

TEORIA KATEGORII

SERIA 2: PODSTAWOWE KONSTRUKCJE KATEGORYJNE

Problem 1. Znaleźć obiekt początkowy i końcowy (jeśli istnieją) w kategorii \mathbf{Grp} , \mathbf{Pos} , \mathbf{Par} oraz w kategorii wszystkich algebr typu $(1, 0)$.

Problem 2. Niech \mathbf{C} będzie kategorią oraz niech $A \in \mathbf{C}$ będzie obiektem. Definiujemy przyporządkowanie $\mathbf{C}(A, -) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ w następujący sposób:

$$X \mapsto \mathbf{C}(A, X) \text{ oraz } f : X \rightarrow Y \mapsto \mathbf{C}(A, f) : \mathbf{C}(A, X) \rightarrow \mathbf{C}(A, Y); g \mapsto f \circ g.$$

Pokazać, że $\mathbf{C}(A, -)$ jest funktorem. Udowodnić, że zachowuje on binarne produkty¹.

Problem 3. Pokazać, że w dowolnej kategorii \mathbf{C} z (binarnymi) produktami dla dowolnych trzech obiektów A, B, C zachodzi

$$(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C).$$

Problem 4. Dla dowolnej rodziny $(X_i)_{i \in I}$ obiektów z kategorii \mathbf{C} napisać definicję produktu $\prod_{i \in I} X_i$ poprzez własność uniwersalności uogólniając przypadek $|I| = 2$.

Problem 5. Pokazać, że binarne koprodukty wyznaczone są jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.

Problem 6. Udowodnić, że w kategorii grup abelowych \mathbf{Ab} koprodukt $A + B$ dwóch grup abelowych A, B spełnia $A + B \cong A \times B$.

Problem 7. Pokazać, że dla dwóch zbiorów A, B koprodukt monoidów słów A^* oraz B^* w kategorii \mathbf{Mon} istnieje i spełnia

$$A^* + B^* \cong (A + B)^*.$$

Problem 8. Pokazać, że jeśli $e : E \rightarrow A$ jest equalizatorem pewnej pary strzałek, to e jest mono. Sformułować i udowodnić (bez używania zasady dualności) dualne twierdzenie dla koequalizatorów.

Problem 9. Pokazać, że kategoria grup abelowych \mathbf{Ab} ma wszystkie equalizatory. Opisać je.

Problem 10. Pokazać, że \mathbf{Set} ma wszystkie koequalizatory. Podać ich konstrukcję.

Problem 11. Niech $f : A \rightarrow B$ będzie pewnym przekształceniem w \mathbf{Set} . Opisać equalizator przekształceń $f \circ \pi_1, f \circ \pi_2 : A \times A \rightarrow B$ (taki typ equalizatora będziemy nazywać *jądrem* f). Udowodnić, że dla dowolnej relacji równoważności R na A jądrem przekształcenia ilorazowego $A \rightarrow A/R; a \mapsto [a]_R$ jest R .

Problem 12. Niech $R \subseteq A \times A$ będzie dowolną relacją binarną oraz niech $\langle R \rangle$ będzie najmniejszą relacją równoważności na A zawierającą R . Pokazać, że przekształcenie ilorazowe $A \rightarrow A/\langle R \rangle$ jest koequalizatorem dwóch rzutowań $R \rightrightarrows A$.

21 października 2020

¹Mówimy, że funktor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ zachowuje produkty, jeśli $F(A \times B) \cong F(A) \times F(B)$, dla dowolnych $A, B \in \mathbf{C}$ dla których istnieje produkt $A \times B$ w \mathbf{C} .