Teoria Kategorii, wykład 6 18.11.2020

Stw ← zeszłe spotkanie

W kategorii z binarnymi produktami i ekwalizatorami dla dowolnej pary strzałek

$$A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$$

obiekt E wraz z $p_1 : E \to A$, $p_2 : E \to B$,

gdzie (a) E jest ekwalizatorem

$$E \xrightarrow{e} A \times B \underset{f \circ \pi_1}{\overset{g \circ \pi_2}{\rightrightarrows}} C,$$

(b) $A \times B$ wraz z $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$ jest produktem oraz

(c) $p_1 \overset{df}{=} \pi_1 \circ e$, $p_2 \overset{df}{=} \pi_2 \circ e$

jest pullbackiem strzałek $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "e"] \arrow[drr, bend left, "p_2"] \arrow[ddr, bend right, "p_1"'] & & \\
& A \times B \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Stw 2 Jeśli E wraz z $p_1 : E \to A$, $p_2 : E \to B$ jest pullbackiem strzałek $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ to strzałka $E \xrightarrow{\langle p_1, p_2 \rangle} A \times B$ jest ekwalizatorem

$$E \xrightarrow{\langle p_1, p_2 \rangle} A \times B \underset{g \circ \pi_2}{\overset{f \circ \pi_1}{\rightrightarrows}} C$$

dowód

Zał.
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Czy
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\langle p_1, p_2\rangle"] & A \times B \arrow[r, shift left, "f \circ \pi_1"] \arrow[r, shift right, "g \circ \pi_2"'] & C \end{tikzcd} \quad (*)$$
jest ekwalizatorem?

1. Czy (*) jest przemienne?
2. Czy (*) spełnia własność uniwersalności?

Ad 1

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\langle p_1, p_2\rangle"] & A \times B \arrow[r, shift left, "f \circ \pi_1"] \arrow[r, shift right, "f \circ \pi_2"'] & C \end{tikzcd} \quad ?$$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[d] \arrow[dr, "p_2"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B \end{tikzcd}$$

$\langle p_1, p_2 \rangle$

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[dr, "f"] & \\ E \arrow[r, "\langle p_1, p_2\rangle"] & A \times B \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & & C \\ & & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \quad ?$$

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dr, "f"] & \\
E \arrow[urr, bend left, "p_1"] \arrow[drr, bend right, "p_2"'] \arrow[r, "\langle p_1, p_2 \rangle"] & A \times B \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & & C \\
 & & B \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

z zał wiemy, że

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}$$

jest przemienny, więc i diagram wyżej jest przemienny.

Ad 2 Chcemy pok, że

$$E \xrightarrow{\langle p_1, p_2 \rangle} A \times B \underset{g \circ \pi_2}{\overset{f \circ \pi_1}{\rightrightarrows}} C$$

spełnia własność uniw.

Weźmy Z oraz $z : Z \to A \times B$ i

nast. diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "z"] & A \times B \arrow[r, shift left, "f \circ \pi_1"] \arrow[r, shift right, "g \circ \pi_2"'] & C \end{tikzcd}$$

Przemienność powyższego diagramu jest równoważna przemienności:

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[dr, "f"] & \\ Z \arrow[r, "z"] & A \times B \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & & C \\ & & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[dr, "f"] & \\ Z \arrow[r, "z"] \arrow[urr, bend left, "\pi_1 \circ z \overset{df}{=}: z_1"] \arrow[drr, bend right, "z_2 \overset{df}{=} \pi_2 \circ z"'] & A \times B \arrow[ur] \arrow[dr] & & C \\ & & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Ten diagram jest również przemienny

Stąd

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dr, "f"] & \\
Z \arrow[ur, "\pi_1 \circ Z"] \arrow[dr, "\pi_2 \circ Z"'] & & C \\
& B \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Z faktu, że

