Teoria Kategorii (3), 19.10.2020

Niech $f: A \to B$ będzie strzałką w $\mathbb{C}$.

<u>def</u> f nazywany <u>izomorfizmem</u>, jeśli istnieje $g: B \to A$ w $\mathbb{C}$ t.że $g \circ f = id_A$ oraz $f \circ g = id_B$.

<u>def</u> f nazywany <u>monomorfizmem (mono)</u>, jeśli dla każdych $g, h: C \to A$ w $\mathbb{C}$

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h$$

$$C \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$$

<u>def</u> f nazywany <u>epimorfizmem (epi)</u> jeśli $\forall i, j: B \to C$ w $\mathbb{C}$: $i \circ f = j \circ f \Rightarrow i = j$.

Stw Funkcja $f: A \to B$ w Set jest mono wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnowartościowa

Stw $f: A \to B$ jest mono w $\mathbb{C}$ $\iff$ $f: B \to A$ jest epi w $\mathbb{C}^{op}$.

dowód Niech $f: A \to B$ będzie mono w $\mathbb{C}$. W szczeg. oznacza to, że $f: B \to A$ jest strzałką w $\mathbb{C}^{op}$. Weźmy $i, j: A \to C$ w $\mathbb{C}^{op}$ i załóżmy, że w $\mathbb{C}^{op}$ zachodzi:

złożenie w $\mathbb{C}^{op}$

$$i \circ f = j \circ f.$$

z def złożenia w $\mathbb{C}^{op}$ wynika, że w $\mathbb{C}$ mamy:

$$f \circ i = f \circ j$$

złożenie w $\mathbb{C}$.

gdzie $f: A \to B$, $i, j: C \to A$ w $\mathbb{C}$.
Ponieważ f jest mono w $\mathbb{C}$ dostajemy
$i = j$ w $\mathbb{C}$. Ale to oznacza, że
$i = j$ w $\mathbb{C}^{op}$. Stąd f jest epi w $\mathbb{C}^{op}$.
Implikacja w przeciwną stronę jest podobna. $\blacksquare$

Przykłady (1) Set: mono = 'różnowartościowe' i
epi = 'na'.

(2) Niech $\mathbb{P}$ będzie kategorią indukowaną
przez poset $(P, \le)$. Weźmy $p, q \in P$

$p \le q$
f

g, h: $r \le p$

$$f \circ g = f \circ h$$

$$q \geq p \geq r = q \underset{f}{\geq} p \underset{h}{\geq} r$$

$\Rightarrow g = h$.

<u>Wniosek</u> Każda strzałka $f : p \leq q$ jest mono (epi) w $\mathbb{P}$.

(3) Rozważmy kategorię <u>Mon</u> = kategoria monoidów jako obiekty i homomorfizmów monoidów będących strzałkami. W tej kategorii rozważmy strzałkę

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

monoid $(\mathbb{N}, +, 0)$

monoid $(\mathbb{Z}, +, 0)$

włożenie

$i \longmapsto i$.

Ta strzałka jest ① mono ⚠

② epimorfizmem. Udowadniamy ②.

Musimy pokazać, że dla każdej pary

$i, j : \mathbb{Z} \to M$ zachodzi

$$i \circ f = j \circ f \Rightarrow i = j.$$

dowolny monoid $M = (M, \cdot, 1)$

Załóżmy, że $i \circ f = j \circ f$. Z tej równości

wiemy, że $i|_{\mathbb{N}} = j|_{\mathbb{N}}$. Zauważmy, że

$$i(-n) = i(-1 + -1 + \dots + -1) =$$

$$i(-1) \cdot i(-1) \cdot \dots \cdot i(-1) = [i(-1)]^n$$

w monoidzie M.

To samo ważne udowodnić dla $\bar{j}$, czyli

$$\bar{j}(-n) = [\bar{j}(-1)]^n.$$ Oznacza to, że

jeśli $\bar{i}(-1) = \bar{j}(-1)$, to $\bar{i}(-n) = \bar{j}(-n)$.

Czy $\bar{i}(-1) = \bar{j}(-1)$? Weźmy:

$$\bar{i}(-1) = \bar{i}(-1) \cdot \underset{\text{z M}}{1} = \bar{i}(-1) \cdot \bar{j}(0)$$

$$= \bar{i}(-1) \cdot \bar{j}(1-1) = \bar{i}(-1) \cdot \bar{j}(1) \cdot \bar{j}(-1)$$

$$\overset{\bar{i}|_{\mathbb{N}} = \bar{j}|_{\mathbb{N}}}{=} \underbrace{\bar{i}(-1) \cdot \bar{i}(1)} \cdot \bar{j}(-1) =$$

$$= \bar{i}(-1+1) \cdot \bar{j}(-1) = \bar{i}(0) \cdot \bar{j}(-1) =$$

$$1 \cdot \bar{j}(-1) = \bar{j}(-1).$$ Czyli $\bar{i} = \bar{j}$. ∎

Obiekty początkowe i końcowe

Set: $\emptyset \xrightarrow{\exists!\, \forall} A \xrightarrow{\exists!} 1$

def Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią.
Obiekt $0 \in \mathbb{C}$ nazywamy <u>początkowym</u> jeśli dla każdego obiektu $A \in \mathbb{C}$ istnieje dokładnie jedna strzałka

$$!_A : 0 \to A$$

Obiekt $1 \in \mathbb{C}$ nazywamy <u>końcowym</u>, jeśli dla każdego $A \in \mathbb{C}$ istnieje dokładnie jedna strzałka $!_A : A \to 1$.

