

Dipartimento di Economia Marco Biagi

[www.economia.unimore.it](http://www.economia.unimore.it)

# Appunti di Statistica

CLEAM AA 25/26

Patrizio Frederic

Aggiornato al 06-02-2026

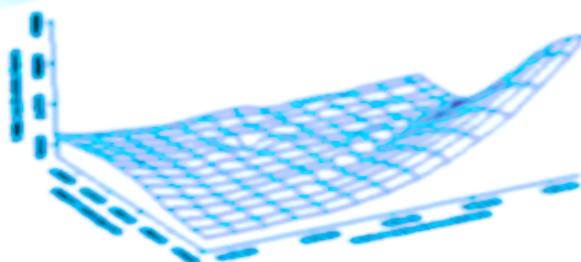
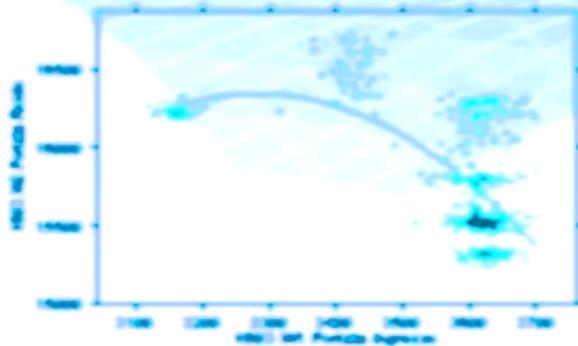
$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$f: \{\Omega, \mathcal{A}, P_A\} \rightarrow \{\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_B\}$$

$$P_B(B) = P_A(\omega : \omega \in f^{-1}(B)), \forall B \in \mathcal{B}$$

$$\int_{\mathcal{Y}} T(y) \frac{d}{d\theta} f(y, \theta) d\nu(y)$$

302,78	215,58	887,45	622,74
752,54	554,12	579,45	365,41
421,74	99,43	587,98	524,79
784,45	560,67	788,98	121,32
312,30	755,41	821,65	756,14





# Indice

<b>Avvertenza</b>	<b>15</b>
<b>Introduzione</b>	<b>17</b>
<b>I Statistica Descrittiva</b>	<b>19</b>
<b>1 Cos'è la Statistica?</b>	<b>21</b>
1.1 I Dati . . . . .	21
1.2 I Fenomeni Collettivi . . . . .	22
1.3 Unità, Variabili e Popolazioni Statistiche . . . . .	22
1.4 Regolarità e Variabilità . . . . .	24
1.4.1 Obiettivo conoscitivo . . . . .	24
1.4.2 Obiettivo predittivo . . . . .	25
1.5 Dati e Fonti . . . . .	26
1.5.1 Dati Sperimentali e Dati Osservazionali . . . . .	26
1.5.2 I Dati Economici . . . . .	27
1.5.3 I Dati Scientifici . . . . .	33
1.5.4 Big data, dati digitali e dati testuali . . . . .	34
1.6 La matrice dei dati . . . . .	35
1.7 Riepilogo sulle Variabili . . . . .	36
<b>2 Variabili Statistiche e Distribuzioni di Frequenza</b>	<b>37</b>
2.1 Variabili Statistiche . . . . .	38
2.1.1 Notazione di Base . . . . .	38
2.1.2 Ordinamento e conteggio . . . . .	38
2.1.3 Le unità di misura . . . . .	40
2.1.4 Trasformazioni lineari . . . . .	41
2.2 Distribuzione di Frequenza . . . . .	47
2.2.1 Dati quantitativi continui . . . . .	48
2.2.2 Raggruppamenti in Classi . . . . .	49
2.2.3 Frequenze Cumulate . . . . .	50

2.3	Rappresentazioni Grafiche . . . . .	51
2.4	Istogramma di Densità . . . . .	52
2.5	La Funzione di Ripartizione . . . . .	53
2.6	L'inversa della Funzione di Ripartizione . . . . .	55
2.7	Indicatori Sintetici di Centralità e di Variabilità . . . . .	56
2.8	Riepilogo . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Media Aritmetica, Varianza e Standard Deviation</b>	<b>57</b>
3.1	Media Aritmetica . . . . .	57
3.1.1	La Media Aritmetica come Baricentro dell'Istogramma . . . . .	58
3.1.2	Calcolo per Distribuzioni di Frequenza . . . . .	59
3.1.3	Proprietà della Media Aritmetica . . . . .	60
3.2	La varianza . . . . .	62
3.2.1	Calcolo per Distribuzioni di Frequenza . . . . .	64
3.2.2	Proprietà della Varianza . . . . .	67
3.3	La Standard Deviation . . . . .	68
3.3.1	Proprietà della Standard Deviation . . . . .	68
3.4	Esempi . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Medianà, Percentili e Moda</b>	<b>73</b>
4.1	La Medianà . . . . .	73
4.1.1	Dati espressi in distribuzione di frequenza . . . . .	73
4.1.2	Dati espressi in classi . . . . .	74
4.1.3	Proprietà della Medianà . . . . .	75
4.2	I Percentili . . . . .	76
4.2.1	Dati espressi in distribuzione di frequenza . . . . .	76
4.2.2	Dati espressi in classi . . . . .	77
4.2.3	I Quartili . . . . .	79
4.2.4	Percentili e Funzione di Ripartizione . . . . .	79
4.3	Lo Scarto Interquartile . . . . .	79
4.4	La Moda . . . . .	79
4.4.1	La Moda per dati raccolti in classi . . . . .	80
4.5	Relazione tra Media, Moda e Medianà . . . . .	80
4.6	Istogramma e Percentili . . . . .	81
<b>II</b>	<b>Probabilità</b>	<b>89</b>
<b>5</b>	<b>Cenni di Teoria della probabilità</b>	<b>91</b>
5.1	Concetti di base . . . . .	91
5.1.1	Eventi . . . . .	91
5.1.2	Algebra degli eventi . . . . .	91
5.1.3	Operazioni su insieme . . . . .	94
5.1.4	La probabilità è una funzione . . . . .	94

5.1.5	Definizioni di probabilità . . . . .	95
5.2	Teoria di Kolmogorov . . . . .	96
5.2.1	Algebra degli Eventi . . . . .	96
5.2.2	Assiomi di Kolmogorov . . . . .	97
5.2.3	Proprietà di $P$ . . . . .	98
5.3	Probabilità Condizionata . . . . .	100
5.3.1	Indipendenza tra Eventi . . . . .	102
5.3.2	Indipendenza e Incompatibilità . . . . .	102
5.3.3	Partizioni di $\Omega$ . . . . .	102
5.3.4	Teorema delle probabilità totali . . . . .	103
5.3.5	Il Teorema di Bayes . . . . .	106
5.4	Specchietto finale utile per gli esercizi elementari . . . . .	108
<b>6</b>	<b>Variabili Casuali</b>	<b>109</b>
6.1	Definizione formale di una VC discreta . . . . .	109
6.1.1	Descrizione di una VC . . . . .	110
6.1.2	Operazioni tra VC . . . . .	113
6.2	Valore Atteso, e Varianza di una VC . . . . .	114
6.3	Indipendenza tra VC . . . . .	116
6.4	VC condizionate (complementi) . . . . .	116
6.4.1	Valore atteso e varianza condizionata (complementi) . . . . .	117
6.4.2	Esempio di indipendenza tra VC . . . . .	117
6.5	Specchietto finale per le VC discrete . . . . .	118
6.6	Le VC continue . . . . .	118
6.6.1	Valore Atteso e Varianza di una VC continua . . . . .	122
6.6.2	La VC uniforme . . . . .	122
6.7	Operazioni sulle VC . . . . .	125
<b>7</b>	<b>Variabili Casuali di particolare interesse</b>	<b>129</b>
7.1	La VC di Bernoulli . . . . .	129
7.1.1	Valore Atteso e Varianza . . . . .	130
7.1.2	In Sintesi . . . . .	130
7.2	La VC Binomiale . . . . .	131
7.2.1	La VC Binomiale attraverso un esempio . . . . .	131
7.2.2	Il modello . . . . .	133
7.2.3	Dimostrazione del Valore atteso e della Varianza . . . . .	135
7.2.4	Esempio . . . . .	135
7.2.5	Proprietà . . . . .	136
7.2.6	In Sintesi . . . . .	138
7.3	La VC di Poisson . . . . .	139
7.3.1	Obiettivo . . . . .	139
7.3.2	Storia . . . . .	139
7.3.3	Il modello . . . . .	139
7.3.4	Dimostrazione del Valore atteso e della Varianza della Poisson . . . . .	141

7.3.5	Esempio . . . . .	142
7.3.6	Proprietà della Poisson . . . . .	142
7.3.7	In Sintesi . . . . .	143
7.4	La VC Normale . . . . .	143
7.4.1	Obiettivo . . . . .	143
7.4.2	Storia . . . . .	144
7.4.3	Il modello . . . . .	144
7.4.4	Proprietà della Normale . . . . .	145
7.4.5	La normale standard . . . . .	147
7.4.6	La Funzione di Ripartizione della Normale Standard . . . . .	148
7.4.7	La tavole Statistiche della $Z$ . . . . .	152
7.4.8	In Sintesi . . . . .	162
7.4.9	Esempio . . . . .	163
<b>8</b>	<b>Il Teorema del Limite Centrale</b>	<b>171</b>
8.1	Successioni di VC . . . . .	171
8.2	Somme e Medie di VC . . . . .	172
8.3	Teoremi del Limite Centrale . . . . .	173
8.3.1	Esempio Somma . . . . .	175
8.3.2	Roulette . . . . .	177
<b>9</b>	<b>Statistiche campionarie</b>	<b>183</b>
9.1	Risultati preliminari . . . . .	183
9.2	La distribuzione Chi-quadro $\chi^2$ . . . . .	183
9.2.1	Le tavole del $\chi^2$ . . . . .	185
9.3	La distribuzione $t$ -di Student . . . . .	186
9.3.1	Le tavole della $t$ . . . . .	187
9.4	La distribuzione di $\hat{\sigma}^2$ . . . . .	190
9.5	La distribuzione della statistica standardizzata . . . . .	190
<b>III</b>	<b>Inferenza</b>	<b>191</b>
<b>10</b>	<b>Inferenza: concetti introduttivi</b>	<b>193</b>
10.1	Inferire: dalla reazione istintiva al linguaggio formale . . . . .	193
10.2	L'inferenza Statistica . . . . .	194
10.2.1	Il campione e il campionamento . . . . .	194
10.2.2	Inferenza da popolazioni finite . . . . .	195
10.2.3	Inferenza da popolazioni infinite . . . . .	196
10.2.4	Inferenza non parametrica e inferenza parametrica . . . . .	197
10.3	Sintesi dei contesti . . . . .	198
10.4	Dalle popolazioni ai modelli: la metafora dell'urna . . . . .	198
10.4.1	Campionamento da un'urna di dimensione nota, senza reinserimento ( <b>popolazioni finite</b> ) . . . . .	198

10.4.2	Campionamento da un'urna a composizione ignota, con reinserimento ( <b>popolazioni infinite, modello binomiale</b> ) . . . . .	199
10.4.3	Campionamento da un'urna che genera numeri reali con legge ignota ( <b>popolazioni infinite, inferenza non parametrica</b> ) . . . . .	199
10.4.4	Campionamento da un'urna che genera conteggi secondo un modello di Poisson ( <b>popolazioni infinite, inferenza parametrica discreta</b> ) . . . . .	199
10.4.5	Campionamento da un'urna che genera valori reali secondo una distribuzione normale . . . . .	199
10.5	Statistica Classica . . . . .	200
10.5.1	Un'altra via: la statistica bayesiana . . . . .	201
<b>11</b>	<b>Elementi di Teoria della Stima</b>	<b>203</b>
11.1	Campionamento . . . . .	203
11.1.1	Campioni casuali . . . . .	203
11.1.2	Lessico . . . . .	203
11.1.3	Esempio al finito . . . . .	204
11.2	Il Modello Statistico . . . . .	204
11.2.1	Esempi . . . . .	205
11.2.2	Scopo del modello . . . . .	205
11.3	Gli stimatori . . . . .	206
11.3.1	Stimatori e Stime . . . . .	208
11.3.2	Come scegliere uno stimatore . . . . .	209
11.3.3	Proprietà Auspicabili di uno stimatore (per $n$ finito) . . . . .	209
11.3.4	Media aritmetica e varianza campionaria caso IID . . . . .	210
11.3.5	Media aritmetica campionamento SR (popolazioni finite) . . . . .	210
11.3.6	Esempio al finito . . . . .	211
11.3.7	Distribuzione delle statistiche . . . . .	214
11.3.8	Proprietà Auspicabili di uno stimatore (per $n \rightarrow \infty$ ) . . . . .	214
11.4	La $SD$ e lo $SE$ . . . . .	215
<b>12</b>	<b>Teoria della Verosimiglianza</b>	<b>217</b>
12.1	Il Modello Statistico . . . . .	217
12.1.1	Esiste lo stimatore più efficiente? . . . . .	217
12.2	La Verosimiglianza . . . . .	217
12.2.1	La Verosimiglianza attraverso un esempio . . . . .	218
12.2.2	Se $\pi$ fosse... . . . . .	219
12.2.3	La verosimiglianza non è una probabilità . . . . .	220
12.2.4	La stima di massima verosimiglianza . . . . .	221
12.2.5	Esempio IID da popolazione finita (parte due) . . . . .	222
12.2.6	Abbiamo trovato il vero $\pi$ ? . . . . .	223
12.2.7	Muoviamo anche $S_n$ . . . . .	224
12.3	La Funzione di Verosimiglianza . . . . .	225
12.4	La Stimatore di massima Verosimiglianza . . . . .	226
12.5	Il Principio di Verosimiglianza . . . . .	226

12.6	Verosimiglianza e Statistiche Sufficienti . . . . .	226
12.7	Caso Bernoulli urna infinita. . . . .	226
12.7.1	Calcolo delle proprietà di $\hat{\pi}$ . . . . .	228
12.7.2	Se $n$ aumenta e $\hat{\pi} = 0.6$ . . . . .	229
12.7.3	L'ipotesi $\pi = 0.5$ . . . . .	230
12.8	Il modello Poisson . . . . .	231
12.8.1	La log-verosimiglianza della Poisson . . . . .	231
12.8.2	La stima di massima verosimiglianza della Poisson . . . . .	231
12.8.3	Proprietà dello stimatore di massima verosimiglianza della Poisson $\hat{\lambda}$ . . . . .	232
12.8.4	Esempio $n = 5$ . . . . .	233
12.8.5	Esempio $n = 50$ . . . . .	233
12.9	Il modello Normale . . . . .	234
12.9.1	Verosimiglianza e log-verosimiglianza della Normale . . . . .	235
12.9.2	Le stime di massima verosimiglianza della Normale . . . . .	235
12.9.3	Proprietà di $\hat{\mu}$ . . . . .	237
12.9.4	Proprietà di $\hat{\sigma}^2$ . . . . .	237
12.9.5	Lo $SE$ di $\hat{\mu}$ . . . . .	237
12.9.6	Esempio $n = 10$ . . . . .	238
12.9.7	Esempio $n = 100$ . . . . .	238
12.9.8	Perché $n - 1$ . . . . .	239
12.10	Proprietà degli stimatori di massima verosimiglianza . . . . .	239
<b>13</b>	<b>Stima Intervallare</b>	<b>241</b>
13.1	Obiettivo . . . . .	241
13.2	Il Contesto Probabilistico . . . . .	241
13.2.1	Un intervallo per $\hat{\mu}$ . . . . .	242
13.2.2	Invertiamo $\mu$ con $\hat{\mu}$ . . . . .	245
13.3	Intervalli casuali . . . . .	246
13.4	Intervallo di confidenza per $\mu$ al 95%, $n = 5$ e $\sigma^2 = 2.25$ . . . . .	246
13.5	Stimatori e intervalli di confidenza . . . . .	247
13.6	Massima Verosimiglianza e intervalli di confidenza . . . . .	248
13.7	Intervalli di Confidenza per $\mu$ al livello $(1 - \alpha) \times 100$ , $\sigma^2$ nota . . . . .	248
13.8	Intervalli di Confidenza per $\mu$ al livello $(1 - \alpha) \times 100$ , $\sigma^2$ incognita . . . . .	250
13.8.1	$\sigma$ nota e $\sigma$ incognita . . . . .	251
13.9	IDC per la proporzione . . . . .	253
13.9.1	IdC per $\pi$ per $\alpha$ ed $n$ fissati . . . . .	254
13.10	Specchietto Finale per gli IdC . . . . .	255
<b>14</b>	<b>Teoria dei test</b>	<b>257</b>
14.1	Le Ipotesi . . . . .	257
14.1.1	Esempi di ipotesi . . . . .	257
14.2	La Decisione . . . . .	257
14.3	La tavola della verità . . . . .	258
14.4	Esempio: Scegliere tra due ipotesi semplici . . . . .	259

14.4.1	Tre diversi Test a confronto . . . . .	260
14.4.2	Gli errori della decisione A . . . . .	261
14.4.3	Gli errori della decisione B . . . . .	261
14.4.4	Gli errori della decisione C . . . . .	262
14.4.5	Confronto . . . . .	263
14.5	Ipotesi Nulla e Ipotesi Alternativa . . . . .	263
14.6	Rifiutare o non rifiutare $H_0$ . . . . .	263
14.7	Test per $\mu$ : due ipotesi semplici, $\sigma^2$ nota . . . . .	264
14.7.1	Test per $\mu$ : scegliere il punto critico . . . . .	264
14.7.2	Probabilità di errore di primo e di secondo tipo . . . . .	265
14.7.3	Test per $\alpha$ fissato, $\alpha = 0.05$ . . . . .	266
14.7.4	La regola di decisione, $\alpha = 0.05$ . . . . .	266
14.7.5	Test per $\alpha$ fissato, $\alpha = 0.01$ . . . . .	267
14.7.6	La regola di decisione, $\alpha = 0.01$ . . . . .	267
14.8	$H_0$ semplice e $H_1$ composta . . . . .	268
14.9	La Statistica Test . . . . .	268
<b>15</b>	<b>Test per una media e una proporzione</b>	<b>269</b>
15.1	Test sulla media, $\sigma^2$ noto . . . . .	269
15.1.1	Test sulla media, ipotesi unilaterale destra, $\sigma^2$ noto . . . . .	269
15.1.2	Test sulla media, $\sigma^2$ noto, vari livelli di $\alpha$ . . . . .	270
15.1.3	La probabilità di significatività osservata il $p_{value}$ . . . . .	273
15.1.4	Lettura del $p_{value}$ . . . . .	274
15.1.5	Test sulla media, ipotesi unilaterale sinistra, $\sigma^2$ noto . . . . .	277
15.1.6	Test sulla media, ipotesi bilaterale, $\sigma^2$ noto . . . . .	279
15.2	Significatività non fissata . . . . .	282
15.3	Test per $\mu$ , $\sigma$ incognita . . . . .	283
15.3.1	Test sulla media, ipotesi unilaterale destra, $\sigma^2$ incognito . . . . .	284
15.3.2	Test sulla media, ipotesi unilaterale sinistra, $\sigma^2$ incognito . . . . .	286
15.3.3	Test sulla media, ipotesi bilaterale, $\sigma^2$ incognito . . . . .	288
15.3.4	Significatività non fissata . . . . .	289
15.4	Massima verosimiglianza e test . . . . .	291
15.5	Test per $\pi$ . . . . .	292
15.6	Specchietto Finale per i Test ad un Campione . . . . .	299
<b>16</b>	<b>Confronto tra due Popolazioni</b>	<b>301</b>
16.1	Test per due medie . . . . .	301
16.1.1	il contesto probabilistico . . . . .	301
16.1.2	Derivazione della statistica test . . . . .	302
16.1.3	Stima di $\sigma_A$ e $\sigma_B$ . . . . .	302
16.1.4	Ipotesi 1: omogeneità . . . . .	303
16.1.5	Ipotesi 2: eterogeneità . . . . .	303
16.1.6	Esempio . . . . .	303
16.1.7	Esempio . . . . .	305

16.2	Test per due proporzioni . . . . .	306
16.2.1	Il contesto probabilistico . . . . .	306
16.2.2	Derivazione della statistica test . . . . .	307
16.2.3	Esempio . . . . .	307
16.3	Specchietto Finale per i Test ad Due Campioni . . . . .	309
<b>17</b>	<b>Regressione Lineare</b>	<b>311</b>
17.1	Il modello d'errore . . . . .	311
17.1.1	Esempi . . . . .	311
17.2	Il modello di regressione . . . . .	319
17.3	La Regressione Lineare . . . . .	320
17.3.1	Il modello di regressione lineare semplice . . . . .	320
17.3.2	La Storia del Metodo . . . . .	321
17.3.3	Gli assunti del modello di regressione . . . . .	322
17.3.4	Il metodo dei minimi quadrati . . . . .	328
17.3.5	La distanza di una retta dai punti (il metodo dei minimi quadrati) . . . . .	328
17.3.6	Soluzioni dei minimi quadrati . . . . .	330
17.4	La covarianza . . . . .	331
17.4.1	Calcolo della covarianza . . . . .	332
17.4.2	Interpretazione della Covarianza . . . . .	333
17.4.3	Altre proprietà della covarianza . . . . .	334
17.4.4	Campo di variazione della covarianza . . . . .	334
17.4.5	Calcolo in colonna . . . . .	336
17.4.6	Calcolo di $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$ . . . . .	336
17.5	Proprietà della retta dei minimi quadrati . . . . .	337
17.5.1	Calcolo di $\hat{y}_i$ e $\hat{\varepsilon}_i$ . . . . .	338
17.6	Il coefficiente di Correlazione . . . . .	339
17.6.1	Proprietà di $r$ . . . . .	339
17.7	Scomposizione della varianza . . . . .	344
17.8	Il coefficiente di determinazione lineare $R^2$ . . . . .	345
17.8.1	Interpretazione di $r^2$ . . . . .	346
17.8.2	Scomposizione della varianza sui dati di esempio . . . . .	347
17.9	Stima di $\sigma_{\varepsilon}^2$ . . . . .	350
17.10	Statistiche Sufficienti del Modello di Reegressione . . . . .	350
<b>18</b>	<b>Inferenza e Diagnostica sul Modello di Regressione Lineare</b>	<b>353</b>
18.1	Teorema di Gauss-Markov . . . . .	353
18.2	La previsione $\hat{Y}$ . . . . .	353
18.3	Standard Errors e Stima degli SE . . . . .	353
18.4	Inferenza su $\beta_0$ e $\beta_1$ e su $\hat{Y}$ . . . . .	354
18.4.1	Interpolazione e Estrapolazione . . . . .	356
18.4.2	Intervalli di Confidenza per $\beta_0$ , $\beta_1$ e $\hat{Y}$ . . . . .	356
18.4.3	Test per $\beta_0$ , e $\beta_1$ . . . . .	357
18.4.4	Esempio sui 4 punti . . . . .	357

18.4.5	Calcolo dei valori osservati e dei valori critici . . . . .	358
18.4.6	Se $n = 10$ . . . . .	358
18.5	Il modello di regressione lineare multiplo . . . . .	359
18.6	Analisi dei Residui . . . . .	360
18.6.1	Diagramma dei residui e retta dei residui . . . . .	360
18.6.2	Lettura del Diagramma dei residui . . . . .	361
18.6.3	Normal QQ plot . . . . .	364
18.7	Punti di leva, Outliers e punti influenti . . . . .	365
18.7.1	Punti di leva . . . . .	366
18.7.2	I residui Studentizzati . . . . .	368
18.8	Relazione tra $Y X$ e $X Y$ . . . . .	369
18.8.1	Relazione tra gli $\alpha$ i $\beta$ ed $r$ . . . . .	370
18.8.2	Regressione sulle variabili standardizzate . . . . .	370
<b>19</b>	<b>Il Test Chi-Quadro</b> . . . . .	<b>373</b>
19.1	Test di Significatività pura . . . . .	373
19.2	Associazione tra due variabili . . . . .	373
19.2.1	Le tavole di contingenza . . . . .	373
19.2.2	Un passo indietro: il concetto di indipendenza . . . . .	374
19.2.3	Estensione a più di due modalità . . . . .	375
19.2.4	Esempio . . . . .	375
19.2.5	Dalla popolazione al campione . . . . .	376
19.2.6	Notazione formale per le tavole di contingenza . . . . .	376
19.2.7	Le frequenze sono stime dei $\pi$ . . . . .	377
19.2.8	Esempio (continua) . . . . .	378
19.3	L'indice $\chi^2$ . . . . .	378
19.4	Test per l'ipotesi di indipendenza . . . . .	379
19.4.1	La statistica test $\chi^2$ . . . . .	379
19.4.2	Esempio . . . . .	380
19.4.3	I gradi di libertà . . . . .	381
19.5	Misure di Conformità . . . . .	382
19.6	Il $\chi^2$ come misura di conformità . . . . .	383
19.6.1	Esempio: Scostamento da una uniforme . . . . .	384
19.6.2	Esempio: Scostamento da una popolazione . . . . .	385
19.6.3	Esempio: scostamento da una Poisson . . . . .	385
<b>IV</b>	<b>Appendice</b> . . . . .	<b>387</b>
<b>A</b>	<b>Glossario della notazione</b> . . . . .	<b>389</b>
A.1	Statistica descrittiva . . . . .	389
A.2	Calcolo delle probabilità . . . . .	389
A.3	Inferenza statistica . . . . .	390
A.4	Simboli Matematici . . . . .	390

<b>B Riepilogo</b>	<b>391</b>
B.1    Statistica Descrittiva . . . . .	391
B.2    Probabilità . . . . .	395
B.2.1    Variabili Casuali . . . . .	398
B.2.2    Teorema del Limite Centrale . . . . .	401
B.2.3    Statistiche Campionarie . . . . .	401
B.3    Inferenza . . . . .	403
B.3.1    Teoria della stima . . . . .	403
B.3.2    Teoria dei Test . . . . .	408
B.3.3    Regressione . . . . .	410
<b>C Richiami sugli Operatori Sommatoria e Produttoria</b>	<b>415</b>
C.1    Operatore Sommatoria . . . . .	415
C.2    Operatore Produttoria . . . . .	417
<b>D Richiami di Calcolo Combinatorio</b>	<b>419</b>
D.1    Scelte indipendenti con ripetizione: $k^n$ . . . . .	419
D.2 $n = k$ Palline numerate: permutazioni . . . . .	419
D.3 $n > k$ Palline numerate: disposizioni senza ripetizione . . . . .	420
D.4 $n > k$ Palline non numerate: coefficienti binomiale . . . . .	421
D.5    Il coefficiente binomiale . . . . .	421
<b>E Richiami di Matematica</b>	<b>423</b>
E.1    Richiami sui logaritmi . . . . .	423
E.2    Richiami di Analisi . . . . .	423
E.2.1    Note sulla cardinalità degli insiemi . . . . .	423
E.2.2    Funzioni Reali e loro derivate . . . . .	424
<b>F Com'è Realizzato il Libro</b>	<b>425</b>
F.1    R: A Language and Environment for Statistical Computing . . . . .	426
F.1.1    R come calcolatrice . . . . .	426
F.1.2    Operatori Speciali . . . . .	427
F.1.3    Vettori e matrici . . . . .	428
F.1.4    Liste e dataframe . . . . .	431
F.1.5    Classi e Oggetti . . . . .	432
F.1.6    I grafici . . . . .	433
F.1.7    Le Funzioni in R . . . . .	440
<b>G Funzioni usate nel libro</b>	<b>451</b>
G.1    Installazione del pacchetto . . . . .	451
G.2    Statistica descrittiva . . . . .	451
G.2.1    Media e Varianza . . . . .	451
G.2.2    Istogramma . . . . .	452
G.3    Probabilità . . . . .	455

G.3.1	Tavole della somma . . . . .	455
G.3.2	Binomiale . . . . .	456
G.3.3	Poisson . . . . .	457
G.3.4	Normale . . . . .	458
G.3.5	TLC . . . . .	460
G.4	Inferenza . . . . .	462
G.4.1	Intervalli di Confidenza . . . . .	462
G.4.2	Test . . . . .	463
G.4.3	Regressione . . . . .	480
G.5	Esempi . . . . .	484



# Avvertenza

Questo lavoro è un work in progress, questa non è la versione definitiva, sconsiglio di stampare tutto.

