Definicja modelu grafowego do systemu StoryGraph

Graph model definition for the StoryGraph system

Niech L będzie alfabetem etykiet wierzchołków, tzn. skończonym zbiorem niepustym.

Definicja 1 – Etykietowany graf skierowany

Etykietowanym grafem skierowanym jest system:

$$C = (V, E, s, t, lab), \qquad (1)$$

gdzie:

- V oraz E są skończonymi rozłącznymi zbiorami odpowiednio wierzchołków i krawędzi,
- $s: E \to V$ jest funkcją źródłową krawędzi,
- $t: E \to V$ jest funkcją docelową krawędzi,
- $lab: V \to L$ jest funkcją etykietowania wierzchołków.

Wprowadźmy następujące oznaczenia V_C, E_C, s_C, t_C, lab_C na elementy grafu C.

Let L be an alphabet of node labels, i.e. finite nonempty set.

Definition 1 – Labelled directed graph

A labelled directed graph is a system:

$$C = (V, E, s, t, lab), \qquad (1)$$

where:

- V and E are finite disjoint sets of nodes and edges, respectively,
- $s: E \to V$ is an edge source function,
- $t: E \to V$ is an edge target function,
- $lab: V \to L$ is a labelling function.

Let us introduce the following symbols: V_C, E_C, s_C, t_C, lab_C for elements of the graph C.

Powyżej zdefiniowany graf uzupełniamy o atrybuty.
Niech A będzie zbiorem atrybutów. Atrybut a jest funkcją określoną na zbiorze obiektów.

Definicja 2 – Atrybutowany etykietowany graf skierowany

Atrybutowanym etykietowanym grafem skierowanym jest system:

$$G = (C, attr), \tag{2}$$

gdzie:

- $C = (V, E, s, t, lab)$ jest etykietowanym grafem skierowanym (por. def. 1),
- $attr: V \cup E \to 2^A$ jest funkcją atrybutowania.

The graph defined above will be enhanced by attributes.
Let A be a set of attributes. Attribute a is a function specified on a set of objects.

Definition 2 – Attributed labelled directed graph

Attributed labelled directed graph is a system:

$$G = (C, attr), \tag{2}$$

where:

- $C = (V, E, s, t, lab)$ is labelled directed graph (see def. 1),
- $attr: V \cup E \to 2^A$ is an attributing function.

Definicja 3 – Instancja grafu atrybutowanego

Instancją grafu atrybutowanego jest para:

$$G_I = (G, val), \tag{3}$$

gdzie:

- G = $(C, attr)$ jest etykietowanym skierowanym grafem atrybutowanym (por. def. 2),
- $val: (V \cup E) \times A \to D$, gdzie $D = \{D_a\}_{a \in A}$, jest częściową funkcją, taką że dla wszystkich $x \in V \cup E$ oraz $a \in A$ jeśli $a \in attr(x)$ wtedy $val(x, a) \in D_a$.

Definition 3 – Attributed graph instance

An attributed graph instance is a pair:

$$G_I = (G, val), \tag{3}$$

where:

- $G = (C, attr)$ is a labelled directed attributed graph (see def. 2),
- $val: (V \cup E) \times A \rightarrow D$, for $D = \{D_a\}_{a \in A}$, is a partial function such that for all $x \in V \cup E$ and $a \in A$ if $a \in attr(x)$ then $val(x, a) \in D_a$.

W następnym kroku definiujemy graf warstwowy.
Niech $\Gamma(L, A)$ będzie zbiorem wszystkich etykietowanych skierowanych atrybutowanych grafów $G = (V_G, E_G, s_G, t_G, lab_G, attr_G)$, z etykietami ze zbioru L i atrybutami ze zbioru A.
Niech $\Gamma_I(L, A)$ będzie zbiorem instancji grafów z $\Gamma(L, A)$.
Niech L_H będzie zbiorem takim, że $L \cap L_H = \varnothing$. L_H będziemy nazywać alfabetem etykiet warstwowych.

