

TEORIA KATEGORII

SERIA 1: KATEGORIE I FUNKTORY

Problem 1. Niech A będzie zbiorem. Pokazać, że przyporządkowania $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ zdefiniowane na obiektach i morfizmach jak poniżej są funktorami:

- $X \mapsto A \times X$ oraz $(f : X \rightarrow Y) \mapsto ((id \times f) : A \times X \rightarrow A \times Y; (a, x) \mapsto (a, f(x)))$,
- $X \mapsto A + X$ oraz

$$(f : X \rightarrow Y) \mapsto (id + f) : A + X \rightarrow A + Y; x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{jeśli } x \in X, \\ x & \text{jeśli } x \in A \end{cases}$$

- $X \mapsto X^A$ oraz

$$f : X \rightarrow Y \mapsto f^A : X^A \rightarrow Y^A; \phi \mapsto f \circ \phi.$$

- $X \mapsto \mathcal{P}X \stackrel{def}{=} \{A \subseteq X\}$ oraz

$$(f : X \rightarrow Y) \mapsto \mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y); A \mapsto f(A).$$

Problem 2. Niech \mathbb{P} i \mathbb{Q} będą kategoriami zadanymi przez posety (P, \leq) i (Q, \leq) . Podać charakteryzację funktorów $\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ wyrażoną w języku przekształceń $P \rightarrow Q$ między wyżej wymienionymi posetami.

Problem 3. Podać przykłady funktorów $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Par}$ i $\mathbf{Par} \rightarrow \mathbf{Set}$.

Problem 4. Pokazać, że funktor $(-)^* : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ spełnia:

$$X^* \cong \{\varepsilon\} + X \times X^*,$$

gdzie \cong oznacza relację bijekcji między zbiorami. Dodatkowo pokazać, że dla $f : X \rightarrow Y \in \mathbf{Set}$ przekształcenie $f^* : X^* \rightarrow Y^*$ spełnia:

$$f^*(\varepsilon) = \varepsilon \ \& \ f^*(x :: xs) = f(x) :: f^*(xs).$$

W powyższej definicji, operacja $(::) : X \times X^* \rightarrow X^*$ zdefiniowana jest dla $x :: xs$ przez dopisanie elementu x do ciągu xs na pierwszej pozycji. Pokazać, że funktor $(-)^{\omega} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ spełnia podobne zależności.

Problem 5. Znaleźć przykład funktora $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$, który spełnia:

$$FX \cong \{Nil\} + FX \times X \times FX.$$

Problem 6. Pokazać, że \mathbf{Rel} jest izomorficzna z \mathbf{Rel}^{op} .

Problem 7. Pokazać, że kategoria \mathbf{Set} nie jest izomorficzna z kategorią \mathbf{Set}^{op} .