Appunti di Statistica © 2025 di Patrizio Frederic è distribuito sotto licenza CC BY-NC-ND 4.0  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

You are free to: Share — copy and redistribute the material in any medium or format The licensor cannot revoke these freedoms as long as you follow the license terms. Under the following terms: Attribution — You must give appropriate credit, provide a link to the license, and indicate if changes were made. You may do so in any reasonable manner, but not in any way that suggests the licensor endorses you or your use.

NonCommercial — You may not use the material for commercial purposes.

NoDerivatives — If you remix, transform, or build upon the material, you may not distribute the modified material.

No additional restrictions — You may not apply legal terms or technological measures that legally restrict others from doing anything the license permits.



# Introduzione

Durante il lock down della prima ondata, nel marzo del 2020, ho iniziato a trascrivere i miei appunti, raccolti negli ultimi 17 anni, in diapositive. Questa è una rielaborazione di quelle diapositive a cui è stato aggiunto parte dell'eserciziario realizzato con Michele Lalla. L'esposizione degli argomenti ricalca il corso di Statistica che con Michele Lalla abbiamo progettato per i corsi di CLEF e CLEA nel periodo che va dal 2008 al 2019, al quale ho portato alcune modifiche di forma e qualche aggiunta.

Questo manoscritto è diviso in tre parti, la prima dedicata alla statistica descrittiva nella quale vengono date le nozioni di base di descrizione di una popolazione, le sue rappresentazioni grafiche, la media e la variabilità. Nella seconda parte verranno date le nozioni di base di teoria e calcolo delle probabilità. Dal concetto di evento fino alle principali variabili casuali, il teorema del limite centrale e la distribuzione delle principali statistiche campionarie. Nella terza e ultima parte verranno sviluppati i principi di base di inferenza classica, dalla stima puntuale alla stima intervallare, la teoria dei test, il modello di regressione lineare e il test del chi-quadro.

Questo materiale, che non è ancora un libro, è da considerarsi il canovaccio d'appunti sul quale costruisco le mie lezioni. Non è da ritenersi alternativo alle lezioni in aula o ad un libro di testo. È ancora incompleto e disseminato di errori e imprecisioni.

Un ringraziamento speciale a Michele Lalla, amico, collega e maestro.

Bologna, il 06-02-2026.



---

# Parte I

# Statistica Descrittiva

---



# Cos'è la Statistica?

1

Scrivono Agresti e Franklin (2007), nel loro celebre libro:

“Statistics is the art and science of designing studies and analyzing the data that those studies produce. Its ultimate goal is translating data into knowledge and understanding of the world around us. In short, **statistics is the art and science of learning from data**”.

La statistica è l'arte e la scienza di pianificare la raccolta e l'analisi dei dati che tali ricerche producono. Il suo fine è di trasformare i dati in conoscenza e comprensione del mondo circostante. In sintesi: **La statistica è l'arte e la scienza di imparare dai dati.**

*Agresti, A., and Franklin, C. (2007), Statistics: the Art and Science of Learning from Data, Upper Saddle River, Pearson Prentice Hall.*

La Statistica Descrittiva si occupa di analizzare e riassumere i dati osservati, con l'obiettivo di descriverne struttura e variabilità. La Statistica Inferenziale si occupa invece di estendere l'informazione contenuta nei dati, per formulare conclusioni o previsioni che riguardano la popolazione di riferimento, tema che affronteremo nella terza parte del libro.

Definiremo dapprima cosa sono i dati, quindi, cosa rappresentano, come si classificano e come si raccolgono.

## 1.1 I Dati

In latino *datum* significa ciò che è dato, un fatto, un evento osservato. La chiusura dell'indice Dow Jones il 12 novembre 2025 è stata 48 256.29 punti, la temperatura media registrata a Milano il 1 gennaio 2025 è stata 4 °C con valori tra –2 °C e 8 °C, il tasso di disoccupazione in Italia a marzo 2024 era 7.2%, la concentrazione atmosferica di CO misurata a Mauna Loa ad agosto 2025 era 425.48 ppm, il numero di nati in Emilia-Romagna nel 2023 è stato 28 568, il prezzo medio della benzina in Italia a settembre 2024 era circa 1.87 €/litro.

Quindi i dati sono collezioni strutturate di fatti osservati, codificati in modo opportuno, che descrivono un fenomeno.

Esempi di collezioni di dati sono le chiusure giornaliere del Dow Jones in un anno; le temperature orarie di Milano dal 1960; i tassi di disoccupazione trimestrali dei Paesi europei; le concentrazioni mensili di CO dal 1958; i redditi annuali delle famiglie italiane nel 2023; le durate medie dei ricoveri ospedalieri in una regione.

La Statistica ha come oggetto di studio i dati, dalla loro definizione fino alla sintesi delle conclusioni. Ovvero la statistica si occupa di definire i dati di interesse, di organizzarne la raccolta, di elaborarli e di sintetizzare le conclusioni.

## 1.2 I Fenomeni Collettivi

In greco fenomeno deriva da φαίνεσθαι (phaínesthai [fa'inesthai]), che significa "apparire", "mostrarsi". Con questo termine si indica qualunque processo naturale o fisico che si manifesta e può essere osservato o misurato: la formazione delle nuvole, l'evaporazione dell'acqua, la combustione, la diffusione di una sostanza, l'espansione termica dei metalli, l'elettrolisi dell'acqua.

Quando lo studio riguarda non un singolo caso, ma una pluralità di elementi simili tra loro, parliamo di fenomeno collettivo. Esempi di fenomeni collettivi sono la denatalità e l'invecchiamento della popolazione, l'occupazione, la dinamica dei salari, la risposta dei pazienti a un trattamento, la diffusione di una malattia infettiva, la qualità dei prodotti in un processo industriale, la produttività agricola, il comportamento degli animali in un ecosistema, l'andamento dei flussi di traffico in un'area urbana, le preferenze dei consumatori, le prestazioni sportive di un atleta e tanti altri.

Per esempio la denatalità studia il calo delle nascite osservando: il numero di nati per ciascun anno, la popolazione residente, l'età delle madri e alcuni indicatori già calcolati dalle statistiche ufficiali, come il tasso di natalità (nati per 1 000 abitanti) e il tasso di fecondità totale (numero medio di figli per donna). A questi si affiancano spesso serie storiche più lunghe che permettono di osservare l'evoluzione del fenomeno nel tempo. Il fenomeno è collettivo nel senso che non riguarda la singola donna in età fertile, ma l'intero collettivo.

I dati sono quindi lo strumento attraverso cui i fenomeni collettivi diventano osservabili e analizzabili. Un fenomeno collettivo non è accessibile direttamente nella sua interezza, ma solo attraverso le tracce che lascia sotto forma di osservazioni ripetute, misurazioni, registrazioni. I dati permettono di passare dall'osservazione di singoli casi alla comprensione di un comportamento d'insieme, rendendo possibile lo studio di regolarità, andamenti medi e variabilità che caratterizzano il collettivo nel suo complesso.

È importante tuttavia chiarire fin da subito che non tutti i dati hanno una struttura semplice o uniforme. In molti ambiti le informazioni possono essere organizzate in forme molto complesse, come sequenze temporali ad alta frequenza, immagini, segnali, reti di relazioni, testi o dati spaziali. Nel seguito di questo testo ci concentreremo su alcune strutture di dati particolarmente comuni e rilevanti per l'analisi dei fenomeni economici e sociali, perché consentono di introdurre in modo chiaro i concetti fondamentali della statistica. Queste strutture rappresentano una parte ampia e importante delle applicazioni, ma non esauriscono tutte le possibili forme che i dati possono assumere.

## 1.3 Unità, Variabili e Popolazioni Statistiche

L'unità statistica è l'elemento fondamentale dell'osservazione. È l'entità su cui si rilevano una o più informazioni e può assumere forme molto diverse a seconda del contesto di studio: una persona, una famiglia, un'impresa, un prodotto, un ricovero ospedaliero, un comune, un animale osservato in natura, o qualsiasi altra entità per la quale sia possibile effettuare una misurazione o una classificazione.

**Definizione 1.3.1 (Unità Statistica).** Si definisce **unità statistica** l'entità su cui rilevare una o più informazioni

A titolo di esempio, l'unità statistica può essere un singolo individuo in un'indagine sulle preferenze dei consumatori, un paziente in uno studio epidemiologico, una famiglia in un'indagine sui consumi, un'impresa in uno studio

sugli investimenti, un comune nel rilevare indicatori demografici, oppure un componente prodotto in uno studio sulla qualità industriale.

Su ciascuna unità statistica si osservano uno o più aspetti, detti variabili o caratteri statistici. La variabile rappresenta ciò che viene misurato o classificato sull'unità e può assumere valori diversi da un'unità all'altra.

**Definizione 1.3.2 (Variabile Statistica).** Si definisce **variabile statistica** l'aspetto dell'unità statistica che si osserva o misura.

Le variabili possono descrivere qualità, quantità oppure grandezze fisiche o tecniche. Ad esempio, per un individuo possiamo osservare il reddito mensile, il titolo di studio o il numero di acquisti annuali; per un paziente la pressione arteriosa, la presenza o assenza di una patologia o il tempo di recupero; per una famiglia la spesa mensile in alimentari o il numero di componenti; per un'impresa il fatturato annuo o il numero di dipendenti; per un comune la popolazione residente o il tasso di natalità; per un componente prodotto il peso, la resistenza meccanica o il tempo di funzionamento prima del guasto.

Ogni variabile è caratterizzata dall'insieme dei valori o delle modalità che può assumere. Alcune variabili hanno un numero limitato di modalità, come il genere o il titolo di studio, altre possono assumere un numero potenzialmente elevato di valori, come il reddito o l'età.

Le **modalità** di una variabile sono i diversi valori o le diverse categorie che la variabile può assumere quando viene osservata sulle unità statistiche.

**Definizione 1.3.3 (Modalità).** Si definiscono **modalità** di una variabile i diversi valori o categorie che essa può assumere sulle unità statistiche.

Se, ad esempio, la variabile di interesse osservata su un singolo individuo è il sesso, allora la variabile potrà assumere due sole modalità, Femmina e Maschio. Se la variabile è il titolo di studio, le modalità saranno le diverse categorie di istruzione, come scuola primaria, scuola secondaria, diploma e laurea. Se invece la variabile è il numero di figli, le modalità coincidono con i valori numerici osservabili, come 0, 1, 2, 3 e così via. Nel caso del reddito mensile, le modalità sono i possibili valori monetari che il reddito può assumere e costituiscono un insieme molto ampio, in linea di principio continuo. Analogamente, se si osserva l'età di una persona, le modalità corrispondono ai valori numerici dell'età, misurata in anni o in frazioni di anno.

Nel caso di variabili qualitative, le modalità coincidono con le categorie possibili; nel caso di variabili quantitative, le modalità coincidono con i valori numerici osservabili.

In base alla natura delle modalità, le variabili si distinguono innanzitutto in **qualitative** e **quantitative**. Le variabili qualitative descrivono qualità o categorie e non sono associate a una misurazione numerica in senso stretto. Possono essere **nominali**, quando le modalità sono solo diverse tra loro ma non ordinabili, come il genere, lo stato civile o la regione di provenienza, oppure **ordinali**, quando le modalità possono essere ordinate secondo un criterio naturale, come il titolo di studio, il livello di qualifica o il grado di soddisfazione.

Un caso particolarmente comune di variabili ordinali è rappresentato dalle **scale di valutazione**, come le scale di tipo Likert, spesso utilizzate nelle indagini sociali ed economiche, in cui agli intervistati viene chiesto di esprimere un giudizio su una scala discreta, ad esempio da "per nulla soddisfatto" a "molto soddisfatto". Pur essendo frequentemente codificate con numeri, queste variabili mantengono una natura ordinale, poiché le distanze tra le modalità non hanno un significato quantitativo preciso.

Le variabili quantitative descrivono invece quantità misurabili. Possono essere **discrete**, quando assumono valori in corrispondenza di numeri interi, come il numero di figli, il numero di interventi o il voto di laurea, oppure **continue**, quando possono assumere qualunque valore in un intervallo dei numeri reali, come il reddito, il consumo, il risparmio, l'altezza o la durata di un processo.

In alcuni contesti si distingue inoltre tra variabili misurate su **scale a intervalli** e **scale a rapporti**. Le prime, come la temperatura espressa in gradi Celsius, consentono confronti sulle differenze ma non sui rapporti, mentre le seconde, come il reddito o il peso, hanno uno zero significativo e permettono confronti sia in termini di differenza sia di proporzione. Questa distinzione non sarà formalmente utilizzata nel corso, ma è utile per comprendere i limiti e le possibilità delle diverse misurazioni.

La popolazione statistica, o collettivo statistico, è l'insieme di tutte le unità statistiche che soddisfano la definizione del fenomeno studiato. Rappresenta la totalità teorica degli elementi a cui si riferiscono le osservazioni, come tutti gli studenti di un corso, tutte le imprese di un settore, tutti i ricoveri in un ospedale in un certo intervallo di tempo, tutti i pezzi prodotti da una linea industriale o tutte le misurazioni effettuate da un sensore.

**Definizione 1.3.4 (Popolazione Statistica).** Si definisce **Popolazione Statistica** l'insieme di tutte le unità statistiche di riferimento.

Le unità che compongono una popolazione sono omogenee rispetto alla definizione del collettivo, ma differiscono nei valori delle variabili osservate. Questa differenza prende il nome di variabilità ed è l'elemento che caratterizza i fenomeni collettivi e costituisce l'oggetto principale di studio della statistica.

A seconda del contesto, una popolazione può essere **finita**, quando il numero delle unità è noto e determinabile, come nel caso degli aventi diritto al voto o delle imprese iscritte alla Camera di Commercio di una provincia, oppure **infinita**, quando il numero delle unità non è noto o non è delimitabile in modo preciso, come nel caso dei consumatori di una certa marca o delle imprese che adottano una determinata tecnologia.

## 1.4 Regolarità e Variabilità

La popolazione statistica è dunque l'insieme delle unità accomunate da una caratteristica fissa, mentre le osservazioni delle caratteristiche d'interesse (le variabili) variano tra unità e unità.

La statistica studia proprio questa variabilità e le tendenze d'insieme: mira a individuare regolarità che descrivano il comportamento della popolazione, riconoscendo che ogni misura presenta una componente di variabilità intrinseca.

La statistica offre concetti, metodi e strumenti per analizzare dati che mostrano variabilità, e si muove lungo due obiettivi complementari, uno conoscitivo e uno predittivo.

### 1.4.1 Obiettivo conoscitivo

Mira a comprendere l'andamento generale di un fenomeno collettivo, cogliendo le regolarità che emergono nell'insieme e quantificando la variabilità che le accompagna. È un momento conoscitivo, quasi contemplativo, in cui si osserva il comportamento del collettivo per capire come si organizza e quali caratteristiche lo descrivono con maggiore stabilità. Si cerca di spiegare il fenomeno, distinguendo ciò che è regolare da ciò che varia tra le unità.

$$\text{Fenomeno} = \text{Spiegazione} + \text{Variabilità}$$

In estrema sintesi

**DATI → ANALISI → STRUTTURA + VARIABILITÀ**

Ad esempio immaginiamo uno studio sulle differenze di reddito per titolo di studio. Supponiamo di osservare i redditi annuali di una popolazione di individui occupati e di distinguere tra laureati e non laureati. Dall'analisi dei dati può emergere che, ad esempio, il 78% dei laureati guadagna più di 1.8 mila euro al mese, mentre tra i non laureati questa percentuale scende al 18%. Questa informazione descrive una regolarità di popolazione: il titolo di studio è associato a una diversa distribuzione dei redditi. Allo stesso tempo evidenzia la presenza di variabilità, perché non tutti i laureati superano quella soglia e alcuni non laureati la superano. La statistica non afferma nulla sul reddito di un singolo individuo, ma descrive l'andamento complessivo dei due gruppi, mettendo in luce una struttura media accompagnata da una dispersione nei valori individuali.

### 1.4.2 Obiettivo predittivo

Dall'altro lato la statistica utilizza questa comprensione per scopi operativi, perché le regolarità identificate possono essere impiegate per formulare previsioni su casi non osservati. La variabilità viene usata per quantificare con quale margine d'errore tali previsioni possano essere considerate attendibili.

$$\text{Futuro} = \text{Previsione} + \text{Errore}$$

In estrema sintesi

**DATI → ANALISI → PREVISIONE + ERRORE**

Ad esempio consideriamo la gestione dei posti letto in un reparto ospedaliero. Supponiamo di disporre dei dati storici sui ricoveri, come la durata della degenza dei pazienti, il tipo di patologia e l'età. Dall'analisi di questi dati emerge una struttura generale del fenomeno, per esempio che la durata media del ricovero è di alcuni giorni, ma con una variabilità significativa tra pazienti. Utilizzando queste informazioni, la statistica permette di prevedere, per un certo periodo futuro, il numero di giorni in cui un posto letto sarà occupato. Questa previsione non è mai esatta, perché la durata dei singoli ricoveri varia da paziente a paziente, ma può essere accompagnata da un margine d'errore che quantifica l'incertezza. In questo modo la previsione non riguarda il singolo paziente, ma il comportamento complessivo del reparto, e consente di pianificare risorse e turni tenendo conto sia delle regolarità osservate sia della variabilità intrinseca del fenomeno.

Comprendere e agire sono due aspetti complementari: prima si cerca l'ordine che emerge dai dati, poi lo si usa per orientarsi in presenza di incertezza. In senso puramente analogico questa distinzione richiama due funzioni tradizionali del pensiero filosofico, una più contemplativa, rivolta a comprendere l'ordine delle cose, e una più operativa, in cui la comprensione acquisita diventa strumento per decidere.

## 1.5 Dati e Fonti

La statistica non è legata a una disciplina specifica, ma opera sempre all'interno di un contesto teorico che ne orienta le domande e l'interpretazione dei risultati. Le discipline scientifiche ed economico-sociali si fondano infatti su un intreccio di modelli teorici ed evidenze empiriche: la teoria suggerisce quali fenomeni osservare e quali relazioni indagare, mentre i dati forniscono il riscontro empirico su cui costruire e valutare le analisi. La statistica lavora sulle evidenze empiriche, ma non può prescindere dal quadro concettuale in cui queste sono generate e interpretate.

I dati possono provenire da fonti estremamente eterogenee. Possono essere prodotti appositamente per rispondere a una domanda di ricerca, ad esempio attraverso esperimenti, indagini o rilevazioni, ma possono anche essere dati già esistenti, raccolti per altri scopi e successivamente riutilizzati. Appartengono a questa seconda categoria, per esempio, le statistiche ufficiali, i dati amministrativi, i bilanci aziendali, i dati finanziari, i registri sanitari, i dati ambientali o le tracce digitali generate dalle attività quotidiane.

In alcuni casi i dati vengono quindi prodotti, in altri cercati, recuperati o integrati a partire da archivi e basi di dati già disponibili. La statistica non tratta questi casi come equivalenti dal punto di vista metodologico, perché la natura dei dati, le variabili osservate e le ipotesi teoriche sottostanti influenzano le analisi che è possibile condurre. Tuttavia, essa fornisce un linguaggio comune per descrivere e analizzare dati diversi, adattando concetti e strumenti alla struttura delle informazioni e agli obiettivi dello studio.

### 1.5.1 Dati Sperimentali e Dati Osservazionali

Le evidenze empiriche su cui lavora la statistica possono essere ricondotte, in prima approssimazione, a due grandi contesti: quello dei dati **sperimentali** e quello dei dati **osservazionali**. La distinzione non riguarda solo il modo in cui i dati vengono raccolti, ma il tipo di rapporto che si instaura tra teoria, osservazione e realtà.

Nei dati *sperimentali* l'osservazione è guidata da un disegno esplicito. A partire da una teoria o da un'ipotesi di lavoro si decide come intervenire sul fenomeno, quali fattori controllare e quali risultati osservare. L'esperimento nasce con l'obiettivo di isolare specifici meccanismi e di valutare l'effetto di una o più variabili mantenendo, per quanto possibile, costanti le altre condizioni. Un esempio tipico è uno studio clinico in cui si confrontano due gruppi di pazienti, uno trattato con un nuovo farmaco e uno con un placebo, osservando differenze negli esiti di salute. In ambito industriale, rientrano in questa categoria i test di qualità in cui si modificano deliberatamente alcune caratteristiche di un processo produttivo per valutarne l'impatto sul numero di difetti. Anche in economia e nelle scienze sociali si incontrano dati sperimentali, ad esempio negli esperimenti di laboratorio sul comportamento dei consumatori o negli studi randomizzati per valutare l'efficacia di una politica pubblica.

Nei dati *osservazionali*, invece, non si interviene direttamente sul fenomeno, ma lo si osserva così come si manifesta nella realtà. Le informazioni vengono raccolte registrando eventi, comportamenti o caratteristiche che emergono spontaneamente, senza possibilità di controllo sulle condizioni iniziali. Appartengono a questa categoria la maggior parte dei dati economici e sociali: le statistiche ufficiali sulla disoccupazione o sull'inflazione, i redditi dichiarati dalle famiglie, i bilanci delle imprese, i dati finanziari sui prezzi di mercato, i flussi di traffico urbano o le serie storiche climatiche. In questi casi la teoria non guida un intervento sul fenomeno, ma orienta l'interpretazione di dati che riflettono processi complessi, influenzati simultaneamente da molti fattori.

In entrambi i contesti la statistica fornisce strumenti per organizzare e analizzare i dati, ma il significato dei risultati e il tipo di conclusioni che è possibile trarre dipendono strettamente dal modo in cui i dati sono stati generati.

Nei dati sperimentali l'attenzione è spesso rivolta alla valutazione di effetti causali, come l'effetto di un trattamento o di un intervento. Nei dati osservazionali, invece, l'analisi si concentra prevalentemente sulle associazioni e sulle regolarità empiriche che emergono nei dati. Questa distinzione non implica una gerarchia di valore tra i due approcci, ma riflette la diversa natura dei fenomeni studiati e i vincoli imposti dalla realtà.

## 1.5.2 I Dati Economici

L'economia è una disciplina che combina modelli teorici ed evidenze empiriche. I modelli forniscono schemi interpretativi per comprendere il funzionamento dei mercati, delle istituzioni e dei comportamenti individuali e collettivi; i dati permettono di confrontare queste costruzioni teoriche con la realtà osservata. I dati economici descrivono fenomeni collettivi complessi, influenzati simultaneamente da molti fattori, spesso non controllabili e interdipendenti, e si presentano quindi come il risultato di processi storici, sociali e istituzionali.

A differenza di quanto avviene in molti contesti sperimentali, i dati economici sono nella maggior parte dei casi osservazionali: essi non nascono da un intervento controllato sul fenomeno, ma dalla registrazione di attività economiche che si svolgono nel tempo. Prezzi, redditi, occupazione, produzione, consumi, investimenti sono il risultato di decisioni individuali e collettive che avvengono in un contesto dato, e che vengono osservate e misurate *ex post*. Questo rende i dati economici particolarmente ricchi di informazione, ma anche intrinsecamente eterogenei e variabili.

### 1.5.2.1 Le indagini statistiche ufficiali

Una parte centrale dei dati economici è prodotta dagli enti di statistica ufficiale. In Italia il principale riferimento è l'ISTAT, mentre a livello europeo e internazionale operano istituzioni come Eurostat, l'OCSE e le Nazioni Unite. Questi enti hanno il compito di raccogliere, organizzare e diffondere informazioni statistiche su popolazione, lavoro, redditi, prezzi, produzione e su molti altri aspetti della vita economica e sociale.

Le statistiche ufficiali sono costruite con l'obiettivo di descrivere fenomeni che riguardano intere popolazioni di riferimento, come la popolazione residente, le famiglie, le imprese o i lavoratori. In alcuni casi l'osservazione avviene attraverso censimenti, cioè rilevazioni complete che coinvolgono tutte le unità della popolazione, come nel caso del censimento della popolazione. Più frequentemente, tuttavia, le informazioni sono raccolte attraverso indagini campionarie, che osservano solo una parte delle unità e utilizzano metodi statistici per estendere i risultati all'intero collettivo.

Le indagini statistiche ufficiali seguono procedure rigorose e standardizzate, che consentono di confrontare i dati nel tempo e tra territori diversi. Esse si basano su definizioni precise delle unità statistiche e delle variabili osservate, su periodi di riferimento chiaramente specificati e su criteri condivisi di classificazione e misura. Questo rende le statistiche ufficiali una fonte fondamentale non solo per l'analisi economica, ma anche per il dibattito pubblico e per il supporto alle decisioni di politica economica.

Nei paragrafi successivi utilizzeremo le statistiche ufficiali come riferimento naturale per introdurre concetti come censimento e campionamento, e per discutere alcune delle principali strutture dei dati economici.

### 1.5.2.2 Censimento e campionamento

Nel descrivere i fenomeni economici, l'obiettivo ideale sarebbe osservare tutte le unità che compongono la popolazione di riferimento. Quando ciò avviene si parla di **censimento**: una rilevazione completa che coinvolge l'intero

collettivo oggetto di studio. Esempi tipici sono il censimento della popolazione residente o il censimento delle imprese, che mirano a fornire una fotografia esaustiva della struttura economica e sociale in un dato momento.

Nella pratica, tuttavia, il censimento rappresenta un'eccezione. I costi elevati, i tempi lunghi di raccolta ed elaborazione e la complessità organizzativa rendono spesso impraticabile l'osservazione completa di tutte le unità. Per questo motivo, la maggior parte delle informazioni statistiche in ambito economico deriva da **indagini campionarie**, in cui i dati vengono raccolti solo su un sottoinsieme della popolazione, detto **campione**.

Il campionamento non è una scelta di ripiego, ma una strategia consapevole che consente di ottenere informazioni attendibili riducendo tempi e costi. L'idea centrale è che, se il campione è scelto in modo appropriato, le sue caratteristiche riflettono, entro un certo margine di incertezza, quelle della popolazione di riferimento. La statistica fornisce gli strumenti concettuali per quantificare questa incertezza e per valutare la qualità delle informazioni ottenute.

Per poter selezionare un campione è necessario disporre di una **lista** delle unità che compongono la popolazione, detta anche base di campionamento. La lista rappresenta il collegamento operativo tra la popolazione teorica e le unità effettivamente osservabili. In ambito economico, tali liste possono essere costituite, ad esempio, dagli archivi anagrafici, dai registri delle imprese o dagli elenchi amministrativi.

La distinzione tra censimento e campionamento richiama inoltre la natura della popolazione statistica. Quando il numero delle unità è noto e delimitato, come nel caso delle famiglie residenti in una regione o delle imprese iscritte a un registro, la popolazione è detta **finita**. In altri casi, come quando si considerano i consumatori di un determinato prodotto o i potenziali utenti di un servizio, la popolazione è più difficilmente delimitabile e viene trattata come **infinita** o concettuale. Questa distinzione non è solo formale, ma influenza il modo in cui i dati vengono interpretati e analizzati.

