

Teoria Kategorii, Wykład 9 9.12.2020

def \mathcal{C} = Kategoria, $B, C \in \mathcal{C}$ = obiekty.
Obiektem pośrednim C^B wraz ze strukturą

$\varepsilon: C^B \times B \rightarrow C$ l.z. dla
 każdego obiektu $Z \in \mathcal{C}$, struktury

$f: Z \times B \rightarrow C$ istnieje dekompozycja
 j.c.d.e struktury $f: Z \rightarrow C^B$ t.z.

$$C^B \times B \xrightarrow{\varepsilon} C$$

$\exists! f: Z \times B \rightarrow C^B$

$$Z \times B \xrightarrow{f} C^B$$

defini ① wyzwolenie Kategorialko - domknięty

- ① wszystkie skończone produkty
- ② wszystkie obrekty katygowe
(dla dowolnej parag B, C).

Stw Należy ④ bądźże kategorialko
domknięte (CCC = Categorical
closed cat)

wtedy przypomnione

: A



obrekty \mathcal{C}

rozszczelne \mathcal{S}

do funkcji

$(-)^A : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.

qd. R
 $A =$ stabig
= gory direct

dowód ① Oznaczenie sytuacji w set.

zest, ze many many funkcjí $f: B \rightarrow C$ w
set. Kolejny u Takiwy sposób zdefiniować

$$B^A : B^A \rightarrow C^A$$

w napisy

$$B^A : (f: A \rightarrow B) \xrightarrow{\text{df}} B^A$$

(najniższy stan)

degree

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{B^A(f)} & B^A(f) = B^A \\ f \downarrow & & \\ B & \xrightarrow{B^A} & C \end{array}$$

jest pojęcie

Póki co

mamy:

$$X \xrightarrow{A} X^A$$

$$\beta: B \rightarrow C \xrightarrow{A} \beta^A: B^A \rightarrow C^A$$

$$\alpha: C \rightarrow D \xrightarrow{A} \alpha^A: C^A \rightarrow D^A$$

Rusin
Rómkoci
Wein
Włodkowic

sprawdzicie, czy spełniają

$$\alpha: C \rightarrow D \quad \beta: B \rightarrow C.$$

spełnione są

$$\begin{aligned} f \circ g &= F(f) \circ F(g) \\ F(d_A) &= d_{F(A)} \end{aligned}$$

$$(\alpha \circ \beta)^A: B^A \rightarrow D^A \text{ oraz}$$

$$(\alpha \circ \beta)^A(f) = \alpha \circ \beta \circ f =$$

$$\alpha \circ \beta^A(f) = (\alpha^A \circ \beta^A)(f).$$

$$(\alpha \circ \beta)^A = \alpha^A \circ \beta^A.$$

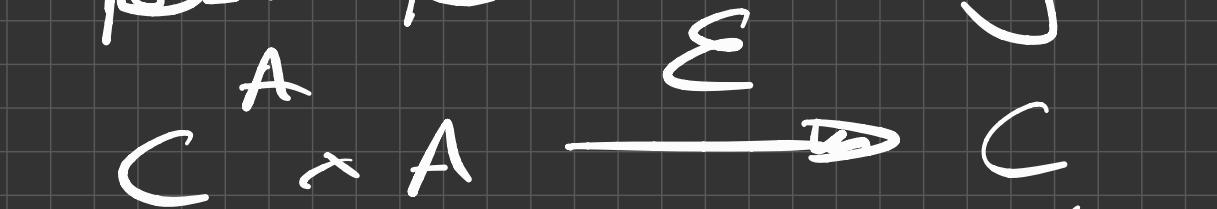
$$\begin{array}{c}
 (\text{id}_B)^A : B^A \rightarrow B^A \\
 (\text{id}_B)^A (f) = \text{id}_B \circ f = f = \\
 \text{id}_{B^A} (f) \quad \text{Gyl: } (\text{id}_B)^A = \text{id}_{B^A}
 \end{array}$$

2 Ogólnie, mówiąc bardziej CCC.
 W przeważu kroków tożsamości
 przy pośrednictwie $X \mapsto X^A$ w strefie.
 Wówczas struktura $\beta : B \Rightarrow C$ jest
 $B^A : B^A \rightarrow C^A$ w postaci β^A spłaszczonej:
 $\beta^A \stackrel{\text{df}}{=} (\beta \circ \epsilon)$

langer: stawy i jest to transpozykcja



laczek, β^A jest redukującym w pewnych
wystąpieniach
rowności:



Czy to wyznacza spełnione akcje
funktorowe?

Tek jest, qd yz:

$$(\text{id}_B)^A : B^A \times A \xrightarrow{\epsilon} B$$

jest iedynym rozwiązańem

$$\cancel{(\text{id}_B)^A : B^A \times id_B}$$

\uparrow \uparrow \uparrow

$$id_B$$

$$B^A \times A \xrightarrow{\epsilon} B$$

Ale my znamy rozwiązańe tego samego
i jest w innych

$$id_{B^A}$$

Stąd,

2 rozwiązań: $(\text{id}_B)^A = id_{B^A}$.

