Teoria kategorii, wykład 7 25.11.2020

def Niech $\mathcal{J}$ i $\mathbb{C}$ będą kategoriami. Diagramem typu $\mathcal{J}$ w $\mathbb{C}$ nazywamy funktor

$$D : \mathcal{J} \to \mathbb{C}.$$

Notacja $\mathcal{J}$ = kategoria indeksów, gdzie obiekty oznaczane są i, j, k, a morfizmy α, β, γ. Dodatkowo, wartości funktora D oznaczane są przez

$$D_i, \; D_j, \quad D_\alpha, \; D_\beta \ldots$$

def
Stożkiem nad diagramem $D: \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ nazywamy obiekt $C \in \mathcal{C}$ wraz ze strzałkami

$$\{c_i : C \to D_i\}_{i \in Ob\,\mathcal{J}}$$

t. że

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "c_i"'] \arrow[dr, "c_j"] & \\ D_i \arrow[rr, "D_\alpha"] & & D_j \end{tikzcd}$$

jest przemienny dla każdego $\alpha: i \to j \in \mathcal{J}$.

def Niech $(C, \{c_i\})$ oraz $(C', \{c_i'\})$ będą stożkami nad diagramem $D: J \to \mathbb{C}$. Morfizmem stożków $(C, \{c_i\})$; $(C', \{c_i'\})$ nazywamy strzałkę

$$\vartheta : C \to C' \in \mathbb{C}$$

t.że

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "\vartheta"] \arrow[dr, "c_i"'] & & C' \arrow[dl, "c_i'"] \\
& D_i &
\end{tikzcd}$$

jest przemienny dla każdego $i \in J$.

def Niech Cone (D) oznacza kategorię, w której obiektami są stożki nad diagramem $D: J \to \mathbb{C}$ a morfizmami morfizmy stożków.

def Granicą diagramu $D: J \to \mathbb{C}$ nazywamy obiekt końcowy w kategorii Cone (D) i oznaczamy przez

$$\left(\varprojlim_{j} D_j \, , \left\{ p_i : \varprojlim_{j} D_j \to D_i \right\} \right)$$

Przykłady

① $J = \emptyset$ $\quad$ $\mathrm{Cone}(D) = \mathcal{C}$

$\lim D$ = obiekt końcowy w $\mathcal{C}$.

$\Longleftarrow$

② $J = \quad \underset{1}{\bullet} \quad \underset{2}{\bullet}$ $\qquad$ $\underset{D_1}{\bullet} \quad \underset{D_2}{\bullet}$ $\qquad$ $\lim D = D_1 \times D_2$

$\Longleftarrow$

③ $J = \quad \begin{tikzcd} \underset{1}{\bullet} \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \underset{2}{\bullet} \end{tikzcd}$ $\qquad$ $\begin{tikzcd} \overset{D_1}{\bullet} \arrow[r, shift left, "D\alpha"] \arrow[r, shift right, "D\beta"'] & \overset{D_2}{\bullet} \end{tikzcd}$ $\qquad$ $\lim D =$ ekwalizer $D\alpha$ i $D\beta$.

$\Longleftarrow$

④ $J = \quad \begin{tikzcd} & \bullet\, 3 \arrow[d, "\beta"] \\ \underset{1}{\bullet} \arrow[r, "\alpha"'] & \underset{2}{\bullet} \end{tikzcd}$ $\qquad$ $\begin{tikzcd} & \bullet\, D_3 \arrow[d, "D\beta"] \\ \underset{D_1}{\bullet} \arrow[r, "D\alpha"'] & \underset{D_2}{\bullet} \end{tikzcd}$ $\qquad$ $\lim D =$ pullback $D\alpha$, $D\beta$ w $\mathcal{C}$.

$\Longleftarrow$

def Skończoną granicą nazywamy granicę nad diagramem $D: J \to \mathbb{C}$, że kategoria J jest skończona.

tw Kategoria $\mathbb{C}$ ma wszystkie skończone granice wtedy i tylko wtedy, gdy ma skończone produkty i ekwalizatory (lub równoważnie, gdy ma pullbacki i obiekt końcowy).

dowód (szkic) Pokażemy, że z faktu istnienia skończ. prod i ekw wynika istnienie wszyst. skoń. gr.

