Teoria Kategorii (11), 23.12.2020

Jeszcze raz przypomnienie własności CCC:

(A) $\forall\, f : X\times A \to B$

$\exists!\, \tilde{f} : X \to B^A$ t. że

$$\begin{tikzcd} X\times A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tilde{f}\times id_A"'] & B \\ B^A\times A \arrow[ur, "\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

(B) $\forall\, g : X \to B^A$

definiujemy:

$$\bar{g} \stackrel{df}{=} \underbrace{X\times A \xrightarrow{g\times id_A} B^A\times A \xrightarrow{\varepsilon} B}$$

wtedy $\tilde{\bar{g}} = g$.

oraz dla każdego $f : X\times A \to B$

$\bar{\tilde{f}} = f$.

(C) $\forall\, f : X \to Y$

$$\boxed{f^A = \widetilde{f\circ\varepsilon}}$$

$$\begin{tikzcd} X^A\times A \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "f^A\times id_A"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y^A\times A \arrow[r, "\varepsilon"'] & Y \end{tikzcd}$$

Rozwiążemy 4.6 i 4.7.

4.6 Stw. Dla każdego $\begin{cases} f : X\times A \to Y\times A \text{ i} \\ g : Y\times A \to Z\times A \end{cases}$

zachodzi:

$$\widetilde{g\circ f}^{\,(\ast)} = \left(\varepsilon_{Z\times A}\right)^{A} \circ \left(\tilde{g}\times id_A\right)^{A} \circ \tilde{f} .$$

dowód: Cel: pokazać, że wyrażenie po prawej stronie jest rozwiązaniem równości

$$\begin{tikzcd}
X\times A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "?\times id_A"'] & Y\times A \arrow[r, "g"] & Z\times A \\
& (Z\times A)^A\times A \arrow[ur, "\varepsilon_{Z\times A}"'] &
\end{tikzcd}$$

Mamy:

$$\begin{tikzcd}
X\times A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\tilde{f}\times id_A"'] & & Y\times A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\tilde{g}\times id_A"] & & Z\times A & \\
& (Y\times A)^A\times A \arrow[ur, "\varepsilon"'] \arrow[dr, "(\tilde{g}\times id_A)^A\times id_A"'] & & (Z\times A)^A\times A \arrow[ur, "\varepsilon_{Z\times A}"'] & & (Z\times A)^A\times A \arrow[ul, "\varepsilon_{Z\times A}"'] \\
& & ((Z\times A)^A\times A)^A\times A \arrow[ur, "\varepsilon_{(Z\times A)^A\times A}"] \arrow[urrr, "\varepsilon^A_{Z\times A}\times id_A"'] & & &
\end{tikzcd}$$

$\{\varepsilon_B : B^A\times A \to B\}$

Widzimy, że składając strzałki oznaczone przez $\to$ otrzymujemy

$$\begin{tikzcd}
X\times A \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "(\varepsilon^A\circ(\tilde{g}\times id_A)^A\circ\tilde{f})\times id_A"'] & & Z\times A \\
& (Z\times A)^A\times A \arrow[ur, "\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

Innymi słowy, wyrażenie

$$\mathcal{E}^A \circ (\tilde{g} \times id_A)^A \circ \tilde{f}$$

jest rozwiązaniem naszego równania, zatem równość (*) zachodzi $\square$

4.7 W kategorii CCC mając $(-)\times A$ i $(-)^A$ definiujemy funktor

$$State_A = (-)^A \circ (-)\times A$$

złożenie dwóch funktorów

czyli:

$$State_A X = (X\times A)^A$$

$$State_A (f: X \to Y) = (f\times id_A) \circ \mathcal{E}_{X\times A}$$

Dla dwóch strzałek $f : X \to State_A Y$

$g : Y \to State_A Z$

definiujemy:

$$g \,\square\, f \overset{df}{=} (\varepsilon_{Z \times A})^A \circ State_A\, g \circ f$$

