Teoria Kategorii, wykład 5 13.11.2020

Ekwalizatory (Equalizers)

Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią.

def Dla $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B \in \mathbb{C}$ mówimy, że

$e : E \to A$ jest ekwalizatorem f i g

jeśli

1. $E \xrightarrow{e} A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ jest przemienne

tj. $f \circ e = g \circ e$,

2. dla dowolnego $z : Z \to A$ t.że diagram $Z \xrightarrow{z} A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ jest przemienny

istnieje dokładnie jedna strzałka $u: Z \to E$ czyniąca następujący diagram przemiennym:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ Z \arrow[u, "\exists! u"] \arrow[ur, "\forall z"'] & & \end{tikzcd}$$

<u>Przykłady</u> w kategorii Set mając dane dwa przekształcenia $f, g: A \to B$ ich ekwalizatorem będzie

$$\underbrace{\{x \in A : f(x) = g(x)\}}_{E} \overset{\text{zanurzen}}{\underset{e}{\hookrightarrow}} A$$

Dowód Dla każdego $z : Z \to A$

t. Z

$$Z \xrightarrow{z} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$ jest przem.

mamy:
dla $y \in Z$ zachodzi $f(z(y)) = g(z(y))$.

Czyli element $x = z(y) \in A$ spełnia $f(x) = g(x)$. Innymi słowy możemy zdef $u : Z \to \{ x \in A \mid f(x) = g(x) \}$

$u(y) = z(y)$ wtedy:

$$\begin{tikzcd} \{x : f(x) = g(x)\} \arrow[r, hook] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ Z \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "z"'] & & \end{tikzcd}$$

jest przemienny.

(2) Przekształcenie u spełniające (1) jest jednoznaczne. $\square$

Stw. Jeśli $E \xhookrightarrow{e} A$ jest ekwalizatorem $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$, to e jest mono.

Przykład

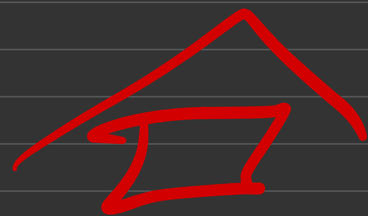
Rozważmy w Set $U \subseteq A$ oraz diagram

$$? \xrightarrow{?} A \underset{\chi_U}{\overset{const_1}{\rightrightarrows}} 2 = \{0,1\}$$

$$\chi_U(a) = \begin{cases} 1 & a \in U \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

$$const_1(a) = 1.$$

Czym jest ekwalizator $const_1$ i χ_U?



Koekwalizatory

def Dla pary strzałek $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \in \mathcal{C}$ **koekwalizatorem** f i g nazywamy

$$B \xrightarrow{q} Q \text{ t.że}$$

① $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{q} Q$ jest przemienne

② $\forall z : B \to Z$ t.że $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{z} Z$

istnieje dokładnie jedno $u : Q \to Z$

t.że

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "\forall z"] \arrow[dr, "q"'] & Z \arrow[d, "\exists!\, u"] \\
& & Q
\end{tikzcd}$$

Stw Jeśli $q: B \to Q$ jest koekwalizatorem pewnej pary strzałek, to q jest epi.

Przykład Niech $R \subseteq X \times X$ jest relacją binarną na X. Rozważmy diagram:

$$R \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} X$$

rzutowania na 1, 2 współrzędną

Jeśli R jest relacją równoważności, to koekwalizatorem $R \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} X$ jest

$$R \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} \underline{X \xrightarrow{nat_R} X/R},$$ gdzie

$$X/R = \{ [x]_R \mid x \in X \}$$

klasa abstrakcji relacji R zawierająca $x \in X$

$$\mathrm{nat}\, R : X \to X/R$$

$$\mathrm{nat}\, R(x) \overset{df}{=} [x]_R \, .$$

(Ko) granice ogólne

def Pullbackiem strzałek

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

nazywamy obiekt P wraz ze strzałkami

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"'] & B \\ A & \end{tikzcd}$$

t. że

(1)
$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$
jest przemienny

② $\forall$ obiektu Z wraz z $z_1 : Z \to A$ oraz $z_2 : Z \to A$ i że

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "z_2"] \arrow[d, "z_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
$$

jest przemienny

istnieje dokładnie jedna strzałka $u : Z \to P$ czyniąca następujący diagram przemiennym!

