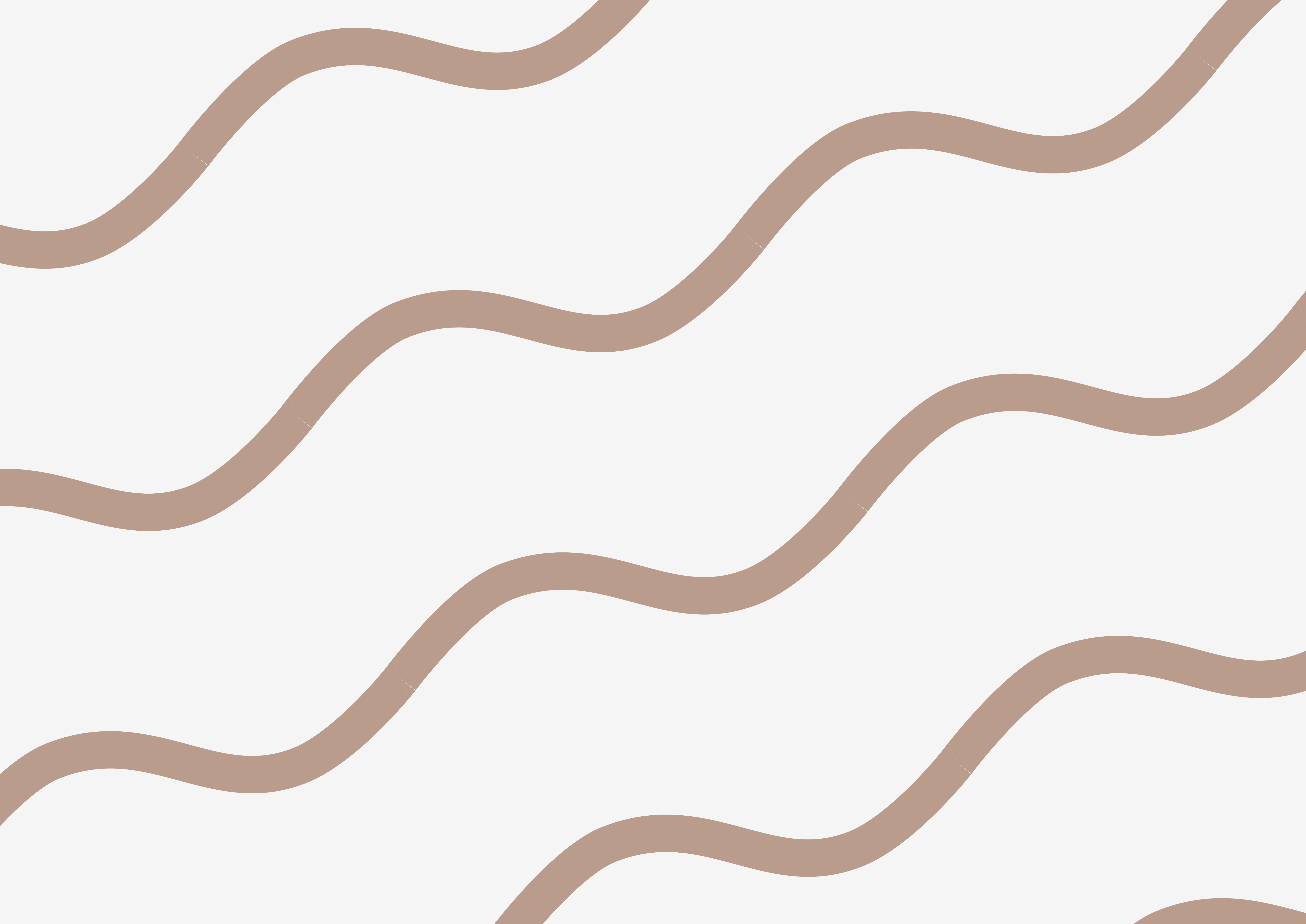


Teoria Kategorii (1) 7.10.2020

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

def

Kategorią $\mathbb{C}$ nazywamy parę $(\mathbb{C}_0, \mathbb{C}_m)$, gdzie

(1) $\mathbb{C}_0$ = klasa tzw. obiektów oznaczanych A, B, C.

(2) $\mathbb{C}_m$ = klasa tzw. morfizmów (strzałek) ozn f, g, h.