Definicja 4 – Graf *n*-warstwowy

Grafem *n*-warstwowym dla liczby naturalnej $n \geq 2$ nazywamy:

$$H = (X, ch, E, s, t, lab), \tag{4}$$

gdzie:

- X jest n-elementowym zbiorem wierzchołków zwanych warstwami, takim że $\forall G \in \Gamma(L, A): V_G \cap X = \varnothing$,
- $ch: X \ni x \rightarrow G_{ch(x)} \in \Gamma(L, A)$ jest funkcją przypisującą każdej warstwie zagnieżdżony w niej graf tak, że dla wszystkich grafów $G_{ch(x)}$, $x \in X$ ich zbiory wierzchołków, czyli $V_{ch(x)}$, są rozłączne, zbiory krawędzi, czyli $E_{ch(x)}$, są rozłączne oraz zbiory użytych etykiet, czyli $lab_{ch(x)}(V_{ch(x)})$, są rozłączne,
- E jest zbiorem krawędzi zwanych krawędziami zewnętrznymi, rozłącznym ze wszystkimi zbiorami krawędzi $E_{ch(x)}$ dla $x \in X$,
- $s, t: E \rightarrow \bigcup_{x \in X} V_{ch(x)}$ są odpowiednio funkcją źródłową i docelową dla krawędzi zewnętrznych,
- krawędzie zewnętrzne są międzywarstwowe, tzn. $\forall x \in X, e \in E: s(e) \in V_{ch(x)} \Longrightarrow t(e) \notin V_{ch(x)}$,
- $lab: X \rightarrow L_H$ jest iniektywną funkcją etykietowania warstw.

In the next step the layered graph will be defined.
Let $\Gamma(L, A)$ be a set of all labelled directed attributed graphs $G = (V_G, E_G, s_G, t_G, lab_G, attr_G)$, with the alphabet L of labels and the set A of attributes.
Let $\Gamma_I(L, A)$ be a set of all instances of graphs from $\Gamma(L, A)$.
Let L_H be an alphabet of layer labels such that $L \cap L_H = \varnothing$.

Definition 4 – n-layer graph

An n-layer graph for natural number $n \geq 2$ is:

$$H = (X, ch, E, s, t, lab), \tag{4}$$

where:

- X is an n-element set of nodes, called layers, such that $\forall G \in \Gamma(L, A) : V_G \cap X = \varnothing$,
- $ch : X \ni x \rightarrow G_{ch(x)} \in \Gamma(L, A)$ is a function that places a nested graph inside a node of X, such that for all graphs $G_{ch(x)}$, $x \in X$ the sets of nodes, i.e. $V_{ch(x)}$, are disjoint, the sets of edges, i.e. $E_{ch(x)}$, are disjoint, and the sets of used labels, i.e. $lab_{ch(x)}(V_{ch(x)})$, are disjointed,
- E is a set of edges, called external, which is disjointed with all sets of edges $E_{ch(x)}$ for $x \in X$,
- $s, t : E \rightarrow \bigcup_{x \in X} V_{ch(x)}$ are source and target functions defined on the set E respectively,
- external edges are interlayer, i.e. $\forall x \in X, e \in E : s(e) \in V_{ch(x)} \Longrightarrow t(e) \notin V_{ch(x)}$,
- $lab : X \rightarrow L_H$ is an injective layer labelling function.

Definicja 5 – Instancja grafu *n*-warstwowego

Instancją grafu warstwowego nazywamy graf warstwowy, w którym dla wszystkich warstw $x \in X$ grafy $G_{ch(x)}$ zostały zastąpione ich instancjami.

Definition 5 – Instance of *n*-layer graph

Instance of n-layer graph is an n-layer graph where for all layers $x \in X$ graphs $G_{ch(x)}$ are replaced by their instances.

