TEORIA KATEGORII

SERIA 1: KATEGORIE I FUNKTORY

Problem 1. Niech A będzie zbiorem. Pokazać, że przyporządkowania $\mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ zdefiniowane na obiektach i morfizmach jak poniżej są funktorami:

- $X \mapsto A \times X$ oraz $(f : X \to Y) \mapsto ((id \times f) : A \times X \to A \times Y; (a, x) \mapsto (a, f(x)))$,
- $X \mapsto A + X$ oraz
$$(f : X \to Y) \mapsto (id + f) : A + X \to A + Y; x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{jeśli } x \in X, \\ x & \text{jeśli } x \in A \end{cases}$$
- $X \mapsto X^A$ oraz
$$f : X \to Y \quad \mapsto \quad f^A : X^A \to Y^A; \phi \mapsto f \circ \phi.$$
- $X \mapsto \mathcal{P}X \overset{def}{=} \{A \subseteq X\}$ oraz
$$(f : X \to Y) \quad \mapsto \quad \mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y); A \mapsto f(A).$$

Problem 2. Niech $\mathbb{P}$ i $\mathbb{Q}$ będą kategoriami zadanymi przez posety $(P, \leqslant)$ i $(Q, \leqslant)$. Podać charakteryzację fuktorów $\mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ wyrażoną w języku przekształceń $P \to Q$ między wyżej wymienonymi posetami.

Problem 3. Podać przykłady funktorów $\mathsf{Set} \to \mathsf{Par}$ i $\mathsf{Par} \to \mathsf{Set}$.

Problem 4. Pokazać, że funktor $(-)^* : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ spełnia:
$$X^* \cong \{\varepsilon\} + X \times X^*,$$
gdzie $\cong$ oznacza relację bijekcji między zbiorami. Dodatkowo pokazać, że dla $f : X \to Y \in \mathsf{Set}$ przekształcenie $f^* : X^* \to Y^*$ spełnia:
$$f^*(\varepsilon) = \varepsilon \;\&\; f^*(x :: xs) = f(x) :: f^*(xs).$$
W powyższej definicji, operacja $(::) : X \times X^* \to X^*$ zdefiniowana jest dla $x :: xs$ przez dopisanie elementu x do ciągu xs na pierwszej pozycji. Udowodnić, że funktor $(-)^\omega : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ spełnia podobne zależności.

Problem 5. Znaleźć przykład funktora $F : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$, który spełnia:
$$FX \cong \{Nil\} + FX \times X \times FX.$$

Problem 6. Pokazać, że Rel jest izomorficzna z Rel^{op}.

Problem 7. Pokazać, że kategoria Set nie jest izomorficzna z kategorią Set^{op}.

Problem 8. Pokazać, że w kategorii Set strzałka $f : A \to B$ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jest bijekcją.

Problem 9. Pokazać, że każdy izomorfizm jest mono i epi.

Problem 10. Pokazać, że w Set przekształcenie $f : X \to Y$ jest "na" wtedy i tylko wtedy, gdy jest epimorfizmem.

Problem 11. Niech $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ oraz $h : X \to Z$ spełniają $h = g \circ f$. Pokazać, że

- jeśli f, g są izo to h też jest izo,
- jeśli h jest mono, to f jest mono,
- jeśli h jest mono to g *nie* musi być mono.

6 października 2020