Weźmy diagram $D : J \to \mathcal{C}$, gdzie J jest skończoną kategorią indeksów. Podamy konstrukcję obiektu E wraz ze strzałkami $e_i : E \to D_i$, dla którego (E, e_i) będzie obiektem końcowym w $\mathrm{Cone}(D)$.

① Rozważmy następujące obiekty w $\mathcal{C}$:

$$\prod_{i \in ob(J)} D_i \qquad\qquad \prod_{(\alpha : i \to j) \in mor(J)} D_j$$

② Zdefiniujemy dwie strzałki

$$\prod_{i\in J} D_i \overset{\phi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} \prod_{\alpha: i\to j} D_j$$

które wynikają z własności uniwersalnej drugiego produktu i spełniają:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in J} D_i \arrow[d, "\phi"] \arrow[dd, bend right, "\pi_j = \pi_{cod(\alpha)}"'] \\
\prod_{\alpha: i\to j} D_j \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\
D_j
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \prod_{i\in J} D_i \arrow[dl, "\pi_i = \pi_{dom(\alpha)}"'] \arrow[d, "\psi"] \\
D_i \arrow[dr, "D_\alpha"'] & \prod_{\alpha: i\to j} D_j \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\
 & D_j
\end{tikzcd}$$

(3) Weźmy ekwalizator $\bar{E}$ wraz z $e : \bar{E} \longrightarrow \prod_{i \in J} D_i$ strzałek φ i ψ:

$$\bar{E} \xrightarrow{e} \prod_{i \in J} D_i \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} \prod_{\alpha : i \to j} D_j$$

Można pokazać, że $\bar{E}$ wraz z $e_i = \pi_i \circ e$ spełnia żądane własności

Przykład

Weźmy diagram zadany przez

$$J = \begin{tikzcd} & 3 \arrow[d, "\beta"] \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd} \text{ w } \mathcal{C}.$$

Pokażemy jak, używając konstrukcji z dowodu poprzedniego twierdzenia skonstruować pullback f i g za pomocą (1) produktów (2) ekwaliz.

Kroki:

(1)

$$A \times B \times C \qquad\qquad C \times C$$

2

Konstruujemy:

$$A \times B \times C \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} C \times C$$

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \times C \arrow[ddl, bend right, "\pi_{\mathrm{cod} f}"'] \arrow[ddr, bend left, "\pi_{\mathrm{cod} g}"] \arrow[d, "\varphi"] & \\
& C \times C \arrow[dl, "\pi_f"'] \arrow[dr, "\pi_g"] & \\
C & & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A \times B \times C \arrow[dl, "\pi_{\mathrm{dom} f}"'] \arrow[dr, "\pi_{\mathrm{dom} g}"] \arrow[d, "\psi"] & \\
A \arrow[d, "f"'] & C \times C \arrow[dl, "\pi_f"'] \arrow[dr, "\pi_g"] & B \arrow[d, "g"] \\
C & & C
\end{tikzcd}$$

ekwalizator φ i ψ jest pullbackiem f i g.

Zachowywanie granic

def Funktor $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ zachowuje granice nad diagramem typu $\mathbb{J}$, jeśli

$$F\left(\lim_{\leftarrow} D_i\right) \cong \lim_{\leftarrow} F(D_i)$$

jest izomorfizmem.

dla diagramu $D : \mathbb{J} \to \mathbb{C}$.

Funktor $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ nazywamy ciągłym, jeśli zachowuje wszystkie granice.

Przykład: Niech $\mathbb{C}$ będzie kategorią i rozważmy funktor

$$\mathbb{C}(X,-) : \mathbb{C} \longrightarrow Set$$

dla ustalonego obiektu $X \in \mathbb{C}$. Przyporządkujmy

$$A \longmapsto \mathbb{C}(X,A) =$$ zbiór strzałek $X \to A$ w $\mathbb{C}$.

oraz

$$f : A \to B \longmapsto \mathbb{C}(X,A) \xrightarrow{\mathbb{C}(X,f)} \mathbb{C}(X,B),$$

t.że

$$\mathbb{C}(X,f)(g : X \to A) = f \circ g$$

składanie z $\mathbb{C}$.