Definicja 6 – Podgraf i graf częściowy

Dla grafu G graf G' jest podgrafem, jeśli zbiór wierzchołków grafu G' jest podzbiorem zbioru wierzchołków grafu G oraz zbiór krawędzi grafu G' zawiera wszystkie krawędzie, których wierzchołki źródłowy i docelowy są elementami zbioru wierzchołków grafu G'.

Graf niespełniający tego warunku dla krawędzi jest grafem częściowym. (Dodać zastrzeżenie o pełnym zbiorze wierzchołków i niepełnym krawędzi)
Dodać definicję grafu częściowego grafu warstwowego

Definition 6 – Subgraph and partial graph

Graph *G'* is a subgraph of graph *G*, if the nodes set of graph *G'* is a subgraph of the nodes set of graph *G* and the edges set of graph *G'* includes all the edges which source and target nodes are the elements of nodes set of graph *G'*.

Graph which does not fulfill this condition for edges is called a partial graph.

Niech m będzie liczbą naturalną.

Definicja 7 – Ścieżka w grafie

Ścieżką o długości m w n-warstwowym grafie H nazwiemy ciąg m krawędzi $e_1, \ldots, e_m$ takich, że:

$$\text{jeżeli } 1 \leq i < m \text{ to } t_P(e_i) = s_P(e_{i+1})$$

gdzie:

- $s_P(e) = \begin{cases} s_H(e), \text{ jeśli } e \in E_H \\ s_{ch(x)}(e), \text{ jeśli } e \in E_{ch(x)}, \text{dla } x \in X_H \end{cases}$ to jednolita funkcja źródłowa krawędzi,
- $t_P(e) = \begin{cases} t_H(e), \text{jeśli } e \in E_H \\ t_{ch(x)}(e), \text{jeśli } e \in E_{ch(x)} \text{ dla } x \in X_H \end{cases}$ to jednolita funkcja docelowa krawędzi.

Let m be a natural number.

Definition 7 – Path

A path of length m in n-layer graph H is a sequence of m edges $e_1, \ldots, e_m$ such that:

$$\text{if } 1 \leq i < m \text{ then } t_P(e_i) = s_P(e_{i+1})$$

where:

- $s_P(e) = \begin{cases} s_H(e), \text{if } e \in E_H \\ s_{ch(x)}(e), \text{if } e \in E_{ch(x)} \; for\; x \in X_H \end{cases}$ is a unified edge source function,
- $t_P(e) = \begin{cases} t_H(e), \text{if } e \in E_H \\ t_{ch(x)}(e), \text{if } e \in E_{ch(x)} \; for\; x \in X_H \end{cases}$ is a unified edge target function.

Graf jest grafem wielosnopkowym, jeżeli możemy wyróżnić tylko jedną warstwę, w której elementy łączą się ze sobą w dowolny sposób (np. w cykle) a elementy z pozostałych warstw łączą się w drzewa, których korzeniami są wierzchołki z warstwy wyróżnionej.

Definicja 8 – Graf wielosnopkowy

Graf n-warstwowy $H = (X, ch, E, s, t, lab)$ będziemy nazywać wielosnopkowym, jeżeli istnieje warstwa $x_R \in X$ taka, że:

- nie istnieje krawędź zewnętrzna $e \in E$ taka, że jej wierzchołek źródłowy $s(e)$ należy do grafu $G_{ch(x_R)}$ zagnieżdżonego w wyróżnionej warstwie x_R, a wierzchołek docelowy $t(e)$ nie należy do tego grafu,
- w grafie nie ma ścieżek, które przechodzą dwa razy przez ten sam wierzchołek nie należący do zbioru wierzchołków grafu $G_{ch(x_R)}$,
- z każdego wierzchołka nie należącego do zbioru wierzchołków grafu $G_{ch(x_R)}$ wychodzi dokładnie jedna krawędź wewnętrzna lub zewnętrzna.

Graph is a multisheaf graph if there is one and only one layer with no restrictions to node connections and nodes from other layers create trees with nodes from above mentioned distinguished layer as roots.

