Teoria Kategorii, Wykład 9 9.12.2020

def $\mathbb{C}$ = kategoria, $B, C \in \mathbb{C}$ = obiekty.

Obiektem potęgowym C^B wraz ze strzałką $\varepsilon : C^B \times B \to C$ t.że dla każdego obiektu $Z \in \mathbb{C}$, strzałki $f : Z \times B \to C$ istnieje dokładnie jedna strzałka $\tilde{f} : Z \to C^B$ t.że

$$
\begin{tikzcd}
C^B \times B \arrow[r, "\varepsilon"] & C \\
Z \times B \arrow[u, "\exists! \, \tilde{f} \times id_B"] \arrow[ur, "\forall f"'] &
\end{tikzcd}
$$

def $\mathbb{C}$ nazywamy kartezjańsko - domkniętą jeśli

1. ma wszystkie skończone prod
2. wszystkie obiekty potęgowe (dla danej pary B, C).

Stw Niech $\mathbb{C}$ będzie kartezjańsko domknięte (CCC = cartesian closed cat) wtedy przyporządkowanie:

$$X \longmapsto X^A$$

X obiekty $\in \mathbb{C}$

gdzie A = ustalony z góry obiekt

rozszerza się do funktora $(-)^A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

dowód ① Omówienie sytuacji w Set.

Zał., że mamy funkcję $\beta : B \to C$ w Set. Możemy w łatwy sposób zdefiniować

$$\beta^A : B^A \to C^A$$

w następujący sposób:

$$\beta^A(f : A \to B) \overset{df}{=} \beta \circ f \in C^A$$

Innymi słowy,

$$\beta^A(f) = \beta \circ f$$

diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr] & \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \end{tikzcd}$$

jest przemienny

Póki co mamy: $X \longmapsto X^A$

$\beta : B \to C \longmapsto \beta^A : B^A \to C^A$

Musimy sprawdzić, czy spełnione są równości funktorowe.

1. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$
2. $F(id_A) = id_{F(A)}$

oraz

Weźmy $\alpha : C \to D$ i $\beta : B \to C$.

Wtedy:

$$(\alpha \circ \beta)^A : B^A \to D^A$$

$$(\alpha \circ \beta)^A (f) = \alpha \circ \beta \circ f =$$

$$\alpha \circ \beta^A (f) = (\alpha^A \circ \beta^A)(f).$$

Czyli

$$(\alpha \circ \beta)^A = \alpha^A \circ \beta^A.$$

$$(\mathrm{id}_B)^A : B^A \to B^A$$

$$(\mathrm{id}_B)^A(f) = \mathrm{id}_B \circ f = f = \mathrm{id}_{B^A}(f).$$

Czyli: $(\mathrm{id}_B)^A = \mathrm{id}_{B^A}$

(2) Ogólnie, niech $\mathbb{C}$ będzie CCC.

W pierwszym kroku rozszerzamy przyporządkowanie $X \mapsto X^A$ na strzałki.

Weźmy strzałkę $\beta : B \to C$ i zdef $\beta^A : B^A \to C^A$ w następujący sposób:

$$\beta^A \overset{df}{=} (\beta \circ \varepsilon)$$

Innymi słowy: jest to transpozycja

$$B^A \times A \xrightarrow{\varepsilon} B \xrightarrow{\beta} C.$$

Inaczej, β^A jest jednoznacznym rozwiązaniem następującej równości:

$$\begin{tikzcd}
C^A \times A \arrow[r, "\varepsilon"] & C \\
B^A \times A \arrow[u, "\beta^A \times id_A"] \arrow[r, "\varepsilon"'] & B \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

Czy to przyporządkowanie spełnia aksjomy funktorowe?

Tak jest, gdyż:

$(id_B)^A$ jest jedynym rozwiązaniem

$$\begin{tikzcd}
B^A \times A \arrow[r, "\varepsilon"] & B \\
B^A \times A \arrow[r, "\varepsilon"'] \arrow[u, "(id_B)^A \times id_B"] & B \arrow[u, "id_B"']
\end{tikzcd}$$

Ale my znamy rozwiązanie tego równania i jest nim id_{B^A}. Stąd, z jednoznacznego rozwiązania:

$$(id_B)^A = id_{B^A}.$$

Teraz pokażemy, że $\gamma^A \circ \beta^A = (\gamma \circ \beta)^A$ dla $B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D$. Istotnie