#### Esempio di indagini ufficiali

- **L'Indagine sulle forze di lavoro (ISTAT)** ha l'obiettivo di stimare il tasso di occupazione, disoccupazione e inattività della popolazione residente in Italia. La popolazione di riferimento è costituita da tutte le persone residenti in famiglie, escluse le collettività. L'indagine è continua e si basa su un campione a rotazione di circa 77.000 famiglie ogni trimestre, selezionate casualmente. I questionari raccolgono informazioni su attività lavorativa, ricerca di lavoro, orari, contratti e condizioni lavorative.
- **L'Indagine sui consumi delle famiglie (ISTAT)** rileva le spese sostenute per beni e servizi, allo scopo di descrivere i comportamenti di consumo e aggiornare il panier per l'indice dei prezzi. La popolazione è costituita dalle famiglie residenti in Italia, e il campione include oltre 30.000 famiglie distribuite lungo l'anno. Le famiglie selezionate devono compilare un diario giornaliero delle spese e rispondere a interviste dettagliate, il che rende l'indagine particolarmente impegnativa.
- **L'indagine EU-SILC (coordinata da Eurostat, realizzata in Italia da ISTAT)** fornisce informazioni su redditi, condizioni abitative, povertà e diseguaglianza. La popolazione è costituita dalle famiglie residenti nei paesi europei. In Italia, il campione supera le 20.000 famiglie, con interviste condotte annualmente e in parte replicate su base panel. I questionari sono armonizzati a livello europeo per consentire il confronto tra paesi.
- **L'indagine PISA (OCSE)** valuta le competenze degli studenti quindicenni in lettura, matematica e scienze, con l'obiettivo di confrontare i sistemi educativi dei paesi partecipanti. La popolazione di riferimento

è costituita dagli studenti iscritti al secondo ciclo dell'istruzione secondaria, indipendentemente dall'anno frequentato. In Italia, il campione coinvolge circa 11.000 studenti ogni tre anni, selezionati da un insieme rappresentativo di scuole. I questionari comprendono sia prove cognitive standardizzate sia sezioni dedicate al contesto scolastico, familiare e motivazionale, permettendo analisi multilivello sul rendimento e le disuguaglianze educative.

- **L'indagine PIAAC (OCSE)** valuta le competenze fondamentali degli adulti tra i 16 e i 65 anni, in particolare la capacità di comprendere testi, usare strumenti numerici e risolvere problemi. In Italia, la popolazione campionata è estratta dai registri anagrafici e comprende circa 5.000 individui. Le interviste includono sia un modulo socio-demografico sia prove individuali computerizzate, somministrate in centri di test.
- **L'indagine TALIS (OCSE)** raccoglie informazioni sulle condizioni di lavoro degli insegnanti e dei dirigenti scolastici, esplorando aspetti come la formazione, la soddisfazione professionale, le pratiche didattiche e il clima scolastico. La popolazione di riferimento è costituita dagli insegnanti delle scuole secondarie inferiori. Anche qui il campione è probabilistico e i questionari, somministrati in modo standardizzato, permettono confronti tra paesi.

Queste analisi si basano su campioni estratti da popolazioni note e completamente enumerate. Il disegno campionario, il calcolo dei pesi e l'analisi dei dati tengono esplicitamente conto della struttura finita della popolazione e della complessità del piano di campionamento. La qualità dell'inferenza dipende in larga parte dalla precisione con cui questi aspetti sono progettati e implementati.

### 1.5.2.3 Struttura temporale dei dati: cross section, longitudinali e panel

Un aspetto fondamentale dei dati economici riguarda la loro **struttura temporale**, cioè il modo in cui le osservazioni si distribuiscono nel tempo. La dimensione temporale non è un semplice dettaglio tecnico, ma incide profondamente sul tipo di analisi che è possibile svolgere e sulle domande a cui si può rispondere. In base a come il tempo entra nella raccolta dei dati, si distinguono tre grandi tipologie: dati cross section, dati longitudinali e dati panel.

I **dati cross section** descrivono un insieme di unità statistiche osservate in uno stesso istante o in un intervallo di tempo molto breve, che può essere considerato come un "momento". Essi forniscono una fotografia del fenomeno in un dato periodo. Un esempio tipico è un'indagine sui redditi delle famiglie in un certo anno, oppure una rilevazione sui prezzi praticati dalle imprese in una determinata settimana. In questo tipo di dati il confronto avviene tra unità diverse nello stesso momento, mentre la dimensione temporale rimane sullo sfondo.

Le **serie storiche** riguardano invece l'osservazione ripetuta nel tempo di uno stesso fenomeno, senza che sia necessario seguire le stesse unità individuali. Rientrano in questa categoria, ad esempio, le serie storiche del tasso di disoccupazione di un Paese, dell'inflazione mensile o del prodotto interno lordo trimestrale. In questo caso l'attenzione è rivolta all'evoluzione nel tempo di una variabile aggregata o di un indicatore, e l'unità statistica è spesso il periodo temporale stesso.

I **dati panel** combinano le due dimensioni precedenti: descrivono più unità statistiche osservate ripetutamente nel tempo. Un esempio è rappresentato dai redditi delle stesse famiglie rilevati per più anni consecutivi, oppure dai bilanci delle stesse imprese osservati su più esercizi. Nei dati panel è possibile studiare sia le differenze tra unità, sia le variazioni nel tempo all'interno della stessa unità, offrendo una ricchezza informativa particolarmente elevata.

Queste tre strutture non rappresentano categorie rigide, ma modalità diverse di organizzare l'informazione empirica. La scelta tra dati cross section, longitudinali o panel dipende dalla domanda di ricerca, dalla disponibilità delle informazioni e dal fenomeno studiato.

#### 1.5.2.4 Fasi dell'indagine

A titolo di orientamento, e come richiamo a un'impostazione più operativa, è utile ricordare che ogni indagine statistica, indipendentemente dal contesto applicativo, può essere ricondotta a una sequenza di fasi fondamentali. Questa schematizzazione non descrive nel dettaglio il lavoro concreto del ricercatore, ma fornisce una mappa concettuale utile per comprendere come i dati prendono forma prima di essere analizzati.

In linea generale, un'indagine statistica comprende:

- la definizione degli obiettivi conoscitivi;
- la definizione delle unità statistiche e delle variabili da rilevare;
- la scelta del periodo di riferimento;
- l'individuazione della popolazione e della lista delle unità statistiche;
- la definizione di un piano di campionamento, quando l'osservazione non è censuaria;
- la raccolta dei dati, che comprende la scelta della tecnica di rilevazione, la formulazione degli strumenti di raccolta e la rilevazione sul campo;
- la registrazione dei dati;
- il controllo e la correzione;
- l'elaborazione e l'analisi dei dati.

Non tutte queste fasi hanno lo stesso peso in ogni contesto, né sono sempre nettamente separate. Tuttavia, questa sequenza mette in evidenza come l'analisi statistica sia solo l'ultima parte di un processo più ampio, in cui le scelte iniziali influenzano profondamente la qualità e l'interpretabilità dei risultati.

A questo proposito, è utile confrontare in modo sintetico le due principali modalità di osservazione dei fenomeni economici, il censimento e il campionamento, evidenziandone vantaggi e limiti.

	Cens	Camp
Accuratezza delle Stime su livelli territoriali piccoli	Pro perfetta	Contro alto rischio di non campionare
Esaustività	Pro sì	Contro no
Costi	Contro Alti	Pro Contenuti
Tempi di elaborazione	Contro Alti	Pro Contenuti
Qualità dei dati	Contro Bassa	Pro Alta
Quantità dei variabili	Contro Bassa	Pro Alta

La tabella riassume in modo schematico un compromesso centrale nell'analisi statistica: il censimento garantisce completezza e accuratezza a livello molto disaggregato, ma comporta costi elevati, tempi lunghi e spesso una minore qualità complessiva dei dati; il campionamento, al contrario, consente maggiore flessibilità, costi contenuti e una più ricca articolazione delle variabili osservate, al prezzo di una inevitabile componente di incertezza.

### 1.5.2.5 Le ricerche di mercato

Le ricerche di mercato costituiscono una fonte importante di dati economici e rappresentano un ambito in cui la statistica viene applicata in modo diretto allo studio dei comportamenti individuali e delle preferenze dei consumatori. L'obiettivo principale di queste ricerche è comprendere come gli individui prendono decisioni di acquisto, come valutano prodotti e servizi, come reagiscono a variazioni di prezzo, di qualità o di comunicazione.

Dal punto di vista statistico, le ricerche di mercato si basano prevalentemente su **dati osservazionali**, raccolti attraverso questionari, interviste o strumenti digitali, e assumono molto spesso la forma di **dati cross section**. In una tipica indagine di mercato si osservano infatti molte unità statistiche, come consumatori o famiglie, in uno stesso periodo di riferimento, ottenendo una fotografia delle preferenze o dei comportamenti in un dato momento.

Le variabili rilevate nelle ricerche di mercato sono frequentemente **qualitative**, come il genere, la fascia di età, il livello di istruzione, la marca preferita o il canale di acquisto utilizzato. Accanto a queste compaiono spesso variabili **ordinali**, utilizzate per misurare giudizi, preferenze o livelli di soddisfazione. Le scale di valutazione, come le scale di tipo Likert, consentono di tradurre percezioni e opinioni in dati strutturati, pur mantenendo una natura qualitativa ordinata. Non mancano tuttavia variabili quantitative, come la spesa mensile, la frequenza di acquisto o il numero di prodotti acquistati.

In molti casi le ricerche di mercato vengono ripetute nel tempo, dando luogo a confronti tra indagini successive. Anche quando le unità osservate non coincidono perfettamente, queste ripetizioni permettono di analizzare l'evoluzione delle preferenze aggregate, dei comportamenti di consumo o della diffusione di un prodotto. In alcuni contesti, come i panel di consumatori, le stesse unità vengono seguite nel tempo, avvicinando le ricerche di mercato alla struttura dei dati panel.

Le ricerche di mercato mostrano in modo particolarmente chiaro il legame tra teoria ed evidenza empirica. Le domande del questionario, la scelta delle variabili e il modo in cui vengono formulate le risposte riflettono ipotesi teoriche sul comportamento dei consumatori. La statistica fornisce gli strumenti per organizzare e analizzare le risposte, ma l'interpretazione dei risultati richiede sempre un riferimento al contesto economico e alle ipotesi che hanno guidato la raccolta dei dati.

### 1.5.2.6 I dati aziendali

Un'altra fonte fondamentale di dati economici è rappresentata dai **dati aziendali**, ossia dalle informazioni prodotte e registrate all'interno delle imprese nel corso della loro attività ordinaria. A differenza delle statistiche ufficiali o delle ricerche di mercato, questi dati non nascono primariamente con finalità di analisi statistica, ma per esigenze amministrative, contabili, gestionali o fiscali. Proprio per questo motivo costituiscono una fonte informativa particolarmente ricca, ma anche eterogenea.

Tra i dati aziendali rientrano, ad esempio, i bilanci, i conti economici, gli stati patrimoniali, i flussi di cassa, i dati sulle vendite, sui costi di produzione, sugli investimenti, sull'occupazione e sulle retribuzioni. A questi si affiancano dati operativi più dettagliati, come le quantità prodotte, i tempi di lavorazione, i livelli di scorte, i tassi

di difettosità o le informazioni sui clienti e sui fornitori. Molti di questi dati sono registrati con elevata frequenza temporale e possono assumere una struttura longitudinale o panel.

Dal punto di vista statistico, i dati aziendali presentano alcune caratteristiche peculiari. In primo luogo, essi sono spesso **amministrativi**, cioè raccolti secondo criteri definiti da norme contabili o regolamentari, che influenzano la definizione delle variabili e il loro significato economico. In secondo luogo, possono essere affetti da problemi di comparabilità, sia nel tempo sia tra imprese diverse, a causa di cambiamenti organizzativi, contabili o strategici. Infine, l'accesso a questi dati è spesso limitato, poiché essi contengono informazioni sensibili o riservate.

Nonostante queste difficoltà, i dati aziendali svolgono un ruolo centrale nell'analisi economica applicata. Essi permettono di studiare il comportamento delle imprese, le dinamiche di crescita e di produttività, le scelte di investimento e di finanziamento, nonché le relazioni tra performance economica e caratteristiche organizzative. In molti studi empirici, i dati aziendali vengono integrati con informazioni provenienti da altre fonti, come le statistiche ufficiali o le indagini campionarie, dando luogo a basi di dati complesse.

Anche in questo contesto la statistica fornisce una grammatica comune per organizzare e analizzare le informazioni, ma l'interpretazione dei risultati richiede una conoscenza del contesto economico e istituzionale in cui i dati sono generati. I dati aziendali mostrano in modo particolarmente evidente come l'analisi statistica non possa prescindere dal significato economico delle variabili osservate.

### 1.5.2.7 Le banche dati

Un ruolo sempre più rilevante nell'analisi economica è svolto dalle **banche dati**, cioè archivi strutturati che raccolgono grandi quantità di informazioni provenienti da fonti diverse e resi disponibili per la consultazione e l'analisi. Tra queste, un posto particolare è occupato dalle **banche dati finanziarie**, che forniscono informazioni su mercati, strumenti finanziari e operatori economici con un livello di dettaglio e una frequenza temporale molto elevati.

I dati finanziari, come i prezzi delle azioni, delle obbligazioni, dei tassi di cambio o delle materie prime, sono spesso registrati in tempo reale o quasi reale. Questo significa che le osservazioni vengono aggiornate continuamente e possono assumere una struttura temporale molto fine, talvolta a livello giornaliero, orario o addirittura infra-giornaliero. In questi contesti la dimensione temporale diventa centrale e la variabilità dei dati è particolarmente marcata, riflettendo l'interazione continua tra informazioni, aspettative e decisioni degli operatori di mercato.

Accanto alle banche dati finanziarie esistono numerose altre basi di dati economici, sia pubbliche sia private. Le istituzioni statistiche nazionali e internazionali mettono a disposizione archivi contenenti serie storiche, micro-dati e indicatori aggregati su popolazione, lavoro, redditi e prezzi. Altre banche dati raccolgono informazioni amministrative, come registri fiscali o contributivi, mentre soggetti privati offrono archivi su imprese, bilanci, commercio internazionale o comportamenti di consumo.

Queste banche dati differiscono per contenuto, struttura, livello di aggregazione e accessibilità, ma condividono l'esigenza di essere organizzate e interpretate attraverso strumenti statistici. In molti casi i dati non sono prodotti per rispondere a una specifica domanda di ricerca, ma vengono successivamente riutilizzati, integrati e riorganizzati per scopi analitici. Questo richiede particolare attenzione alla definizione delle variabili, alla coerenza delle misure e al contesto in cui le informazioni sono state generate.

Nel corso utilizzeremo esempi tratti da diverse tipologie di banche dati, per mostrare come la stessa grammatica statistica possa essere applicata a contesti molto diversi, dai dati finanziari ad alta frequenza alle statistiche ufficiali e ai dati aziendali. L'obiettivo non è padroneggiare tutte le fonti disponibili, ma acquisire gli strumenti

concettuali necessari per orientarsi tra dati eterogenei, comprenderne i limiti informativi e utilizzarli in modo consapevole nell'analisi dei fenomeni economici.

### 1.5.3 I Dati Scientifici

Accanto ai dati economici, una parte rilevante dell'attività statistica riguarda i dati scientifici, prodotti nell'ambito delle scienze naturali, mediche e ambientali. Anche in questi contesti la statistica interviene sull'evidenza empirica, fornendo strumenti per organizzare le osservazioni, descrivere la variabilità e valutare la coerenza tra dati e ipotesi teoriche. Pur riferendosi a fenomeni molto diversi, questi dati condividono alcune caratteristiche che li rendono particolarmente interessanti dal punto di vista statistico.

#### 1.5.3.1 Dati sanitari e ricerca clinica

Un'importante famiglia di dati scientifici è costituita dai dati sanitari, che descrivono eventi di salute, trattamenti, esiti clinici e caratteristiche delle popolazioni di pazienti. Questi dati possono provenire da fonti molto diverse, come registri sanitari, cartelle cliniche, sistemi informativi ospedalieri o studi di ricerca progettati appositamente. La loro raccolta avviene spesso in contesti regolati da vincoli etici e normativi stringenti, che influenzano il modo in cui le informazioni vengono registrate, conservate e utilizzate.

All'interno di questo ambito si colloca l'epidemiologia, che si occupa di osservare e descrivere la distribuzione delle malattie e degli eventi di salute nelle popolazioni. I dati epidemiologici sono tipicamente osservazionali e riguardano gruppi di individui, non singoli casi, con l'obiettivo di individuare differenze tra sottopopolazioni, fattori associati al rischio e andamenti nel tempo. In questo senso essi presentano molte analogie con i dati economici e sociali, sia per la struttura sia per il tipo di domande a cui cercano di rispondere.

Una tipologia centrale di dati epidemiologici è quella derivante dagli studi di coorte, in cui un gruppo di individui accomunati da una certa caratteristica viene seguito nel tempo per osservare l'insorgenza di uno specifico evento di salute. Gli studi di coorte possono essere prospettici, quando l'osservazione inizia nel presente e i dati vengono raccolti man mano che gli eventi si verificano, oppure retrospettivi, quando si ricostruisce l'evoluzione passata utilizzando dati già disponibili, come archivi sanitari o registri amministrativi. In entrambi i casi, i dati hanno una struttura longitudinale e consentono confronti tra gruppi esposti e non esposti a determinati fattori.

Accanto ai dati osservazionali, in ambito sanitario sono molto diffusi i dati provenienti da studi clinici sperimentali, progettati per valutare l'efficacia e la sicurezza di trattamenti o interventi terapeutici. I clinical trials sono studi in cui i pazienti vengono assegnati a gruppi diversi secondo un protocollo prestabilito, ad esempio un gruppo che riceve un nuovo farmaco e un gruppo di controllo. Per ridurre l'influenza di fattori soggettivi e di distorsioni sistematiche, spesso si ricorre al doppio cieco, una procedura in cui né i pazienti né i ricercatori sanno quale trattamento viene somministrato a ciascun individuo. Questa scelta ha conseguenze dirette sulla struttura dei dati e sul modo in cui i risultati possono essere interpretati.

I dati sanitari possono quindi assumere forme molto diverse, che vanno dalla descrizione di singoli casi clinici fino a raccolte sistematiche di studi indipendenti. In quest'ultimo caso si parla di meta-analisi, che aggregano e sintetizzano i risultati di più studi condotti sullo stesso problema, con l'obiettivo di ottenere una visione complessiva più stabile e informativa. Le meta-analisi non producono dati primari, ma dati di secondo livello, costruiti a partire da evidenze già esistenti, e rappresentano una fonte importante nelle valutazioni evidence based.

Nel loro insieme, queste diverse fonti mostrano come i dati sanitari riflettano una pluralità di disegni di studio e

di livelli di controllo sul fenomeno osservato. La statistica interviene fornendo strumenti per organizzare, confrontare e sintetizzare queste informazioni, ma il significato dei risultati dipende sempre dal contesto clinico ed epidemiologico in cui i dati sono stati generati.

I dati sanitari possono essere raccolti in modo continuativo da istituzioni pubbliche, oppure prodotti nell'ambito di ricerche mirate. Nel primo caso la fonte principale è rappresentata dai servizi sanitari nazionali e dai sistemi di sorveglianza epidemiologica, che registrano informazioni legate all'erogazione delle prestazioni sanitarie, ai ricoveri, alle diagnosi e agli esiti clinici. Questi dati, spesso di natura amministrativa, vengono raccolti in modo sistematico e coprono popolazioni molto ampie, rendendo possibile lo studio di fenomeni di grande scala.

Accanto a queste fonti istituzionali operano centri epidemiologici, enti di ricerca e organizzazioni internazionali, che coordinano la raccolta e l'armonizzazione dei dati per finalità di monitoraggio, prevenzione e confronto tra territori. In altri casi, invece, i dati sanitari vengono prodotti attraverso ricerche mirate, progettate specificamente per rispondere a una determinata domanda di ricerca, come negli studi di coorte o nei clinical trials. In questi contesti la raccolta dei dati è più limitata nel tempo e nello spazio, ma maggiormente controllata e focalizzata sugli obiettivi dello studio.

### 1.5.3.2 Dati ambientali, ecologici e climatici

Un'altra grande famiglia è rappresentata dai dati ambientali ed ecologici, che descrivono fenomeni naturali su scale spaziali e temporali molto ampie. Rientrano in questa categoria i dati geologici, atmosferici, meteorologici e climatici, come le temperature, le precipitazioni, le concentrazioni di gas, i livelli di inquinamento o le caratteristiche del suolo.

Questi dati sono spesso raccolti attraverso reti di sensori, satelliti o stazioni di monitoraggio e assumono tipicamente la forma di serie temporali o di dati spaziali. La variabilità naturale, la presenza di ciclicità e trend di lungo periodo e l'elevata dipendenza nel tempo e nello spazio pongono sfide specifiche all'analisi statistica. Anche in questo caso la statistica fornisce una grammatica comune, pur dovendo adattare gli strumenti alla struttura dei dati.

### 1.5.3.3 Altri ambiti scientifici

La statistica è ampiamente utilizzata anche in molti altri ambiti scientifici. In fisica e chimica i dati derivano spesso da esperimenti controllati e misure ripetute, con l'obiettivo di stimare parametri fisici o verificare leggi teoriche. In biologia e genetica si analizzano dati ad alta dimensionalità, come sequenze genetiche o espressioni geniche, che richiedono una particolare attenzione alla variabilità e al rumore di fondo. In agricoltura e nelle scienze alimentari la statistica è impiegata per valutare rese, qualità dei prodotti e effetti di diverse pratiche colturali, spesso combinando dati sperimentali e osservazionali.

## 1.5.4 Big data, dati digitali e dati testuali

Negli ultimi anni si è affermata una nuova e ampia famiglia di dati, spesso indicata con l'espressione big data, che comprende informazioni generate in modo automatico o semi-automatico dalle attività digitali. Rientrano in questa categoria i dati prodotti dal web, dalle piattaforme digitali, dai social network, dai motori di ricerca, dai sistemi di pagamento elettronico, dai dispositivi connessi e dalle applicazioni informatiche utilizzate quotidianamente.

Questi dati si distinguono dalle fonti tradizionali non solo per la loro dimensione, ma soprattutto per il modo in cui vengono generati. Essi non sono raccolti attraverso un disegno di indagine esplicito, ma emergono come sotto-

prodotto di interazioni, transazioni e processi automatizzati. Like, click, testi, immagini, log di accesso, sequenze di eventi e flussi di messaggi costituiscono esempi di informazioni che possono essere analizzate a fini economici, sociali o scientifici.

Una parte rilevante dei big data è costituita da dati testuali, come documenti, post, commenti, articoli o trascrizioni, che non si presentano immediatamente sotto forma di variabili strutturate. Anche in questi casi, tuttavia, l'analisi statistica interviene trasformando il testo in rappresentazioni quantitative o categoriali, attraverso processi di codifica che permettono di individuare regolarità, frequenze, associazioni o strutture latenti. Questi dati sono alla base di molte applicazioni recenti dell'intelligenza artificiale e dell'apprendimento automatico.

Dal punto di vista statistico, i big data pongono sfide specifiche. Essi sono spesso caratterizzati da elevata eterogeneità, da una forte dipendenza temporale o strutturale e da una qualità variabile delle informazioni. Inoltre, la grande quantità di dati non garantisce di per sé una maggiore informazione: l'assenza di un disegno di raccolta, la selettività delle fonti e i meccanismi che generano i dati possono introdurre distorsioni difficili da individuare.

Anche in questo contesto la statistica fornisce una grammatica di base per organizzare e interpretare i dati, ma richiede una particolare attenzione alla natura delle fonti e al contesto in cui le informazioni sono prodotte. I big data non sostituiscono le fonti tradizionali, ma si affiancano ad esse, ampliando il panorama delle evidenze empiriche disponibili e rendendo ancora più centrale il ruolo dell'analisi statistica nel collegare dati, teoria e decisioni.

## 1.6 La matrice dei dati

La matrice dei dati è una tabella che consente di raccogliere in modo efficiente molti tipi diversi di dati.

<i>i</i>	Età	Sesso	Stato Civile	Titolo di Studio	Reddito x 1000€	Num. di Filgi
1	41	M	Non sposato	Laurea	10.23	2
2	20	F	Non sposato	Superiori	10.47	0
3	54	F	Sposato	Elementari	10.12	1
:	:	:	:	:	:	:
<i>n</i>	27	F	Non sposato	Laurea	10.07	0

Sulle RIGHE le UNITÀ STATISTICHE: si leggono le determinazioni dei caratteri oggetto di studio associati a una specifica unità statistica. Sulle COLONNE i CARATTERI: si leggono le modalità delle unità statistiche associate a uno specifico carattere.

## 1.7 Riepilogo sulle Variabili

- **Qualitativa**, la variabile è espressa attraverso etichette qualitative
  - *Qualitative sconnesse*: le caratteristiche che la VS può assumere hanno un ordinamento soggettivo;
    - \* genere,
    - \* stato civile,
    - \* settore di occupazione,
    - \* generi musicali.
  - *Qualitative ordinate*: le caratteristiche che la VS può assumere hanno un ordinamento oggettivo
    - \* titolo di studio,
    - \* preferenze,
    - \* giudizi.
- **Quantitativa**, la variabile è espressa attraverso una scala numerica.
  - *Quantitative Discrete*: le caratteristiche che la VS può assumere sono in numero finito al più numerabile → corrispondenza con i numeri interi;
    - \* numero di incidenti,
    - \* voto di laurea.
  - *Quantitative Continue*: le caratteristiche che la VS può assumere sono in numero infinito non numerabile.
    - \* misure di lunghezza, capienza e peso,
    - \* temperature,
    - \* reddito.

# Variabili Statistiche e Distribuzioni di Frequenza

2

La statistica si fonda sulla necessità di comprendere e descrivere fenomeni complessi in modo sistematico e universale. Per farlo, è indispensabile adottare un linguaggio rigoroso che consenta di astrarre dai dettagli specifici e lavorare direttamente sulle relazioni tra i dati. La formalizzazione non è un vezzo, ma una necessità: permette di trattare insiemi di dati di qualunque dimensione o complessità senza cambiare le regole del ragionamento.

Il linguaggio formale che utilizzeremo in questo libro è pensato per garantire una sintesi efficace e una generalizzazione immediata. Una manciata di osservazioni e un archivio di miliardi di righe possono essere analizzati con gli stessi strumenti e le stesse regole. Questa uniformità concettuale è ciò che rende il pensiero statistico potente: non ci si perde nei dettagli numerici, ma si lavora direttamente sulle proprietà e sulle trasformazioni delle strutture che i dati rappresentano.

Adottare una notazione rigorosa consente inoltre di comunicare con chiarezza e precisione. Ogni simbolo, ogni operatore ha un significato ben definito che elimina ambiguità e rende possibile il ragionamento collaborativo, indipendentemente dal contesto applicativo. La formalizzazione non è solo un linguaggio per il calcolo, ma uno strumento per pensare, per astrarre e per collegare il particolare all'universale.

Lavorare in questo modo significa concentrarsi sui concetti fondamentali, svincolandosi dalla necessità di riferirsi continuamente alla numerosità dei dati o alla loro specifica natura. È così che il linguaggio statistico diventa non solo un mezzo per analizzare, ma anche per costruire modelli e sviluppare inferenze che si applicano a fenomeni ben oltre i dati osservati.

In statistica, la scelta dei simboli gode di una flessibilità maggiore rispetto ad altre discipline come la fisica, dove molte notazioni sono rigidamente standardizzate. Questa libertà riflette la natura più applicativa e interdisciplinare della statistica, che si adatta a contesti diversi e a una grande varietà di fenomeni. Tuttavia, nel tempo, si è consolidata una notazione comune, grazie alla diffusione di libri di testo e alla pratica accademica, che offre un riferimento condiviso pur lasciando margini per piccole personalizzazioni.

In fisica, al contrario, cambiare i simboli può portare a confusione o addirittura compromettere la comprensione. Ad esempio, la costante gravitazionale universale  $G$  e la velocità della luce nel vuoto  $c$  sono simboli universalmente riconosciuti. Rinominare  $G$  con un altro simbolo, come  $k$ , o  $c$  con  $v$ , rischierebbe di generare fraintendimenti, poiché quei simboli sono già associati ad altri concetti fondamentali, come la costante elastica e la velocità generica di un corpo.

In statistica, invece, sebbene esistano convenzioni consolidate -- come indicare una variabile casuale con una lettera maiuscola ( $X$ ) e un'osservazione specifica con una minuscola ( $x_i$ ) -- la comunità accetta varianti ragionevoli, purché siano chiaramente definite. In questo libro, useremo una notazione che rispetta gli standard più diffusi, integrandola con piccole personalizzazioni pensate per migliorare la chiarezza e la leggibilità, senza mai perdere il rigore. Questo approccio garantisce che il linguaggio sia al tempo stesso accessibile e conforme alle convenzioni accademiche, facilitando il collegamento con altri testi e contesti di studio.