Definition 8 – Multisheaf graph

An n-layer graph $H = (X, ch, E, s, t, lab)$ is called a multisheaf graph if there is $x_R \in X$ such that:

- there is no external edge $e \in E$ such that source node $s(e)$ is in the graph $G_{ch(x_R)}$ nested in x_R and the target node $t(e)$ is not in the set of the graph $G_{ch(x_R)}$,
- there are no paths in graph H in which any node occurs twice if this node is not in the $G_{ch(x_R)}$,
- every node, which is not in $G_{ch(x_R)}$, is the source of exactly one edge (internal or external).

Definicja 9 – Podgraf snopkowy

Podgrafem snopkowym nazywamy podgraf grafu wielosnopkowego indukowany wszystkimi ścieżkami kończącymi się w danym wierzchołku z warstwy x_R i nie zawierającymi innych wierzchołków z warstwy x_R.

Definition 9 – Sheaf-shaped subgraph

A sheaf-shaped subgraph is a subgraph of multisheaf graph induced by all the paths which end in a given node from layer x_R and do not include any other nodes from x_R.

Definicja 10 – Podgraf półsnopkowy

Podgraf półsnopkowy to podgraf grafu wielosnopkowego indukowany wszystkimi ścieżkami kończącymi się w danym wierzchołku nie należącym do warstwy x_R.

Definition 10 – Half-sheaf-shaped subgraph

A half-sheaf-shaped subgraph is a subgraph of multisheaf graph induced by all the paths ending in a given node which does not belong to the layer x_R.

Podgrafy snopkowe będą pomocne przy określaniu kontekstu potrzebnego do transformacji grafowej a podgrafy półsnopkowe przy bezpośrednim wskazywaniu zakresu modyfikacji grafu podczas transformacji.

Sheaf-shaped subgraphs will be useful to determine the context for graph transformation and half-sheaf-shaped subgraphs will be useful to determine the scope of modifications.

Definicja 11 – Graf atrybutowany z częściowym etykietowaniem

K jest grafem atrybutowanym z częściowym etykietowaniem, jeśli K jest zdefiniowane tak jak G w *Definicji 2*, z warunkiem, że funkcja $lab : V \rightarrow L$ jest funkcją częściową.

Zbiór argumentów funkcji częściowej lab będziemy oznaczać przez $dom(lab)$. W kontekście grafów z pełnym etykietowaniem (por. def. 2) $dom(lab)$ będzie oznaczało V.

Definition 11 – Partially labelled attributed graph

K is an attributed graph with partial labelling if K is defined in the same way as G in *Definition 2*, with the difference that function $lab : V \to L$ is a partial function.

The arguments set of lab partial function is called $dom(lab)$. For totally labelled graphs (see def. 2) $dom(lab)$ means V.

Definicja 12 – Instancja grafu atrybutowanego z częściowym etykietowaniem

$K_I = (K, val)$ jest instancją grafu z częściowym etykietowaniem, jeśli K jest grafem atrybutowanym z częściowym etykietowaniem, a val jest zdefiniowane tak jak w *Definicji 3*.

Definition 12 – Partially labelled attributed graph instance

$K_I = (K, val)$ is an attributed graph instance with partial labelling if K is a partially labelled attributed graph and val is defined in the same way as in *Definition 3*.

Niech $\Delta(L, A)$ będzie zbiorem wszystkich grafów atrybutowanych z częściowym bądź pełnym etykietowaniem nad alfabetem etykiet L i zbiorem atrybutów A.
Niech $\Delta_I(L, A)$ będzie zbiorem wszystkich instancji grafów z $\Delta(L, A)$.
Co za tym idzie, $\Gamma(L, A) \subsetneq \Delta(L, A)$ oraz $\Gamma_I(L, A) \subsetneq \Delta_I(L, A)$.

