

Theoria kategorii, wgl. Teor. 4 4.11.20

Niech  $C$  bęże kategoria.

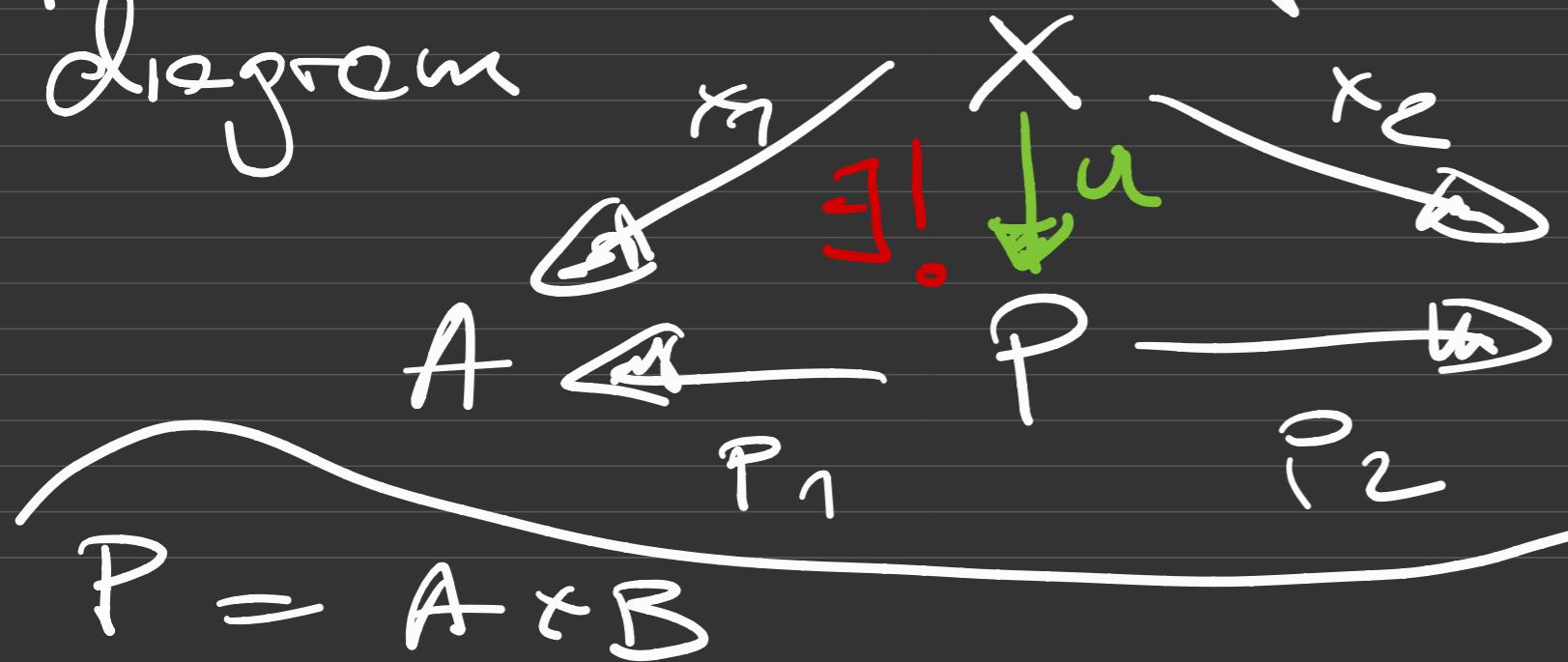
Def Diagramem produktowym dla  $A, B \in C$

uwzględniaj obiekty  $P$  wraz ze strukturami  
takimi, że dla każdego określonego  $X$  wraz z

dla  $X$  istnieje jedno i tylko jedno z  
mapowanie  $x_1 : A \rightarrow X$  i  $x_2 : B \rightarrow X$ , takie

żadna inna mapa  $u : X \rightarrow P$ , która cywilizuje

diagram



przez u.

