Teoria kategorii (10) 16.12.2020

Podsumowanie najważniejszych własności CCC

Jeśli $\mathbb{C}$ jest CCC, to:

(1) Dla każdego obiektu A mamy zdefiniowany funktor

$$(-)\times A : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{t. że}$$

$$X \longmapsto X \times A$$

$$X \xrightarrow{f} Y \longmapsto X \times A \xrightarrow{f \times id_A} Y \times A$$

⚠ do sprawdzenia, że to funktor.

(2) Dla każdego A mamy funktor

$$(-)^A : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}, \text{ t. że}$$

$$X \longmapsto X^A$$

$$X \xrightarrow{f} Y \longmapsto X^A \xrightarrow{f^A} Y^A, \text{ gdzie}$$

$$f^A \overset{df}{=} \widetilde{f \circ \varepsilon}, \quad \text{dokładniej:}$$

$$f^{A} \overset{df}{=} \widetilde{X^A \times A \xrightarrow{\varepsilon} X \xrightarrow{f} Y}$$

③ dla każdego A, X, Y mamy jednoz. odpowiedniość między:

$$\mathbb{C}(X \times A, Y) \cong \mathbb{C}(X, Y^A)$$

zadana przez transpozycję.

$$f : X \times A \to Y \longmapsto \hat{f} : X \to Y^A$$

④ Dla każdego obiektu X, A mamy

$$\varepsilon : X^A \times A \longrightarrow X$$

istnienie rodziny ε wynika z def CCC.

Stw Zauważmy, że mamy następującą wł.

$\forall f : X \to Y$

diagram:

$$
\begin{tikzcd}
X^A \times A \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "f^A \times id_A"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y^A \times A \arrow[r, "\varepsilon_Y"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

jest przemienny.

Dowód Weźmy $g : X^A \times A \xrightarrow{\varepsilon} X \xrightarrow{f} Y$

Jak definiuje się $\tilde{g}$?

$\tilde{g}$ jest jedynym rozwiązaniem

$$
\begin{tikzcd}
X^A \times A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\tilde{g} \times id_A"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
& Y^A \times A \arrow[ur, "\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}
$$

Ponieważ $f^A = \tilde{g}$, to możemy przerysowując diagram zauważyć, że

$$
\begin{tikzcd}
X^A \times A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f^A \times id_A"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y^A \times A \arrow[r, "\varepsilon"] & Y
\end{tikzcd}
$$

5 Mamy $\underbrace{\eta : X \longrightarrow (X \times A)^A}$ z def.

$$\eta = id_{A \times X}$$

6 Zauważmy że następujący diagram jest przemienny:

$$
\begin{tikzcd}
X\times A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\tilde f\times id_A"'] & & Y\times A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\tilde g\times id_A"] & & Z\times A \\
& (Y\times A)^A\times A \arrow[ur, "\varepsilon"'] \arrow[dr, "(\tilde g\times id_A)^A\times id_A"'] & & (Z\times A)^A\times A \arrow[ur, "\varepsilon"'] & \\
& & ((Z\times A)^A\times A)^A\times A \arrow[ur, "\varepsilon"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Innymi słowy:

$$g\circ f = \varepsilon_{Z\times A}\circ\varepsilon_{(Z\times A)^A\times A}\circ(\tilde g\times id_A)^A\times id_A\circ(\tilde f\times id_A)$$

$$g \circ f = \varepsilon \circ \varepsilon \circ \left(\left(\tilde{g} \times id_A \right)^A \times id_A \right) \circ \left(\tilde{f} \times id_A \right)$$

$$= \varepsilon \circ \varepsilon \circ \left(\left(\tilde{g} \times id_A \right)^A \circ \tilde{f} \right) \times id_A \circ$$

Innymi słowy:

$$\widetilde{(g \circ f)} = \left(\varepsilon_{X \times A} \right)^A \circ \left(\tilde{g} \times id_A \right)^A \circ \tilde{f}$$

ćw uzasadnić równość powyższą

w podstawie

$\square$

Wykorzystanie kategorii CCC w modelowaniu obliczeń z efektami ubocznymi.

Niech w naszej kategorii istnieje specjalny obiekt Ω odpowiedzialny za stan „świata zewnętrznego". Wtedy funkcja, która przyjmuje argument typu X, a wynosi wartość typu Y, jednocześnie ingerując z Ω będzie typu:

$$f : X \times \Omega \longrightarrow Y \times \Omega$$

Zauważmy, że istnieje jednoznaczna odp

$$f : X \times W \longrightarrow Y \times W$$

$$\tilde{f} : X \longrightarrow (Y \times W)^{W}$$

jeśli zdefiniujemy sobie:

$$IO(Y) = (Y \times W)^{W}$$

to nasza funkcja jest typu

$$\tilde{f} : X \longrightarrow IO\ Y$$

$IO =$ złożenie $(-)\times W$ i $(-)^{W}$

funkt

Zatem IO jest funktorem na kategorii $\mathbb{C}$, $IO : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

- Przykłady typów funkcji zdef w Haskell.

$$putChar :: Char \to IO\ ()$$

wyświetlenie literki na monitorze

✗ $putChar :: Char \to ()$

unit typ jednostkowy

✓ $putChar :: Char \times \Omega \to () \times \Omega$

☺ $putChar :: Char \to IO\ ()$.

$\text{getChar} :: () \to \text{Char}$

$\text{getChar} :: \text{Char}$

$\text{getChar} :: \omega \to \omega \times \text{Char}$

$\text{getChar} :: (\omega \times \text{Char})^{\omega}$

$\text{getChar} :: \text{IO Char}$

$\text{readFile} :: \text{FilePath} \to \text{IO String}$

$\text{writeFile} :: (\text{FilePath}, \text{String}) \to \text{IO} ()$