## 2.1 Variabili Statistiche

Una *Variabile Statistica* (VS) è una qualunque caratteristica osservabile sugli individui (unità statistiche) della popolazione di riferimento, che *varia* da individuo ad individuo.

### 2.1.1 Notazione di Base

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ , etichette simboliche per i dati, il primo dato osservato, il secondo ecc.
- $i$ , indice che conta le osservazioni nell'ordine in cui sono state osservate
  - $i \in \{1, 2, \dots, n\}$
  - il primo, il secondo, ... l' $i$ -esimo, ... l' $n$ -esimo (l'ultimo)
- $n$ , numerosità assoluta: il numero totale di individui osservati.
- $S_X = \{x_1, \dots, x_j, \dots, x_K\}$ , l'insieme di tutte le modalità possibili che la variabile statistica è suscettibile di assumere.
- $j$ , indice che conta le modalità: prima, seconda, ...,  $j$ -esima, ..., la  $K$ -esima.
- $K$ , numero di modalità.

**Esempio 2.1.1** (Variabile: genere).

- $\mathbf{x} = (x_1 = M, x_2 = F, x_3 = M, x_4 = F, x_5 = F, x_6 = F)$
- $n = 6$
- $S_X = \{x_1 = F, x_2 = M\}$
- $K = 2$

**Esempio 2.1.2** (Variabile: titolo di studio).

- $\mathbf{x} = (x_1 = E, x_2 = M, x_3 = L, x_4 = S, x_5 = S, x_6 = S, x_7 = L, x_8 = M, x_9 = L, x_{10} = S)$
- $n = 10$
- $S_X = \{x_1 = E, x_2 = M, x_3 = S, x_4 = L\}$
- $K = 4$

**Esempio 2.1.3** (Variabile: Numero di interventi di manutenzione giornalieri).

- $\mathbf{x} = (x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 2, x_5 = 1, x_6 = 1, x_7 = 0, x_8 = 1, x_9 = 3, x_{10} = 1)$
- $n = 10$
- $S_X = \{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, \dots\}$
- $K = +\infty$

### 2.1.2 Ordinamento e conteggio

Se l'ordine di osservazione non è influente ai fini della conoscenza del fenomeno i dati possono essere permutati (mescolati) a piacimento, la sequenza:

$$(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(i)}, \dots, x_{(n)}),$$

indica i dati riordinati, dal più piccolo, al più grande. Se i dati sono numerici l'ordinamento è univoco, se i dati sono categoriali l'ordinamento è arbitrario.

**Esempio 2.1.4 (Continua).** Continuiamo l'esempio della variabile genere discussa nell'esempio 2.1.1

- $\mathbf{x} = (x_1 = M, x_2 = F, x_3 = M, x_4 = F, x_5 = F, x_6 = F)$
- $S_X = \{x_1 = F, x_2 = M\}$
- $x_{(1)} = F, x_{(2)} = F, x_{(3)} = F, x_{(4)} = F, x_{(5)} = M, x_{(6)} = M$

**Esempio 2.1.5** (Continua: codifica 0, 1).

- Variabile: genere  $\{M \rightarrow 0, F \rightarrow 1\}$
- $\mathbf{x} = (x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1, x_6 = 1)$
- $S_X = \{x_1 = 0, x_2 = 1\}$
- $x_{(1)} = 0, x_{(2)} = 0, x_{(3)} = 1, x_{(4)} = 1, x_{(5)} = 1, x_{(6)} = 1$
- **nota:** nella codifica 0, 1 ha senso sommare i dati:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 4, \text{ Numero di femmine}$$

**Esempio 2.1.6** (Continua: Variabile titolo di studio).

- $\mathbf{x} = (x_1 = E, x_2 = M, x_3 = L, x_4 = S, x_5 = S, x_6 = S, x_7 = L, x_8 = M, x_9 = L, x_{10} = S)$
- $S_X = \{x_1 = E, x_2 = M, x_3 = S, x_4 = L\}$
- $x_{(1)} = E, x_{(2)} = M, x_{(3)} = M, x_{(4)} = S, x_{(5)} = S, x_{(6)} = S, x_{(7)} = S, x_{(8)} = L, x_{(9)} = L, x_{(10)} = L$

**Esempio 2.1.7** (Continua: Codifica Numerica).

- Variabile: titolo di studio  $\{E \rightarrow 1, M \rightarrow 2, S \rightarrow 3, L \rightarrow 4\}$
- $\mathbf{x} = (x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 3, x_5 = 3, x_6 = 3, x_7 = 4, x_8 = 2, x_9 = 4, x_{10} = 3)$
- $S_X = \{x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4\}$
- $x_{(1)} = 1, x_{(2)} = 2, x_{(3)} = 2, x_{(4)} = 3, x_{(5)} = 3, x_{(6)} = 3, x_{(7)} = 3, x_{(8)} = 4, x_{(9)} = 4, x_{(10)} = 4$
- ha senso sommare i dati?

La codifica numerica corretta sarebbe più complessa

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$Tot$
E	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
M	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	2
S	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	4
L	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	3

I totali di colonna hanno senso e indicano il numero di individui che ha un determinato titolo di studio.

Questa codifica è sovra abbondante infatti come per maschio e femmina possiamo contare solo un colonna di presenza 1 (è femmina) e assenza 0 (non è femmina e quindi maschio), per una variabile a 4 modalità possiamo contare solo 3, ad esempio

- 0,0,0 elementari
- 1,0,0 medie
- 0,1,0 superiori

- 0,0,1 università

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$Tot$
M	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	2
S	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	4
L	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	3

Per sapere il numero persone che ha al massimo le elementari basta fare 10 (numero totale di individui) meno 2 (medie) più 4 (superiori) più 3 (laureati):

$$10 - (2 + 4 + 3) = 1 \quad \text{con le elementari}$$

### Esempio 2.1.8 (Continua: Numero di interventi di manutenzione giornalieri).

- $\mathbf{x} = (x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 2, x_5 = 1, x_6 = 1, x_7 = 0, x_8 = 1, x_9 = 3, x_{10} = 1)$
- $S_X = \{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, \dots\}$
- $x_{(1)} = 0, x_{(2)} = 0, x_{(3)} = 0, x_{(4)} = 1, x_{(5)} = 1, x_{(6)} = 1, x_{(7)} = 1, x_{(8)} = 1, x_{(9)} = 2, x_{(10)} = 3$
- ha senso sommare i dati?
- cosa rappresenta la somma dei dati?

### Esempio 2.1.9 (Ore uomo dedicate a interventi di manutenzione).

Supponiamo di aver collezionato il numero di ore uomo (e frazioni di ora) dedicate ad ogni intervento di manutenzione L'unità statistica sarà l'intervento,  $i = 1$  il primo,  $i = 2$ , il secondo, ecc. e assumerà un valore decimale  $x_3 = 3.5$  significa che la terza manutenzione ha impiegato un addetto per 3 ore e mezza.

- $\mathbf{x} = (x_1 = 0.4, x_2 = 2.7, x_3 = 3.5, x_4 = 1.4, x_5 = 4.3, x_6 = 4.6, x_7 = 0.2, x_8 = 1.9, x_9 = 3.4, x_{10} = 0.1)$
- $S_X = \{x_1 = 0.0, x_2 = 0.1, x_3 = 0.2, x_4 = 0.3, \dots\}$
- $x_{(1)} = 0.1, x_{(2)} = 0.2, x_{(3)} = 0.4, x_{(4)} = 1.4, x_{(5)} = 1.9, x_{(6)} = 2.7, x_{(7)} = 3.4, x_{(8)} = 3.5, x_{(9)} = 4.3, x_{(10)} = 4.6$
- ha senso sommare i dati?
- cosa rappresenta la somma dei dati?

## 2.1.3 Le unità di misura

In statistica, ogni dato è sempre espresso in una specifica unità di misura, che conferisce significato al valore numerico registrato. Le unità di misura variano in base alla natura dei dati e al fenomeno osservato, e possono includere:

1. **Conteggi:** I dati che rappresentano quantità possono essere espressi in unità di conteggio, come unità singole, decine, centinaia, migliaia, ecc. Ad esempio, se registriamo il numero di visitatori in un parco in un anno, può essere più comodo esprimere 12.000 visitatori come "12 migliaia" (12 x 1000), facilitando la let-

tura. Analogamente, 1.200 prodotti venduti potrebbero essere espressi come ``1,2 migliaia'' per rendere i confronti immediati tra dati di grandezza diversa.

2. **Misure metriche:** Le grandezze fisiche come la lunghezza, la massa, la capacità e la temperatura sono espresse in unità metriche, come metri, chilogrammi, e litri. Ad esempio, per confrontare il peso di vari articoli, un dato in grammi potrebbe risultare scomodo se molto elevato; per articoli pesanti, come 12 000 grammi, potrebbe essere più leggibile esprimere il dato in chilogrammi come 12 kg, dove 1 kg = 1 000 grammi. Questo cambio di unità mantiene invariato il rapporto tra le osservazioni, facilitando la comprensione e l'analisi.
3. **Misure derivate o di rapporto:** Alcune unità di misura rappresentano rapporti tra grandezze, come chilometri all'ora (km/h) per la velocità, o litri per 100 chilometri (L/100 km) per il consumo di carburante. Ad esempio, se un'auto consuma 7 litri ogni 100 km, esprimere il consumo in questa unità (7 L/100 km) è più immediato e rappresentativo di un valore medio, rispetto all'uso di litri per singolo chilometro (0.07 L/km), che potrebbe risultare poco intuitivo.
4. **Misure di risultati e punteggi:** In statistica, si usano spesso trasformazioni che combinano più misure per produrre un indicatore con una scala di misura propria, utile per confrontare sinteticamente informazioni complesse. Consideriamo la seguente formula generale:

$$x_i = f(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots)$$

dove  $a_{ij}$  rappresenta le varie misure o statistiche che contribuiscono al calcolo del valore  $x_i$ , cioè l'indicatore della  $i$ -esima osservazione. Per esempio, immaginiamo di voler calcolare un **punteggio di idoneità** per i candidati a un lavoro, basato su tre misure diverse:

- $a_{i1}$ : esperienza in anni,
- $a_{i2}$ : punteggio di un test tecnico (da 0 a 100),
- $a_{i3}$ : valutazione del colloquio (da 0 a 5).

Per produrre un indicatore che misuri l'idoneità complessiva su una scala uniforme, potremmo usare una formula come:

$$x_i = 0.5 \cdot a_{i1} + 0.3 \cdot a_{i2} + 2 \cdot a_{i3}$$

Questa formula pondera ciascuna misura per dare maggiore peso all'esperienza (0.5) e al colloquio (2) rispetto al test tecnico (0.3). Per il quinto candidato ( $i = 5$ ) con 5 anni di esperienza, un punteggio di 80 al test e una valutazione di 4 al colloquio, il punteggio di idoneità risulterebbe:

$$x_5 = 0.5 \cdot 5 + 0.3 \cdot 80 + 2 \cdot 4 = 2.5 + 24 + 8 = 34.5$$

In questo caso, il punteggio di idoneità  $x_i$  è su una scala propria, definita dalle scelte di peso e dalle unità combinate, e consente di confrontare i candidati in modo sintetico, anche se ogni componente ha un'unità di misura diversa.

#### 2.1.4 Trasformazioni lineari

In matematica e statistica, una trasformazione lineare è un'operazione che modifica i dati mantenendo invariati i rapporti tra le osservazioni. La forma generale di una trasformazione lineare è:

$$y_i = a + bx_i$$

dove:

- $x_i$  rappresenta la **misura i-esima** del dato originale.
- $a$  rappresenta uno **spostamento dell'origine** (traslazione), che posiziona i dati su un nuovo punto di partenza, spostando l'intero grafico verso l'alto o verso il basso.
- $b$  è il **fattore di scala**, che ridimensiona i valori, influenzando la pendenza della retta. Un fattore maggiore di 1 espande i valori, mentre uno tra 0 e 1 li contrae.

Geometricamente, il termine  $a$  trasla il grafico lungo l'asse verticale senza modificare le distanze relative tra i punti, mentre  $b$  varia la pendenza, allargando o comprimendo i dati rispetto all'origine.

#### 2.1.4.1 Cambiamento di scala come trasformazione lineare

Un cambiamento di scala è una trasformazione lineare applicata a ogni misura i-esima del dato, che permette di adattare l'unità di misura senza alterare i rapporti tra le osservazioni. Vediamo alcuni esempi pratici.

**Esempio 2.1.10 (Dati spese).** Supponiamo di avere i dati su diverse spese in euro e di volerli esprimere in migliaia di euro per facilitare la lettura. La trasformazione è:

$$y_i = \frac{1}{1000} \cdot x_i$$

Dove  $x_i$  è il valore in euro della misura i-esima e  $y_i$  è il valore corrispondente in migliaia di euro. Per chiarire questo concetto, prendiamo  $i = 4$  con  $x_4 = 12\ 000$ :

$$y_4 = \frac{1}{1000} \cdot 12\ 000 = 12$$

Quindi, invece di esprimere la quarta misura come 12 000 euro, la rappresentiamo come 12 *migliaia* di euro, semplificando la gestione e la comparabilità dei dati.

**Esempio 2.1.11 (Conversione temperature).** Anche la conversione da gradi Celsius ( $C$ ) a gradi Fahrenheit ( $F$ ) segue una trasformazione lineare, espressa come:

$$F_i = 32 + \frac{9}{5} \cdot C_i$$

Qui, il termine 32 rappresenta uno **spostamento dell'origine**, poiché 0 °C corrisponde a 32 °F, mentre il fattore  $\frac{9}{5}$  espande i valori per adattarsi alla scala Fahrenheit. Ad esempio, se  $i = 2$  e  $C_2 = 25$ :

$$F_2 = 32 + \frac{9}{5} \cdot 25 = 32 + 45 = 77$$

Questa trasformazione mantiene la proporzionalità tra le temperature, adattando la scala e le unità di misura.

Le trasformazioni lineari  $y = a + bx$  mantengono le distanze relative tra i dati poiché ogni differenza tra due valori  $x_i$  e  $x_j$  viene amplificata o ridotta di un fattore costante  $b$ . In altre parole, per ogni coppia di dati  $x_i, x_j$  vale la relazione:

$$y_i - y_j = b(x_i - x_j)$$

Quindi, la proporzionalità tra le differenze dei valori originali si conserva, preservando l'ordine e la struttura relativa dei dati.

In termini più intuitivi immaginate di avere 5 punti distribuiti su una retta, rappresentati da valori numerici come coordinate lungo un asse  $x$ . Se si cambia l'unità di misura (ad esempio passando da metri a centimetri) o se si decide di nascondere i numeri, la loro disposizione relativa sulla retta rimane la stessa agli occhi di chi osserva: le distanze tra i punti e l'ordine dei punti non cambiano.

Questo accade perché una trasformazione lineare del tipo  $y = a + bx$  modifica solo la scala e la posizione dell'intero sistema, ma non altera le proporzioni tra le distanze dei punti. È come osservare un disegno su un foglio: se ingrandisci o rimpiccolisci il foglio, le figure disegnate mantengono le stesse relazioni interne tra di loro.

All'occhio, quindi, i punti "restano uguali" perché la trasformazione lineare agisce uniformemente su tutti i punti, preservando le loro distanze relative e l'allineamento lungo la retta.

#### 2.1.4.2 Rappresentazione grafica delle trasformazioni lineari

Come abbiamo visto una trasformazione lineare è data

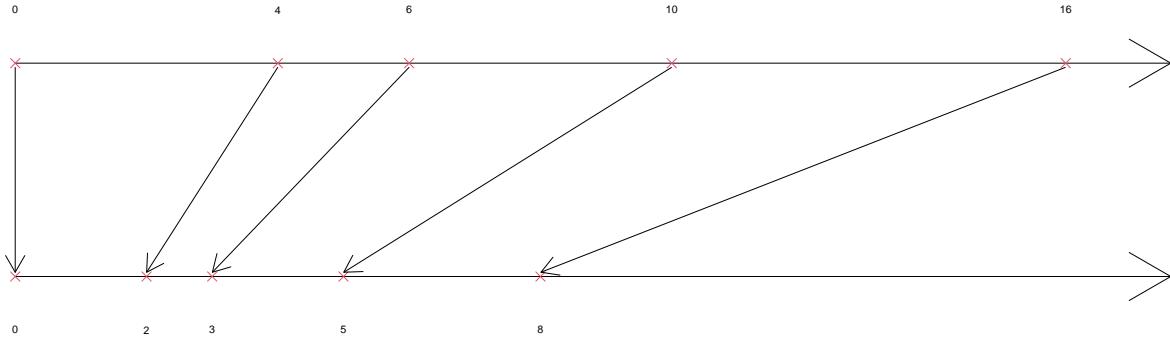
$$y_i = a + b \cdot x_i, \forall i = 1, \dots, n$$

**caso 1:**  $a = 0, b < 1$

I dati si contraggono, lo zero resta invariato Per esempio: supponiamo di avere osservato  $(x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 6, x_4 = 10, x_5 = 16)$ , e fissato  $b = 1/2$

$$y_i = \frac{1}{2} \cdot x_i, \forall i = 1, \dots, 5$$

allora  $(x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 5, x_5 = 8)$ . Geometricamente



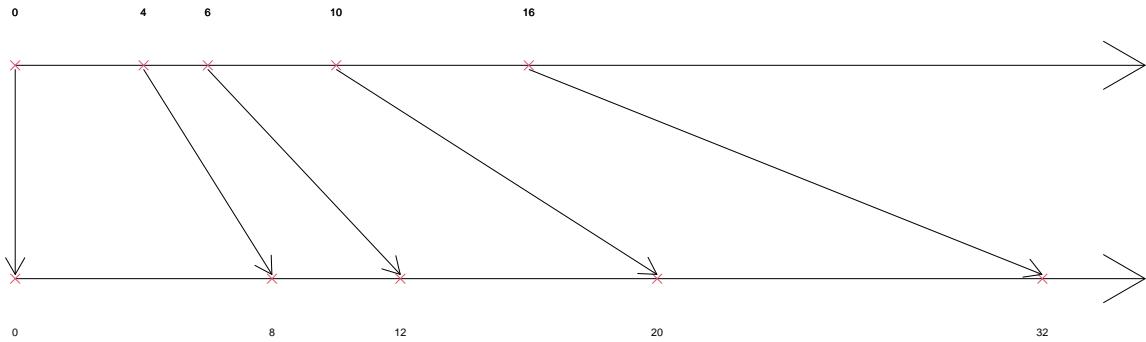
Osserviamo che i dati si restringono, i dati originari vanno da 0 a 16, quelli trasformati da 0 a 8. Notiamo che lo zero resta invariato.

**caso 2:**  $a = 0, b > 1$

I dati si espandono, lo zero resta invariato. Per esempio: supponiamo di avere osservato ( $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 6, x_4 = 10, x_5 = 16$ ), e fissato  $b = 2$

$$y_i = 2 \cdot x_i, \forall i = 1, \dots, 5$$

allora ( $x_1 = 0, x_2 = 8, x_3 = 12, x_4 = 20, x_5 = 32$ ). Geometricamente



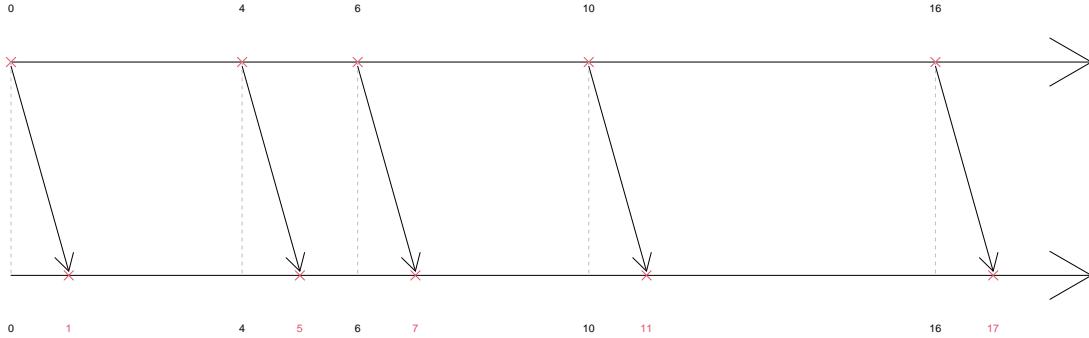
Osserviamo che i dati si espandono, i dati originari vanno da 0 a 16, quelli trasformati da 0 a 32. Notiamo che lo zero resta invariato.

**caso 3:**  $a \neq 0, b = 1$

Le distanze tra i dati restano invariate, lo zero cambia. Per esempio: supponiamo di avere osservato ( $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 6, x_4 = 10, x_5 = 16$ ), e fissato  $a = +1$

$$y_i = 1 + x_i, \forall i = 1, \dots, 5$$

allora ( $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = 7, x_4 = 11, x_5 = 17$ ). Geometricamente



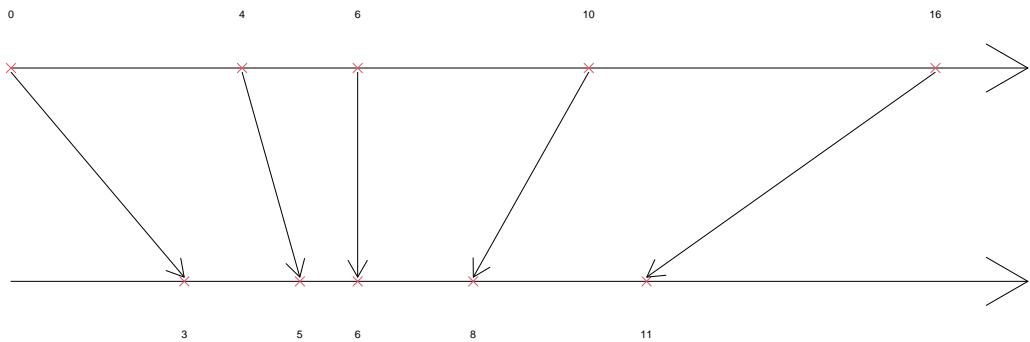
Osserviamo che i dati sono stati traslati a destra di uno, i dati originari vanno da 0 a 16, quelli trasformati da 1 a 17. Notiamo che lo zero è cambiato nella nuova scala.

**caso 4:**  $a \neq 0, b \neq 1$

Le distanze tra i dati restano invariate, lo zero cambia. Per esempio: supponiamo di avere osservato ( $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 6, x_4 = 10, x_5 = 16$ ), e fissato  $a = +1$  e  $b = 1/2$

$$y_i = 3 + \frac{1}{2} \cdot x_i, \forall i = 1, \dots, 5$$

allora ( $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 6, x_4 = 8, x_5 = 11$ ). Geometricamente



Osserviamo che i dati sono stati traslati a destra di uno, i dati originari vanno da 0 a 16, quelli trasformati da 3 a 11. Notiamo che lo zero è cambiato nella nuova scala.

### 2.1.4.3 Scelta dei coefficienti

A volte i coefficienti  $a$  e  $b$  vengono usati per modificare a piacimento il massimo e il minimo dei dati, per trasformare, ad esempio, punteggi in centesimi in punteggi in trentesimi.

Se i dati originari esistono nell'intervallo  $[x_{\min}, x_{\max}]$ , ovvero tutti i dati  $x_{\min} \leq x_i \leq x_{\max}$  e vogliamo trasformarli in dati  $y_i$  tali che  $y_{\min} \leq y_i \leq y_{\max}$ , dove  $y_{\min}$  e  $y_{\max}$  sono fissati arbitrariamente. Se imponiamo

$$\begin{cases} y_{\min} = a + b \cdot x_{\min} \\ y_{\max} = a + b \cdot x_{\max} \end{cases}$$

Avremo:

$$b = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}$$

e quindi:

$$a = y_{\min} - \frac{y_{\max} - y_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \cdot x_{\min}$$

in definitiva

$$y = \left( y_{\min} - \frac{y_{\max} - y_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \cdot x_{\min} \right) + \frac{y_{\max} - y_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \cdot x$$

**Esempio 2.1.12 (Conversione punteggi tra 0 e 50).** Supponiamo di aver somministrato un questionario con 25 domande, che assegnano punteggio 0 se la risposta è sbagliata, +1 se la risposta è parzialmente corretta e +2 se la risposta è corretta. Sia  $x_i$  la somma dei punteggi dello studente etichettato con  $i$ , che potrà:

1. sbagliarle tutte  $x_i = 0 \cdot 25 = 0$
2. rispondere correttamente a tutte  $x_i = 2 \cdot 25 = 50$ .

Il punteggio originario varia in una scala tra 0 e 50.

Per trasformare il punteggio in trentesimi faremo

$$y_i = \left( 0 - \left( \frac{30 - 0}{50 - 0} \right) \cdot 0 \right) + \left( \frac{30 - 0}{50 - 0} \right) x_i = \frac{3}{5} x_i$$

Il nuovo punteggio varrà quindi

1. se tutte le domande sono sbagliate  $x_i = 0 \rightarrow y_i = 0$
2. se tutte le domande sono corrette  $x_i = 50 \rightarrow y_i = 30$

Il punteggio trasformato varia tra 0 e 30. Se per esempio lo studente 3 ha ottenuto il punteggio  $x_3 = 43$  avrà un voto in trentesimi pari a

$$y_3 = \frac{30}{50} \cdot 43 = 25.8$$

**Esempio 2.1.13** (Conversione punteggi tra -25 e 25). Supponiamo di aver somministrato un questionario con 15 domande, che assegnano punteggio  $-1$  se la risposta è sbagliata,  $0$  se la risposta non è data e  $+1$  se la risposta è corretta

Sia  $x_i$  la somma dei punteggi dello studente etichettato con  $i$ , che potrà:

1. sbagliarle tutte  $x_i = -1 \cdot 25 = -25$
2. rispondere correttamente a tutte  $x_i = 1 \cdot 25 = 25$

Per trasformare il punteggio in trentesimi faremo

$$y_i = \left(0 - \left(\frac{30-0}{50-0}\right) \cdot (-25)\right) + \left(\frac{30-0}{50-0}\right) x_i = 15 + \frac{3}{5} x_i$$

Il nuovo punteggio varrà

1. se tutte le domande sono sbagliate  $x_i = -25 \rightarrow y_i = 15 + 3/5 \cdot (-25) = 0$
2. se tutte le domande sono corrette  $x_i = +25 \rightarrow y_i = 15 + 3/5 \cdot (+25) = 30$

Il punteggio trasformato varia tra  $0$  e  $30$ . Se per esempio lo studente 3 ha ottenuto il punteggio  $x_3 = 21$  avrà un voto in trentesimi pari a

$$y_3 = 15 + \frac{3}{5} \cdot 43 = 27.6$$

## 2.2 Distribuzione di Frequenza

La frequenza indica quanto una modalità insiste sul collettivo. Le frequenze si dividono in:

**Definizione 2.2.1** (Frequenze Assolute). Si definiscono le  $n_j$  le **frequenze assolute**: il numero di individui che presentano la modalità  $j$ .

**Definizione 2.2.2** (Frequenze Relative). Si definiscono le  $f_j = n_j/n$  le **frequenze relative**: la proporzione di individui che presentano la modalità  $j$ .

**Definizione 2.2.3** (Frequenze Percentuali). Si definiscono le  $f_{\%j} = f_j \times 100$  le **frequenze percentuali**: la percentuale di individui che presentano la modalità  $j$ .

**Proprietà 2.2.1.** Le proprietà della frequenze assolute( $n_j$ ) sono:

- $0 \leq n_j \leq n, \forall j = 1, \dots, K,$
- $\sum_{j=1}^K n_j = n.$

**Proprietà 2.2.2.** Le proprietà della frequenze relative ( $f_j$ ) sono:

- $0 \leq f_j \leq 1, \forall j = 1, \dots, K,$
- $\sum_{j=1}^K f_j = 1.$

**Proprietà 2.2.3.** *Le proprietà della frequenze percentuali ( $f_{\%,j}$ ) sono:*

- $0 \leq f_{\%,j} \leq 100, \forall j = 1, \dots, K$ ,
- $\sum_{j=1}^K f_{\%,j} = 100$ .

