Teoria Kategorii ⑫ 13.1.2021

$\mathbb{C}$ - kategoria CCC

$$\frac{X \xrightarrow{f} Y \qquad Y \xrightarrow{g} Z}{X \xrightarrow{g \circ f} Z}$$

Niech A będzie obiektem w $\mathbb{C}$ oraz A

Oznaczmy $\mathrm{State}_A\, X \overset{df.}{=} 10\, X = (A \times X)$

$$\frac{X \xrightarrow{f} 10\, Y \qquad Y \xrightarrow{g} 10\, Z}{X \xrightarrow{g \,\square\, f} 10\, Z}$$

$\eta = \{\eta_X : X \to 10\, X\}_{X \in \mathbb{C}}$

Zadanie: Napisać program, który:

(1) wczytuje z klawiatury nazwę pliku, usuwa z zawartości wielkie litery i wyświetla zawartość wypisaną od tyłu na ekranie.

Dane:

$\text{pure} : \forall a.\ a \to IO\ a$

$\text{readString} : () \to IO\ String$

$\text{putString} : String \to IO\ ()$

$\text{readFile} : String \to IO\ String$

$\text{reverse} : String \to String$

$\text{removeCaps} : String \to String$

oraz : ,

main : () → IO ()

main =

putString { String → IO ()

□

(pure { a → IO a
Str → IO Str

∘

reverse { Str → Str

∘

removeCaps) { Str → Str

□

(readFile { String → IO String

□

readString) { () → IO String

() → IO String

Pytanie Jakie własności abstrakcyjne pozwalają na zdefiniowanie "złożenia" ∘

$$\frac{X \xrightarrow{f} IO\,Y \qquad Y \xrightarrow{g} IO\,Z}{X \xrightarrow{g \circ f} IO\,Z}$$

$$IO \overset{df}{=} State_A$$

Odp: Zadanie 4.7, czyli

$$\{\eta_X : X \to IO\,X\}_X$$

$$\left\{(\varepsilon_{X \times A})^A : \underbrace{IO\,IO\,X}_{IO^2 X} \to \underbrace{IO\,X}_{IO\,X}\right\}_X$$

Kluczowe własności: $\{\eta_x\}$ i $\{(\varepsilon_{X\times A})^A\}$

① $\{\eta_x\}$ i $\{(\varepsilon_{X\times A})^A\}$ są tzw. naturalnymi transformacjami między odpowiednimi funktorami.

$$\{\eta_X : X \to 10X\}$$

$F = Id$ $\qquad$ $G = 10$

$\forall f : X \to Y$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & 10X \arrow[d, "10f = (f\times id)^A"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"] & 10Y \end{tikzcd}$$

ćw

def Niech $F, G : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ są funktorami. Rodzinę $\{\eta_X : FX \to GX\}_{X\in\mathbb{C}}$ nazywamy nat. trans. jeśli $\forall f : X \to Y \in \mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[d, "Gf"] \\ FY \arrow[r, "\eta_Y"] & GY \end{tikzcd}$$

Przypomnę, że

$$\eta_X \overset{df}{=} \widetilde{id_{X\times A}}$$

$$X \longrightarrow 10X = X \longrightarrow (X\times A)^A$$

Tak samo dla $\left\{(\varepsilon_{X\times A})^A : \underset{F''}{10^2}X \to \underset{G''}{10X}\right\}_X$

będziemy mieli dla każdego $f : X \to Y \in \mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
10^2X \arrow[r, "(\varepsilon_{X\times A})^A"] \arrow[d, "10^2 f"'] & 10X \arrow[d, "f"] \\
10^2Y \arrow[r, "(\varepsilon_{Y\times A})^A"'] & 10Y
\end{tikzcd}$$

ćw.

(2) Co więcej mamy rodziny $\eta = \{\eta_x\}_{x \in C}$

$$\mu = \left\{ \left(\varepsilon_{x * A} \right) : 10^2 X \to 10X \right\}_{x \in C}$$

spełniają dodatkowo:

$$\begin{tikzcd}
10X \arrow[r, "\eta_{10X}"] \arrow[d, "10(\eta_X)"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{10X}"] & 10^2X \arrow[d, "\mu_X"] \\
10^2X \arrow[r, "\mu_X"'] & 10X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
10^3X \arrow[r, "\mu_{10X}"] \arrow[d, "10(\mu_X)"'] & 10^2X \arrow[d, "\mu_X"] \\
10^2X \arrow[r, "\mu_X"'] & 10X
\end{tikzcd}$$

gdzie $g \,\square\, f = \mu \cdot 10g \cdot f$

Monada

def Monadą nazywamy trójkę

trójkę (T, μ, η), gdzie

1. $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ - funktor
2. $\mu = \{ \mu_x : T^2 X \to TX \}_{x \in \mathbb{C}}$