Dla każdej strzałki $f \in \mathbb{C}_m$ istnieją $\mathrm{dom}(f) \in \mathbb{C}_0$ oraz $\mathrm{cod}(f) \in \mathbb{C}_0$,

które oznaczamy $f: A \longrightarrow B$
$ \parallel \qquad \parallel$
$ \mathrm{dom}(f) \quad \mathrm{cod}(f).$

Dla dwóch strzałek $f: A \to B$ i $g: B \longrightarrow C$ zdefiniowane jest strzałka

$$g \circ f : A \longrightarrow C.$$

Operacja $\circ$ spełnia:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

dla $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$.

Dla każdego obiektu A istnieje

$id_A : A \to A$ t.że

$$(id_B \circ f) = (f \circ id_A) = f$$

dla każdego $f : A \to B$.

identyczność.

Przykłady

① Set — kategoria, w której obiektami są wszystkie zbiory, strzałkami są wszystkie przekształcenia, z naturalnym składaniem.

② Set_{fin} — kategoria, w której ob. są wszystkie skończone zbiory, strzałkami przekszt. na nich zdefiniowane z naturalną operacją skład.

(3) **Grp** = obiekty = wszystkie grupy
morfizmy = homomorfizmy grup
składanie = zwykłe skł. homom.

kategoria grup

Mon = obiekty = wszystkie monoidy
morfizmami = homom. monoidów
składanie = zwykłe skł. hom.

kategoria monoidów

Graphs = ...

Top = kategoria przestrzeni topologicznych i przekształceń ciągłych.

Pos = obiekty = zbiory częściowo uporządkowane

strzałki to przekształcenia zachowujące porządek z naturalnym składaniem

$(P, \leq)$, $(Q, \leq)$ – obiekt.

$f: (P, \leq) \to (Q, \leq)$ to przekształcenie $f: P \to Q$, t.że jeśli $p_1 \leq p_2$ w $(P, \leq)$ to $f(p_1) \leq f(p_2)$ w $(Q, \leq)$.

Zwróćmy uwagę na to, że jeśli

$f : (P, \leq) \to (Q, \leq)$

$g : (Q, \leq) \to (R, \leq)$ są zach. porządek

to $g \circ f : P \to R$ jest przekształc. zachowującym porządek.

Innymi słowy $g \circ f : (P, \leq) \to (R, \leq)$ jest dobrze zdef strzałką.

(4) Rel = obiektami są wszystkie zbiory.

Dla dwóch obiektów A, B strzałką $f: A \to B$ w Rel jest $f \subseteq A \times B$.

Dla każdego obiektu A mamy

$$id_A = \{(a,a) : a \in A\} \subseteq A \times A$$

Ponadto, dla strzałek $f: A \to B$, $g: B \to C$ $\boxed{f \subseteq A \times B, \ g \subseteq B \times C}$

zdefiniujmy:

$$A \times C \ni g \circ f = \{(a,c) : \exists\, b \in B \text{ t.że } \begin{matrix}(a,b) \in f \\ (b,c) \in g\end{matrix}\}$$

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$, $C = \{z, t\}$

$f : A \to B$ $\qquad$ $g : B \to C$

$f = \{(a, y), (c, x)\}$ $\qquad$ $g = \{(x, z), (y, z)\}$

$$g \circ f = \{(a, z)\}.$$

5 Niech $M = (M, \cdot, 1)$ będzie monoidem. Zdefiniujmy kategorię $\underline{M}$, w której klasa obiektów jest $\{*\}$ = jednoel. klasa składająca się z obiektu $*$.

morfizmami = elementy z M, tzn. każdy element $m \in M$ utożsamiamy z $m : * \to *$. Składaniem w kategorii $\underline{M}$ jest mnożenie monoidu $(M, \cdot, 1)$.