**Definizione 2.2.4** (Distribuzione di Frequenza). Una **distribuzione di frequenza** è una tabella a cui vengono associate le modalità e le frequenze

**Esempio 2.2.1** (Continua: Variabile: genere).

$$x_{(1)} = F, x_{(2)} = F, x_{(3)} = F, x_{(4)} = F, x_{(5)} = M, x_{(6)} = M$$

$X$	$n_j$	$f_j$	$f_{\%,j}$
F	4	$4/6 = 0.67$	67%
M	2	$2/6 = 0.33$	33%
<b>Tot</b>	6	1.00	100%

**Esempio 2.2.2** (Continua: Variabile titolo di studio). Consideriamo i 10 dati ordinati:  $x_{(1)} = E, x_{(2)} = M, x_{(3)} = M, x_{(4)} = S, x_{(5)} = S, x_{(6)} = S, x_{(7)} = S, x_{(8)} = L, x_{(9)} = L, x_{(10)} = L$  la loro tabella di frequenza è

$X$	$n_j$	$f_j$	$f_{\%,j}$
E	1	$1/10 = 0.1$	10%
M	2	$2/10 = 0.2$	20%
S	4	$4/10 = 0.4$	40%
L	3	$3/10 = 0.3$	30%
<b>Tot</b>	10	1.0	100%

## 2.2.1      **Dati quantitativi continui**

Se i dati sono quantitativi continui il numero delle modalità è spesso di gran lunga superiore al numero dei dati e non sempre è possibile fissare un limite superiore in anticipo all'osservazione dei dati. Se per esempio volessi misurare il reddito di una persona in centesimi, otterrei:

**Esempio 2.2.3** (Variabile: Reddito mensile lordo in migliaia di euro).

- unità di rilevazione: famiglie del comune A a febbraio 2021
- $n = 45$
- $S_X = \{0.00, 0.01, 0.02, \dots, 100.00, 100.01, \dots, 2000.00, \dots, 10\ 000, \dots\}$

Qui di seguito i dati nell'ordine in cui sono stati raccolti sono mostrati sopra, mentre i dati riordinati sono mostrati sotto:

**Tabella 2.1:** A sinistra abbiamo troppe poche classi, si perde troppa variabilità. Al centro sono state scelte troppe classi, non si coglie la distribuzione. A destra infine le classi sono state scelte ad hoc per rappresentare al meglio i dati cercando un compromesso tra sintesi e ricchezza dei dati.

[ $x_j$ , $x_{j+1}$ )	$f_j\%$	[ $x_j$ , $x_{j+1}$ )	$f_j\%$	[ $x_j$ , $x_{j+1}$ )	$f_j\%$
0	5	55.56	0.0	2.5	15.56
5	20	44.44	2.5	5.0	40.00
		100.00	5.0	7.5	11.11
			7.5	10.0	11.11
			10.0	12.5	8.89
			12.5	15.0	2.22
			15.0	17.5	6.67
			17.5	20.0	4.44
					100.00

$x_1 = 2.13$	$x_{10} = 3.08$	$x_{19} = 4.73$	$x_{28} = 7.31$	$x_{37} = 14.54$
$x_2 = 0.74$	$x_{11} = 4.32$	$x_{20} = 4.36$	$x_{29} = 6.65$	$x_{38} = 10.52$
$x_3 = 1.17$	$x_{12} = 4.76$	$x_{21} = 3.27$	$x_{30} = 8.17$	$x_{39} = 17.59$
$x_4 = 0.27$	$x_{13} = 4.78$	$x_{22} = 4.09$	$x_{31} = 7.12$	$x_{40} = 10.84$
$x_5 = 2.89$	$x_{14} = 4.13$	$x_{23} = 4.36$	$x_{32} = 7.03$	$x_{41} = 16.04$
$x_6 = 0.03$	$x_{15} = 4.19$	$x_{24} = 4.06$	$x_{33} = 9.59$	$x_{42} = 12.30$
$x_7 = 1.72$	$x_{16} = 3.73$	$x_{25} = 3.17$	$x_{34} = 9.04$	$x_{43} = 19.67$
$x_8 = 2.29$	$x_{17} = 3.71$	$x_{26} = 8.10$	$x_{35} = 7.70$	$x_{44} = 16.05$
$x_9 = 2.62$	$x_{18} = 4.18$	$x_{27} = 5.16$	$x_{36} = 11.07$	$x_{45} = 16.40$
$x_{(1)} = 0.03$	$x_{(10)} = 3.08$	$x_{(19)} = 4.19$	$x_{(28)} = 7.03$	$x_{(37)} = 10.84$
$x_{(2)} = 0.27$	$x_{(11)} = 3.17$	$x_{(20)} = 4.32$	$x_{(29)} = 7.12$	$x_{(38)} = 11.07$
$x_{(3)} = 0.74$	$x_{(12)} = 3.27$	$x_{(21)} = 4.36$	$x_{(30)} = 7.31$	$x_{(39)} = 12.30$
$x_{(4)} = 1.17$	$x_{(13)} = 3.71$	$x_{(22)} = 4.36$	$x_{(31)} = 7.70$	$x_{(40)} = 14.54$
$x_{(5)} = 1.72$	$x_{(14)} = 3.73$	$x_{(23)} = 4.73$	$x_{(32)} = 8.10$	$x_{(41)} = 16.04$
$x_{(6)} = 2.13$	$x_{(15)} = 4.06$	$x_{(24)} = 4.76$	$x_{(33)} = 8.17$	$x_{(42)} = 16.05$
$x_{(7)} = 2.29$	$x_{(16)} = 4.09$	$x_{(25)} = 4.78$	$x_{(34)} = 9.04$	$x_{(43)} = 16.40$
$x_{(8)} = 2.62$	$x_{(17)} = 4.13$	$x_{(26)} = 5.16$	$x_{(35)} = 9.59$	$x_{(44)} = 17.59$
$x_{(9)} = 2.89$	$x_{(18)} = 4.18$	$x_{(27)} = 6.65$	$x_{(36)} = 10.52$	$x_{(45)} = 19.67$

Come si osserva aver rimesso in ordine i dati non ci aiuta a capire la distribuzione del fenomeno.

## 2.2.2 Raggruppamenti in Classi

L'idea è quella di raggruppare i dati in **intervalli contigui** e procedere alla rappresentazione in distribuzione di frequenza. In tabella 2.1 vediamo a sinistra troppe poche classi, al centro troppe, mentre a destra vediamo che il numero delle classi e la loro ampiezza variabile rende più leggibile la distribuzione dei dati.

### 2.2.3 Frequenze Cumulate

**Definizione 2.2.5** (Frequenze cumulate). Si definisce frequenza cumulata  $F_j$  la somma di tutte le  $f$  fino a  $j$ ,

$$F_j = f_1 + f_2 + \dots + f_j$$

Notiamo che:

- $F_1 = f_1$
- $F_2 = f_1 + f_2 = F_1 + f_2$
- $F_3 = f_1 + f_2 + f_3 = F_2 + f_3$
- $\dots$
- $F_j = f_1 + f_2 + \dots + f_j = F_{j-1} + f_j$
- $\dots$
- $F_K = f_1 + f_2 + \dots + f_K = 1$

ovvero  $F_j = f_1 + \dots + f_j$  cumula tutte le frequenze dalla 1 alla  $j$ .

**Esempio 2.2.4** (Continua: Variabile titolo di studio).

	$n_j$	$f_j$	$F_j$
E	1	0.1	0.1
M	2	0.2	0.3
S	4	0.4	0.7
U	3	0.3	1.0

E si legge:  $F_1 = 0.1$  ci dice che il 10% del collettivo in esame ha come massimo titolo ha non più delle elementari.  $F_1 = 0.3$  ci dice che il 30% del collettivo ha come massimo titolo ha non più delle medie.  $F_4 = 0.7$  ci dice che il 30% del collettivo ha come massimo titolo ha non più delle superiori e  $F_5 = 1$  che il 100% del collettivo ha, al massimo, la laurea.

**Esempio 2.2.5** (Continua: Reddito).

$[x_j, x_{j+1})$	$f_j$	$F_j$
0	3	0.20
3	5	0.36
5	10	0.22
10	20	0.22
		1.00

E si legge:  $F_1 = 0.21$  ci dice che il 20% del collettivo in esame guadagna al massimo 3 (mila euro); alternativamente leggiamo che il 20% del collettivo **non** guadagna più di 3 (mila euro).  $F_2 = 0.56$  ci dice che il 56% del collettivo guadagna al massimo 5.  $F_2 = 0.56$  ci dice che il 56% del collettivo guadagna al massimo 5 (mila euro); il 56% non guadagna più di 5 (mila euro).  $F_3 = 0.78$  ci dice che il 78% del collettivo guadagna 10 (mila euro); il 78% non guadagna più di 10 (mila euro). E infine il 100% del collettivo guadagna al massimo 20 (mila euro).

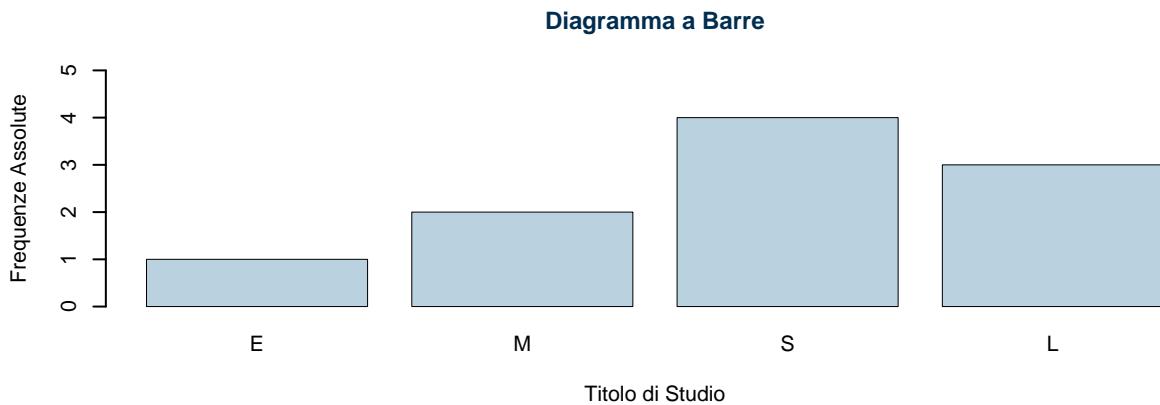
## 2.3 Rappresentazioni Grafiche

Diversi grafici statistici consentono di leggere in modo visivo una tabella di frequenza. Le frequenze vengono rappresentate come barre verticali -orizzontali- (diagramma a barre), o come angoli di una circonferenza (diagramma a torta).

**Esempio 2.3.1** (Continua: Variabile titolo di studio). Consideriamo i 10 dati ordinati:  $x_{(1)} = E, x_{(2)} = M, x_{(3)} = M, x_{(4)} = S, x_{(5)} = S, x_{(6)} = S, x_{(7)} = S, x_{(8)} = L, x_{(9)} = L, x_{(10)} = L$  e la loro tabella di frequenza

$X$	$n_j$	$f_j$	$f_{\%j}$
E	1	$1/10 = 0.1$	10%
M	2	$2/10 = 0.2$	20%
S	4	$4/10 = 0.4$	40%
L	3	$3/10 = 0.3$	30%
<b>Tot</b>	10	1.0	100%

Un diagramma a barre verticali trasforma le frequenze (assolute o relative) nelle altezze dei rettangoli



Mentre un diagramma a torta rappresenta le frequenze come spicchi della circonferenza e ovvero in angoli con una proporzione. Sia  $\alpha_j$  l'angolo dello spicchio  $j$  in corrispondenza della modalità  $j$ , allora

$$\alpha_j : 360^\circ = n_j : n$$

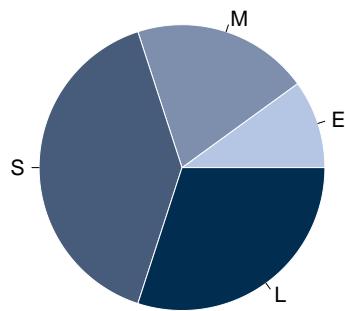
da cui si ricava facilmente che l'angolo di ogni spicchio è

$$\alpha_j = f_j \cdot 360^\circ$$

o, in radianti

$$\theta_j = f_j \cdot 2\pi$$

**Grafico a Torta**

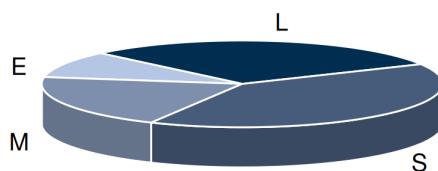


**Figura 2.1:** Grafico a torta



### Attenzione

Attenzione la terza dimensione è inutile, non ha interpretazione fenomenica e rischi di non fare cogliere l'angolatura giusta.



**Figura 2.2:** Attenzione alla terza dimensione

## 2.4 Istogramma di Densità

È grafico che rappresenta rettangoli contigui la cui area è la frequenza e la base è l'intervallo di raggruppamento. Usiamo il simbolo  $b_j$  per denotare l'ampiezza della base del rettangolo, l'altezza dei rettangoli viene chiamata *densità*.

**Definizione 2.4.1** (Densità di Frequenza). Si definisce la *densità di frequenza* della classe  $j$  il rapporto tra la frequenza e l'ampiezza della classe.

$$h_j = \text{Const.} \times \frac{f_j}{b_j}$$

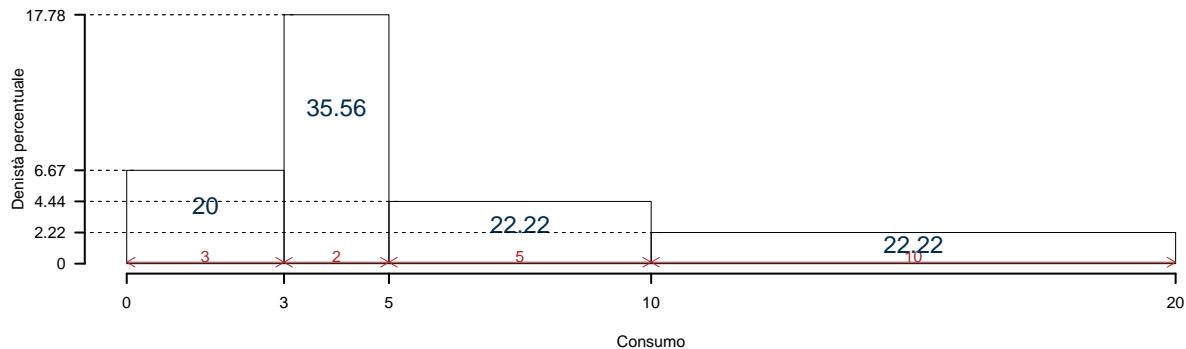
dove  $\text{Const.}$  è una costante numerica e  $b_j = x_{j+1} - x_j$ .

Se  $\text{Const.} = 1$  si ottiene l'*istogramma di densità relativa*, la somma delle aree dei rettangoli è 1. Se  $\text{Const.} = n$  si ottiene l'*istogramma di densità assoluta*, la somma delle aree dei rettangoli è  $n$ . Se  $\text{Const.} = 100$  si ottiene l'*istogramma di densità percentuale*, la somma delle aree dei rettangoli è 100. Per comodità tutti gli esempi si riferiscono all'istogramma di densità percentuale.

**Tabella 2.2:** Come ricavare le quantità necessarie per calcolare l'istogramma di densità percentuale

$[x_j, x_{j+1})$	$n_j$	$f_j = \frac{n_j}{n}$	$b_j = x_{j+1} - x_j$	$h_j = 100 \times \frac{f_j}{b_j}$
$[x_1 = 0, x_2 = 3)$	$n_1 = 9$	$f_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{9}{45} = 0.20$	$b_1 = 3 - 0 = 3$	$h_1 = 100 \times \frac{0.20}{3} = 6.67$
$[x_2 = 3, x_3 = 5)$	$n_2 = 16$	$f_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{16}{45} = 0.36$	$b_2 = 5 - 3 = 2$	$h_2 = 100 \times \frac{0.36}{2} = 17.78$
$[x_3 = 5, x_4 = 10)$	$n_3 = 10$	$f_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{10}{45} = 0.22$	$b_3 = 10 - 5 = 5$	$h_3 = 100 \times \frac{0.22}{5} = 4.44$
$[x_4 = 10, x_5 = 20)$	$n_4 = 10$	$f_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{10}{45} = 0.22$	$b_4 = 20 - 10 = 10$	$h_4 = 100 \times \frac{0.22}{10} = 2.22$

**Esempio 2.4.1.** La tabella 2.2 mostra passo, passo lo sviluppo del calcolo. La figura 2.3 la corrispondente rappresentazione grafica.



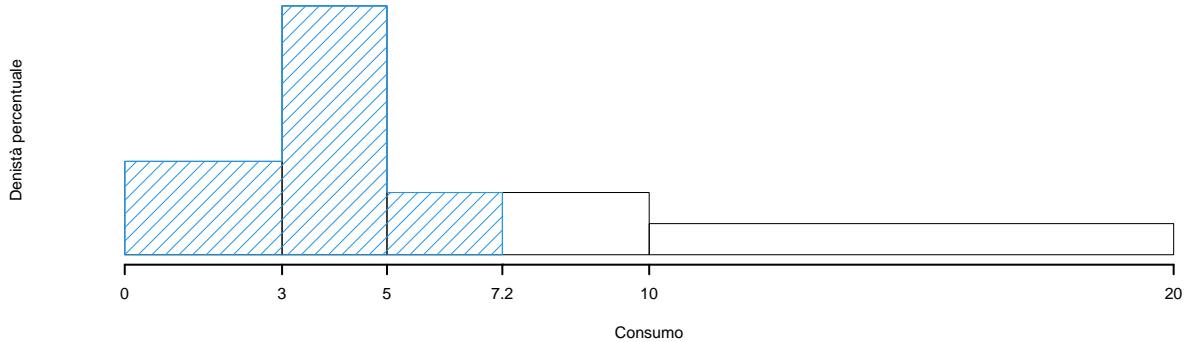
**Figura 2.3:** Rappresentazione grafica dell'istogramma di densità percentuale, l'area di ogni rettangolo corrisponde alla frequenza percentuale della classe, rappresentata sull'asse delle ascisse

## 2.5 La Funzione di Ripartizione

Se i dati sono quantitativi continuui raggruppati in classi, la Funzione di Ripartizione della VS  $X$  è la funzione che misura l'area dell'istogramma di densità (le aree sommano ad 1) dal più piccolo dei dati  $x_{(0)}$  fino ad un  $x$

qualunque. Se nel caso dell'esempio precedente scegliessimo  $x = 7.2$ , graficamente vedremo la figura 2.4. Notiamo innanzitutto che:

$$\begin{aligned} F(x_1) &= 0 \\ F(x_2) &= F_1 \\ F(x_3) &= F_2 \\ &\vdots & &\vdots \\ F(x_j) &= F_{j-1} \\ &\vdots & &\vdots \\ F(x_{K+1}) &= 1 \end{aligned}$$



**Figura 2.4:** Rappresentazione grafica della Funzione di Ripartizione di  $X$  valutata nel punto 7.2,  $F(7.2)$  è l'area da 0 a 7.2 dell'istogramma.

Nel nostro caso  $F(7.2)$  è la somma delle frequenze fino a 5 più l'area del rettangolo di base  $(7.2 - 5)$  e altezza  $h_3 = 4.4444/100$ , ovvero

$$\begin{aligned} F(7.2) &= f_1 + f_2 + \frac{(7.2 - 5)}{100} \times 4.4444 \\ &= F_2 + 2.5 \times 0.0444 \\ &= 0.6533 \end{aligned}$$

Se per esempio ci interessasse sapere, in modo approssimato, che percentuale e quanti individui che guadagnano meno di 7.2 (mila euro) al mese, basta moltiplicare  $F(7.2)$  per 100 e per  $n$ , rispettivamente.

$$\begin{aligned} \%(X < 7.2) &= 100 \times F(7.2) \\ &= 65.3333\% \\ \#(X < 7.2) &= 45 \times F(7.2) \\ &= 29.4 \end{aligned}$$

Dove  $\%(X < 7.2)$  significa la *percentuale* approssimata di dati minori di 7.2 e dove  $\#(X < 7.2)$  significa il *numero* approssimato di dati minori di 7.2.

Se per esempio sono interessato alla percentuale (o al numero) di dati compresi tra 2.4 e 7.2 osservo che

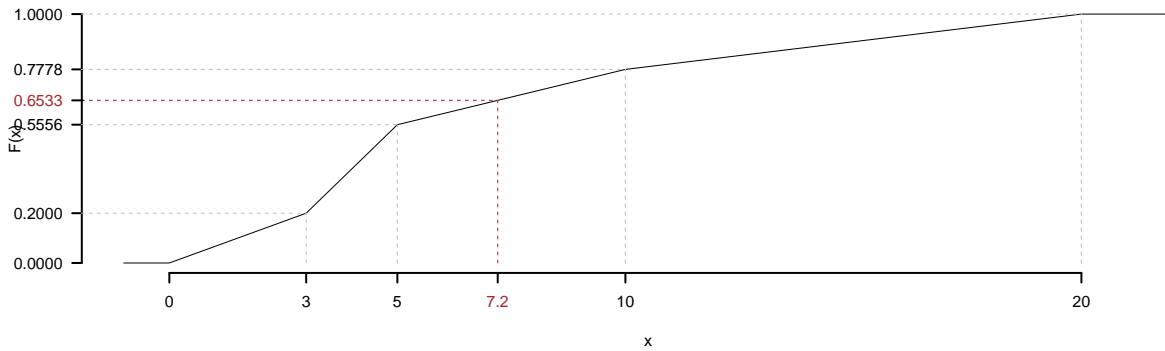
$$\begin{aligned}\%(2.4 < X < 7.2) &= 100 \times (F(7.2) - F(2.4)) \\ F(2.4) &= \frac{2.4 - 0}{100} \times 6.6667 \\ &= 0.16 \\ %(2.4 < X < 7.2) &= 100 \times (0.6533 - 0.16) \\ &= 49.3333.\end{aligned}$$

Infatti calcolare l'area tra 2.4 e 7.2 equivale a calcolare l'area fino a 7.2, l'area fino a 2.4 e sottrarle.

Più in generale la funzione di ripartizione cumula l'area dal più piccolo degli  $x$  fino al più grande.

$$\begin{aligned}F(x) &= 0 \text{ per ogni } x \leq x_1 \\ F(x) &= F(x_{j^*-1}) + \frac{x - x_{j^*}}{100} h_{j^*} \\ F(x) &= 1 \text{ per ogni } x \geq x_{K+1}\end{aligned}$$

dove  $j^*$  è la classe che contiene  $x$ . Se la volessimo rappresentare graficamente, nel nostro esempio sarebbe così:



## 2.6 L'inversa della Funzione di Ripartizione

La funzione di ripartizione è una funzione che crescente che vale zero quando  $x$  è il più piccolo dei dati e vale uno quando  $x$  è il più grande dei dati.

$$F : S_X \rightarrow [0, 1]$$

Definiamo  $Q = F^{-1}$  la funzione inversa:

$$Q : [0, 1] \rightarrow S_X$$

ed è tale che

$$Q(p) = x_p : F(x_p) = p, 0 \leq p \leq 1$$

## 2.7 Indicatori Sintetici di Centralità e di Variabilità

Un indicatore è un numero che sintetizza una caratteristica del fenomeno collettivo. Esempi di indicatori sono: il massimo del fenomeno, il minimo del fenomeno, la media del fenomeno, la modalità più ricorrente, ecc.

Gli **indicatori di centralità** sintetizzano l'intero fenomeno in un numero. Indicatori di che osserveremo centralità sono:

- La **media aritmetica** (variabili quantitative) nella sezione 3.1
- La **mediana** (variabili quantitative e variabili qualitative ordinate) nella sezione 4.1
- La **moda** (ogni tipo di variabile) nella sezione 4.4

La media aritmetica è una *media analitica* perché dipende dal valore che la variabile assume sulle unità. Mediana e Moda sono invece *medie lasche* perché dipendono dall'ordinamento dei dati.

Gli **indicatori di variabilità** misurano lo scostamento del fenomeno oggetto di studio dall'indicatore di centralità. Vedremo:

- La **varianza 3.2** e la **standard deviation** nella sezione 3.3
- Lo **scarto interquartile** nella sezione 4.3

## 2.8 Riepilogo

Estremo inf	Estremo sup	freq. ass.	freq. relativa	freq. cum.	ampiezza	densità
[ $x_1$ ,	$x_2)$	$n_1$	$f_1 = \frac{n_1}{n}$	$F_1 = f_1$	$b_1 = x_2 - x_1$	$h_1 = 100 \times \frac{h_1}{b_1}$
[ $x_2$ ,	$x_3)$	$n_2$	$f_2 = \frac{n_2}{n}$	$F_2 = F_1 + f_2$	$b_2 = x_3 - x_2$	$h_2 = 100 \times \frac{f_2}{b_2}$
...	...	...	...	...	...	...
[ $x_j$ ,	$x_{j+1})$	$n_j$	$f_j = \frac{n_j}{n}$	$F_j = F_{j-1} + f_j$	$b_j = x_{j+1} - x_j$	$h_j = 100 \times \frac{f_j}{b_j}$
...	...	...	...	...	...	...
[ $x_K$ ,	$x_{K+1})$	$n_K$	$f_K = \frac{n_K}{n}$	$F_K = F_{K-1} + f_K$	$b_K = x_{K+1} - x_K$	$f_K = 100 \times \frac{f_K}{b_K}$

# Media Aritmetica, Varianza e Standard Deviation

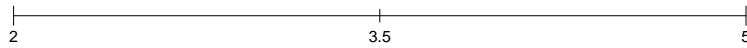
## 3.1 Media Aritmetica

La media tra due numeri  $x_1$  e  $x_2$  è il punto centrale

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

**Esempio.** Posto  $x_1 = 2, x_2 = 5$ , allora

$$\bar{x} = \frac{2 + 5}{2} = 3.5$$



**Definizione 3.1.1** (Media Aritmetica). Consideriamo la serie dei dati  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ , si definisce la media aritmetica:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Ovvero la media tra  $n$  numeri  $x_1, x_2, \dots, x_n$  è definita da

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

siccome la somma dei dati, rappresenta il totale (*Tot*) del fenomeno nel collettivo

$$Tot = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i$$

allora la media aritmetica

$$\bar{x} = \frac{Tot}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

rappresenta la quantità *ipotetica* che ogni individuo possiederebbe se il totale fosse equi-ripartito.

### 3.1.1 La Media Aritmetica come Baricentro dell'Iistogramma

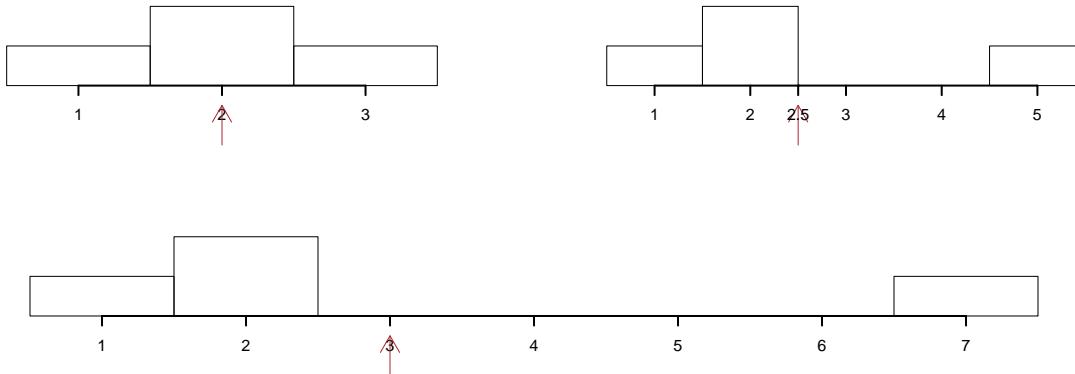
La media aritmetica tiene in equilibrio l'istogramma di densità come se si trattasse di un sistema fisico. Se per esempio consideriamo 3 diverse serie di dati

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 &= (x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = 3) \\ \mathbf{x}_2 &= (x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = 5) \\ \mathbf{x}_3 &= (x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = 7)\end{aligned}$$

E osserviamo che

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{1+2+2+3}{4} = 2 \\ \bar{x}_2 &= \frac{1+2+2+5}{4} = 2.5 \\ \bar{x}_3 &= \frac{1+2+2+7}{4} = 3\end{aligned}$$

Ovvero spostando l'ultimo dato verso valori maggiori spingiamo la media su valori maggiori. Graficamente osserviamo come la media tenga in equilibrio l'istogramma nella figura 3.1.