$$u = \langle x_1, x_2 \rangle$$

Punkt 1 w kategorii. Set dla dwóch  
zbiorów  $A, B \in \text{Set}$  i d. diagramem

produkcyjny jest  $\frac{\text{up}}{\text{df}}$

$$A \times B = \left\{ (a, b) \mid \begin{array}{l} a \in A \\ b \in B \end{array} \right\}$$

$\pi_1 \quad \pi_2$

$A \qquad B$

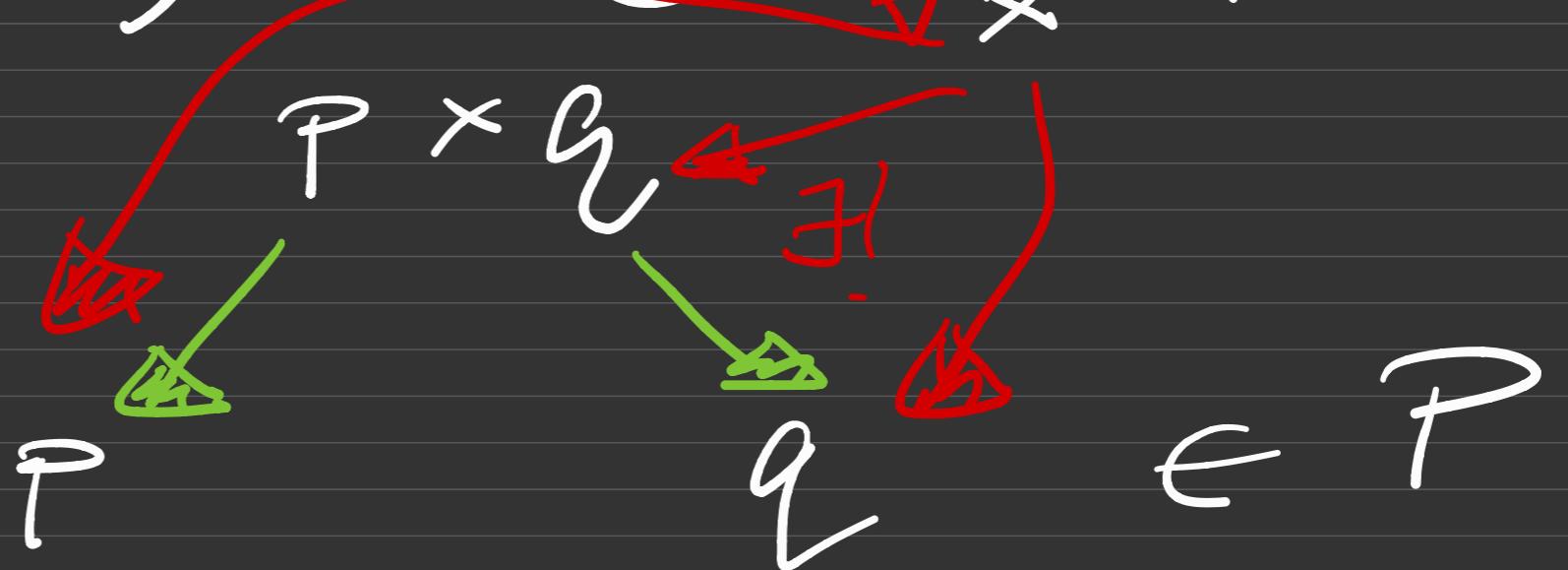
2 W pewnych kategoriach (Ring?) zachodzi  
algebr. Mon, Group, Ring? dla kardynalnych  $A, B$   
dla istnieje produkt  $A \times B$  zdefiniowany  
w naturalny sposób.  dla Group.

3

Nach  $P$  logische Kategorisierung indukt  
per

$P \times Q$  def.

$P, Q \in P$ .



