Teoria kategorii, wykład (4) — 4.11.2020

Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią.

def Diagramem produktowym dla $A, B \in \mathbb{C}$ nazywamy obiekt P wraz ze strzałkami

$$A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B$$

takimi, że dla każdego obiektu X wraz z

$$A \xleftarrow{x_1} X \xrightarrow{x_2} B$$

istnieje jednoznacznie zdef. $u : X \to P$, które czyni diagram

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "x_1"'] \arrow[d, "\exists!\, u"] \arrow[dr, "x_2"] & \\ A & P \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & B \end{tikzcd}$$

przemiennym.

ozn. $u = \langle x_1, x_2 \rangle$

$P = A \times B$

Przykłady (1) W kategorii Set dla dwóch zbiorów $A, B \in$ Set ich diagramem produktowym jest np.:

$$\underset{df}{=}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & A \times B = \left\{ (a,b) \,\middle|\, \begin{matrix} a \in A \\ b \in B \end{matrix} \right\} \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
$$

(2) W omawianych wcześniej kategoriach algebr Mon, Group, Ring? zachodzi: dla każdych dwóch obiektów A, B istnieje produkt $A \times B$ zdefiniowany w naturalny sposób.

dla Group.

③ Niech $\mathbb{P}$ będzie kategorią indukowaną przez $(P, \leq)$. Czym jest produkt $p \times q$ dla $p, q \in P$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \forall x \arrow[dlll, bend right] \arrow[dl, "\exists!"'] \arrow[d] \\
 & & p \times q \arrow[dll] \arrow[r] & q \\
p & & &
\end{tikzcd} \qquad p, q \in P$$

<u>Obs</u> a) $p \times q \leq p$ oraz $p \times q \leq q$.

b) $\forall x$ t.że $x \leq p$, $x \leq q$ mamy $x \leq p \times q$.

Widać, że $p \times q = p \wedge q$.

<u>Uwaga</u> 1 W kategorii indukowanej przez

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
p \bullet & & \bullet q
\end{tikzcd}$$

nie ma produktu $p \times q$.

Własności kategorii z produktami

Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią, w której dla każdych dwóch obiektów istnieje ich diagram produktowy. Dodatkowo, załóżmy, że mamy odpowiadający diagram

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\forall f"'] & A \times A' \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\exists! u"] & A' \arrow[d, "\forall f'"] \\
B & B \times B' \arrow[l, "q_1"] \arrow[r, "q_2"'] & B'
\end{tikzcd}
$$

$$\boxed{\text{Ozn. } u = f \times f'}$$

Komentarz

W podobny sposób możemy zdefiniować dla trzech obiektów A, B, C ich produkt

$$(*) \quad \begin{tikzcd} & A \times B \times C \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ A & B & C \end{tikzcd}$$

Stw Jeśli $\mathcal{C}$ jest kategorią z produktami binarnymi (tzn. dla każdych dwóch obiektów istnieje nad nimi diagram produktowy), to w $\mathcal{C}$ istnieją produkty ternarne $(*)$. Dla $A, B, C \in \mathcal{C}$ ob $(A \times B) \times C$ jest produktem ternarnym A, B, C.

1 $\qquad$ $\times$

$\cancel{\emptyset}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "id"] \\ A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

def Mówimy, że kategoria $\mathcal{C}$ ma wszystkie skończone produkty, jeśli

1. ma obiekt końcowy
2. dla każdych $A, B \in \mathcal{C}$ istnieje nad nimi diagram produktowy.

Więcej o dualności

$\mathbb{C}$: $\mathbb{C}_0$: A, B, C – obiekty

$\mathbb{C}_m$: f, g, h – strzałki

4 operacje : $\mathrm{dom}(f)$, $\mathrm{cod}(f)$, id_A, $g \circ f$ (operacja $\circ$ nie jest zdefiniowana dla wszystkich par strzałek. Jest tylko dla tych, które spełniają $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(f)$).

spełniające 7 aksjomatów:

$\mathrm{dom}(id_A) = A$ $\qquad$ $\mathrm{cod}(id_A) = A$

$f \circ id_{\mathrm{dom}(f)} = f$ $\qquad$ $id_{\mathrm{cod}(f)} \circ f = f$.

$\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f)$ $\qquad$ $\mathrm{cod}(g \circ f) = \mathrm{cod}(g)$

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Niech Σ będzie dowolnym zdaniem wyrażonym w podstawowym języku teorii kategorii. Możemy zdefiniować zdanie Σ^* dualne do Σ zamieniając:

1. każde wystąpienie $f \circ g$ na $g \circ f$
2. cod na dom
3. dom na cod.

Widzimy, że Σ^* jest poprawnym zdaniem w TK. Oraz, że zachodzi

<u>stw 1</u> Dla każdego poprawnego Σ, jeśli Σ wynika z aksjomatów TK, to Σ^* też z nich wynika.

Koprodukty

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

Niech $\mathbb{C}$ = kategoria.

def Dla $A, B \in \mathbb{C}$ diagramem koprodukt. wed A, B nazywamy obiekt Q wraz ze strzałkami $A \xrightarrow{q_1} Q \xleftarrow{q_2} B$ takimi, że dla każdego obiektu Z wraz z $A \xrightarrow{z_1} Z \xleftarrow{z_2} B$ istnieje jednoznacznie określ. u czyniące wszyst. diagram przem.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "q_1"] \arrow[dr, "z_1"'] & Q \arrow[d, "\exists!\, u"] & B \arrow[l, "q_2"'] \arrow[dl, "z_2"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Ozn.

$u = [z_1, z_2]$

$Q = A + B$

Przykłady 1 Czym są koprodukty (jeśli istnieją) w Set?

Weźmy $A, B \in \mathrm{Set}$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "z_1"'] & A+B \arrow[d, "\exists!", red] & B \arrow[l, "i_B"'] \arrow[dl, "z_2"] \\
& Z &
\end{tikzcd}
$$

Weźmy:

$$A+B = A \times \{1\} \cup B \times \{2\}$$

zwykły iloczyn kartezjański

oraz

$i_1 : A \longrightarrow A+B \; ; \; a \mapsto (a,1)$

$i_2 : B \longrightarrow A+B \; ; \; b \mapsto (b,2)$, to to $A \xrightarrow{i_1} A+B \xleftarrow{i_2} B$ jest diagramem koproduktowym od A, B.

(2) W kategorii $\mathbb{P}$ indukowanej przez poset $(P, \leq)$

$$
\begin{tikzcd}
p \arrow[r] & p+q & q \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Widać, że $p+q = p \vee q$ (z przykładu kategorii posetowych i produktów).

Niech dany jest następujący diagram:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "f"'] & A+A' \arrow[d, "f+f'"', "\exists!"] & A' \arrow[l, "e_2"'] \arrow[d, "f'"] \\ B \arrow[r, "b_1"'] & B+B' & B' \arrow[l, "b_2"] \end{tikzcd}$$

Dla każdej pary $f : A \to B$ i $f' : A' \to B'$ istnieje jednoznacznie zdef strzałka

$$f+f' : A+A' \longrightarrow B+B'$$

jeśli $\mathbb{C}$ jest kategorią z koproduktami binarnymi

Stw Koprodukty są określone jednoz. z dokładnością do izomorfizmu.

dow Wynika z zasady dualności.

def Mówimy, że $\mathcal{C}$ ma skończone koprodukty, jeśli:

1. $\mathcal{C}$ ma obiekt początkowy
2. $\mathcal{C}$ ma wszystkie binarne koprodukty.