TEORIA KATEGORII

SERIA 5: TRANSFORMACJE NATURALNE I MONADY

Problem 1. Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią kartezjańsko-domkniętą. Pokazać, że następujące rodziny:

- $\{\eta_X : X \to (X \times A)^A\}_X$,
- $\{\varepsilon_X : X^A \times A \to X\}_X$,
- $\{\mu_X : \big((X \times A)^A \times A\big)^A \to (X \times A)^A\}$, gdzie $\mu_X = (\varepsilon_{X \times A})^A$.

są transformacjami naturalnymi między odpowiednimi funktorami.

Problem 2. Pokazać, że następujące rodziny $\{\eta_X\}_X$ i $\{\mu_X\}_X$ są transformacjami naturalnymi między odpowiednimi Set-funktorami:

(1) $\{\eta_X : X \to \mathcal{P}X\}_{X \in \mathsf{Set}}$, gdzie $\eta_X(x) = \{x\}$ oraz $\{\mu_X : \mathcal{P}\mathcal{P}X \to \mathcal{P}X\}_{X \in \mathsf{Set}}, \mu_X(S) = \bigcup S$,
(2) $\{\eta_X : X \to X^*\}_{X \in \mathsf{Set}}$, gdzie $\eta_X(x) = x$ oraz $\{\mu_X : (X^*)^* \to X^*\}_{X \in \mathsf{Set}}$, gdzie $\mu_X(s_1, s_2, \ldots, s_n) = s_1 s_2 \ldots s_n$.
(3) Niech $M = (M, \cdot, 1)$ będzie ustalonym z góry monoidem, a ponadto $\{\eta_X : X \to M \times X\}_{X \in \mathsf{Set}}$, gdzie $\eta_X(x) = (1, x)$ oraz $\{\mu_X : M \times M \times X \to M \times X\}_{X \in \mathsf{Set}}$, gdzie $\mu_X(m, n, x) = (m \cdot n, x)$.

Problem 3. Pokazać, że następujące trójki są monadami:

(1) $((\mathcal{I}d \times A)^A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \mu : \big((\mathcal{I}d \times A)^A \times A\big)^A \implies (\mathcal{I}d \times A)^A, \eta : \mathcal{I}d \implies (\mathcal{I}d \times A)^A)$, gdzie $\mathbb{C}$ jest kategorią kartezjańsko domkniętą oraz μ i η są jak w Zadaniu 1.
(2) (T, μ, η), gdzie $T \in \{\mathcal{P}, (-)^*, M \times \mathcal{I}d\}$, oraz μ i η są jak w Zadaniu 2 dla odpowiednich funktorów.

Problem 4. Niech (T, μ, η) będzie monadą na kategorii $\mathbb{C}$. Dla $f : A \to TB, g : B \to TC$ zdefiniujmy:

$$g \cdot f : A \to TC; g \cdot f = \mu_C \circ Tg \circ f.$$

Pokazać, że dla f, g oraz $h : C \to TD$ zachodzi:

$$(h \cdot g) \cdot f = h \cdot (g \cdot f) \text{ oraz } f \cdot \eta_A = \eta_B \cdot f = f.$$

Problem 5. Trójkę $(T, (-)^*, \eta)$ nazywamy *trójką Kleisliego*, jeśli

- $T : \mathbb{C}_o \to \mathbb{C}_o$ jest przyporządkowaniem,
- $\eta = \{\eta_X : X \to TX\}_{X \in \mathbb{C}}$ jest rodziną strzałek,
- $(-)^*$ przyporządkowuje dowolnej strzałce $f : X \to TY$ strzałkę $f^* : TX \to TY$,

dodatkowo spełniającymi następujące równania:

$$\eta_X^* = id_{TX}, \text{ oraz } f^* \circ \eta_X = f \text{ oraz } (g^* \circ f)^* = g^* \circ f^*.$$

Pokazać, że jeśli $(T, (-)^*, \eta)$ jest trójką Kleisliego, to (T, μ, η) jest monadą, gdzie $Tf = (\eta_Y \circ f)^*$ dla każdej strzałki $f : X \to Y$ oraz $\mu = \{\mu_X : T^2X \to TX\}$ dla $\mu_X = (id_{TX})^*$. Ponadto, jeśli $(T, (-)^*, \eta)$ jest monadą, to $(T, (-)^*, \eta)$ jest trójką Kleisliego, gdzie $f^* = \mu_Y \circ Tf$ dla $f : X \to TY$.