Prościej oznaczać będziemy $\mathcal{C}(X, f)$ przez f_*. Czyli

$$f_* : \mathcal{C}(X, A) \to \mathcal{C}(X, B)$$

dla $f : A \to B \in \mathcal{C}$.

Z ćw wiemy, że $\mathcal{C}(X, -)$ jest funktorem.

Pokażemy teraz, że funktor zachowuje wszystkie skończone granice.

① Z ćwiczeń wiemy, że $\mathcal{C}(X, -)$ zachowuje produkty binarne (Zad 2.2).

② Czy zachowuje obiekt końcowy?

Tak, gdyż jeśli 1 jest obiektem końcowym w $\mathbb{C}$, to obrazem 1 wzg. naszego funktora jest $\mathbb{C}(X, 1) = \{ !_X \}$ – jedno elem. zbiór.

Widzimy zatem, że $C(X, 1)$ jest jednoel. czyli jest obiektem końcowym w Set.

Podsumowując:

$C(X, -)$ zachowuje skończone produkty.

(3) Fakt, że $C(X, -)$ zachowuje ekwaliz.

Weźmy parę f, g

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

i ich strzałek ekwalizator

$$E \xrightarrow{e} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B.$$

Czy diagram

$$C(X,E) \xrightarrow{e_*} C(X,A) \underset{g_*}{\overset{f_*}{\rightrightarrows}} C(X,B)$$

jest diagramem w którym $C(X,E)$ wraz z e_* jest ekw?

Zauważmy, że powyższy diagram jest w kategorii Set, w której znamy jawny opis aktualizatorów. Przypomnijmy, że w Set

$$\{x \in A : f(x) = g(x)\} \hookrightarrow A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$$

Teraz wróćmy do naszego diagramu:

?

$$\mathbb{C}(X,A) \overset{f_*}{\underset{g_*}{\rightrightarrows}} \mathbb{C}(X,B)$$

Weźmy $x \in \mathbb{C}(X,A)$; kiedy $x \in$ aktuali f_* i g_*? Odp. wtedy, gdy

$$f_*(x) = g_*(x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad f \circ x = g \circ x.$$

Oznacza to, że $x \in \mathbb{C}(X, A)$ należy do ekwalizatora f_* i g_* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "x"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

jest przemienny w $\mathbb{C}$.

Ale my wiemy, że

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ X \arrow[u, "u_x"] \arrow[ur, "x"'] & & \end{tikzcd}$$

jest ekw f, g.

Tzn istnieje $\exists!\, u_x$ dokładnie jeden u_x t. że $e \circ u_x = x$

$e : E \to A$

$e_* : \mathbb{C}(X, E) \to \mathbb{C}(X, A)$

$u \longmapsto e \circ u.$

Czyli

$e_*(u_x) = e \circ u_x = x.$

Mamy zatem: dla każdego $x \in \mathbb{C}(X, A)$ to że jest elementem etwalizatora

$$\{x \in \mathbb{C}(X,A) : f_*(x) = g_*(x)\}$$

$$\int \quad \mathbb{C}(X,A) \underset{g_*}{\overset{f_*}{\rightrightarrows}} \mathbb{C}(X,B)$$

istnieje dokładnie jedna strzałka

$$u_x \in \mathbb{C}(X, E) \text{ t.że}$$

$$e_*(u_x) = x.$$

Pokazaliśmy, że istnieje jednoznaczna odpow. między

$$\left\{ f_x \in \mathbb{C}(X, A) : f_*(x) = g_*(x) \right\}$$

$$\mathbb{C}(X, E)$$

które jest zadane e_*. Zatem $\mathbb{C}(X, E)$ jest ekwalizatorem f_*, g_*. □

Podsumowując: $\mathcal{C}(X,-)$ zachowuje

1. skończone produkty
2. ekwalizatory.

Wiedząc, że każdą skończoną granicę otrzymać można z (1) i (2) wnioskujemy, że $\mathcal{C}(X,-)$ zachowuje skończone granice.

Notka: Odrobinę uogólniając rozumowanie można pokazać, że $\mathcal{C}(X,-)$ zachowuje wszystkie granice (nie tylko skończone)