$ są (x, p), gdzie $\bigwedge$ $x \le p$. Takie p obiekty możemy utożsamić z x.

innymi słowy obiektami tej kat są $\{x : x \le p\}$. Strzałkami w tej kategorii są po prostu $x \le x'$.

Podsumowując,

$$\mathbb{P}/p = (\downarrow(p), \leq)$$

downset p = $\downarrow p \overset{df}{=} \{x : x \leq p\}$.



<u>Uwaga</u> Zamieniając w def. kategorii slice dziedzinę z przeciwdziedziną otrzymujemy definicję nowej kategorii (coslice)

$f : c \to x$

⚠ Napisać formalną definicję kategorii coslice.

Podsumowanie : kategorie duże, małe i lokalnie małe.

dla ustalonych obiektów C, D w $\mathbb{C}$ kolekcja $\{f: C \to D \in \mathbb{C}\}$ jest zbiorem.

kolekcje obiekt i kolekcje strzałek są zbiorami (np. kategorie posetowe są małe)

nie są lok. małe.

Struktury abstrakcyjne.

def Strzałkę $f : A \to B$ w $\mathcal{C}$ nazywamy **izomorfizmem** (izo), jeśli istnieje strzałka $g : B \to A$ w $\mathcal{C}$ t.że

$$\begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_A \\ f \circ g = \mathrm{id}_B \end{cases}$$

Przykład Izomorfizmami w **Set** są dokładnie bijekcje.

Czym są izomorfizmy w kategorii otrzymanej z porządku.

tw Jeżeli $f: A \to B$ i $f': B \to C$ są izo w $\mathcal{C}$, to $f' \circ f$ jest izo.

Udowodnić!

def W kategorii $\mathcal{C}$ strzałka $f: A \to B$ nazywana jest

(a) monomorfizmem (mono), jeśli dla każdej pary $g, h: C \to A$ mamy:

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

(b) epimorfizmem (epi), jeśli dla każdej pary $i, j: B \to D$

$$i \circ f = j \circ f \implies i = j.$$

Ozn $A \rightarrowtail B$ - monomorfizmy

$A \twoheadrightarrow B$ - epimorfizmy

Stw Funkcja $f: A \to B$ w Set jest mono wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnowartościowa.

Obs Zwróćmy uwagę na to, że

Strzałka $f: A \to B$ jest epi w $\mathcal{C}$

$\iff$

strzałka $f: B \to A$ jest mono w $\mathcal{C}^{op}$