TEORIA KATEGORII

SERIA 2: PODSTAWOWE KONSTRUKCJE KATEGORYJNE

Problem 1. Znaleźć obiekt początkowy i końcowy (jeśli istnieją) w kategorii Grp, Pos, Par oraz w kategorii wszystkich algebr typu $(1, 0)$.

Problem 2. Pokazać, że binarne koprodukty wyznaczone są jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.

Problem 3. Niech $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ będzie funktorem. Pokazać, że jeśli w C istnieją binarne produkty to w $\mathsf{Alg}(F)$ też istnieją. Opisać je.

Problem 4. Udowodnić, że w kategorii grup abelowych Ab koprodukt $A + B$ dwóch grup abelowych A, B spełnia $A + B \cong A \times B$.

Problem 5. Pokazać, że dla dwóch zbiorów A, B koprodukt monoidów słów A^* oraz B^* w kategorii Mon istnieje i spełnia

$$A^* + B^* \cong (A + B)^*.$$

Problem 6. Niech C będzie kategorią oraz niech $A \in \mathsf{C}$ będzie obiektem. Definiujemy przyporządkowanie $\mathsf{C}(A, -) : \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$ w następujący sposób:

$$X \mapsto \mathsf{C}(A, X) \text{ oraz } f : X \to Y \mapsto \mathsf{C}(A, f) : \mathsf{C}(A, X) \to \mathsf{C}(A, Y); g \mapsto f \circ g.$$

Pokazać, że $\mathsf{C}(A, -)$ jest funktorem. Udowodnić, że zachowuje on binarne produkty[1].

Problem 7. Pokazać, że jeśli $e : E \to A$ jest equalizatorem pewnej pary strzałek, to e jest mono. Sformułować i udowodnić (bez używania zasady dualności) dualne twierdzenie dla koequalizatorów.

Problem 8. Pokazać, że kategoria grup abelowych Ab ma wszystkie equalizatory. Opisać je.

Problem 9. Pokazać, że Set ma wszystkie koequalizatory. Podać ich konstrukcję.

Problem 10. Niech $f : A \to B$ będzie pewnym przekształceniem w Set. Opisać equalizator przekształceń $f \circ \pi_1, f \circ \pi_2 : A \times A \to B$ (taki typ equalizatora będziemy nazywać *jądrem* f). Udowodnić, że dla dowolnej relacji równoważności R na A jądrem przekształcenia ilorazowego $A \to A/R; a \mapsto [a]_R$ jest R.

Problem 11. Niech $R \subseteq A \times A$ będzie dowolną relacją binarną oraz niech $\langle R \rangle$ będzie najmniejszą relacją równoważności na A zawierającą R. Pokazać, że przekształcenie ilorazowe $A \to A/\langle R \rangle$ jest koequalizatorem dwóch rzutowań $R \rightrightarrows A$.

---

20 października 2020

[1] Mówimy, że funktor $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ *zachowuje produkty*, jeśli $F(A \times B) \cong F(A) \times F(B)$, dla dowolnych $A, B \in \mathsf{C}$ dla których istnieje produkt $A \times B$ w C.