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

wynika, że

istnieje dokładnie jedna strzałka $u : Z \longrightarrow E$, t. że

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "\exists ! u"] \arrow[drr, bend left, "\pi_2 \circ Z"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_1 \circ Z"'] & & \\
& E \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

jest przemienny.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "u"] \arrow[drrr, bend left, "\pi_2 \circ z"] \arrow[dddr, bend right, "\pi_1 \circ z"'] \arrow[ddrr, "z"] & & & \\
& E \arrow[rr, "p_2"] \arrow[dd, "p_1"'] \arrow[dr, "\langle p_1, p_2 \rangle"'] & & B \arrow[dd, "g"] \\
& & A \times B \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[ur, "\pi_2"'] & \\
& A \arrow[rr, "f"] & & C
\end{tikzcd}$$

przemienne są: 1, 2, 1 + 3, 2 + 4

z faktu, że

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "\pi_1 \circ z"'] \arrow[d, "z"] \arrow[dr, "\pi_2 \circ z"] & \\
A & A \times B \arrow[l] \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

jest przemienne oraz z własności uniwer dla produktu $A \times B$ wynika, że $z = \langle p_1, p_2 \rangle \circ u$

Tzn że $\langle p_1, p_2\rangle \circ u = z$

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "z"] \arrow[dr, "u"'] & A \times B \arrow[r, shift left, "f \circ \pi_1"] \arrow[r, shift right, "g \circ \pi_2"'] & C \\
& E \arrow[u, "{\langle p_1, p_2 \rangle}"'] &
\end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Czy u jest jedyną strzałką czyniącą diagram wyżej przemiennym?

Zał, że istnieje v t. że

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "z"] \arrow[dr, "v"'] & A \times B \arrow[r, shift left, "f \circ \pi_1"] \arrow[r, shift right, "g \circ \pi_2"'] & C \\
& E \arrow[u, "{\langle p_1, p_2 \rangle}"'] &
\end{tikzcd}$$

jest przemienny

Z tego wynika, że:

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[r, "f"] & C \\
Z \arrow[r, "v"'] \arrow[rr, dashed, bend left, "z"] & E \arrow[ur, "p_1"] \arrow[r, "\langle p_1, p_2 \rangle"] \arrow[dr, "p_2"'] & A \times B \arrow[u, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] & \\
 & & B \arrow[uur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

jest przemienne.

Dalej,

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dr] & \\
Z \arrow[r, "v"'] \arrow[urr, bend left, "\pi_1 \circ z"] \arrow[drr, bend right, "\pi_2 \circ z"'] & E \arrow[r] \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & A \times B \arrow[u] \arrow[d] & C \\
 & & B \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

jest przemienny. Stąd $u = v$ $\blacksquare$.

<u>Wniosek</u> Jeśli $\mathbb{C}$ jest kategorią z binarnymi produktami i ekwalizatorami, to ma pullbacki.

<u>Stw</u> Jeśli mamy

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h''"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & E \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h'"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & D \arrow[d, "h"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

, to

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "g' \circ f'"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & D \arrow[d, "h"] \\
A \arrow[r, "g \circ f"'] & C
\end{tikzcd}$$

.

Tw Kategoria ma skończone produkty i ekwalizatory wtedy i tylko wtedy, gdy ma pullbacki i obiekt końcowy.

dowód (szkic)

"$\Longrightarrow$" wynika ze stw z początku wykładu.

"$\Longleftarrow$" ① wystarczy pokazać, że ma binarne produkty. Weźmy dwa obiekty A, B i rozważmy strzałki:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "!_B"] \\ A \arrow[r, "!_A"'] & 1 \end{tikzcd}$$

1 = obiekt końcowy

$!_A : A \to 1$

Rozważmy pullback

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "!"] \\ A \arrow[r, "!"'] & 1 \end{tikzcd}$$

Okazuje się, że P wraz z p_1 i p_2 jest produktem A i B (czyli symbol

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "!"] \\ A \arrow[r, "!"'] & 1 \end{tikzcd}$$

② teraz musimy pokazać, że z faktu, iż kategoria ma pullback i obiekt końcowy wynika fakt, że ma ekwalizatory. Weźmy $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$

i rozważmy $\langle f, g\rangle$ oraz $\langle id_B, id_B\rangle$

do tego:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
B & B\times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl, "id_B"'] \arrow[d, "\langle id, id\rangle"] \arrow[dr, "id_B"] & \\
B & B\times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

Policzmy pullback

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "\langle id_B, id_B\rangle"] \\
A \arrow[r, "\langle f,g\rangle"] & B\times B
\end{tikzcd}$$

Okazuje się, że obiekt $E \xrightarrow{e} A$ występujący w powyższym pullbacku jest ekwalizatorem $E \xrightarrow{e} A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$.