$(\gamma \circ \beta)^A$ jest jedynym w rozwiązaniu

$$
\begin{tikzcd}
D^A \times A \arrow[r, "\varepsilon"] & D \\
B^A \times A \arrow[r] \arrow[u, "(\gamma \circ \beta)^A \times id_A"] & B \arrow[u, "\gamma \circ \beta"']
\end{tikzcd}
$$

Zauważmy, że ten diagram jest przemienny:

$$
\begin{tikzcd}
D^A \times A \arrow[rr, "\varepsilon"] & & D \\
C^A \times A \arrow[u, "\gamma^A \times id"] \arrow[rr, "\varepsilon"] & & C \arrow[u, "\gamma"'] \\
B^A \times A \arrow[u, "\beta^A \times id"] \arrow[rr, "\varepsilon"'] \arrow[uu, bend left=60, "\gamma^A \circ \beta^A \times id_A"] & & B \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}
$$

Widzimy, że $\gamma^A \circ \beta^A$ jest rozwiązaniem naszego równania dla $\gamma \circ \beta$. Stąd, z podwzajemności wynika, że

$$(\sigma \cdot \beta)^A = \sigma^A \circ \beta^A \quad \square$$

Obs Można zauważyć, że $\varepsilon : C^B \times B \to B$

oprócz ε istnieje też inna strzałka η która pozwala nam opisać transp.

Dla obiektów B, C zdefiniujmy

$$\eta : C \longrightarrow (C \times B)^B$$

jako wynik transpozycji strzałki $id_{C \times B} : C \times B \longrightarrow C \times B$.

W kategorii Set może η_b zadane będzie w następujący sposób:

$$\eta : C \Longrightarrow (C \times B)^B$$

$$\eta(c) \overset{df}{=} b \longmapsto (c, b)$$

funkcja, które $B \to C \times B$ t. że elem b przyporządk. parę (c, b) ✓

Zwróćmy uwagę, że w dowolnej kategorii CCC strzałka η pozwala nam znaleźć $\hat{f}$ w następujący sposób: niech

$z \quad f^A$

$f : Z \times A \longrightarrow B$ będzie strzałką w $\mathbb{C}$.

Wtedy

$$f^A : (Z \times A)^A \longrightarrow B^A .$$

Otrzymujemy

$$\begin{tikzcd}
(Z \times A)^A \arrow[r, "f^A"] & B^A \\
Z \arrow[u, "\eta"] \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Innymi słowy

$$\tilde{f} = f^A \circ \eta$$

$A \to \boxed{Z}$

Mamy:

$$\eta : C \longrightarrow (C \times B)^B$$

$$\varepsilon : C^B \times B \longrightarrow C$$

Jeśli $F = (-)^B$, $G = (-) \times B$

to

$$\boxed{\begin{aligned} \eta &: C \longrightarrow FGC \\ \varepsilon &: GFC \longrightarrow C \end{aligned}}$$

Równoważne aksjomatyzacje CCC

Stw. Kategoria $\mathbb{C}$ jest CCC wtedy i tylko wtedy, gdy ma następującą strukturę:

- wybrany obiekt 1, t.że dla każdego obiektu $C \in \mathbb{C}$ istnieje strzałka

$$C \xrightarrow{!_C} 1$$

Oraz dla każdej $C \xrightarrow{f} 1$ mamy

$$f = !_C .$$

• Dla każdej pary obiektów A, B istnieje obiekt $A \times B$ i strzałki

$$p_1 : A \times B \to A \quad \text{oraz} \quad p_2 : A \times B \to B$$

t. że dla każdej pary strzałek

$f : Z \to A$, $g : Z \to B$ istnieje strzałka $\langle f, g \rangle : Z \to A \times B$

spełniająca!

$$p_1 \circ \langle f, g \rangle = f$$

$$p_2 \circ \langle f, g \rangle = g$$

$$\langle p_1 \circ h, p_2 \circ h \rangle = h \quad \text{dla każdego } h : Z \to A \times B$$

- dla każdej pary obiektów A, B istnieje obiekt B^A i strzałka

$$\varepsilon : B^A \times A \to B$$ t.że

dla każdej $f : Z \times A \to B$ istnieje $\tilde{f} : Z \to B^A$ spełniająca:

$$\varepsilon \circ (\tilde{f} \times id_A) = f$$

oraz dla każdego $g : Z \to B^A$ mamy:

$$\widetilde{\varepsilon \circ (g \times id_A)} = g$$