**Figura 3.1:** La media aritmetica tiene in equilibrio l'istogramma di densità, più ci sono dati estremi molto grandi più la media sale per mantenere l'equilibrio col totale.

Allo stesso modo se osserviamo:

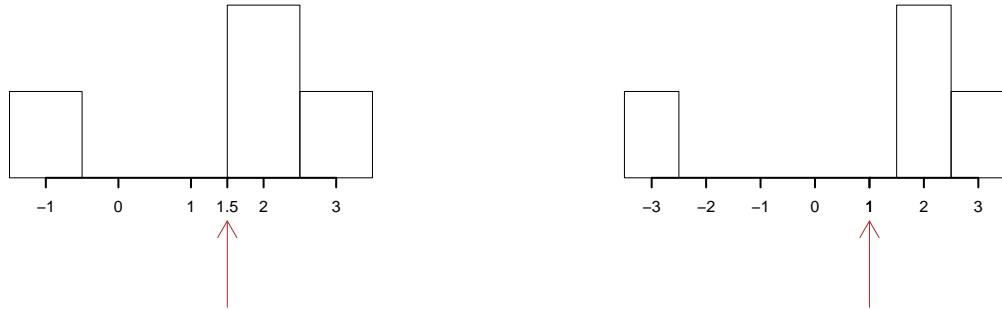
$$\mathbf{x}_4 = (x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = 3)$$

$$x_5 = (x_1 = -3, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = 3),$$

allora

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{1 + 2 + 2 + 3}{4} = 2 \\ \bar{x}_4 &= \frac{-1 + 2 + 2 + 3}{4} = 1.5 \\ \bar{x}_5 &= \frac{-3 + 2 + 2 + 3}{4} = 1\end{aligned}$$

Ovvero spostando il primo dato verso valori minori spingiamo la media su valori minori. Graficamente osserviamo come la media tenga in equilibrio l'istogramma nella figura 3.2.



**Figura 3.2:** Analogamente se spostiamo un dato verso sinistra la media si sposta a sinistra anch'essa

### 3.1.2 Calcolo per Distribuzioni di Frequenza

Se i dati sono raccolti in distribuzione di frequenza

Modalità	$x_1$	$x_2$	...	$x_j$	...	$x_K$
Frequenze	$n_1$	$n_2$	...	$n_j$	...	$n_K$

**Definizione 3.1.2** (Media Aritmetica per Dati Raccolti in Classi).

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^K x_j n_j$$

**Esempio 3.1.1.** Osserviamo i seguenti dati:  $x_1 = 3.4$ ;  $x_2 = 3.4$ ;  $x_3 = 2.7$ ;  $x_4 = 3.4$ ;  $x_5 = 2.7$ ;  $x_6 = 3.4$ ;  $x_7 = 2.7$ ;  $x_8 = 5.1$ ;  $x_9 = 5.1$ ;  $x_{10} = 2.7$ ;

La media

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\
&= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}}{10} \\
&= \frac{3.4 + 3.4 + 2.7 + 3.4 + 2.7 + 3.4 + 2.7 + 5.1 + 5.1 + 2.7}{10} \\
&= \frac{34.6}{10} \\
&= 3.46
\end{aligned}$$

Riordiniamo i dati:  $x_{(1)} = 2.7$ ;  $x_{(2)} = 2.7$ ;  $x_{(3)} = 2.7$ ;  $x_{(4)} = 2.7$ ;  $x_{(5)} = 3.4$ ;  $x_{(6)} = 3.4$ ;  $x_{(7)} = 3.4$ ;  $x_{(8)} = 3.4$ ;  $x_{(9)} = 5.1$ ;  $x_{(10)} = 5.1$ ;

E raccogliamo in distribuzione di frequenza:

modalita	$x_1 = 2.7$	$x_2 = 3.4$	$x_3 = 5.1$	10
frequenze	4	4	2	

la media:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^K x_j n_j \\
&= \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3}{n} \\
&= \frac{2.7 \times 4 + 3.4 \times 4 + 5.1 \times 2}{10} \\
&= \frac{34.6}{10} \\
&= 3.46
\end{aligned}$$

### 3.1.3 Proprietà della Media Aritmetica

**Proprietà 3.1.1** (della media aritmetica). *Le principale proprietà della media aritmetica sono:*

0. *Internalità:*  $x_{\min} = x_{(1)} \leq \bar{x} \leq x_{(n)} = x_{\max}$
1. *Invarianza della somma:*

$$n\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i$$

2. *Somma degli scarti dalla media nulla:*  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$
3. *Minimizza la somma degli scarti al quadrato:*

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 < \sum_{i=1}^n (x_i - d)^2 \quad \forall d \neq \bar{x}$$

4. *Invarianza per trasformazioni lineari:* se  $y_i = a + bx_i$  allora  $\bar{y} = a + b\bar{x}$   
 5. *Associatività.* Sia una popolazione,  $\mathcal{P}$ , formata da  $K$  gruppi con medie e numerosità:  $(\bar{x}_1; n_1), (\bar{x}_2; n_2), \dots, (\bar{x}_K; n_K)$ . Allora, la media totale  $\bar{x}_T$  di  $\mathcal{P}$  è data da

$$\bar{x}_T = \frac{\text{Tot}\{\mathcal{P}_1\} + \dots + \text{Tot}\{\mathcal{P}_K\}}{n_1 + \dots + n_K} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + \dots + n_K \bar{x}_K}{n_1 + \dots + n_K}$$

*Dimostrazione.* Qui di seguito le dimostrazioni

0. La proprietà di internalità deriva dal fatto che la somma dei dati è maggiore della somma di  $n$  volte del più piccolo dei dati  $\sum_{i=1}^n x_i > \sum_{i=1}^n x_{(1)}$ . Mentre  $\sum_{i=1}^n x_i < \sum_{i=1}^n x_{(n)}$  la somma dei dati è maggiore della somma di  $n$  volte del più grande dei dati.
1. La proprietà di invarianza della somma la otteniamo direttamente dalla definizione di media aritmetica.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ n\bar{x} &= \sum_{i=1}^n x_i.\end{aligned}$$

2. Somma degli scarti dalla media nulla. Osserviamo che

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) &= \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \bar{x} \\ &= n\bar{x} - n\bar{x} \\ &= 0.\end{aligned}$$

3. Minimizza la somma degli scarti al quadrato. Se poniamo  $g(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2$  osserviamo che

$$\begin{aligned}g(x) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2 \\ &= (x_1 - x)^2 + \dots + (x_n - x)^2 \quad \text{La funzione } g \text{ è una somma di parabole} \\ g'(x) &= -2(x_1 - x) - \dots - 2(x_n - x) \quad \text{Dove } g' \text{ indica la derivata prima di } g\end{aligned}$$

$$= -2 \sum_{i=1}^n x_i - 2nx$$

$$g'(x) = 0$$

Eguagliamo  $g'$  a zero per avere il minimo

$$-2 \sum_{i=1}^n x_i - 2nx = 0$$

$$x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

4. Invarianza per trasformazioni lineari: se  $y_i = a + bx_i$  allora

$$\begin{aligned}
 \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a + bx_i) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n bx_i \\
 &= a + b\bar{x}.
 \end{aligned}$$

5. Associatività. Sia una popolazione,  $\mathcal{P}$ , formata da  $K$  gruppi con medie e numerosità:  $(\bar{x}_1; n_1)$ ,  $(\bar{x}_2; n_2)$ , ...,  $(\bar{x}_K; n_K)$ . Allora, il totale di tutte le popolazioni è  $Tot = n_1\bar{x}_1 + \dots + n_K\bar{x}_K$ , mentre il numero totale di individui di tutte e  $K$  le popolazioni è  $n_T = n_1 + \dots + n_K$ . E quindi la media

$$\bar{x}_T = \frac{\text{Tot}\{\mathcal{P}_1\} + \dots + \text{Tot}\{\mathcal{P}_K\}}{n_1 + \dots + n_K} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + \dots + n_K \bar{x}_K}{n_1 + \dots + n_K}$$

□

## 3.2 La varianza

La media riduce un complesso di  $n$  dati in uno solo. A parità di media i dati possono essere molto diversi tra di loro. Per esempio le due serie di dati

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_1 &= (x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = 2) \\
 \mathbf{x}_2 &= (x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = 3) \\
 \mathbf{x}_3 &= (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 8)
 \end{aligned}$$

hanno tutte la stessa media  $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = 2$ , ma nel primo caso tutti possiedono la media, nel secondo chi poco e chi tanto, nel terzo caso uno possiede il totale e gli altri 3 nulla.

La varianza misura la distanza dei dati dalla media.

**Definizione 3.2.1 (Varianza).** Si definisce la varianza la quantità:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

La varianza misura lo scostamento medio quadratico dei dati dalla media aritmetica; ovvero è la media del quadrato degli scarti.

Con un po' di algebra si dimostra che

**Proprietà 3.2.1** (Formula Calcolatoria della Varianza).

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + \bar{x}^2 - 2 \cdot x_i \cdot \bar{x}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2 \cdot x_i \cdot \bar{x} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{n}{n} \bar{x}^2 - \frac{2}{n} \bar{x} \cdot n \cdot \bar{x} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 \end{aligned}$$

□

Quindi la varianza si può calcolare o come media del quadrato degli scarti dalla media o come media dei quadrati meno il quadrato della media.

**Esempio 3.2.1.** Posto  $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = 2$  allora

$$\bar{x} = \frac{2 + 2 + 2 + 2}{4} = 2$$

$$\sigma^2 = \frac{(2-2)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2}{4} = 0$$

Tutti gli individui hanno la stessa quantità che è pari alla media, non c'è variabilità, la varianza vale zero.

**Esempio 3.2.2.** Posto  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = 3$  allora

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 2 + 3}{4} = 2$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-2)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2}{4} = 0.5$$

Non tutti gli individui hanno la stessa quantità, c'è variabilità, la varianza è diversa da zero.

**Esempio 3.2.3.** Posto  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 8$  allora

$$\bar{x} = \frac{0 + 0 + 0 + 8}{4} = 2$$

$$\sigma^2 = \frac{(0-2)^2 + (0-2)^2 + (0-2)^2 + (8-2)^2}{4} = 12$$

Tutto il totale è posseduto da un solo individuo, c'è massima variabilità.

### 3.2.1 Calcolo per Distribuzioni di Frequenza

Se i dati sono raccolti in distribuzione di frequenza

Modalità	$x_1$	$x_2$	...	$x_j$	...	$x_K$		n
Frequenze	$n_1$	$n_2$	...	$n_j$	...	$n_K$		

la varianza si può calcolare

**Proprietà 3.2.2** (Varianza per Dati in Distribuzione di Frequenza).

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k (x_j - \bar{x})^2 n_j$$

e di conseguenza, con un po' di algebra otteniamo:

**Proprietà 3.2.3** (Formula Calcolatoria per la Varianza per Dati in Distribuzione di Frequenza).

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k x_j^2 n_j - \bar{x}^2$$

**Esempio 3.2.4.**  $x_1 = 3.4; x_2 = 3.4; x_3 = 2.7; x_4 = 3.4; x_5 = 2.7; x_6 = 3.4; x_7 = 2.7; x_8 = 5.1; x_9 = 5.1; x_{10} = 2.7;$

La media

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}}{10} \\ &= \frac{3.4 + 3.4 + 2.7 + 3.4 + 2.7 + 3.4 + 2.7 + 5.1 + 5.1 + 2.7}{10} \\ &= \frac{34.6}{10} \end{aligned}$$

$$= 3.46$$

La varianza

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\
 &= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2 + (x_5 - \bar{x})^2 + (x_6 - \bar{x})^2 + (x_7 - \bar{x})^2 + (x_8 - \bar{x})^2 + (x_9 - \bar{x})^2}{10} \\
 &= \frac{(3.4 - 3.46)^2 + (3.4 - 3.46)^2 + (2.7 - 3.46)^2 + (3.4 - 3.46)^2 + (2.7 - 3.46)^2 + (3.4 - 3.46)^2 + (2.7 - 3.46)^2}{10} \\
 &= \frac{0.0036 + 0.0036 + 0.5776 + 0.0036 + 0.5776 + 0.0036 + 0.5776 + 2.6896 + 2.6896 + 0.5776}{10} \\
 &= \frac{7.704}{10} \\
 &= 0.7704
 \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 \\
 &= \frac{1}{10} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 + x_9^2 + x_{10}^2) - \bar{x}^2 \\
 &= \frac{1}{10} (3.4^2 + 3.4^2 + 2.7^2 + 3.4^2 + 2.7^2 + 3.4^2 + 2.7^2 + 5.1^2 + 5.1^2 + 2.7^2) - 3.46^2 \\
 &= \frac{1}{10} (11.56 + 11.56 + 7.29 + 11.56 + 7.29 + 11.56 + 7.29 + 26.01 + 26.01 + 7.29) - 11.9716 \\
 &= 12.742 - 11.9716 \\
 &= 0.7704
 \end{aligned}$$

Riordiniamo i dati:  $x_{(1)} = 2.7$ ;  $x_{(2)} = 2.7$ ;  $x_{(3)} = 2.7$ ;  $x_{(4)} = 2.7$ ;  $x_{(5)} = 3.4$ ;  $x_{(6)} = 3.4$ ;  $x_{(7)} = 3.4$ ;  $x_{(8)} = 3.4$ ;  $x_{(9)} = 5.1$ ;  $x_{(10)} = 5.1$ ;

E raccogliamo in distribuzione di frequenza:

modalita	$x_1 = 2.7$	$x_2 = 3.4$	$x_3 = 5.1$	10
frequenze	4	4	2	

la media:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^K x_j n_j$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3}{n} \\
&= \frac{2.7 \times 4 + 3.4 \times 4 + 5.1 \times 2}{10} \\
&= \frac{34.6}{10} \\
&= 3.46
\end{aligned}$$

la varianza:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k (x_j - \bar{x})^2 n_j \\
&= \frac{1}{10} ((x_1 - \bar{x})^2 n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 n_2 + (x_3 - \bar{x})^2 n_3) \\
&= \frac{1}{10} ((2.7 - 3.46)^2 \times 4 + (3.4 - 3.46)^2 \times 4 + (5.1 - 3.46)^2 \times 2) \\
&= \frac{7.704}{10} \\
&= 0.7704
\end{aligned}$$

o alternativamente

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k x_j^2 n_j - \bar{x}^2 \\
&= \frac{1}{10} (x_1^2 n_1 + x_2^2 n_2 + x_3^2 n_3) - \bar{x}^2 \\
&= \frac{1}{10} (2.7^2 \times 4 + 3.4^2 \times 4 + 5.1^2 \times 2) - 3.46^2 \\
&= \frac{1}{10} \times 127.42 - 11.9716 \\
&= 0.7704
\end{aligned}$$

**Esempio 3.2.5.**  $x_1 = 3.61; x_2 = 3.32; x_3 = 3.16; x_4 = 3.74; x_5 = 3.61; x_6 = 3.61; x_7 = 3.61; x_8 = 3.46; x_9 = 3.61; x_{10} = 3.61; x_{11} = 3.74; x_{12} = 3.32; x_{13} = 3.74; x_{14} = 3.74; x_{15} = 3.74; x_{16} = 3.46; x_{17} = 3.46; x_{18} = 3.46; x_{19} = 3.87; x_{20} = 3.61; x_{21} = 3.61;$

La media:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{21} 75.09 \\
 &= 3.5757
 \end{aligned}$$

La varianza

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 \\
 &= \frac{1}{21} 269.0885 - 3.5757^2 \\
 &= 9.238
 \end{aligned}$$

riordiniamo i dati

$$\begin{aligned}
 x_{(1)} &= 3.16; x_{(2)} = 3.32; x_{(3)} = 3.32; x_{(4)} = 3.46; x_{(5)} = 3.46; x_{(6)} = 3.46; x_{(7)} = 3.46; x_{(8)} = 3.61; \\
 x_{(9)} &= 3.61; x_{(10)} = 3.61; x_{(11)} = 3.61; x_{(12)} = 3.61; x_{(13)} = 3.61; x_{(14)} = 3.61; x_{(15)} = 3.61; \\
 x_{(16)} &= 3.74; x_{(17)} = 3.74; x_{(18)} = 3.74; x_{(19)} = 3.74; x_{(20)} = 3.74; x_{(21)} = 3.87;
 \end{aligned}$$

E raccogliamo in distribuzione di frequenza:

$x_j$	$x_1 = 3.16$	$x_2 = 3.32$	$x_3 = 3.46$	$x_4 = 3.61$	$x_5 = 3.74$	$x_6 = 3.87$	Tot
$n_j$	1	2	4	8	5	1	21
$x_j n_j$	10	22	48	104	70	15	269
$x_j^2 n_j$	100	242	576	1352	980	225	3475

E osserviamo che

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k x_j n_j \\
 &= \frac{1}{21} 75.09 \\
 &= 3.5757
 \end{aligned}$$

e che

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^2 n_j - \bar{x}^2 \\
 &= \frac{1}{21} 269.0885 - 3.5757^2 \\
 &= 9.238
 \end{aligned}$$

### 3.2.2 Proprietà della Varianza

**Proprietà 3.2.4** (della varianza  $\sigma^2$ ). *Le principale proprietà della varianza sono:*

1.  $\sigma^2 \geq 0$ .
2.  $\sigma^2 = 0$ , se e solo se  $X$  è costante.
3. Se  $y_i = a + bx_i$  allora  $\sigma_Y^2 = b^2\sigma_X^2$ .

*Dimostrazione.* Le dimostrazioni qui di seguito.

1.  $\sigma^2 \geq 0$  deriva direttamente dalla definizione, essendo  $\sigma^2$  la media di scarti al quadrato e quindi di quantità positive, non potrà mai essere negativa.
2.  $\sigma^2 = 0$  solo se ogni scarto dalla media è zero e questo può avvenire solo se tutti i dati sono uguali alla media, ovvero se i dati sono tutti uguali tra di loro e quindi non variano.
3. Se  $y_i = a + bx_i$  allora

$$\begin{aligned}
 \sigma_Y^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a + bx_i - (a + b\bar{x}))^2 \\
 &= b^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\
 &= b^2 \sigma_X^2
 \end{aligned}$$

□

### 3.3 La Standard Deviation

La varianza non ha un'unità di misura leggibile, è una media di quadrati degli scarti. E quindi anche l'unità di misura è elevata al quadrato

Si definisce la *standard deviation* (deviazione standard, scarto quadratico medio), la radice della varianza

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

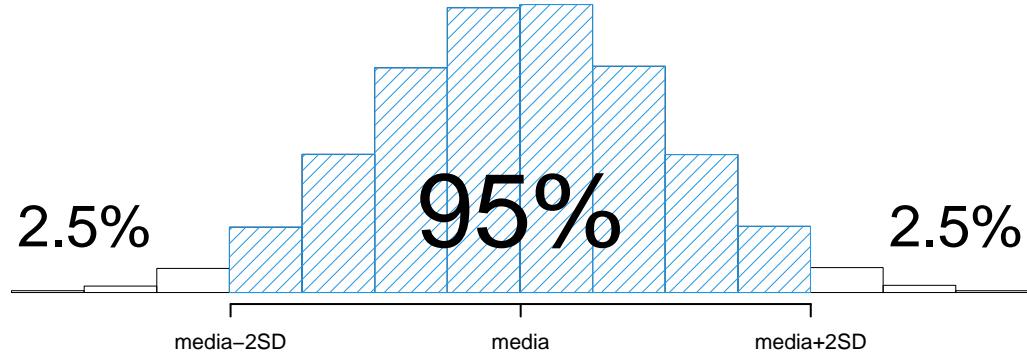
#### 3.3.1 Proprietà della Standard Deviation

**Proprietà 3.3.1** (della deviazione standard  $\sigma$ ). *Le principale proprietà della deviazione standard sono:*

1.  $\sigma \geq 0$ .
2.  $\sigma = 0$ , se e solo se  $X$  è costante.
3. Se  $y_i = a + bx_i$  allora allora  $\sigma_Y = |b|\sigma_X$

Se la distribuzione della  $X$  è abbastanza simmetrica e di forma campanulare, allora

$$\%(\bar{x} - 2\sigma \leq X \leq \bar{x} + 2\sigma) \approx 95\%$$



**Figura 3.3:** Interpretazione della SD

la figura La figura 3.3 la corrispondente rappresentazione grafica.

## 3.4 Esempi

**Esempio 3.4.1.** Si si è chiesta l'età a 37500 uomini e 38100 donne di un determinato collettivo, ed è risultato che gli uomini di quel collettivo hanno un'età media di 45 anni e le donne un'età media di 49 anni. La sintesi dei dati qui di seguito:

	$n_j$	$\bar{x}_j$
Uomini	37500	45
Donne	38100	49

Calcolare l'età media dell'intero collettivo.

**Soluzione.** L'età media per l'intera popolazione è

$$\bar{x}_a = \frac{37500 \times 45 + 38100 \times 49}{37500 + 38100} = 47.02.$$

**Esempio 3.4.2.** Uno studente iscritto al secondo anno di un CdL, ha superato 7 esami con un voto medio pari a 26/30. Sostiene un nuovo esame ottenendo un voto pari a 28/30. Qual è il voto medio dopo l'ottavo esame?

**Soluzione.** Sia  $\bar{x}_7 = 26$  il voto medio dopo i primi 7 esami. Sia  $\bar{x}_8$  il voto medio dopo l'8<sup>o</sup> esame.

$$\begin{aligned}\bar{x}_7 &= \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 x_i \\ \bar{x}_8 &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i = \frac{1}{8} \left( \sum_{i=1}^7 x_i + x_8 \right) \\ &= \frac{1}{8} (7\bar{x}_7 + x_8) = \frac{7 \times \bar{x}_7 + 1 \times x_8}{8} \\ &= \frac{7 \times 26 + 1 \times 28}{8} = \frac{182 + 28}{8} = 26.25.\end{aligned}$$

**Esempio 3.4.3.** In una contrattazione sindacale, il rappresentante del governo propone di alzare di un ammontare fisso di 100 euro lo stipendio degli impiegati statali.

- Come cambierebbero lo stipendio medio e la varianza se questa misura fosse intrapresa?
- Se il governo aumentasse lo stipendio di ciascun impiegato statale del 5%, come cambierebbe lo stipendio medio e la varianza?

**Soluzione.**

- Sia  $x$  lo stipendio degli statali.

$$\begin{aligned}y_i &= x_i + 100 \\ \bar{y} &= \bar{x} + 100. \\ \sigma_Y^2 &= \sigma_X^2\end{aligned}$$

Stipendio medio aumenta esattamente di 100€, la varianza non cambia.

- Aumento percentuale pari al 5%.

$$\begin{aligned}y_i &= x_i + \frac{5}{100} x_i = 1.05 x_i \\ \bar{y} &= 1.05 \bar{x} \\ \sigma_Y^2 &= (1.05)^2 \sigma_X^2\end{aligned}$$

La MEDIA aumenta del 5%, la varianza aumenta in modo quadratico.

**Esempio 3.4.4.** La spesa per le vacanze estive (in migliaia di euro) sostenuta da 12 famiglie di un condominio è stata di:

---

0	0	2	2.5	4	5.1	5.8	6	7	12	15	21
---	---	---	-----	---	-----	-----	---	---	----	----	----

---

(a) Determinare la spesa media e la varianza per famiglia.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{0 + 0 + 2 + 2.5 + 4 + 5.1 + 5.8 + 6}{12} + \dots \\ &+ \frac{7 + 12 + 15 + 21}{12} = \frac{80.4}{12} = 6.7 \text{€}. \\ \sigma_X^2 &= \frac{0^2 + 0^2 + 2^2 + \dots + 21^2}{12} - (6.7)^2 \\ &= 36.8517\end{aligned}$$

(b) Determinare la spesa media per famiglie con spesa  $\neq 0$ .

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{2 + 2.5 + 4 + 5.1 + 5.8 + 6 + 7 + 12 + 15 + 21}{10} \\ &= \frac{80.4}{10} = 8.04 \text{€}. \\ \sigma_X^2 &= \frac{2^2 + \dots + 21^2}{10} - (8.04)^2 \\ &= 33.4484\end{aligned}$$

**Esempio 3.4.5.** Numero di impiegati per anni di servizio di una industria

$[x_j, x_{j+1})$	$n_j$	$f_j$	$F_j$	$\bar{x}_j$	$\bar{x}_j^2$	$\bar{x}_j n_j$	$\bar{x}_j^2 n_j$	
0	1	7	0.0609	0.0609	0.5	0.25	3.5	1.75
1	5	18	0.1565	0.2174	3.0	9.00	54.0	162.00
5	10	45	0.3913	0.6087	7.5	56.25	337.5	2531.25
10	20	25	0.2174	0.8261	15.0	225.00	375.0	5625.00
20	30	20	0.1739	1.0000	25.0	625.00	500.0	12500.00
Total	115	1.0000				1270.0	20820.00	

Determinare media, mediana e varianza dell'età di servizio dell'industria.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{0.5 \times 7 + 3.0 \times 18 + \dots + 20 \times 25}{7 + 18 + \dots + 20} = \frac{1270}{115} = 11.04 \\ x_{0.5} &= x_{m; \text{inf}} + \frac{0.5 - F_{m-1}}{F_m - F_{m-1}} (x_{m; \text{sup}} - x_{m; \text{inf}}) \\ &= 5 + \frac{0.5 - 0.22}{0.61 - 0.22} (10 - 5) = 8.59 \\ \sigma_X^2 &= \frac{1}{115} 20820 - (11.04)^2 \\ &= 170\end{aligned}$$



# Mediana, Percentili e Moda

# 4

## 4.1 La Mediana

La **Mediana**,  $Me$  o  $x_{0.5}$ , è il valore centrale della serie dei dati riordinati in due: metà dei dati sono minori della mediana e metà dei dati sono maggiori della mediana. In simboli: sia  $x_1, \dots, x_n$  la serie dei dati e  $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$  i dati riordinati in modo crescente, allora:

1. se  $n$  è dispari

$$x_{0.5} = x_{(\frac{n+1}{2})}$$

2. se  $n$  è pari

$$x_{0.5} = \frac{1}{2} (x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)})$$

**Esempio 4.1.1.** Sia

$$(x_1 = 2.9, x_2 = 3.5, x_3 = 1.2, x_4 = 2.7, x_5 = 4.2)$$

la serie dei dati, la serie dei dati riordinati sarà

$$(x_{(1)} = 1.2, x_{(2)} = 2.7, x_{(3)} = 2.9, x_{(4)} = 3.5, x_{(5)} = 4.2),$$

$n = 5$  è dispari e dunque

$$x_{0.5} = x_{(\frac{n+1}{2})} = x_{(\frac{5+1}{2})} = x_{(3)} = 2.9$$

**Esempio 4.1.2.** Sia

$$(x_1 = 2.9, x_2 = 3.5, x_3 = 1.2, x_4 = 2.7, x_5 = 4.2, x_6 = 4.2)$$

la serie dei dati, la serie dei dati riordinati sarà

$$(x_{(1)} = 1.2, x_{(2)} = 2.7, x_{(3)} = 2.9, x_{(4)} = 3.5, x_{(5)} = 4.2, x_{(6)} = 4.2)$$

$n = 6$  è pari e dunque

$$x_{0.5} = \frac{1}{2} (x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}) = \frac{1}{2} (x_{(\frac{6}{2})} + x_{(\frac{6}{2}+1)}) = \frac{1}{2} (x_{(3)} + x_{(4)}) = \frac{2.9 + 3.5}{2} = 3.2$$

### 4.1.1 Dati espressi in distribuzione di frequenza

Se il fenomeno è espresso in una tabella di distribuzione di frequenza, allora la *modalità mediana* è la prima modalità tale per cui la frequenza cumulata è maggiore di 0.5

**Esempio 4.1.3.** Fenomeno *Titolo di Studio*,  $n = 350$ , numero di modalità  $k = 5$ .

$j$	$x_j$	$n_j$	$f_j$	$F_j$
1	Elementare	35	0.10	0.10
2	Media inferiore	105	0.30	0.40
3	Media Superiore	147	0.42	0.82
4	Laurea	35	0.10	0.92
5	Post Laurea	28	0.08	1.00

La modalità mediana è la terza  $j = 3$ , dunque *Media Superiore*, infatti  $F_3 = 0.82 > 0.50$ .

