

TEORIA KATEGORII

SERIA 4: KATEGORIE KARTEZJAŃSKO-DOMKNIĘTE

Problem 1. Niech \mathbb{C} będzie kategorią CCC. Pokazać, że $\tilde{f} = f^A \circ \eta$, gdzie dla $f : Z \times A \rightarrow B$ strzałka $\tilde{f} : Z \rightarrow B^A$ oznacza transpozycję, $f^A : (Z \times A)^A \rightarrow B^A$ oraz $\eta : Z \rightarrow (Z \times A)^A$ są zdefiniowane jak na wykładzie.

Problem 2. Pokazać, że w dowolnej kategorii, która jest CCC zachodzi:

- $(A \times B)^C \cong A^C \times B^C$,
- $(A^B)^C \cong A^{B \times C}$.

Problem 3. Czy kategoria Mon jest CCC?

Problem 4. Pokazać, że kategoria ωCPO jest CCC, natomiast kategoria ωCPO_\perp nie jest CCC.¹

Problem 5. Pokazać, że kategoria wszystkich małych kategorii i funktorów Cat jest CCC, gdzie $\mathbb{C}^{\mathbb{D}} = \text{Fun}(\mathbb{C}, \mathbb{D})$.

Problem 6. Udowodnić (dokończając dowód z Wykładu 10), że dla każdego $f : X \times A \rightarrow Y \times A$ i $g : Y \times A \rightarrow Z \times A$ zachodzi

$$\widetilde{g \circ f} = (\varepsilon_{Z \times A})^A \circ (\tilde{g} \times \text{id}_A)^A \circ \tilde{f}$$

Problem 7. Niech State_A będzie złożeniem funktorów $(-) \times A$ i $(-)^A$ (czyli $\text{State}_A(X) = (X \times A)^A$ oraz $\text{State}_A(X \xrightarrow{f} Y) = (f \times \text{id}_A) \circ \varepsilon_{X \times A}$). Dla dwóch strzałek $f : X \rightarrow \text{State}_A Y$ i $g : Y \rightarrow \text{State}_A Z$ definiujemy:

$$g \cdot f = (\varepsilon_{X \times A})^A \circ \text{State}_A(g) \circ f.$$

Pokazać, że tak zdefiniowane działanie jest łączne oraz, że $\eta_Y \cdot f = f \cdot \eta_X = f$ dla $\eta_X : X \rightarrow \text{State}_A X$ zadanego przez $\eta_X = \widetilde{\text{id}_{X \times A}}$ (Podpowiedź: skorzystać z poprzedniego zadania).

23 grudnia 2020

¹Poset (P, \leq) nazywamy ωCPO jeśli każdy przeliczalny łańcuch $x_1 \leq x_2 \leq \dots$ ma supremum. Przekształcenie $f : P \rightarrow Q$, które zachowuje porządek między dwoma posetami (P, \leq) i (Q, \leq) , które dodatkowo są ωCPO nazywamy *ciągłym*, jeśli zachowuje suprema przeliczalnych łańcuchów, tj. $f(\bigvee_{i \in \mathbb{N}} x_i) = \bigvee_i f(x_i)$ dla każdego $x_1 \leq x_2 \leq \dots$. Posety, które spełniają własność ωCPO wraz z ciągłymi przekształceniami jako morfizmami tworzą kategorię oznaczaną przez ωCPO .

Poset (P, \leq) , który jest ωCPO nazywamy *punktowym*, jeśli istnieje w nim element najmniejszy $\perp \in P$. Punktowe ωCPO tworzą kategorię w której strzałkami są wszystkie ciągłe przekształcenia dodatkowo zachowujące element najmniejszy, tj. $h(\perp) = \perp$. Tę kategorię oznaczamy przez ωCPO_\perp .