Uwaga $O \in \mathcal{C}$ jest obiektem pocz. w $\mathcal{C} \iff O$ jest końcowe w $\mathcal{C}^{T}$.

Stw Obiekt początkowy (końcowy) jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.

dowód Zał, że O, O' są początkowe w kategorii $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r, "i_{O'}", "i_{O,O'}"'] \arrow[d, "id_O"', "i_{O,O}"] & O' \arrow[dl, "i_O"', "i_{O',O}"] \arrow[d, "id_{O'}", "i_{O',O'}"'] \\
O \arrow[r, "i_{O'}"', "i_{O,O'}"] & O'
\end{tikzcd}$$

(1) $i_O \circ i_{O'} = id_O$

(2) $i_{O'} \circ i_O = id_{O'}$

Przykłady (1) Set Obiekt początkowy $= \emptyset$

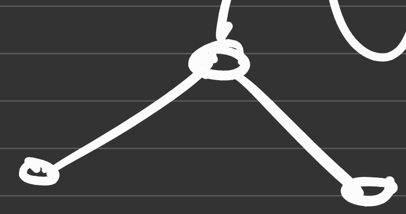
Obiekt końcowy = dowolny zbiór jednoelementowy.

(2) Niech $\mathbb{P}$ będzie kat. indukt. przez poset $(P, \leq)$. Q: Czy (jeśli istnieją) są obiekty pocz. i końcowe w $\mathbb{P}$?

Obiekt pocz

$$0 \leq p \text{ dla każdego } p \in P.$$

Widzimy, że 0 jest elem. najmniejszym w $(P, \leq)$. Oznacza to, że np



nie ma obiektu początkowego.

Obiekt końcowy w $\mathbb{P}$ spełnia

$\forall\, p \leq 1$. Czyli jest to elem. największy w $(P, \leq)$.

③ Rozważmy kategorię algebr typu $(1, 0)$. Obiektami w tej kategorii są

(A, s, a), gdzie $s: A \to A$
$a \in A$

Strzałkami w tej kategorii są

$f: (A, s, a) \to (B, s', b)$

gdzie $f: A \to B$ przekształceniem spełniającym

(1) $x \in A: \quad s'(\underbrace{f(x)}_{B}) = f(\underbrace{s(x)}_{A})$

(2) $f(a) = b.$

Stw W tej kategorii obiektem początkowym jest algebra:

$$(\mathbb{N}, \mathrm{succ}, 0), \text{ gdzie}$$

$$\mathrm{succ}(n) \overset{df}{=} n+1.$$

Produkty Set

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$$

Zauważmy że każdy produkt kartezjański $A \times B$, idzie w parze z dwoma rzutowaniami

$$A \xleftarrow{\pi_1} A \times B \xrightarrow{\pi_2} B$$

$$\pi_1(a,b) = a$$

$$\pi_2(a,b) = b.$$

$x \in C$

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, bend right, "c_1"'] \arrow[d, "c"] \arrow[dr, bend left, "c_2"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{c(x) \stackrel{df}{=} (c_1(x), c_2(x))}$$

$c_1(x) \in A$

$c_2(x) \in B.$

$$(c_1(x), c_2(x))$$

def Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią.

Diagramem produktu dla obiektów A, B nazywamy obiekt P wraz ze strzałkami:

$$A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B$$

takimi, że dla każdego obiektu X wraz z

$$A \xleftarrow{x_1} X \xrightarrow{x_2} B$$

istnieje jednoznaczna $u: X \to P$ czyniąca następujący diagram przemiennym

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, bend right, "x_1"'] \arrow[d, "\exists!\, u"] \arrow[dr, bend left, "x_2"] & \\
A & P \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

def Jeśli P oraz z $A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B$ jest diagramem produktowym dla ob. A, B, to P nazywamy **produktem** A oraz B.

stw Produkty określone są jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.

dowód Zał, że $A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B$

oraz $A \xleftarrow{q_1} Q \xrightarrow{q_2} B$

są diagramami produktowymi dla A, B.

Z faktu

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "p_2"] & \\ A & Q \arrow[l, "q_1"] \arrow[r, "q_2"'] & B \end{tikzcd}$$

Q jest produktem wynika istnienie jednoznacznie określonej strzałki $i : P \to Q$ t. że $p_1 = q_1 \circ i$ oraz $p_2 = q_2 \circ i$

Analogicznie, ponieważ P jest produktem,

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, bend right, "q_1"'] \arrow[dr, bend left, "q_2"] \arrow[d, dashed, "\exists! j"] & \\ & P \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

q_2 to istnieje jednoznacznie okr. $j: Q \to P$ t. że $\begin{cases} q_1 = p_1 \circ j \\ q_2 = p_2 \circ j \end{cases}$

Oznacza to, że

$$p_1 \circ j \circ i = p_1 \quad \text{oraz} \quad p_2 \circ j \circ i = p_2$$

Czyli

$(\Rightarrow)$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, bend right, "p_1"'] \arrow[dr, bend left, "p_2"] \arrow[d, "j \circ i"] & \\ & P \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

stąd $j \circ i = id_P$.

z jednoznacz. trójki czyniącej przemiennym.

Analog. pok., że $i \circ j = id_Q$. ■ $(\Leftarrow)$