

# TEORIA KATEGORII

## SERIA 1: KATEGORIE I FUNKTORY

**Problem 1.** Niech  $A$  będzie zbiorem. Pokazać, że przyporządkowania  $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  zdefiniowane na obiektach i morfizmach jak poniżej są funktorami:

- $X \mapsto A \times X$  oraz  $(f : X \rightarrow Y) \mapsto ((id \times f) : A \times X \rightarrow A \times Y; (a, x) \mapsto (a, f(x)))$ ,
- $X \mapsto A + X$  oraz

$$(f : X \rightarrow Y) \mapsto (id + f) : A + X \rightarrow A + Y; x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{jeśli } x \in X, \\ x & \text{jeśli } x \in A \end{cases}$$

- $X \mapsto X^A$  oraz

$$f : X \rightarrow Y \mapsto f^A : X^A \rightarrow Y^A; \phi \mapsto f \circ \phi.$$

- $X \mapsto \mathcal{P}X \stackrel{def}{=} \{A \subseteq X\}$  oraz

$$(f : X \rightarrow Y) \mapsto \mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y); A \mapsto f(A).$$

**Problem 2.** Niech  $\mathbb{P}$  i  $\mathbb{Q}$  będą kategoriami zadanymi przez posety  $(P, \leq)$  i  $(Q, \leq)$ . Podać charakteryzację funktorów  $\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$  wyrażoną w języku przekształceń  $P \rightarrow Q$  między wyżej wymienionymi posetami.

**Problem 3.** Podać przykłady funktorów  $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Par}$  i  $\mathbf{Par} \rightarrow \mathbf{Set}$ .

**Problem 4.** Pokazać, że funktor  $(-)^* : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  spełnia:

$$X^* \cong \{\varepsilon\} + X \times X^*,$$

gdzie  $\cong$  oznacza relację bijekcji między zbiorami. Dodatkowo pokazać, że dla  $f : X \rightarrow Y \in \mathbf{Set}$  przekształcenie  $f^* : X^* \rightarrow Y^*$  spełnia:

$$f^*(\varepsilon) = \varepsilon \ \& \ f^*(x :: xs) = f(x) :: f^*(xs).$$

W powyższej definicji, operacja  $(::) : X \times X^* \rightarrow X^*$  zdefiniowana jest dla  $x :: xs$  przez dopisanie elementu  $x$  do ciągu  $xs$  na pierwszej pozycji. Udowodnić, że funktor  $(-)^{\infty} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  spełnia podobne zależności.

**Problem 5.** Znaleźć przykład funktora  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ , który spełnia:

$$FX \cong \{Nil\} + FX \times X \times FX.$$

**Problem 6.** Pokazać, że  $\mathbf{Rel}$  jest izomorficzna z  $\mathbf{Rel}^{op}$ .

**Problem 7.** Pokazać, że kategoria  $\mathbf{Set}$  nie jest izomorficzna z kategorią  $\mathbf{Set}^{op}$ .

**Problem 8.** Pokazać, że w kategorii  $\mathbf{Set}$  strzałka  $f : A \rightarrow B$  jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jest bijekcją.

**Problem 9.** Pokazać, że każdy izomorfizm jest mono i epi.

**Problem 10.** Pokazać, że w  $\mathbf{Set}$  przekształcenie  $f : X \rightarrow Y$  jest "na" wtedy i tylko wtedy, gdy jest epimorfizmem.

**Problem 11.** Niech  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  oraz  $h : X \rightarrow Z$  spełniają  $h = g \circ f$ . Pokazać, że

- jeśli  $f, g$  są izo to  $h$  też jest izo,
- jeśli  $h$  jest mono, to  $f$  jest mono,
- jeśli  $h$  jest mono to  $g$  *nie* musi być mono.