#### 4.1.2 Dati espressi in classi

Se il fenomeno è espresso in classi, allora l'*intervallo mediano* è la primo intervallo tale per cui la frequenza cumulata è maggiore di 0.5.

**Esempio 4.1.4.**

Il reddito di  $n = 4700$  famiglie è rappresentato nella seguente tabella di frequenza

$j$	$[x_j, x_{j+1})$	$n_j$	$f_j$	$b_j$	$h_j$	$F_j$
1	0	10	0.11	10	1.1	0.11
2	10	15	0.27	5	5.4	0.38
3	15	20	0.33	5	6.6	0.71
4	20	25	0.21	5	4.2	0.92
5	25	35	0.08	10	0.8	1.00
		4700	1.00	35		

La classe mediana è la terza classe  $j = 3$ , ovvero la classe  $[15,20)$ , in quanto  $F_3 = 0.71 > 0.50$ .

Il *valore approssimato della mediana* è un valore che si trova all'interno dell'intervallo mediano e si ottiene dalla formula

$$x_{0.5} = x_{\inf;m} + \frac{0.5 - F_{m-1}}{f_m} \cdot (x_{\sup;m} - x_{\inf;m}),$$

dove  $m$  è l'indicatore della classe mediana,  $x_{\inf;m}$  e  $x_{\sup;m}$  sono, rispettivamente l'estremo inferiore e quello superiore dell'intervallo che contiene la mediana.

**Esempio 4.1.5.** Nell'esempio precedente l'intervallo mediano è  $[15,20)$  otterremo:

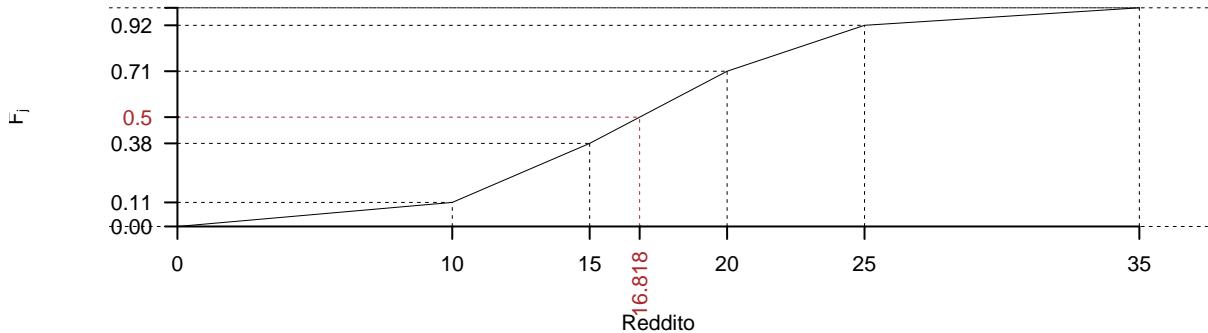
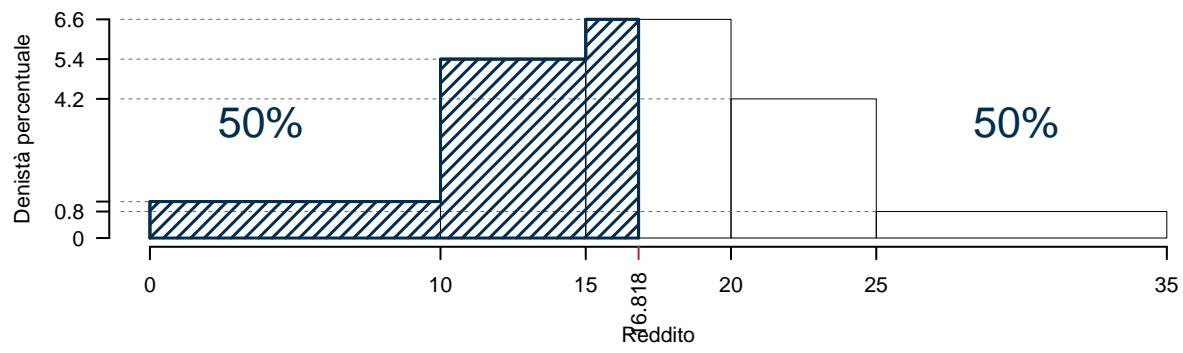
$$p = 0.5, \text{ essendo } F_3 = 0.71 > 0.5 \Rightarrow j_{0.5} = 3$$

$$\begin{aligned}
 x_{0.5} &= x_{\inf;3} + \frac{0.5 - F_2}{f_3} \cdot b_3 \\
 &= 15 + \frac{0.5 - 0.38}{0.33} \cdot 5 \\
 &= 16.82
 \end{aligned}$$



### Nota

La mediana è quel valore che taglia l'istogramma in due parti, entrambe di area pari al 50% dell'area totale



L'area tratteggiata è il 50% dell'area totale.

#### 4.1.3 Proprietà della Mediana

**Proprietà 4.1.1 (della Mediana).** La mediana di una distribuzione,  $x_{0.5}$ , è quel valore della per  $X$  il quale si ha  $F(x_{0.5}) = 0.5$ . Le proprietà della mediana ( $x_{0.5}$ ) sono:

1.  $x_{\min} \leq x_{0.5} \leq x_{\max}$ ,

2.  $\sum_{j=1}^n |x_j - x_{0.5}|$  è un minimo.

3. Relazione Media-Mediana:

- Distribuzione simmetrica  $\rightarrow x_{0.5} = \bar{x}$
- Distribuzione con coda lunga a destra  $\rightarrow x_{0.5} < \bar{x}$
- Distribuzione con coda lunga a sinistra  $\rightarrow x_{0.5} > \bar{x}$

## 4.2 I Percentili

Il  $p$ -esimo percentile  $x_p$ ,  $0 \leq p \leq 1$ , è quel valore che divide la serie dei dati riordinati in due: il  $p \times 100\%$  dei dati sono minori di  $x_p$  e  $(1 - p) \times 100\%$  dei dati sono maggiori di  $x_p$ . Se per esempio  $p = 0.30$  allora il trentesimo percentile è quel valore che ha il 30% dei dati inferiore il 70% dei dati superiore. Il  $p$ -esimo percentile di una serie di dati è il valore che occupa la posizione  $\lfloor p \times n \rfloor + 1$ , dove  $\lfloor x \rfloor$  è l'operatore che estrae la parte intera di un numero decimale, ad esempio  $\lfloor 3.001 \rfloor = \lfloor 3.21 \rfloor = \lfloor 3.94 \rfloor = 3$ .

**Esempio 4.2.1.** Si considerino  $n = 21$  osservazioni di una variabile categoriale ordinata che assume 7 valori:  $-2, -1, 0, 1, 2$  (ad esempio una scala del tipo  $-2 = \text{in totale disaccordo}$ ,  $-1 = \text{più in disaccordo che in accordo}$ ,  $0 = \text{né d'accordo, né in disaccordo}$ ,  $1 = \text{più d'accordo che in disaccordo}$ ,  $2 = \text{totalmente d'accordo}$ ). Qui di seguito i dati riordinati:

$(i)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$x_i$	-2	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2	2	

Il 15-esimo percentile è il dato che occupa la  $\lfloor n \times p \rfloor + 1 = \lfloor 21 \times 0.15 \rfloor + 1 = 3 + 1 = 4$ , e dunque il 15-esimo percentile è il quarto dato  $x_{(4)} = -1$ . È chiaro che la mediana è il 50-esimo percentile. In questo caso  $x_{0.5} = x_{(\lfloor 21 \times 0.5 \rfloor + 1)} = x_{(11)} = 0$ .

### 4.2.1 Dati espressi in distribuzione di frequenza

Se il fenomeno è espresso in una tabella di distribuzione di frequenza, allora il  $p$ -esimo percentile è la prima modalità tale per cui la frequenza cumulata è maggiore di  $p$ .

**Esempio 4.2.2.** Fenomeno *Titolo di Studio*,  $n = 350$ , numero di modalità  $k = 5$ .

$j$	$x_j$	$n_j$	$f_j$	$F_j$
1	Elementare	35	0.10	0.10
2	Media inferiore	105	0.30	0.40
3	Media Superiore	147	0.42	0.82
4	Laurea	35	0.10	0.92
5	Post Laurea	28	0.08	1.00

Il 90-esimo percentile  $x_{0.90}$  è la quarta modalità,  $x_4 = \text{Laurea}$ .

**Esempio 4.2.3.** Fenomeno: Numero di volte che si è cercato lavoro negli ultimi 3 mesi,  $n = 322$

$j$	$x_j$	$n_j$	$f_j$	$F_j$
1	0	20	0.0621	0.0621
2	1	47	0.1460	0.2081
3	2	80	0.2484	0.4565
4	3	64	0.1988	0.6553
5	4	46	0.1429	0.7981
6	5	36	0.1118	0.9099
7	6	16	0.0497	0.9596
8	7	9	0.0280	0.9876
9	8	3	0.0093	0.9969
10	10	1	0.0031	1.0000

Il 25-esimo percentile è la terza modalità in quanto  $F_3 = 0.45 > 0.25$ ,  $x_{0.25} = x_3 = 2$ . Il 50-esimo percentile, la mediana, è  $x_{0.5} = x_4 = 3$  e il 75-esimo percentile è  $x_{0.75} = x_5 = 4$ .

#### 4.2.2 Dati espressi in classi

Se il fenomeno è espresso in classi, allora l'*intervallo che contiene il  $p$ -esimo percentile* è il primo intervallo tale per cui la frequenza cumulata è maggiore di  $p$ . Il *valore approssimato del percentile* è un valore che si trova all'interno dell'intervallo e si ottiene dalla formula

$$x_p = x_{\inf;j_p} + \frac{p - F_{j_p-1}}{f_{j_p}} \cdot (x_{\sup;j_p} - x_{\inf;j_p})$$

dove  $j_p$  è l'indicatore della classe che contiene il  $p$ -esimo percentile,  $x_{\inf;j_p}$  e  $x_{\sup;j_p}$  sono, rispettivamente, l'estremo inferiore e quello superiore.

#### Esempio 4.2.4.

Il reddito di  $n = 4700$  famiglie è rappresentato nella seguente tabella di frequenza

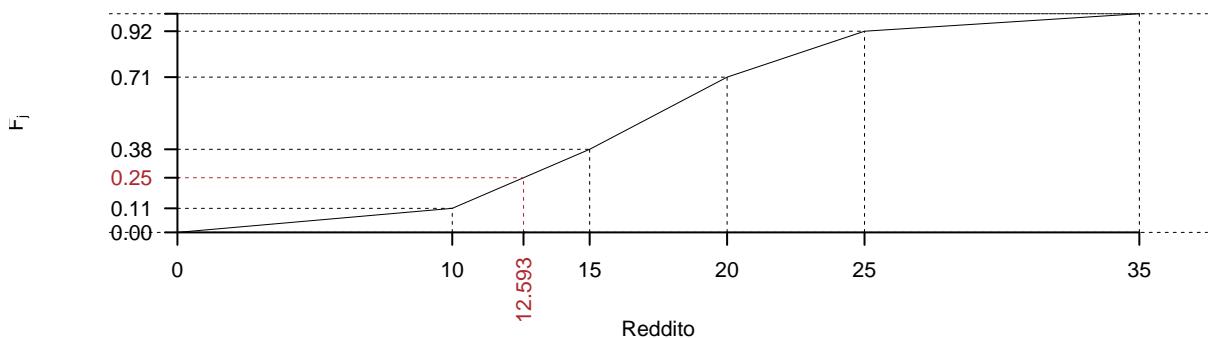
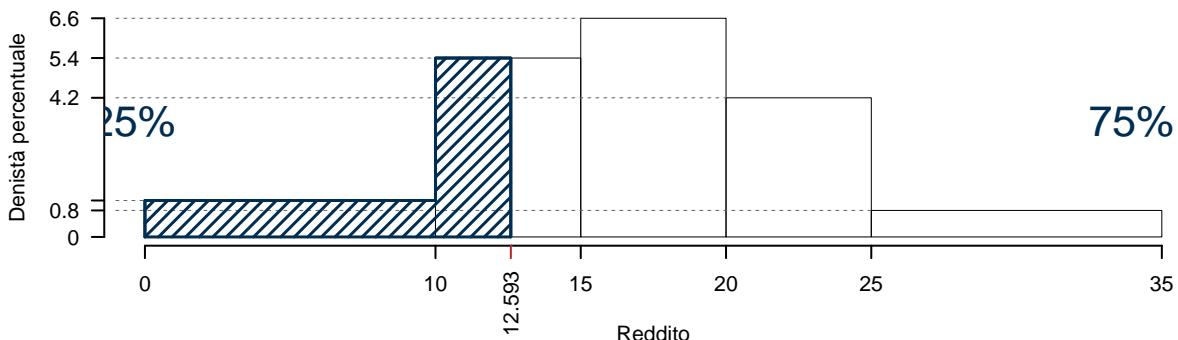
$j$	$[x_j, x_{j+1})$	$n_j$	$f_j$	$b_j$	$h_j$	$F_j$
1	0	10	0.11	10	1.1	0.11
2	10	15	0.27	5	5.4	0.38
3	15	20	0.33	5	6.6	0.71
4	20	25	0.21	5	4.2	0.92
5	25	35	0.08	10	0.8	1.00
		4700	1.00	35		

La classe che contiene il 25-esimo percentile è la seconda classe  $j_{0.25} = 2$ , ovvero la classe  $(10,15]$ , in quanto  $F_2 = 0.2081 > 0.25$ .

$$\begin{aligned}
 p &= 0.25, \text{ essendo } F_2 = 0.38 > 0.25 \Rightarrow j_{0.25} = 2 \\
 x_{0.25} &= x_{\inf;2} + \frac{0.25 - F_1}{f_2} \cdot b_2 \\
 &= 10 + \frac{0.25 - 0.11}{0.27} \cdot 5 \\
 &= 12.59
 \end{aligned}$$

**Nota**

Il  $p$ -esimo percentile  $x_p$  è quel valore che taglia l'istogramma in due parti, l'area dell'istogramma alla sinistra di  $x_p$  è pari a  $p \times 100\%$ , mentre l'area la sua destra è  $(1 - p) \times 100\%$



L'area in blu è il 25% dell'area totale, quella in grigio il 75%.

### 4.2.3 I Quartili

Si definiscono **i quartili** della VS  $X$ , il 25-esimo, il 50.esimo e il 75-esimo percentile di  $X$ :

$$(x_{0.25}, x_{0.5}, x_{0.75})$$

### 4.2.4 Percentili e Funzione di Ripartizione

Se i dati sono quantitativi continui raccolti in classi e  $F$  è la funzione di ripartizione di  $X$  allora il percentile è quel valore tale che

$$F(x_p) = p$$

ovvero a sinistra di  $x_p$  c'è il  $p \times 100\%$  dei dati e a destra di  $x_p$  il rimanente  $(1-p) \times 100\%$ . Per esempio sappiamo nel caso studiato sopra che  $x_{0.25} = 12.593$  e quindi  $F(12.593) = 0.25$ .

Ogni valore di  $X$  dal suo minimo al suo massimo è un percentile, per esempio il valore 15 è il 38-esimo percentile di  $X$  ( $x_{0.38} = 15$ ), infatti il 38% dei dati è inferiore a 15:

$$F(15) = F_2 = 0.38$$

Mentre la funzione inversa  $Q = F^{-1}$  è la funzione che ci permette di calcolare il percentile di ordine  $p$ :

$$Q(p) = x_p.$$

Per esempio

$$Q(0.25) = x_{0.25} = 12.593$$

Questa applicazione interattiva aiuta a comprendere meglio la relazione tra istogramma e funzione di ripartizione:  
La Funzione di Ripartizione

## 4.3 Lo Scarto Interquartile

Una misura di variabilità è lo scarto interquartile

$$SI = x_{0.75} - x_{0.25}$$

## 4.4 La Moda

Si definisce la **moda**,  $x_{Mo}$  la modalità cui compete frequenza maggiore.

**Esempio 4.4.1.** Consideriamo la distribuzione del colore dei capelli

$x_j$	Cast.	Biondi	Rossi	Tot
$n_j$	245	68	13	326

La modalità modale (la moda) è  $x_{Mo} =$ Castano.

**Esempio 4.4.2.** Titolo di studio:

$x_j$	Prim.	M. inf.	M. sup.	Univ.	Post univ.	Tot
$n_j$	10	18	158	62	12	260

La modalità modale (la moda) è  $x_{Mo} = M. sup.$

**Esempio 4.4.3.**

0	1	2	3	4
1	11	6	8	5

La modalità modale è  $x = 1$  e osserviamo che la media è 2.1613 e la mediana è 2

#### 4.4.1 La Moda per dati raccolti in classi

Se i dati sono raccolti in classi, non c'è un valore modale ma una classe modale ed è la **classe cui compete densità maggiore**.

**Esempio 4.4.4.**

$j$	$[x_j, x_{j+1})$	$n_j$	$f_j$	$b_j$	$h_j$	$F_j$
1	0	10	0.11	10	1.1	0.11
2	10	15	0.27	5	5.4	0.38
3	15	20	0.33	5	6.6	0.71
4	20	25	0.21	5	4.2	0.92
5	25	35	0.08	10	0.8	1.00
		4700	1.00	35		

la classe modale è la terza classe, la classe  $[15, 20)$

#### 4.5 Relazione tra Media, Moda e Mediana

Se la VS  $X$  ha una sola classe modale, allora valgono le seguenti relazioni:

- Se la distribuzione presenta un'asimmetria negativa (coda lunga a sx) allora

$$\bar{x} \leq x_{0.5} \leq x_{mo}$$

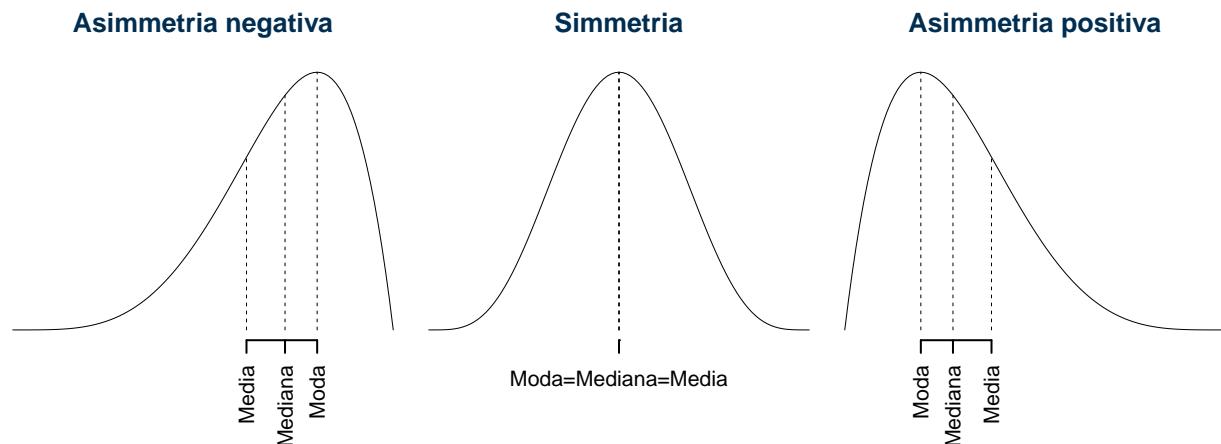
- Se la distribuzione è simmetrica allora

$$x_{mo} \approx x_{0.5} \approx \bar{x}$$

- Se la distribuzione presenta un'asimmetria positiva (coda lunga a dx) allora

$$x_{mo} \leq x_{0.5} \leq \bar{x}$$

La figura 4.1 ne offre una rappresentazione grafica.



**Figura 4.1:** Relazione tra media mediana e moda

## 4.6 Istogramma e Percentili

La relazione tra istogramma di densità e percentili è evidente, i percentile di ordine  $p$  indica per quale valore di  $x_p$  l'area dell'istogramma fino misurano l'area dell'istogramma fino ad  $x_p$  vale  $p$ .

Attraverso il seguente esempio osserveremo meglio il legame tra i due concetti.

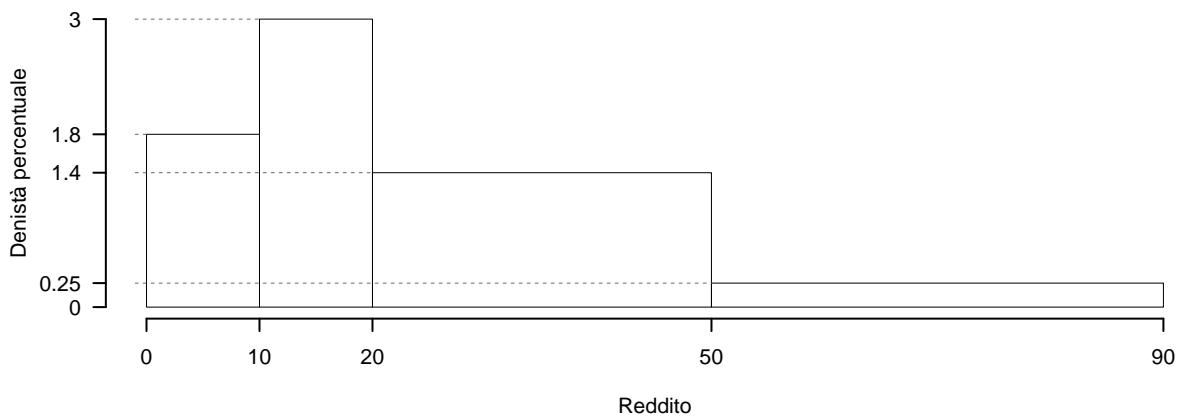
**Esempio 4.6.1.** Il reddito di  $n = 4700$  famiglie (dati inventati) è rappresentato nella tabella di frequenza qui di seguito

$[x_j, x_{j+1})$	$f_j$	
0	10	0.18
10	20	0.30
20	50	0.42
50	90	0.10
		1.00

Per prima cosa calcoliamo tutta la tabella: la colonna delle frequenze assolute e cumulate, delle densità, ecc.

$[x_j, x_{j+1})$	$n_j$	$f_j$	$b_j$	$h_j$	$F_j$	$\bar{x}_j$	$\bar{x}_j^2$	$\bar{x}_j n_j$	$\bar{x}_j^2 n_j$	$f_j\%$
0	10	846	0.18	10	1.80	0.18	5	25	4230	21150
10	20	1410	0.30	10	3.00	0.48	15	225	21150	317250
20	50	1974	0.42	30	1.40	0.90	35	1225	69090	2418150
50	90	470	0.10	40	0.25	1.00	70	4900	32900	2303000
		4700	1.00	90				127370	5059550	100

Quindi disegniamo l'istogramma di densità percentuale, dove le  $h$  sono usate come altezze e le  $f\%$  sono le aree dei rettangoli.

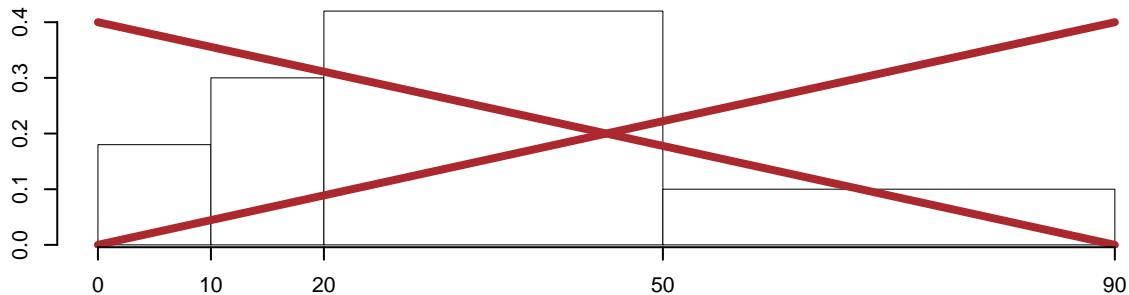




### Attenzione

Se al posto delle  $h$  usiamo le  $f$  disegniamo l'istogramma *sbagliato*. Notiamo che la classe  $[20, 50)$  viene sovrappredata. Infatti è vero che il 45% delle famiglie si trova in quella classe, ma è anche vero che l'ampiezza della classe molto grande e l'istogramma non rappresenta i dati.

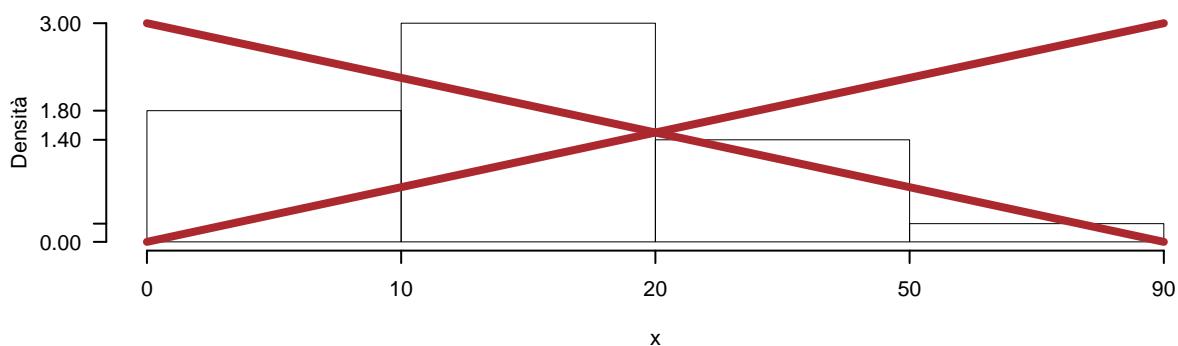
**istogramma sbagliato, le  $f$  sono usate al posto delle  $h$**



### Attenzione

Per disegnare un istogramma di densità in modo corretto si devono rispettare le proporzioni tra le basi

**Isogramma Sbagliato: le  $x$  sono disegnate male**



Una volta che abbiamo ricostruito tutta la tabella e realizzato il grafico possiamo rispondere a tante domande sulla distribuzione dei dati, quali, per esempio:

- Individuare la classe modale

La classe modale è la classe [10,20) non la classe 20-50. Infatti la classe modale è la classe con densità maggiore, non la classe con frequenza maggiore.

- Individuare la classe che contiene la mediana

La classe mediana è la terza classe [20,50), infatti  $F_3 = 0.90$  è il primo degli  $F_j$  che supera 0.50.