jest naturalną trans

3. $\eta = \{ \eta_x : X \to TX \}_{x \in \mathbb{C}}$

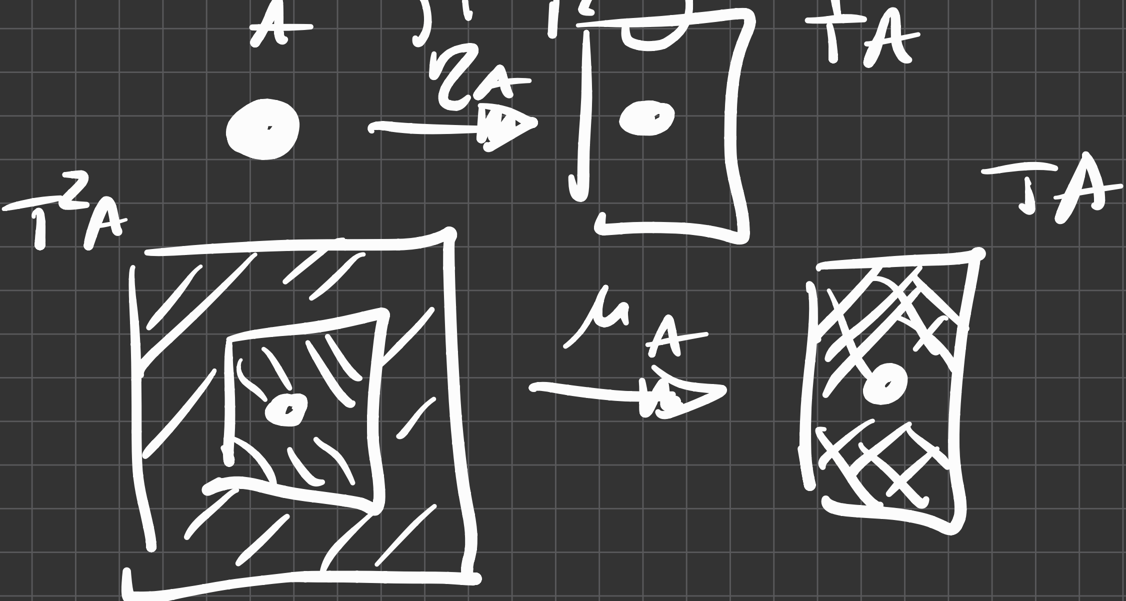
jest naturalną trans.

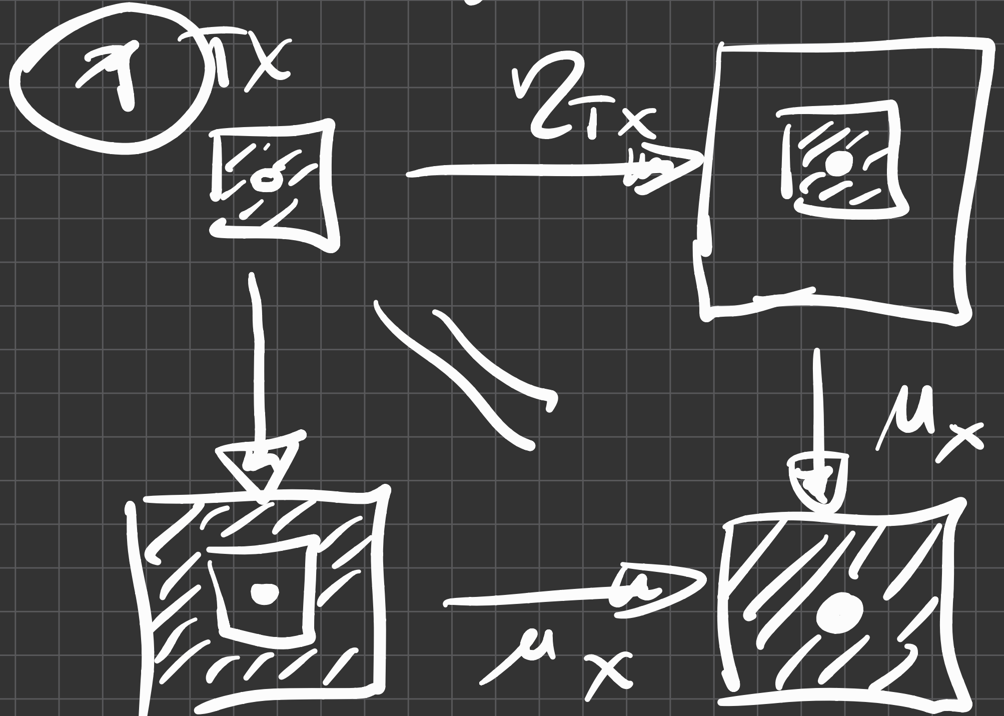
oraz następujące diagramy są przem.