Definicja 13 – Graf *n*-warstwowy z częściowym bądź pełnym etykietowaniem

M jest grafem n-warstwowym z częściowym bądź pełnym etykietowaniem, jeśli M jest zdefiniowane tak jak H w *Definicji 4*, ale zamiast funkcji $ch : X \to \Gamma(L, A)$ jest funkcja $ch : X \to \Delta(L, A)$.

Let $\Delta(L, A)$ be a set of all partially or totally labelled attributed graphs over the alphabet L and the attribute set A.
Let $\Delta_I(L, A)$ be a set of all partially or totally labelled attributed graph instances from $\Delta(L, A)$.
Therefore, $\Gamma(L, A) \subsetneq \Delta(L, A)$ and $\Gamma_I(L, A) \subsetneq \Delta_I(L, A)$.

Definition 13 – Partially labelled *n*-layer graph

M is an n-layer graph with partial labelling if M is defined in the same way as H in *Definition 4*, but instead of function $ch: X \to \Gamma(L, A)$ there is a function $ch: X \to \Delta(L, A)$.

Definicja 14 – Instancja grafu *n*-warstwowego z częściowym bądź pełnym etykietowaniem

Instancją grafu n-warstwowego z częściowym bądź pełnym etykietowaniem nazywamy graf n-warstwowy z częściowym bądź pełnym etykietowaniem, w którym dla wszystkich warstw $x \in X$ grafy $G_{ch(x)}$ zostały zastąpione ich instancjami.

Definition 14 – Partially or totally labelled *n*-layer graph instance

Partially or totally labelled instance of n-layer graph is a partially or totally labelled n-layer graph where for all layers $x \in X$ graphs $G_{ch(x)}$ are replaced by their instances.

Definicja 15 – Dopasowanie generyczne grafów atrybutowanych z częściowym bądź pełnym etykietowaniem oraz ich instancji

Niech K będzie grafem atrybutowanym z częściowym bądź pełnym etykietowaniem (por. def. 11 i 2). Niech Q będzie grafem atrybutowanym z częściowym bądź pełnym etykietowaniem lub instancją takiego grafu (por. def. 11 i 2 lub def. 12 i 3). Dopasowanie generyczne $k: K \to Q$ jest parą injektywnych funkcji $k_E: E_K \to E_Q$ oraz $k_V: V_K \to V_Q$ zachowujących własności wierzchołków i krawędzi:

- $\forall\, e \in E_K: \ k_V(s_K(e)) = s_Q(k_E(e))$
- $\forall\, e \in E_K: \ k_V(t_K(e)) = t_Q(k_E(e))$
- $\forall\, v \in V_K: \ v \in dom(lab_K) \Longrightarrow lab_K(v) = lab_Q(k_V(v))$
- $\forall\, v \in V_K: \ attr_K(v) \subseteq attr_Q(k_V(v))$
- $\forall\, e \in E_K: \ attr_K(e) \subseteq attr_Q(k_E(e))$

Definition 15 – Generic match of partially or totally labelled attributed graphs and their instances

Let K be a partially or totally labelled attributed graph (see def. 11 and 2). Let Q be a partially or totally labelled attributed graph or an instance of such graph (see def. 11 and 2 or 12 and 3). A generic match $k : K \to Q$ is a pair of injective functions $k_E : E_K \to E_Q$ and $k_V : V_K \to V_Q$ which preserve properties of nodes and edges:

- $\forall\, e \in E_K :\ k_V(s_K(e)) = s_Q(k_E(e))$
- $\forall\, e \in E_K :\ k_V(t_K(e)) = t_Q(k_E(e))$
- $\forall\, v \in V_K :\ v \in dom(lab_K) \Longrightarrow lab_K(v) = lab_Q(k_V(v))$
- $\forall\, v \in V_K :\ attr_K(v) \subseteq attr_Q(k_V(v))$
- $\forall\, e \in E_K :\ attr_K(e) \subseteq attr_Q(k_E(e))$

