Wykład, Teoria Kategorii (8) 2-12-2020

Wykładniki

$$A \longrightarrow B$$

Przykład

W kategorii Set mamy: dla wybranych zbiorów B, C istnieje zbiór

$$C^B \overset{df}{=} \{ f : B \to C \}$$

Obserwacja

Weźmy funkcję

$$f : A \times B \to C$$

(zwykła funkcja; A, B, C zwykłe zbiory, $\times$ iloczyn kart.)

Wybierzmy $a \in A$ i zauważmy, że

$$f_a \overset{df}{=} f(a, -) : B \to C$$

jest elementem zbioru C^B.

Używając prawa dla funkcji $f : A \times B \to C$ zdefiniowaliśmy funkcję

$$\tilde{f} : A \to C^B,$$

która przyporządkowuje $a \mapsto f_a$. Co więcej, dla każdej funkcji

$$g : A \to C^B$$

istnieje

dla każdej $g : A \to C^B$ istnieje

$f : A \times B \to C$ t. że

$\tilde{f} = g$. Istotnie, weźmy

$f : A \times B \to C$ zdef przez

$$f(x, y) = g(x)(y).$$

Podsumowując, istnieje bijekcja między

$$A \times B \longrightarrow C \qquad A \longrightarrow C^B$$

w Set.

Inaczej

$$\mathrm{Set}(A \times B, C) \cong \mathrm{Set}(A, C^B)$$

bijekcja.

Widzimy, że ta bijekcja daje nam przekształcenie

$$\mathrm{eval} : C^B \times B \longrightarrow C$$

zdefiniowane następująco

$$\mathrm{eval}(g, b) = g(b).$$

$b : B$ $\quad$ $g : B \to C$

Ponadto, dla dowolnego A oraz dowolnej funkcji $f: A \times B \to C$ istnieje jednoznacznie $\tilde{f} : A \to C^B$ t.że diagram

$$
\begin{tikzcd}
C^B \times B \arrow[r, "eval"] & C \\
A \times B \arrow[u, "\tilde{f} \times id_B"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\tilde{f} \times id_B (a,b) = (\tilde{f}(a), b)$

jest przemienny.

def Załóżmy, że $\mathbb{C}$ ma binarne produkty. **Obiektem potęgowym** (exponential) obiektów B i C nazywamy obiekt

$$C^B \quad \text{wraz ze strzałką}$$

$$\mathcal{E} : C^B \times B \longrightarrow C \quad \text{t. że dla}$$

każdego obiektu $Z \in \mathbb{C}$ i strzałki

$$f : Z \times B \longrightarrow C$$

istnieje dokładnie jedna strzałka

$$\tilde{f} : Z \longrightarrow C^B \quad \text{t. że}$$

$$
\begin{tikzcd}
C^B \times B \arrow[r] & C \\
Z \times B \arrow[u, "\exists!\, \tilde{f} \times id_B"] \arrow[ur, "\forall f"'] &
\end{tikzcd}
$$

diagram jest przemienny.

Komentarz:

Jeśli $\mathcal{C}$ jest kat. z binarnymi prod. to dla $\begin{cases} f: A_1 \to B_1 \\ g: A_2 \to B_2 \end{cases}$

możemy zdef.:

$f \times g : A_1 \times A_2 \to B_1 \times B_2$

które istnienie wynika z własności univ. produktu.

Ilustracja

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[d, "f"'] & A_1 \times A_2 \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "f \times g"] & A_2 \arrow[d, "g"] \\
B_1 & B_1 \times B_2 \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B_2
\end{tikzcd}
$$

Notacje

① $\varepsilon : C^B \times B \to C$ nazywany ewaluacją

② $\tilde{f} : Z \to C^B$ nazywany (wykładniczą) transpozycją $f : Z \times B \to C$.

Obserwacja

Mając daną strzałkę $g : Z \to C^B$ zdefiniujemy $\bar{g} : Z \times B \to C$ następująco:

$$\begin{tikzcd} C^B \times B \arrow[r, "\varepsilon"] & C \\ Z \times B \arrow[u, "g \times id_B"] \arrow[ur, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

Innymi słowy

$$\overline{g} \stackrel{df}{=} \varepsilon \circ (g \times id_B).$$

Wtedy, dla każdego $f : Z \times B \to C$ mamy

$$\overline{\tilde{f}} = f.$$

Innymi słowy, jeśli kategoria $\mathbb{C}$ ma obiekty potęgowe, to zadanie bijekcję:

$$\mathbb{C}(Z \times B, C) \cong \mathbb{C}(Z, C^B).$$

zadana $f \mapsto \tilde{f}$ oraz $g \mapsto \overline{g}$.

def Kategorię $\mathcal{C}$ nazywamy kartezjańsko domkniętą, jeśli ma:

1. wszystkie skończone produkty

2. wszystkie obiekty potęgowe (dla dowolnej pary B, C).

Przykład

1. set

2. Pos = { obiekty = zbiory częściowo uporządkowane
   strzałki := przekształcenie zach. porządek

jest kategorią kartezjańsko domkniętą.

(1) Po pierwsze, Pos ma wszystkie skończone produkty. Istotnie, jednoelementowy poset jest końcowy w Pos. Ponadto, dla posetów $P = (P, \leq_P)$ i $Q = (Q, \leq_Q)$ możemy zdef poset

$$P \times Q = (P \times Q, \leq),$$

gdzie

$$(p_1, q_1) \leq (p_2, q_2) \overset{df}{\iff} \begin{cases} p_1 \leq_P p_2 \\ q_1 \leq_Q q_2 \end{cases}$$

Ten poset wraz z

rzutowaniami $\begin{cases} \pi_1 : P \times Q \to P \\ \pi_2 : P \times Q \to Q \end{cases}$

jest produktem P i Q w Pos.

(2) Dodatkowo dla posetów P i Q możemy zdefiniować:

$$Q^P \overset{df}{=} \left(\left\{ f : P \to Q \;\middle|\; \begin{matrix} f \text{ jest} \\ \text{monotonia} \end{matrix} \right\}, \leq \right), \text{ gdzie}$$

$$f_1 \leq f_2 \overset{df}{\iff} f_1(p) \leq_Q f_2(p)$$

dla każdego $p \in P$.

oraz ewaluację

$$\mathcal{E} : \mathbb{Q}^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}, \text{ gdzie}$$

$$\mathcal{E}(f, p) \overset{df}{=\!=} f(p).$$

które jest dobrze zdef. strzałką w Pos.

i transpozycję

$\tilde{f} : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Q}^{\mathbb{P}}$ dla dowolnej

strzałki $f : \mathbb{X} \times \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q} \in \mathrm{Pos}$,

gdzie $\tilde{f}$ jest zdef w naturalny sposób (jak w Set).

uzupełnić braki