Pokazać, że $\square$ jest łączny oraz spełnia

$$\eta_Y \,\square\, f = f$$

$$f \,\square\, \eta_X = f$$

gdzie $\eta_X : X \to State_A X$

$$\eta_X = \widetilde{id_{X \times A}}.$$

$$f : X \times A \longrightarrow Y \times A$$

$$\tilde{f} : X \longrightarrow \mathrm{State}_A\, Y$$

Komentar

$$\begin{tikzcd}
X \times A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \times A \arrow[d, "g"] \\
& Z \times A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{l}
f : X \times A \longrightarrow Y \times A \\
g : Y \times A \longrightarrow Z \times A \\
\hline
g \circ f : X \times A \longrightarrow Z \times A
\end{array}
\quad \longleftrightarrow \quad
\begin{array}{l}
\tilde{f} : X \longrightarrow \mathrm{State}\, Y \\
\tilde{g} : Y \longrightarrow \mathrm{State}\, Z \\
\hline
\tilde{g} \,\square\, \tilde{f} : X \longrightarrow \mathrm{State}\, Z
\end{array}$$

Weźmy

$$f : X \to State_A Y$$
$$g : Y \to State_A Z$$
$$h : Z \to State_A T$$

Czy:

$$h \,\square\, (g \,\square\, f) = (h \,\square\, g) \,\square\, f \; ?$$

Zauważmy, że

$$f = \tilde{\bar{f}}, \quad g = \tilde{\bar{g}}$$

B

$$g \,\square\, f = \tilde{\bar{g}} \,\square\, \tilde{\bar{f}} \overset{df}{=}$$

$$(\varepsilon_{Z\times A})^A \circ \underbrace{State_A(\tilde{\bar{g}})} \circ \tilde{\bar{f}} =$$

Wiedząc, że

$$state_A(g) = (g \times id_A) \circ \varepsilon = (g \times id_A)^A$$

Otrzymujemy:

$$= (\varepsilon_{Z\times A})^{A} \circ \left(\widetilde{\overline{g}}\times id_A\right)^{A} \circ \widetilde{\overline{f}}.$$

Z zadania 4.6 widzimy, że prawa strona tej równości to

$$\widetilde{\overline{g}\circ\overline{f}}.$$

Podsumowując:

$$g \square f = \widetilde{\overline{g}\circ\overline{f}}. \quad (\triangle)$$

Tę własność użyjemy do pokazania łączności i posiadania el. neutr.

Wracając do

$$h \,\Box\, (g \,\Box\, f) =$$

$$h \,\Box\, \left(\widetilde{\overline{g} \circ \overline{f}}\right) =$$

$$\widetilde{\overline{h}} \,\Box\, \left(\widetilde{\overline{g} \circ \overline{f}}\right) \overset{df}{=}$$

$$\left(\varepsilon_{T \times A}\right)^{A} \circ \mathrm{State}\left(\widetilde{\overline{h}}\right) \circ \left(\widetilde{\overline{g} \circ \overline{f}}\right) \overset{4.6}{=}$$

$$\widetilde{\overline{h} \circ \left(\overline{g} \circ \overline{f}\right)} = \widetilde{\left(\overline{h} \circ \overline{g}\right) \circ \overline{f}}$$

$$= \ldots = (h \,\Box\, g) \,\Box\, f.$$

Teraz sprawdzamy czy η jest rodziną strzałek nat.?

$$\eta_Y \square f = \overline{\eta_Y} \circ \overline{f}$$

$\eta_Y : Y \to \mathrm{State}\,Y$

$\overline{\eta_Y} = id_{Y\times A}$

Co to jest $\overline{\eta_Y}$?

2 własności B mamy

$$\overline{\eta_Y} = id_{Y\times A}$$

stąd

$$\eta_Y \square f = id_{Y\times A} \circ f = \overline{f}$$

B $= f$.

Analog. pokazujemy, że

$$f \square \eta_X = f.$$