Definicja 16 – Dopasowanie generyczne grafów *n*-warstwowych z częściowym bądź pełnym etykietowaniem oraz ich instancji

Niech M będzie grafem n-warstwowym z częściowym bądź pełnym etykietowaniem (por. def. 13 i 4). Niech N będzie grafem n-warstwowym z częściowym bądź pełnym etykietowaniem lub instancją takiego grafu (por. def 13 i 4 lub 14 i 5). Dopasowanie generyczne $m : M \to N$ jest trójką złożoną z funkcji $m_X : X_M \to X_N$, funkcji $m_E : E_M \to E_N$ i rodziny dopasowań generycznych $\{ k_x \}_{x \in X_M}$.

Dla dopasowania generycznego k_x będącego parą funkcji, pierwszą funkcję z tej pary oznaczamy: $k^1{}_x$. Wtedy definiujemy funkcję k_V: $\bigcup_{x \in X_M} V_{ch_M(x)} \to \bigcup_{x \in X_N} V_{ch_N(x)}$ jako:

$$k_V(v) = \{\ k^1{}_x(v) \text{ jeśli } v \in V_{ch_M(x)}$$

Trójka ta ma następujące własności:

- m_X jest bijekcją,
- $\forall\, x \in X_M :\ lab_M(x) = lab_N(m_X(x))$,
- $\forall\, x \in X_M :\ k_x$ jest dopasowaniem generycznym z grafu $ch_M(x)$ w graf lub instancję $ch_N(m_X(x))$ (por. def. 15),
- $\forall\, e \in E_M :\ k_V(s_M(e)) = s_N(m_E(e))$,
- $\forall\, e \in E_M :\ k_V(t_M(e)) = t_N(m_E(e))$,

Dopasowania istnieją tylko pomiędzy grafami mającymi taką samą liczbę tak samo etykietowanych warstw.

Dopasowania z definicji są iniektywne.

Definition 16 – Generic match of partially or totally labelled *n*-layer graphs and their instances

Let M be an n-layer graph with a partial or totally labelling (see def. 13 and 4). Let N be an n-layer graph with a partial or totally labelling or an instance of such graph (see def. 13 and 4 or 14 and 5). A generic match $m : M \rightarrow N$ is a triple consisting of function $m_X : X_M \rightarrow X_N$, function $m_E : E_M \rightarrow E_N$ and a family of generic matches $\{ k_x \}_{x \in X_M}$.

For generic match k_x which is a pair of functions, the first one is annotated as: $k^1{}_x$. Then the function k_V: $\bigcup_{x \in X_M} V_{ch_M(x)} \rightarrow \bigcup_{x \in X_N} V_{ch_N(x)}$ is:

$$k_V(v) = \{ k^1{}_x(v) \text{ if } v \in V_{ch_M(x)}$$

That tripe has following properties:

- m_X is a bijection,
- $\forall\, x \in X_M$: $lab_M(x) = lab_N(m_X(x))$,
- $\forall\, x \in X_M$: k_x is a generic match from graph $ch_M(x)$ to graph or instance $ch_N(m_X(x))$, (see def. 15),
- $\forall\, e \in E_M$: $k_V(s_M(e)) = s_N(m_E(e))$,
- $\forall\, e \in E_M$: $k_V(t_M(e)) = t_N(m_E(e))$.

Matches exist only between graphs with the same number of layers with the same labelling.
All matches are, by definition, injective.