$$m \circ n \overset{df}{=} m \cdot n .$$

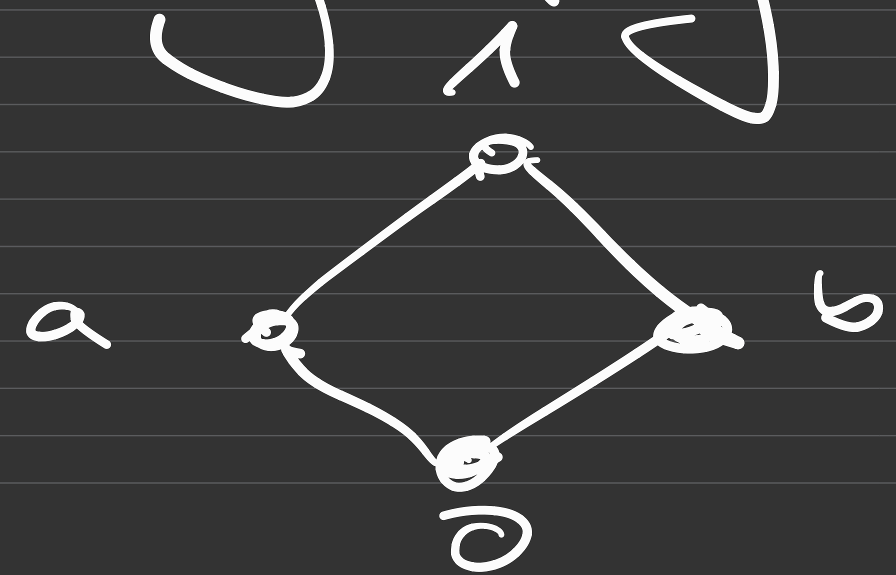
identyczność: $1 : * \to *$

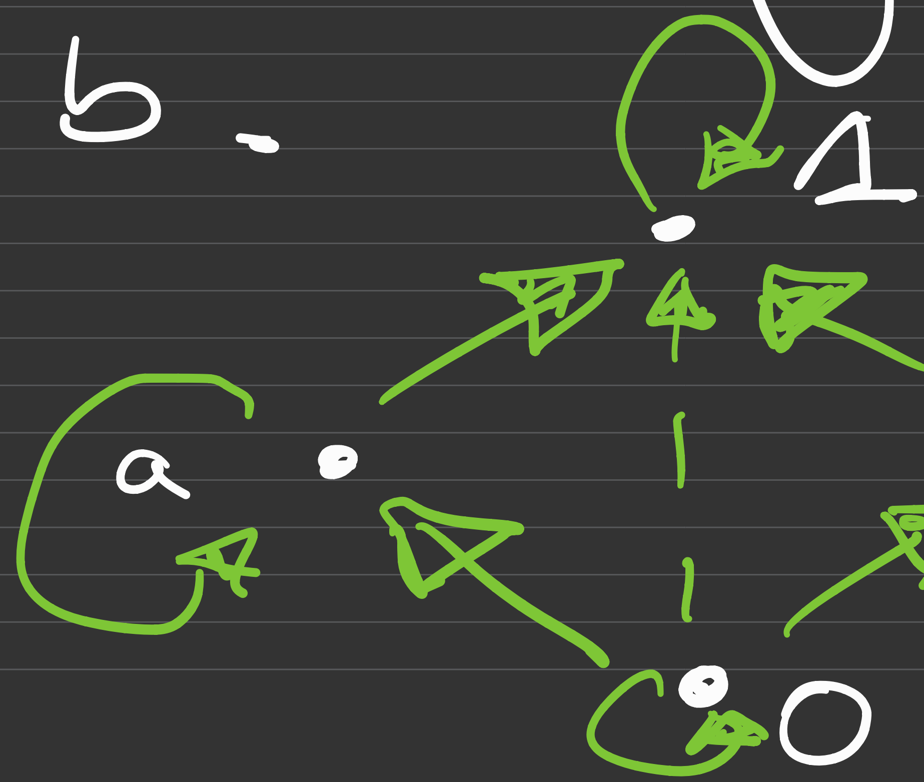
$m : * \to *$

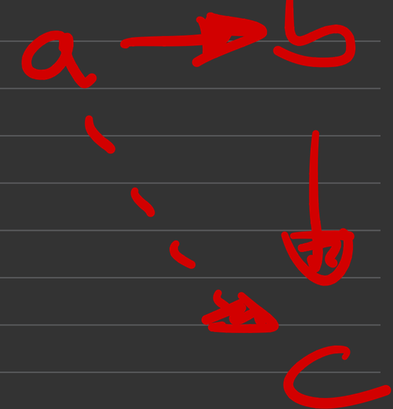
$n : * \to *$

6 Niech $P = (P, \leq)$ będzie posetem. Zdefiniujmy kategorię $\underline{P}$ w następujący sposób:

1. obiektami $\underline{P}$ są elementy P.
2. dla dwóch $a, b \in P$ istnieje jedna strzałka $a \to b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \leq b$.