Obs a)  $P \times Q \leq P$  oder  $P \times Q \leq Q$ .

b)  $\forall x \exists t.z \in x \leq P, x \leq Q$   
wodurch  $x \leq P \times Q$ .

widst, z.e.



$$P \times Q = P \cap Q.$$

Umgeht w Kategorisierung induktiv per  
 $P \circ \rightarrow Q$  ne die Produkt  $P \times Q$ .

## Własności kategorii produkcyjnej

Niech  $\mathcal{C}$  będzie kategorią, w której dla każdych dwóch obiektów, stojących obok siebie, istnieje dokładnie jedna strzałka zaznaczona na rysunku.

$$A \xleftarrow{P_1} A \times A \xrightarrow{P_2} F$$

$$\forall f \quad \begin{cases} f & \text{if } f \in \mathcal{C} \\ \exists' u & \text{if } f \notin \mathcal{C} \end{cases}$$

Ozn

$$u = f \times f'$$

$$B \xrightarrow{q_1} B \times B' \xrightarrow{q_2} B'$$

Komentarz  
Wpadając sposobem na moje rolę finansową  
dla dwóch obiektów A, B, C i d

produkt

(\*)

$$A \times B \times C$$

A      B      C

Stw. Test: C jest kategorią z  
produktem binarnym (tak/dla każdej  
dwóch obiektów istnieje jedna z dwóch  
produkty), to w C istnieje produkty  
terenu (\*). Dla A, B, C ∈ C i up  
 $(A \times B) \times C$  jest produktem terenu  
A, B, C.

1

X

A

Jid

A

A  $\times$  B

$\emptyset$   
A

$\rightarrow$   
B



def Planning, je Kategorie C we  
wszystkie reakcje produkt, jed

1

we druk kawaii

2

dla każdych A, B  $\in$  C istnieje  
nied nicz: diagram produkcyjny.

# Wzorce o dziedzinie

↓ :  $A, B, C$  - algebry

↑ :  $f, g, h$  - struktury

4 operacje :  $\text{dom}(f)$ ,  $\text{cod}(f)$ ,  $\text{id}_A$ ,

$g \circ f$  (operacja • nie jest zdefiniowana.)  
 dla wszystkich  $f$  i  $g$  dla typu  $f$  określonego dla typu  $g$ , które spełniają warunki określone dla typu  $f$ .  
 spełnienie tych warunków nazywamy spełnianiem warunków określonych dla typu  $f$ .

$$\text{dom}(\text{id}_A) = A$$

$$\text{cod}(\text{id}_A) = A$$

$$f \circ \text{id}_{\text{dom}(f)} = f$$

$$\text{id}_{\text{cod}(f)} \circ f = f$$

$$\text{dom}(g \circ f) = \text{dom}(f)$$

$$\text{cod}(g \circ f) = \text{cod}(g)$$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Niech  $\Sigma$  będzie dowolnym zdaniem wyrażonym

w podstawowym języku teorii kategorii o zdefiniowanej zdanie  $\Sigma^*$  daje się do

do  $\Sigma$  zamienić:

1 kazde występuje fig ugef

2 cool us down

3 down us cool

Widzimy, że  $\Sigma^*$  jest podanym zdaniem

w TK. Oraz, że zgodzi

stwierdza, że kazdego poprzedzającego  $\Sigma$ , ściślej,  $\Sigma$  związane z ekspresją TK, to  $\Sigma^*$  też

Koprodukt

$$\begin{array}{c} A \times B \\ \swarrow \quad \searrow \\ A \quad B \end{array}$$

Nach  $\mathcal{C}$  = Kategorie.

def Dle  $A, B \in \mathcal{C}$  diagramm koprodkt.