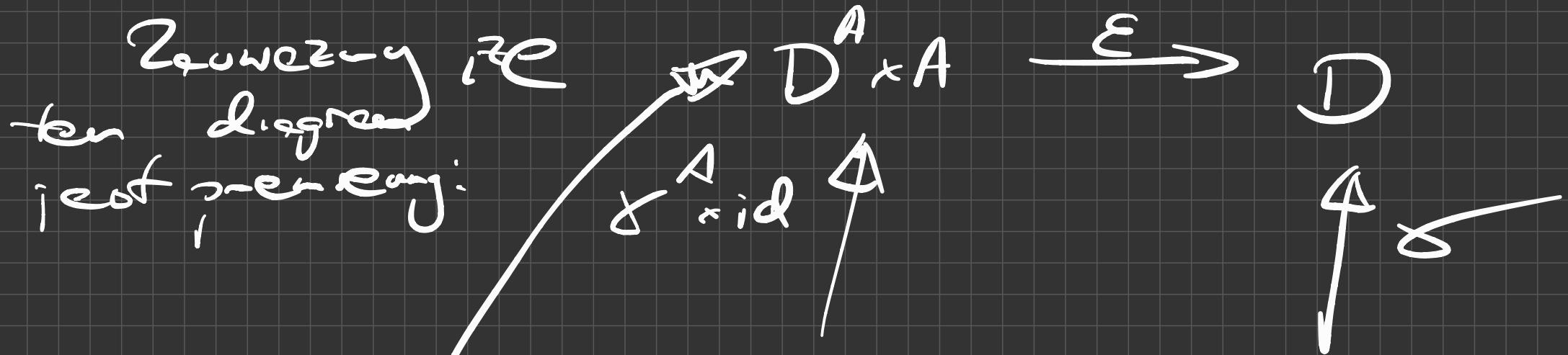
Terez Pakozsedy ze $\sigma^A \cdot \beta^A = (\sigma \cdot \beta)^A$
 dla $B \xrightarrow{\beta} C \xrightarrow{\gamma} D$. istatue

$(\sigma \cdot \beta)^A$ Terej i celoznaczy w rozwiazaniu

$$D^A \times A \xrightarrow{\epsilon} D$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \uparrow & \\
 (\sigma \cdot \beta)^A \times id_A & \downarrow & \\
 & \uparrow & \\
 & \sigma \cdot \beta &
 \end{array}$$

$$B^A \times A \longrightarrow B$$



$$\delta^A \circ \beta^A \times id_A$$

Widzimy, że $\delta^A \circ \beta^A$ jest rozdrobnione dla $\delta \circ \beta$. rozwiązać w szczegółach,

z podla założycieli wynika, że

$$(\alpha \cdot \beta)^A = \alpha^A \circ \beta^A$$



Obs Kozne założycie, że

$$\mathcal{E}: C^B \rightarrow B$$

oprócz \mathcal{E} istnieje też inna struktura

które pozwala nam opisać trup.

Dla obiektów B, C zdefiniujemy

$$\mathcal{D}: C \rightarrow (C \times B)$$

Taka ryciąca transpozycja struktury:

$$\text{id}_{C \times B}: C \times B \rightarrow C \times B$$

W kategorii Set uder
wydaje w uogólnijacy sposob:

$$\gamma : C \rightarrow (C \times B)^B$$

$$\gamma(c) = \underline{b \mapsto (c, b)}$$

funkcja, tzn
 $B \rightarrow C \times B$ tzn
dla b zapisz (c, b)

Znaczący uogólnieć w kategorii dedukcji kategorii

CCC struktury pozwala nam zadebić

\hat{f} jest poprawny sposób: mechanizm
 \hat{f}^A $f: \mathcal{Z} \times A \rightarrow B$ budżet struktury
wtedy \downarrow \mathbb{C} .

wtedy

$$\begin{array}{ccc} f^A: (\mathcal{Z} \times A)^A & \xrightarrow{\quad} & B^A \\ (\mathcal{Z} \times A)^A & \xrightarrow{f^A} & B^A \\ \downarrow \text{ } \mathcal{Z} & \nearrow f & \end{array}$$

lubiąc i stawiać

$$\sim f = f^A \circ \mathcal{Z}$$

$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{Z}$

Many:

$$\gamma: C \rightarrow (C \times B)^B$$

$$\epsilon: C^B \times B \rightarrow C$$

If

$$F = (-)^B$$

$$G = (-) \times B$$

to

$$\gamma: C \rightarrow FGC$$

$$\epsilon: GFC \rightarrow C$$

Rozważanie eksponentycznych CCC

Stan

Kategoria

\mathbb{C} jest

CCC wtedy

jeżeli wtedy, gdy we wszystkich

strukturach:

- wybrany obiekt 1 , tzn dla każdego obiektu $C \in \mathbb{C}$ istnieje struktura

$$C \xrightarrow{!_C} 1$$

Orz dle

many

$$f = !_{C^*}$$

$$C \xrightarrow{f} 1$$

• Dla każdej pary obiektów A, B , istnieje obiekt $A \times B$, znanego

$$p_1 : A \times B \rightarrow A \quad \text{oraz} \quad p_2 : A \times B \rightarrow B$$

+ że dla każdej pary struktur

$$f : Z \rightarrow A, \quad g : Z \rightarrow B \quad \text{istnieje struktura}$$

strukturowa

$$\langle f, g \rangle : Z \rightarrow A \times B$$

spełniająca:

$$p_1 \circ \langle f, g \rangle = f$$

$$p_2 \circ \langle f, g \rangle = g$$

$$\langle p_1 \circ h, p_2 \circ h \rangle = h \quad \text{dla}$$

kolejnego $h : Z \rightarrow A \times B$

• die Kettei ε ist über A, B istreie
objekt $B^A \rightarrow \text{streie } A$

$$\varepsilon: B^A \times A \rightarrow B \text{ istreie}$$

die Kettei $f: Z \times A \rightarrow B$ istreie

$$\tilde{f}: Z \rightarrow B^A \text{ spezialeigce:}$$

$$\varepsilon \circ (\tilde{f} \times \text{id}_A) = f$$

over die Kettenko
mung:

$$\varepsilon \circ (g \times \text{id}_A) = g$$