TEORIA KATEGORII

SERIA 2: PODSTAWOWE KONSTRUKCJE KATEGORYJNE

Problem 1. Znaleźć obiekt początkowy i końcowy (jeśli istnieją) w kategorii Grp, Pos, Par oraz w kategorii wszystkich algebr typu $(1,0)$.

Problem 2. Niech C będzie kategorią oraz niech $A \in \mathsf{C}$ będzie obiektem. Definiujemy przyporządkowanie $\mathsf{C}(A,-) : \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$ w następujący sposób:

$$X \mapsto \mathsf{C}(A,X) \text{ oraz } f : X \to Y \mapsto \mathsf{C}(A,f) : \mathsf{C}(A,X) \to \mathsf{C}(A,Y); g \mapsto f \circ g.$$

Pokazać, że $\mathsf{C}(A,-)$ jest funktorem. Udowodnić, że zachowuje on binarne produkty[1].

Problem 3. Pokazać, że w dowolnej kategorii C z (binarnymi) produktami dla dowolnych trzech obiektów A, B, C zachodzi

$$(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C).$$

Problem 4. Dla dowolnej rodziny $(X_i)_{i \in I}$ obiektów z kategorii C napisać definicję produktu $\prod_{i\in I} X_i$ poprzez własność uniwersalności uogólniając przypadek $|I| = 2$.

Problem 5. Pokazać, że binarne koprodukty wyznaczone są jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.

Problem 6. Udowodnić, że w kategorii grup abelowych Ab koprodukt $A + B$ dwóch grup abelowych A, B spełnia $A + B \cong A \times B$.

Problem 7. Pokazać, że dla dwóch zbiorów A, B koprodukt monoidów słów A^* oraz B^* w kategorii Mon istnieje i spełnia

$$A^* + B^* \cong (A + B)^*.$$

Problem 8. Pokazać, że jeśli $e : E \to A$ jest ekwalizatorem pewnej pary strzałek, to e jest mono. Sformułować i udowodnić (bez używania zasady dualności) dualne twierdzenie dla koekwalizatorów.

Problem 9. Pokazać, że kategoria grup abelowych Ab ma wszystkie ekwalizatory. Opisać je.

Problem 10. Pokazać, że Set ma wszystkie koekwalizatory. Podać ich konstrukcję.

Problem 11. Niech $f : A \to B$ będzie pewnym przekształceniem w Set. Opisać ekwalizator przekształceń $f \circ \pi_1, f \circ \pi_2 : A \times A \to B$ (taki typ ekwalizatora będziemy nazywać *jądrem* f). Udowodnić, że dla dowolnej relacji równoważności R na A jądrem przekształcenia ilorazowego $A \to A/R; a \mapsto [a]_R$ jest R.

Problem 12. Niech $R \subseteq A \times A$ będzie dowolną relacją binarną oraz niech $\langle R \rangle$ będzie najmniejszą relacją równoważności na A zawierającą R. Pokazać, że przekształcenie ilorazowe $A \to A/\langle R \rangle$ jest koekwalizatorem dwóch rzutowań $R \rightrightarrows A$.

---

13 listopada 2020

[1] Mówimy, że funktor $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ *zachowuje produkty*, jeśli $F(A \times B) \cong F(A) \times F(B)$, dla dowolnych $A, B \in \mathsf{C}$ dla których istnieje produkt $A \times B$ w C.