und  $A, B$  very well object  $Q$  wirz ze

struktur  $A \xrightarrow{q_1} Q \leftarrow q_2 B$  takini,

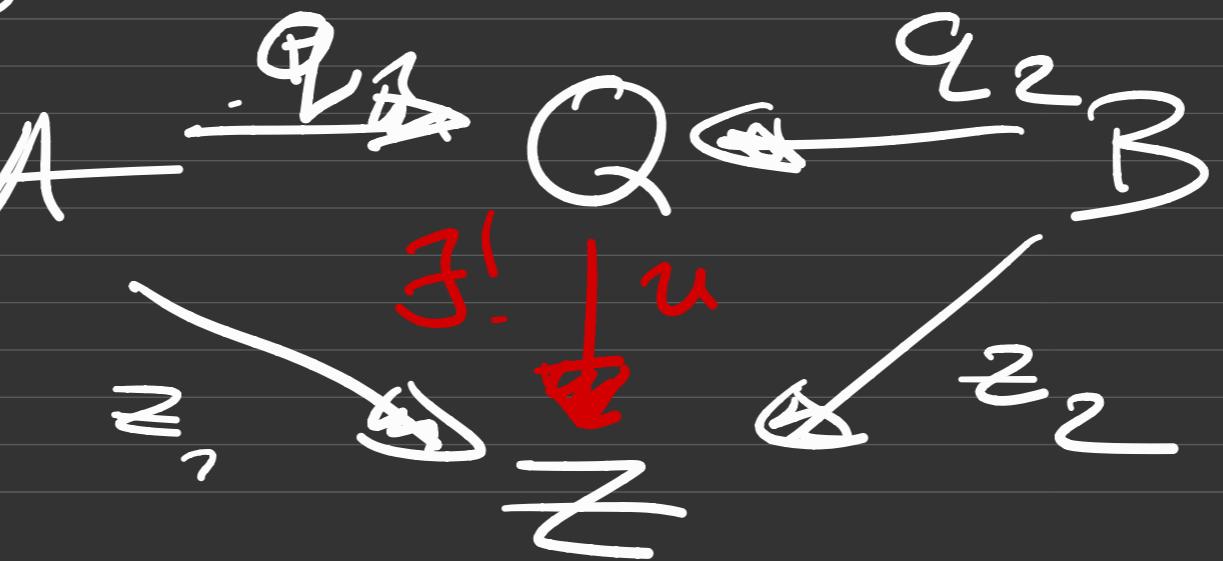
z.B. die total objekt  $\cong$  wirz  $\cong$   
 $A \xrightarrow{z_1} Z \xleftarrow{z_2} B$  ist eine induzierende aktivit.

u cognitice west. diagram punkt.

Orn.

$$u = [z_1, z_2]$$

$$Q = A + B$$

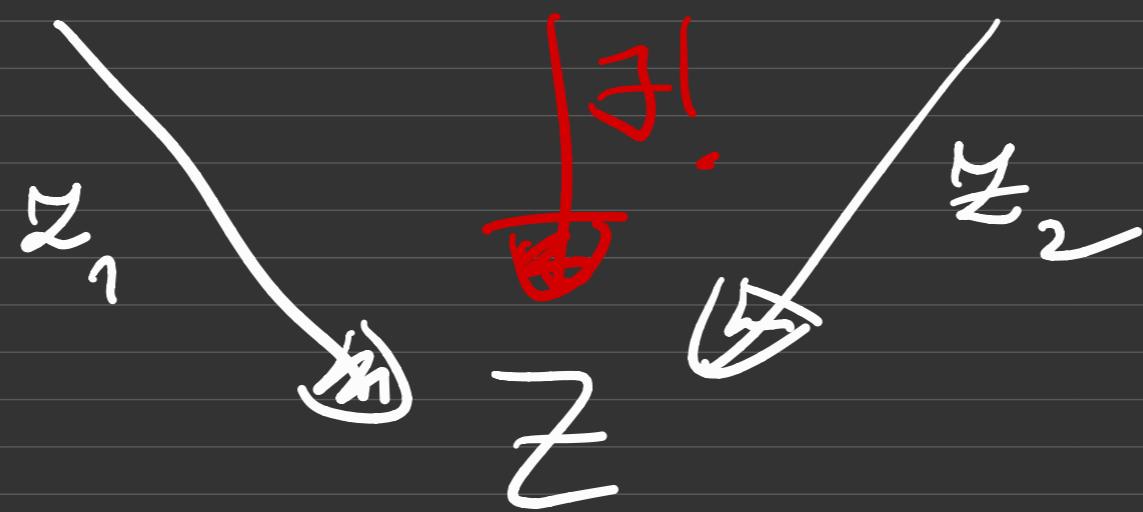


Punktady ① Główne w koprodukty

(czyli istnieje) w Set?