Modyfikacji grafu będziemy dokonywać za pomocą struktury zwanej produkcją grafową. Grafowa procedura generacyjna jest systemem transformowania grafów według formalnych reguł zwanych produkcjami.
Klasyczne systemy generacyjne transformacji grafowych mają produkcje składające się z dwóch grafów, zwanych lewą i prawą stroną produkcji. Produkcja może być użyta do przetransformowania danego grafu tylko wtedy, jeśli uda się znaleźć monomorfizm (iniektywny homomorfizm) odwzorowujący lewą stronę produkcji w przekształcany graf. Zaaplikowanie transformacji polega w tych systemach na usunięciu z grafu fragmentu dopasowanego do lewej strony i wstawienie na jego miejsce kopii prawej strony.
W modelu grafowym proponowanym w niniejszej pracy zrezygnowano z prawej strony i podejścia usuń-wstaw, jako zbyt mało elastycznego w praktycznych zastosowaniach. Produkcje zamiast prawych stron będą miały procedury, które algorytmicznie modyfikują przekształcany

graf. Wykonanie ciągu instrukcji zastępuje proces usuwania starego podgrafu, umieszczania nowego i osadzania go. Prawą stronę produkcji możemy odtwarzać na podstawie instrukcji, ale odtworzenie to będzie pełne tylko dla pewnego podzbioru instrukcji.

Graph modification is performed using the graph generative procedure, a system of graph transformations based on formal rules called graph productions.
In classical model graph production can be expressed in the terms of left-hand-side and right-hand-side structures. The production can be applied if and only if there is and monomorphism (injective homomorphism) mapping the left-hand-side and the original graph. The application means removing the mapped subgraph and inserting the copy of the right-hand-side structure. An enormous set of possible productions is beyond the abilities of this classic model, so in the described model the different approach is presented. Instead of the right-hand-side structures the algorithmic procedure is defined to modify the original graph. Applying the set of instructions replaces the process of deleting the old subgraph, inserting a new one, and embedding it.

Definicja 17 – Produkcja generyczna

Produkcja generyczna p jest trójką (M, C, P), gdzie M jest grafem n-warstwowym z częściowym etykietowaniem, C jest procedurą sprawdzania predykatów stosowalności, a P jest procedurą modyfikującą przekształcany graf.

Definition 17 – Generic production

Generic production p is triple (M, C, P), where M is an n-layer graph with partial labelling, C is a predicate checking procedure, and P is a graph modifying procedure.

Definicja 18 – Wyprowadzenie generyczne

Niech N_1 będzie instancją grafu n-warstwowego. Niech $p = (M, C, P)$ będzie produkcją generyczną.
Produkcja p jest stosowalna do N_1, jeżeli istnieje dopasowanie generyczne $m : M \rightarrow N_1$ i jeżeli procedura C, wywołana z argumentami m i N_1, zwróci wynik oznaczający spełnienie wszystkich sprawdzanych przez nią warunków.

Efektem działania procedury P z argumentami m i N_1 jest nowa instancja N_2.

Mówimy, że N_2 została wyprowadzona z N_1 za pomocą p.
Relację tę oznaczamy jako: $N_1 \overset{p}{\Rightarrow} N_2$.

Definition 18 – Generic derivation

Let N_1 be an n-layer graph instance. Let $p = (M, C, P)$ be a generic production. Production p is applicable to N_1, if generic match m: $M \rightarrow N_1$ exists and if procedure C, invoked with m and N_1 as arguments, returns result which means that all conditions are fulfilled.

The result of invoking the procedure P with m and N_1 as arguments is a new instance N_2.

N_2 is known as a graph instance derived from N_1 using p.

This relation is denoted as: $N_1 \overset{p}{\Rightarrow} N_2$.

Definicja 19 – System przepisywania

System przepisywania składa się ze startowej instancji n-warstwowego grafu oraz skończonego zbioru produkcji generycznych.
Wyprowadzenie N_2 z N_1 przy pomocy dowolnej produkcji z tego systemu oznaczamy jako: $N_1 \Rightarrow N_2$. Zwrotne i przechodnie domknięcie tej relacji będziemy oznaczać $\overset{*}{\Rightarrow}$.

Definition 19 – Rewriting system

A rewriting system consist of starting n-layer graph instance and a finite set of generic productions.

Deriving N_2 from N_1 using a production from this system is denoted as: $N_1 \Rightarrow N_2$.
Reflexive and transitive closure of this relation is denoted as: $\overset{*}{\Rightarrow}$.