<u>Def</u> Niech J oraz $\mathbb{C}$ będą kategoriami. <u>Diagramem typu J w $\mathbb{C}$</u> nazywamy dowolny funktor $D : J \to \mathbb{C}$.

<u>Notacja</u> W tym przypadku J nazywamy kategorią indeksów, jej obiekty oznaczamy $i, j, k \ldots$ a jej morfizmy $\alpha, \beta, \gamma \ldots$

Zamiast pisać $\begin{cases} D(i) \\ D(\alpha) \end{cases}$ będziemy pisali $\begin{cases} D_i \\ D_\alpha \end{cases}$

<u>def</u>

Stożkiem nad diagramem $D: \mathbb{J} \to \mathbb{C}$ nazywany obiekt $C \in \mathbb{C}$ wraz z rodziną strzałek

$$\{ c_j : C \to D_j \}_{j \in Ob\,\mathbb{J}}$$

spełniające następujący warunek:

$\forall\, i,j \in \mathbb{J}$ oraz $\forall\, \alpha : i \to j \in \mathbb{J}$ następujący diagram jest przemienny w $\mathbb{C}$:

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "c_i"'] \arrow[dr, "c_j"] & \\
D_i \arrow[rr, "D_\alpha"] & & D_j
\end{tikzcd}$$

Przykład Weźmy sobie kategorię $\mathbb{J}$ generowaną przez

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[d, "\beta"] \\ 1 \arrow[r, "\alpha"'] & 3 \end{tikzcd}$$

Jeśli rozważymy diagramy $D: \mathbb{J} \to Set$, to diagramy zadane są przez trzy zbiory A, B, C oraz 2 przekształcenia

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

$D_1 = A$

$D_2 = B$

$D_3 = C$

$D_\alpha = f$, $D_\beta = g$.

Czym jest stożek nad tym diagramem?

$S, s_1\ s_2\ s_3$ jest stożkiem nad $D \iff$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "s_2"] \arrow[d, "s_1"'] \arrow[dr, "s_3"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

jest przemienny

$\iff$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "s_2"] \arrow[d, "s_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

jest przemienny

oraz $s_3 \stackrel{df}{=} f \circ s_1$

$= g \circ s_2$

Przykład 2

Ważny

J generowany przez $\bullet_1$ $\bullet_2$

$D: J \to \mathcal{C}$?

Czy są diagramy

Diagram jest jednoznacznie reprezentowany przez parę obiektów $\bullet A$ $\bullet B$

gdzie $D_1 = A$, $D_2 = B$

Czy jest stożek nad D?

Stożek nad tym diagramem to trójka

S,
$s_1: S \to A$
$s_2: S \to B$

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "s_2"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

Przykład 3

J = kategoria zadana przez

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & 2 \end{tikzcd}$$

Czym są diagramy $D : J \to \mathcal{C}$?

Diagramy są jednoznacznie zadane przez

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

/ gdzie $D_1 = A$, $D_2 = B$, $D_\alpha = f$, $D_\beta = g$.

Czym są stożki nad D?

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, "s_1"'] \arrow[dr, bend left, "s_2"] & \\ A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Stożkiem jest S wraz z $s_1 : S \to A$, $s_2 : S \to B$ t. że

$f \circ s_1 = s_2$, $g \circ s_1 = s_2$

Równocześnie widzimy, że stożkiem nad tym diagramem jest obiekt S wraz z $s_1 : S \to A$ t.że

$$f \circ s_1 = g \circ s_1 .$$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "s_1"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Wtedy

$$s_2 \overset{df}{=} f \circ s_1 = g \circ s_1 .$$