7 Par = obiekty to wszystkie zbiory

Dla A, B - obiekty z Par zdefiniujmy

$f: A \rightharpoonup B$ = przekształcenie

$$\underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{B + \{\bot\}}}.$$

rozłączne suma zbiorów

$$X + Y \stackrel{df}{=} \{1\} \times X \cup \{2\} \times Y.$$

Intepr. jeśli $f: A \rightharpoonup B$ oraz $f(a) = \bot$, to interpretujemy ten wynik jako "niezdefiniowana wartość"

Przykład

$$\mathrm{div} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R} \quad (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} + \{\perp\})$$

$$\mathrm{div}(a, b) = \begin{cases} \frac{a}{b} & b \neq 0 \\ \perp & \text{wpp.} \end{cases}$$

Składanie w Par:

Dla $f : A \rightharpoonup B$, $g : B \rightharpoonup C$

złożenie

$g \circ f : A \rightharpoonup C$ jest dane

$$g \circ f(a) \stackrel{df}{=} \begin{cases} \perp & f(a) = \perp \\ g(f(a)) & f(a) \neq \perp \end{cases}$$

8 Err

Niech M = ustalony zbiór wiadomości o błędach

obiekty to wszystkie zbiory

strzałka $f : A \to B$ nazywamy przekszt. $f : A \to B + M$

uzupełnić def $\circ$ oraz pokazać, że tak zdef. obiekt jest kategorią.

(9) Niech $M = (M, \circ, 1)$ będzie monoidem. Zdefiniujmy kategorię Trace, w której obiektami są zbiory A, B, oraz dla zb. A, B strzałka $f : A \rightsquigarrow B$ jest przekształcenie $f : A \longrightarrow M \times B$. Składanie zdefiniowane jest dla

$f : A \rightsquigarrow B$, $g : B \rightsquigarrow C$ następująco:

$A \longrightarrow M \times B$ $\qquad$ $B \longrightarrow M \times C$

$g \circ f : A \rightsquigarrow C$, $g \circ f(a) = (m_1 \circ m_2, c)$

$A \longrightarrow M \times C$ $\qquad$ gdzie $f(a) = (m_1, b)$

$g(b) = (m_2, c)$

Dla każdego zbioru A mamy

$$id_A : A \Longrightarrow A$$

$$A \longrightarrow M \times A$$

$$id_A(a) = (1, a)$$

def $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$

Niech $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ będą kategoriami

Funktorem $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ nazywamy

parę przyporządkowań $F = (F_o, F_m)$

t.że $F_o : \mathbb{C}_o \to \mathbb{D}_o$ oraz

$F_m : \mathbb{C}_m \to \mathbb{D}_m$

(1) $F_m(f : A \to B) = F_m(f) : F_o(A) \to \boxed{F_o(B)}$

(2) $F_m(g \circ f) = F_m(g) \circ F_m(f)$

(3) $F_m(id_A) = id_{F_o A}$

Notacja Często będziemy pomijali indeksy dolne pisząc $F(A)$ zamiast $F_o(A)$ oraz $F(f)$ zamiast $F_m(f)$.

Wtedy ① ② ③ brzmią:

① $F(f : A \to B) = F(f) : FA \to FB$

② $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

③ $F(id_A) = id_{FA}$.

składanie w $\mathcal{C}$.

skład w $\mathcal{D}$

Przykłady

(1) $\mathrm{Id} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, lub ogólniej

$\mathrm{Id} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ jest funktorem

„funktor identycznościowy", t.że $\mathrm{Id}(A) = A$

$\mathrm{Id}(f) = f$.

(2) $\mathrm{Maybe} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$

dla zb. B: $\mathrm{Maybe}\, B \stackrel{df}{=} B + \{\perp\}$

dla strzałki $f : A \to B$:

$$\mathrm{Maybe}\, f : \mathrm{Maybe}\, A \to \mathrm{Maybe}\, B$$

$$(\mathrm{Maybe}\, f)(a) = \begin{cases} f(a), & a \in A \\ \perp, & a = \perp \end{cases} \qquad \underbrace{A + \{\perp\}}_{\ni a} \to B + \{\perp\}$$

③ $(-)^* : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$

Dla zbioru A definiujemy $A^* =$ zbiór wszystkich skończonych ciągów nad zbiorem A (wraz z ciągiem pustym oznaczonym przez ε). Dla przekształcenia $f: A \to B$ def

$$f^* : A^* \to B^*;$$

$$f^*(\varepsilon) = \varepsilon, \quad f^*(a_1 \ldots a_n) = f(a_1) \ldots f(a_n)$$