TEORIA KATEGORII

SERIA 4: KATEGORIE KARTEZJAŃSKO-DOMKNIĘTE

Problem 1. Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią CCC. Pokazać, że $\tilde{f} = f^A \circ \eta$, gdzie dla $f : Z \times A \to B$ strzałka $\tilde{f} : Z \to B^A$ oznaca transpozycję, $f^A : (Z \times A)^A \to B^A$ oraz $\eta : Z \to (Z \times A)^A$ są zdefiniowane jak na wykładzie.

Problem 2. Pokazać, że w dowolnej kategorii, która jest CCC zachodzi:

- $(A \times B)^C \cong A^C \times B^C$,
- $(A^B)^C \cong A^{B \times C}$.

Problem 3. Czy kategoria Mon jest CCC?

Problem 4. Pokazać, że kategoria $\omega\mathsf{CPO}$ jest CCC, natomiast kategoria $\omega\mathsf{CPO}_\perp$ nie jest CCC.[1]

Problem 5. Pokazać, że kategoria wszystkich małych kategorii i funktorów Cat jest CCC, gdzie $\mathsf{C}^\mathsf{D} = Fun(\mathsf{C}, \mathsf{D})$.

10 grudnia 2020

[1]Poset $(P, \leqslant)$ nazywamy ωCPO jeśli każdy przeliczalny łańcuch $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots$ ma supremum. Przekształcenie $f : P \to Q$, które zachowuje porządek między dwoma posetami $(P, \leqslant)$ i $(Q, \leqslant)$, które dodatkowo są ωCPO nazywamy *ciągłym*, jeśli zachowuje suprema przeliczalnych łańchuchów, tj. $f(\bigvee_{i \in \mathbb{N}} x_i) = \bigvee_i f(x_i)$ dla każdego $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots$. Posety, które spełniają własność ωCPO wraz z ciągłymi przekształceniami jako morfizmami tworzą kategorię oznaczaną przez $\omega\mathsf{CPO}$.

Poset $(P, \leqslant)$, który jest ωCPO nazywamy *punktowym*, jeśli istnieje w nim element najmniejszy $\perp \in P$. Punktowe ωCPO tworzą kategorię w której strzałkami są wszystkie ciągłe przekształcenia dodatkowo zachowujące element najmniejszy, tj. $h(\perp) = \perp$. Tę kategorię oznaczamy przez $\omega\mathsf{CPO}_\perp$.