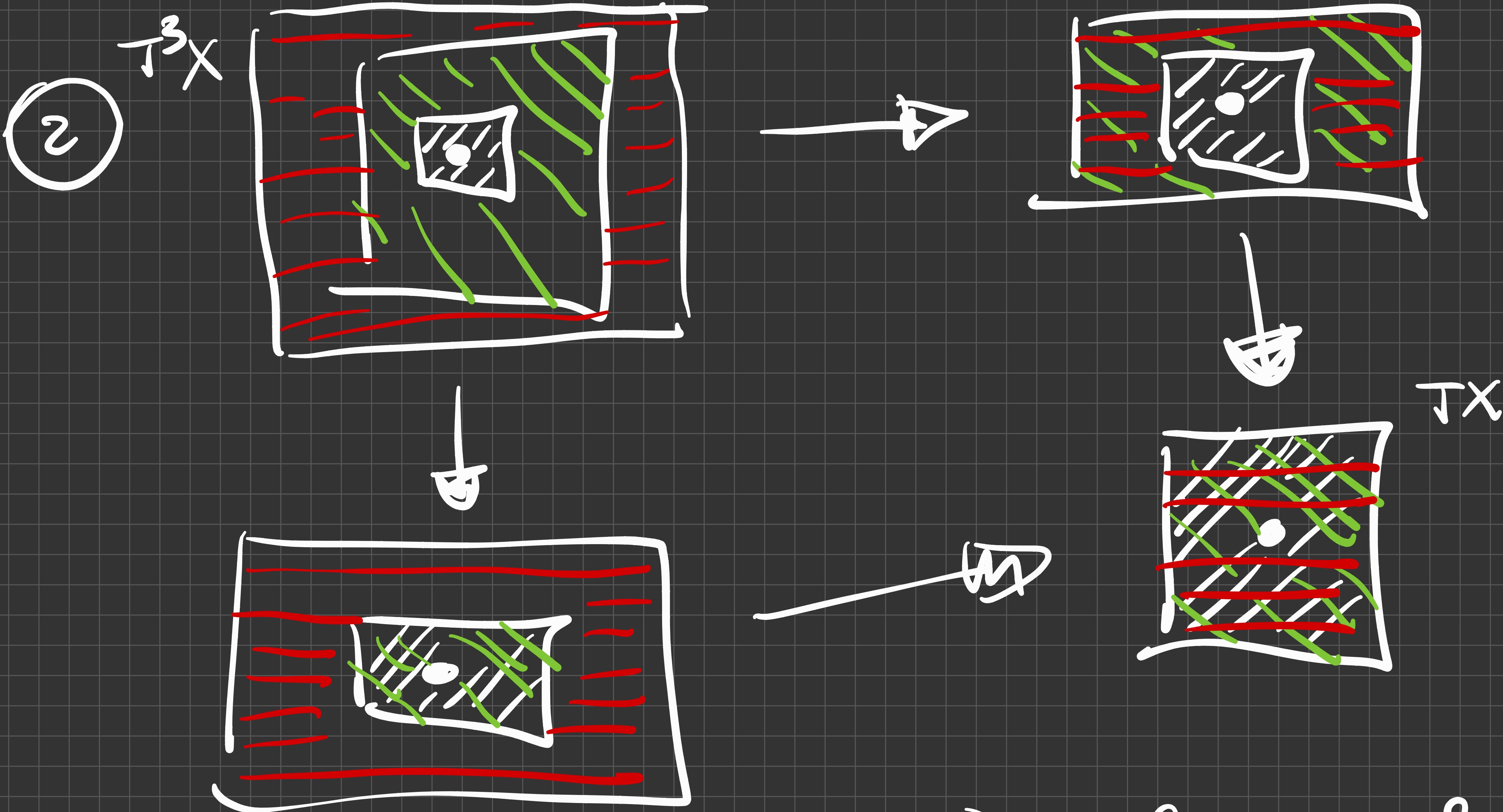
①
$$\begin{tikzcd}
TX \arrow[r, "\eta_{TX}"] \arrow[d, "T\eta_X"'] \arrow[dr, "id_{TX}"] & T^2X \arrow[d, "\mu_X"] \\
T^2X \arrow[r, "\mu_X"] & TX
\end{tikzcd}$$

②
$$\begin{tikzcd}
T^3X \arrow[r, "\mu_{TX}"] \arrow[d, "T\mu_X"'] & T^2X \arrow[d, "\mu_X"] \\
T^2X \arrow[r, "\mu_X"'] & TX
\end{tikzcd}$$

Nieformalnie możemy myśleć o tych diagramach w następujący sposób:







<u>Stw.</u> Niech (T, μ, η) będzie monadą. Wtedy zdefiniowana operacja:

$$g \square f = \mu_Z \circ Tg \circ f$$

dla $f : X \to Y$ jest operacją
$g : Y \to Z$

① łączną $\left(h \,\square\, (g \,\square\, f)\right) = \left((h \,\square\, g) \,\square\, f\right)$

② ma elementy neutralne, dokładnie

$$1_Y \,\square\, f = f \,\square\, 1_X = f.$$

dowód na ćw