$$
\begin{tikzcd}
\forall Z \arrow[dr, dashed, "\exists!\, u"] \arrow[drr, bend left, "\forall z_2"] \arrow[ddr, bend right, "\forall z_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
$$

Uwaga Często używać będziemy „produktowej" notacji w kontekście pullbacków. Dokładniej obiekt pullback strzałek $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ oznaczać będziemy przez $A \times_C B$. Morfizmy pullbackowe często będziemy ozn. przez π_1, π_2.

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Stw. Niech $\mathbb{C}$ jest kategorią z binarnymi produktami i ekwalizatorami.

Dla danej pary

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

weźmy

(1) zwykły produkt binarny $A \times B$ wraz z $\pi_1 : A \times B \to A$ i $\pi_2 : A \times B \to B$

(2) Rozważmy ekwalizator $E \xrightarrow{e} A \times B$ strzałek

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, shift left, "f \circ \pi_1"] \arrow[r, shift right, "g \circ \pi_2"'] & C \end{tikzcd}$$

Wtedy, obiekt E wraz z $E \xrightarrow{\pi_1 \circ e} A$

$E \xrightarrow{\pi_2 \circ e} B$

jest pullbackiem $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "e"] \arrow[drr, bend left, "\pi_2 \circ e"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_1 \circ e"'] & & \\
& A \times B \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\cancel{\lrcorner}"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

<u>dowód</u>

$\pi_2 \circ e$

Widzimy (czyli) że E wraz z $\pi_1 \circ e$ oraz

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dr, "f"] & \\
E \arrow[ur, "\pi_1 \circ e"] \arrow[dr, "\pi_2 \circ e"'] & & C \\
& B \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Parametryzm (wynika to z faktu, że E z $e : E \to A \times B$ jest odp. ekwalizatorem)

Dodatkowo, weźmy obiekt Z wraz z $z_1 : Z \to A$ i $z_2 : Z \to B$ czyniącymi

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "f"] & \\ Z \arrow[ur, "z_1"] \arrow[dr, "z_2"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

przemiennym.

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "z_1"'] \arrow[dr, "z_2"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

Ograniczając się do

widzimy, że istnieje jednoznacznie określ. strzałka $Z \to A \times B$ czyniąca

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, bend right, "z_1"'] \arrow[d, "\langle z_1, z_2 \rangle"] \arrow[dr, bend left, "z_2"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B \end{tikzcd}$$

Mamy:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "z_1"'] \arrow[d, "\langle z_1, z_2 \rangle"] \arrow[dr, "z_2"] & \\
A \arrow[dr, "f"'] & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B \arrow[dl, "g"] \\
 & C &
\end{tikzcd}$$

Widzimy, że

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\langle z_1, z_2 \rangle"'] & A \times B \arrow[r, shift left, "f \circ \pi_1"] \arrow[r, shift right, "g \circ \pi_2"'] & C
\end{tikzcd}$$

jest przemienny. Oznacza to, że istnieje dokładnie jedna strzałka $u : Z \to E$ t. że następujący diagram jest przem.:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & A \times B \arrow[r, shift left, "f \circ \pi_1"] \arrow[r, shift right, "g \circ \pi_2"'] & C \\
Z \arrow[u, "\exists! u"] \arrow[ur, "\langle z_1, z_2 \rangle"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dolny diagram przemienny oznacza, że diagram

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, bend left, "\exists! u"] \arrow[d, "z_1"'] \arrow[drr, "z_2"] & & E \arrow[dll, "\pi_1 \circ e"'] \arrow[d, "\pi_2 \circ e"] \\
A \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Oznacza to że E wraz z $E \xrightarrow{\pi_1 \circ e} A$ oraz $E \xrightarrow{\pi_2 \circ e} B$ spełnia własność uniwersalności dla pullbacków $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$. $\square$