wzór  $A + B \in \text{Set}$

$$A \xrightarrow{i_A} A + B \leftarrow \xleftarrow{i_B} B$$



Wzór:

$$A + B = A \times \{1\} \cup B \times \{2\}$$

oraz

$$i_1: A \rightarrow A + B ; a \mapsto (a, 1)$$

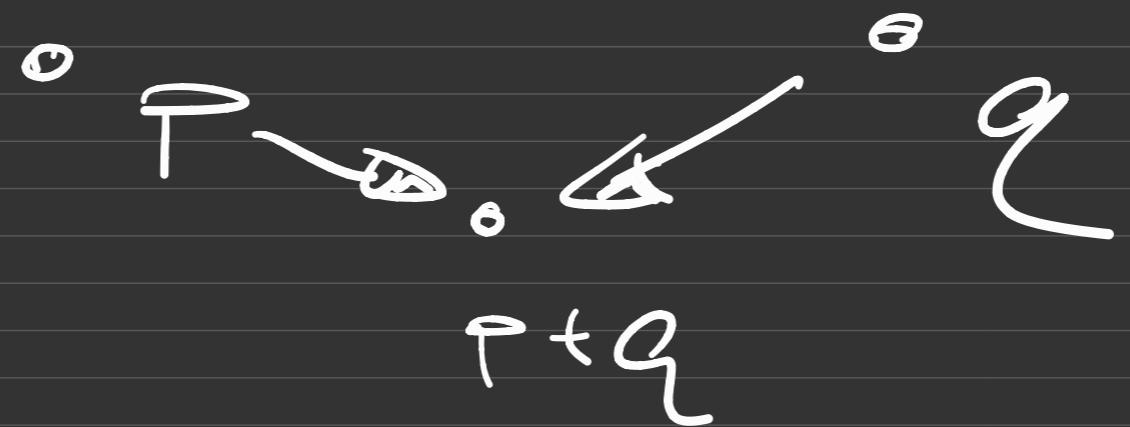
$$i_2: B \rightarrow A + B ; b \mapsto (b, 2) , \text{ to}$$

zwykły  
iloczyn  
kartażpolski

to  $A \xrightarrow{\text{in}} A+B \xleftarrow{\text{in}} B$  jest

diagonalem koproduktem w kategorii  $A, B$ .  $\square$

② W kategorii poset  $(P, \leq)$   $P$  indukowanej przez



Widac, ze  $P+Q = P \vee Q$  (z punktu widzenia kategorii posetowych; produktów).

Niech dany jest węzły pojedyncze i skrócone:

$$A \xrightarrow{e_1} A+A' \xleftarrow{e_2} A'$$

$$f \downarrow \quad f+f' \downarrow \exists! \quad \downarrow f'$$

$$B \xrightarrow{b_1} B+B' \xleftarrow{b_2} B'$$

Dla każdego proj  $f: A \rightarrow B$ ;  $f': A' \rightarrow B'$

istnieje jednoznaczne zdef stwierdzenie

$$f+f': A+A' \rightarrow B+B'$$

czyli  $\mathcal{C}$  jest kategorią 2-koprodukta binaryjnych.

Stan Koproducty są określone jednor.  
z dątliwością do izomorfizm.

dow Wynika z zasad dualności.

def Rozważmy i uśw. określone  
koproducty, jeśli:  
1) uśw. obiekt początkowy  
2) i uśw. wszystkie binarne  
koproducty.