- Calcolare  $x_0, x_{0.10}, x_{0.20}, \dots, x_{0.90}, x_1$

$$x_p = x_{\inf;j_p} + \frac{p - F_{j_p-1}}{f_{j_p}} b_{j_p}$$

$x_0 = 0$ , il più piccolo dei dati

$$\begin{aligned} p &= 0.1, \text{ essendo } F_1 = 0.18 > 0.1 \Rightarrow j_{0.1} = 1 \\ x_{0.1} &= x_{\inf;1} + \frac{0.1 - F_0}{f_1} \cdot b_1 \\ &= 0 + \frac{0.1 - 0}{0.18} \cdot 10 \\ &= 5.556 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= 0.2, \text{ essendo } F_2 = 0.48 > 0.2 \Rightarrow j_{0.2} = 2 \\ x_{0.2} &= x_{\inf;2} + \frac{0.2 - F_1}{f_2} \cdot b_2 \\ &= 10 + \frac{0.2 - 0.18}{0.3} \cdot 10 \\ &= 10.67 \end{aligned}$$

⋮

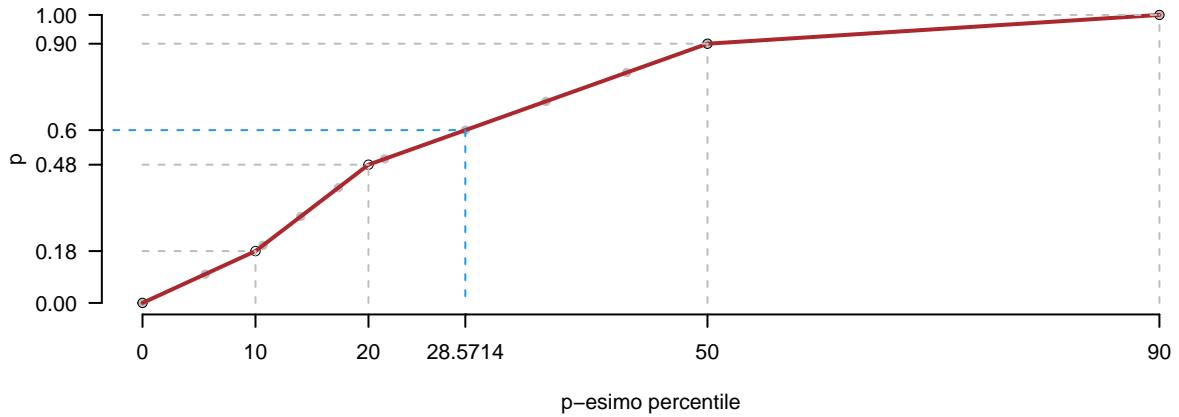
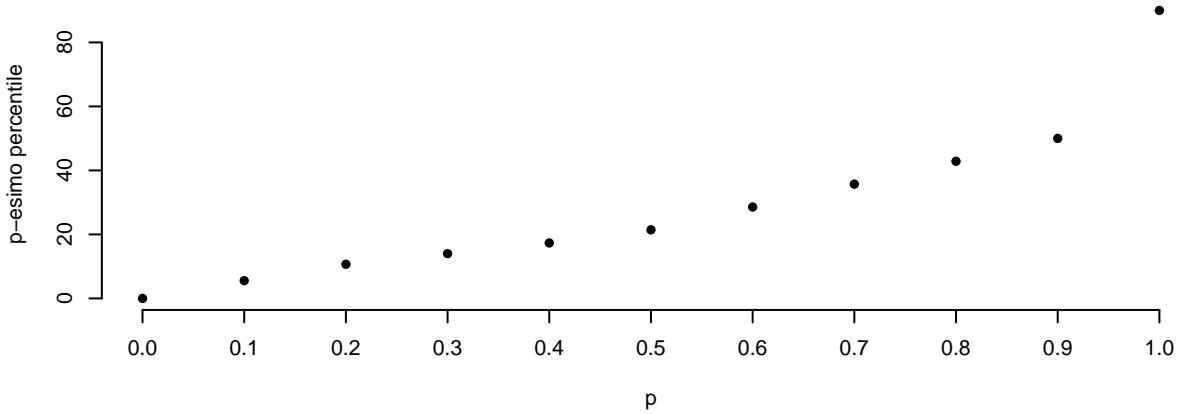
$$\begin{aligned} p &= 0.9, \text{ essendo } F_4 = 1 > 0.9 \Rightarrow j_{0.9} = 4 \\ x_{0.9} &= x_{\inf;4} + \frac{0.9 - F_3}{f_4} \cdot b_4 \\ &= 50 + \frac{0.9 - 0.9}{0.1} \cdot 40 \\ &= 50 \end{aligned}$$

$x_{1.0} = 90$ , il più grande dei dati

Riassumendo in tabella otteniamo:

	$x_0$	$x_{0.1}$	$x_{0.2}$	$x_{0.3}$	$x_{0.4}$	$x_{0.5}$	$x_{0.6}$	$x_{0.7}$	$x_{0.8}$	$x_{0.9}$	$x_1$
Percentili	0	5.556	10.67	14	17.33	21.43	28.57	35.71	42.86	50	90

- mettere a grafico i punti  $(0, x_0), (0.10, x_{0.10}), \dots, (1, x_1)$  e  $(x_0, 0), (x_{0.10}, 0.10), \dots, (x_1, 1)$



- calcolare la percentuale di individui con reddito inferiore a 50

90% è la percentuale di individui con reddito minore di 50

- calcolare la percentuale di individui con reddito superiore a 20

- 48% è la percentuale di individui con reddito minore di 20
- 52% è la percentuale di individui con reddito maggiore di 20

- calcolare la percentuale approssimata di individui con reddito inferiore a 14

Per calcolare  $\%(X < 14)$  abbiamo diversi modi, anzi tutto notiamo che la percentuale di *dat2* minori di 14 è, approssimativamente, l'area dell'istogramma da zero a 14. E quindi, direttamente:

$$\begin{aligned}
 \%(X < 14) &= f_1 \times 100 + (14 - 10) \times h_2 \\
 &= 0.18 \times 100 + 4 \times 3 \\
 &= 30\%
 \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo con la funzione di ripartizione  $F$

$$\begin{aligned}
 \%(X < 14) &= 100 \times F(14) \\
 &= 100 \times (f_1 + (14 - 10) \times h_2 / 100) \\
 &= 100 \times (0.18 + 4 \times 3 / 100) \\
 &= 30\%
 \end{aligned}$$

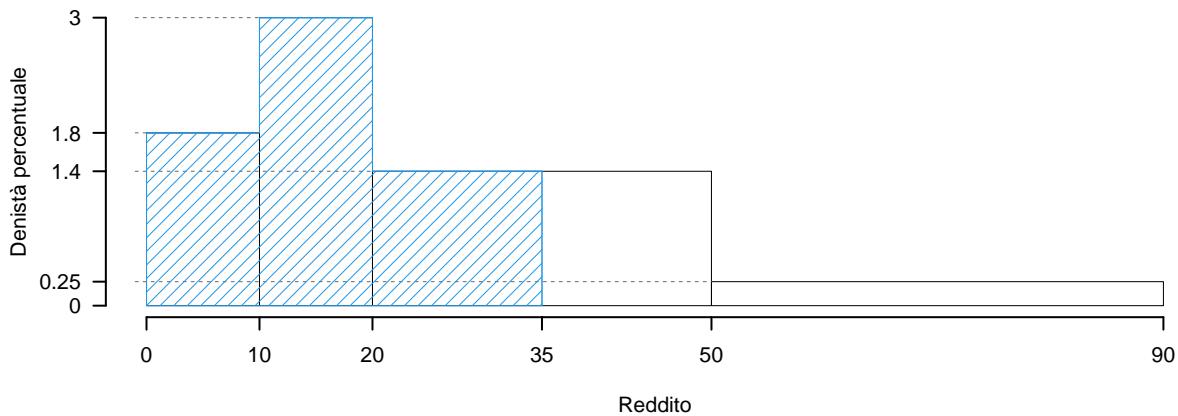
Ma anche notando che  $x_{0.30} = 14$ , significa che  $F(x_{0.30}) = 0.30$  e  $\%(X < 14) = 100 \times F(x_{0.30}) = 30\%$ .

- Calcolare la percentuale approssimata di individui con reddito superiore a 28.57

Notiamo che  $x_{0.60} = 28.57$  e quindi  $F(x_{0.60}) = 0.60$ , quindi  $\%(X < 28.57) = 0.60 \times 100 = 60\%$  e quindi  $\%(X > 28.57) = 40\%$

- Calcolare la percentuale approssimata di individui con reddito inferiore a 35

Si tratta di calcolare l'area in blu:

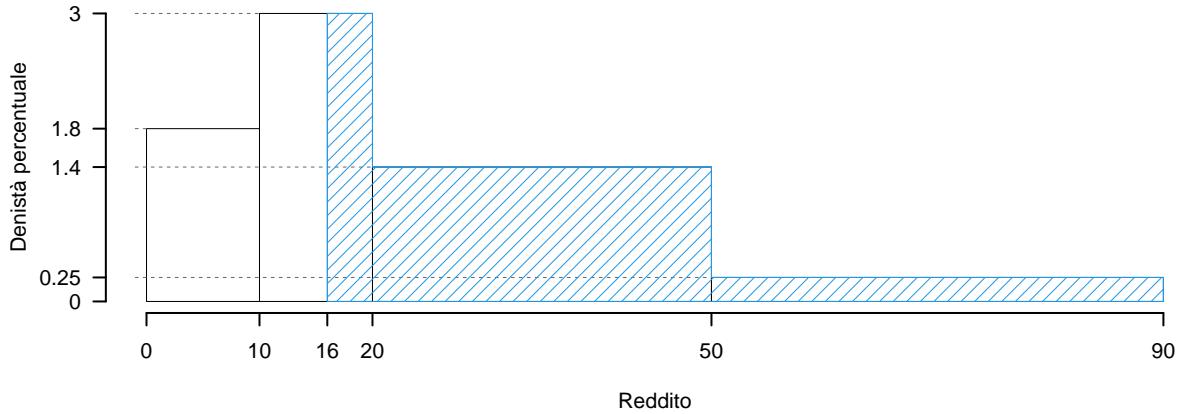


e osservare che la sua area misura 69. Infatti l'area è data dalla somma di

$$\begin{aligned}
 \%(X \leq 35) &= f_1 \times 100 + f_2 \times 100 + (35 - 20) \times h_3 \\
 &= 18 + 30 + 15 \times 1.4 \\
 &= 69
 \end{aligned}$$

- calcolare la percentuale approssimata di individui con reddito superiore a 16

Si tratta di calcolare l'area in blu:



e osservare che la sua area misura 64. Infatti l'area si può vedere o direttamente calcolandola da 16 a 100 oppure si può valutarla come complemento:

$$\%(X > 16) = 100\% - \%(X \leq 16)$$

e quindi:

$$\%(X \leq 16) = f_1 \times 100 + (16 - 10) \times h_2 = 36$$

Quindi  $\%(X > 16) = 100 - 36 = 64$

- Individuare la media approssimata, la varianza approssimata, e i quartili approssimati

La media:

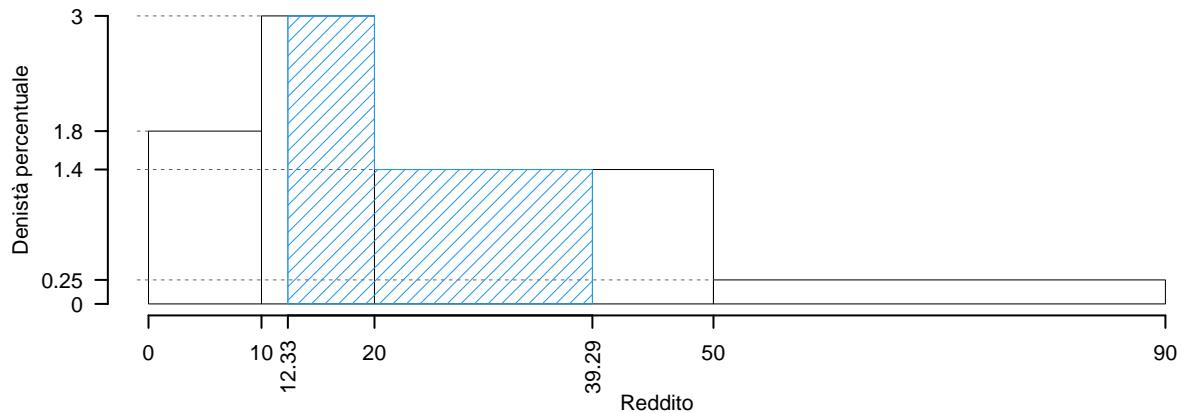
$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_j x_{jc} n_j = \frac{1}{4700} 127370 = 27.1$$

La varianza:

$$Var(X) = \frac{\sum_j x_{jc}^2 n_j}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1}{4700} 5059550 - (27.1)^2 = 342.09$$

$$\bar{x} = 27.1, Var = 342.09, (x_{0.25}, x_{0.50}, x_{0.75}) = (12.3333, 21.4286, 39.2857)$$

- Calcolare la percentuale di dati compresi tra il 25-esimo e il 75-esimo percentile



- calcolare  $x_{0.025}$  e  $x_{0.975}$

i valori sono  $(x_{0.025}, x_{0.975}) = (1.3889, 80)$

- Rappresentare graficamente e calcolare la percentuale di famiglie con reddito:
  - compreso tra 1.3889 e 80
  - compreso tra 0 e 1.3889
  - compreso tra 1.3889 e 21.4286
  - compreso tra 21.4286 e 80
  - compreso tra 80 e 100
  - minore di 1.3889 o maggiore di 80

---

# Parte II

# Probabilità

---



## 5.1 Concetti di base

La definizione più moderna che possiamo dare è che

*La probabilità è una misura dell'incertezza*

che un osservatore *razionale* esprime sull'accadibilità di un evento.

Questa definizione consente di ampliare i campi di applicazione della teoria della probabilità oltre il mero calcolo dei giochi d'azzardo. Ma per arrivare a questa definizione molto ampia, matematici, scienziati e filosofi discutono di caso, caos, disordine, frequenza, probabilità, possibilità, verosimiglianza, ecc. da diversi secoli. La storia della filosofia e del calcolo della probabilità è affascinante e complessa ed esula dagli obiettivi di questi appunti. Rimando ai più curiosi il libro di Costantini e Geymonat:

D. Costantini e L. Geymonat, *Filosofia della probabilità*, Feltrinelli, Milano 1982.

### 5.1.1 Eventi

Prima di definire cos'è la misura di *probabilità* dobbiamo definire a cosa si applichi. La probabilità, nell'accezione che daremo, è un numero compreso tra 0 ed 1 che gradua quanto è credibile l'accadibilità di un fatto (un *evento*).

Un evento  $E$  è un *fatto* (potenzialmente verificabile), espresso nel linguaggio comune, che non sappiamo se è vero o se è falso:

- uscirà 6 dal lancio di un dado (perfetto).
- uscirà testa dal lancio di una moneta non regolare.
- Domani pioverà.
- l'indice Dow Jones tra un'ora quoterà 35 000.

Dicendo che il *fatto* deve essere *potenzialmente verificabile* escludiamo tutti quegli eventi che sono fuori dalla portata dei nostri sensi. Ovvero speculare sull'esistenza di Dio o della vita dopo la morte o di scenari ipotetici nel passato non è compito della probabilità.

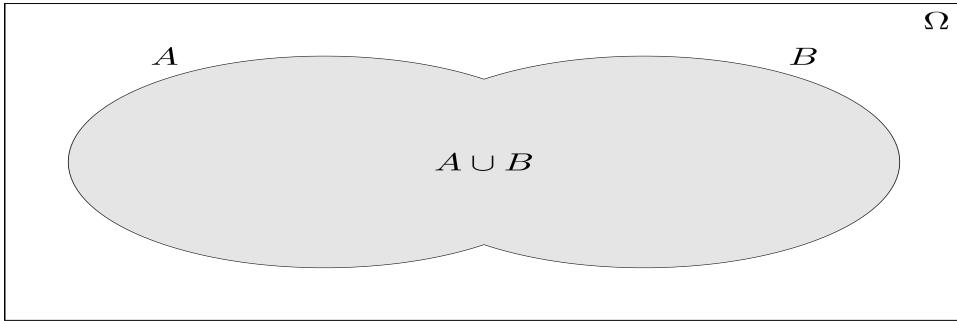
### 5.1.2 Algebra degli eventi

Usiamo gli operatori dell'insiemistica per combinare gli eventi tra di loro, trasformando le operazioni sintattiche del linguaggio comune in unioni ed intersezioni di eventi.

**Definizione 5.1.1 (Unione tra Eventi).** Siano  $A$  e  $B$  due eventi, l'espressione

$$A \cup B$$

è vera se **almeno uno dei due** è vero.

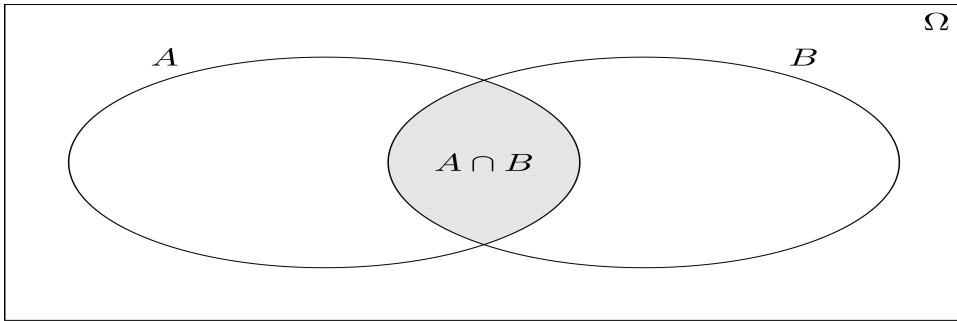

**Esempio 5.1.1.**

- $A$  = Domani pioverà  
 $B$  = Domani ci sarà traffico

$A \cup B$  sarà vera se domani pioverà **o** ci sarà traffico **o** ci sarà pioggia e traffico.

**Definizione 5.1.2** (Intersezione tra Eventi). Siano  $A$  e  $B$  due eventi, l'espressione

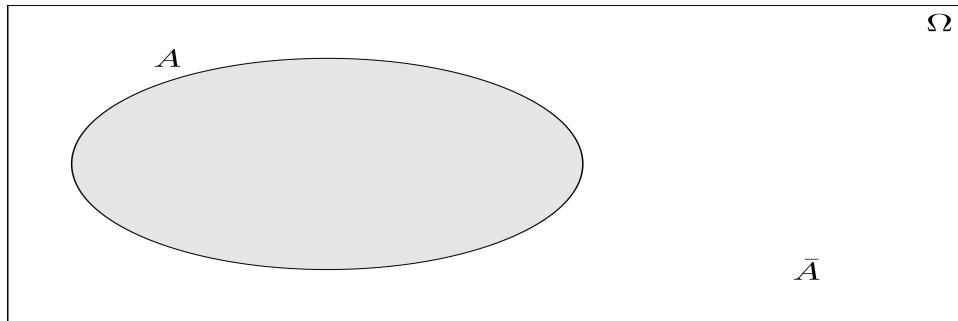
$A \cap B$  è vera se è vero  $A$  e è vero  $B$ .


**Esempio 5.1.2.**

- $A$  = Domani pioverà  
 $B$  = Domani ci sarà traffico

$A \cap B$  sarà vera se domani pioverà **e** ci sarà traffico.

**Definizione 5.1.3** (Evento Complementare). Sia  $A$  un evento, si definisce  $\bar{A}$  l'evento complementare di  $A$

**Esempio 5.1.3.**

$$\begin{aligned} A &= \text{Domani pioverà} \\ \bar{A} &= \text{Domani \b{non} pioverà} \end{aligned}$$

domani **non** pioverà

**Definizione 5.1.4** (Evento Certo). Sia  $A$  un evento, si definisce l'evento certo  $\Omega$  l'evento:

$$\Omega = A \cup \bar{A}$$

**Esempio 5.1.4.**

$$\begin{aligned} A &= \text{Domani pioverà} \\ \bar{A} &= \text{Domani \b{non} pioverà} \\ \Omega &= \text{Domani o pioverà o non pioverà} \end{aligned}$$

**Definizione 5.1.5** (Evento Impossibile). Sia  $A$  un evento, si definisce l'evento certo  $\emptyset$  l'evento:

$$\emptyset = A \cap \bar{A}$$

**Esempio 5.1.5.**

$$\begin{aligned} A &= \text{Domani pioverà} \\ \bar{A} &= \text{Domani \b{non} pioverà} \\ \emptyset &= \text{Domani pioverà e non pioverà} \end{aligned}$$

### 5.1.3 Operazioni su insieme

#### Nota

Gli operatori Unione  $\cup$  e Intersezione  $\cap$  si comportano sugli insiemi come somme + e moltiplicazione  $\times$  si comportano sui numeri. In particolare

$A \cup B = B \cup A,$	proprietà commutativa dell'unione
$A \cap B = B \cap A,$	proprietà commutativa dell'intersezione
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$	proprietà associativa dell'unione
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$	proprietà associativa dell'intersezione
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$	proprietà distributiva dell'intersezione
$A \cup B \cap C = A \cup (B \cap C),$	l'intersezione ha precedenza sull'unione
$(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C),$	a meno di opportune parentesi
$A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}},$	almeno uno dei due è vero =
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B},$	non è vero che sono entrambi falsi
$\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B},$	non è vero che almeno uno dei due è vero =
$\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = A \cap B,$	sono entrambi falsi
	almeno uno dei due è falso =
	non è vero che sono entrambi veri
	non è vero che almeno uno dei due è falso =
	sono entrambi veri

### 5.1.4 La probabilità è una funzione

La probabilità assegna ad ogni evento il grado di credibilità

$$P(A)$$

indica la probabilità che l'evento  $A$  sia vero. In particolare

$$P(A) = P(\Omega) = 1$$

se  $A$  è un evento **certo**

$$P(A) = P(\emptyset) = 0$$

se  $A$  è un evento **impossibile** e in generale

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

### 5.1.5 Definizioni di probabilità

- approccio classico (Laplace)
- approccio frequentista
- approccio soggettivista

**Definizione 5.1.6** (Approccio Classico (Laplace)). la probabilità è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, posto che gli eventi siano tutti equiprobabili.

$$P(A) = \frac{\#(\text{casi favorevoli ad } A)}{\#(\text{casi totali})}$$

**Esempio 5.1.6.** Un'urna contiene 5 sfere Rosse, 3 sfere Blu e 2 Nere. La probabilità dell'evento

$$R = \text{Estraggo una Rossa}$$

è data da

$$P(R) = \frac{5}{5+3+2} = 0.5$$

**Definizione 5.1.7** (Approccio Frequentista). **Postulato empirico del caso.**

In un gruppo di prove ripetute più volte *nelle stesse condizioni*, ciascuno degli eventi possibili si presenta con una frequenza relativa che tende alla probabilità all'aumentare del numero di prove; ossia

$$P(A) = \frac{n_A}{n} + \epsilon_n \quad \text{dove} \quad \epsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad n \rightarrow \infty.$$

**Esempio 5.1.7.** Viene lanciata 200 volte una moneta (che non sappiamo se è bilanciata oppure no), Si è osservato che 136 su 200 lanci sono TESTA La probabilità dell'evento

$$T = \text{“Esce Testa”}$$

è data da

$$P(T) \approx \frac{136}{200} = 0.68$$

Viene lanciata 2000 volte una moneta (che non sappiamo se è bilanciata oppure no), Si è osservato che 1360 su 2000 lanci sono TESTA La probabilità dell'evento

$$T = \text{“Esce Testa”}$$

è data da

$$P(T) \approx \frac{1360}{2000} = 0.68$$

Ma saremo più *sicuri* che avendo lanciato solo 200 volte.

**Definizione 5.1.8** (Approccio Soggettivista).

L'approccio soggettivista alla probabilità, sviluppato da Bruno de Finetti, si differenzia dagli approcci classico e frequentista. Secondo de Finetti, la probabilità non è una proprietà intrinseca degli eventi, ma rappresenta il grado di credenza o fiducia che un individuo assegna all'accadimento di un certo evento. In questo contesto, la probabilità è personale e varia da soggetto a soggetto, riflettendo l'informazione, l'esperienza e il giudizio personale.

La probabilità soggettiva si esprime attraverso le scommesse. Per esempio, dire che un evento ha probabilità del 60% equivale a dire che si è disposti a scommettere con un rapporto di 3:2 in favore dell'evento, sia come scommettitore che come allibratore. Questa visione mette in luce come le probabilità siano strettamente legate alle decisioni e alle aspettative personali, e come possano essere aggiornate in base a nuove informazioni (teoria Bayesiana).

L'approccio soggettivistico è particolarmente utile in situazioni dove i dati sono limitati o dove è difficile definire una frequenza a lungo termine, come nelle previsioni meteorologiche o nelle valutazioni di rischio in ambiti finanziari o assicurativi.

## 5.2 Teoria di Kolmogorov

La teoria di Kolmogorov è una teoria matematica, estremamente formalizzata, che non si preoccupa di assegnare le probabilità agli eventi ma alle regole formali per assegnarla senza cadere in contraddizioni. La teoria muove da 3 assiomi che andremo ad elencare tra poco, di estremo *buon senso* e muove per definizioni e teoremi verso strumenti di grande aiuto nella soluzione di problemi concreti.

**Definizione 5.2.1.** Sia  $\Omega$  l'evento certo, Si definisce uno spazio probabilizzato  $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$ , dove  $\mathcal{A}$  è un'algebra costruita su  $\Omega$  e  $P$  è una misura di probabilità.

### 5.2.1 Algebra degli Eventi

L'algebra degli eventi è una particolare collezione di sottoinsiemi di  $\Omega$  che siamo interessati a probabilizzare. È uno spazio astratto che etichetta tutte le i possibili eventi che possiamo costruire a partire da alcuni eventi di partenza. Un'algebra degli eventi viene solitamente indicata con una lettera calligrafica corsiva. In queste pagine useremo il carattere tipografico  $\mathcal{A}$ .

$\mathcal{A}$ : un insieme di sottoinsiemi di  $\Omega$ , che contiene l'insieme vuoto, tutto  $\Omega$  ed è chiuso rispetto alle unioni e alle intersezioni e al passaggio al complementare: se  $A \in \mathcal{A}$  e  $B \in \mathcal{A}$  allora

$$\begin{aligned} A \cup B &\in \mathcal{A} \\ A \cap B &\in \mathcal{A} \\ \bar{A} &\in \mathcal{A} \end{aligned}$$

**Esempio 5.2.1.** Per illustrare l'idea di un'algebra degli eventi con un esempio finito, consideriamo un insieme  $\Omega$  che rappresenta lo spazio campionario di un semplice lancio di due

monete.  $\Omega$  è dato da tutte le possibili combinazioni dei risultati di due lanci di moneta:  $\Omega = \{(T, T), (T, C), (C, T), (C, C)\}$ .

Certo, consideriamo ora il lancio di due monete. In questo caso, lo spazio campionario  $\Omega$  è dato da tutte le possibili combinazioni dei risultati di due lanci di moneta:  $\Omega = \{(T, T), (T, C), (C, T), (C, C)\}$ .

Costruiamo un'algebra degli eventi  $\mathcal{A}$  per questo esperimento. Questa algebra potrebbe includere i seguenti sottoinsiemi di  $\Omega$ :

1. L'insieme vuoto  $\emptyset$ , che rappresenta l'evento impossibile.
2. L'intero insieme  $\Omega$ , che rappresenta l'evento certo.
3. Singoli elementi come  $\{(T, T)\}, \{(T, C)\}, \{(C, T)\}, \{(C, C)\}$ , che rappresentano gli eventi di ottenere specifiche combinazioni.
4. Combinazioni di questi eventi, come  $\{(T, T), (T, C)\}$ , che rappresenta l'evento in cui la prima moneta mostra T, indipendentemente dal risultato della seconda moneta.

Questi sottoinsiemi rispettano le proprietà di un'algebra degli eventi:

- Contengono l'insieme vuoto e l'intero insieme  $\Omega$ .
- Sono chiusi rispetto alle operazioni di unione, intersezione e passaggio al complementare. Ad esempio:
  - Unione:  $\{(T, T)\} \cup \{(C, C)\} = \{(T, T), (C, C)\} \in \mathcal{A}$ .
  - Intersezione:  $\{(T, T), (T, C)\} \cap \{(T, T), (C, T)\} = \{(T, T)\} \in \mathcal{A}$ .
  - Complementare:  $\overline{\{(T, T)\}} = \{(T, C), (C, T), (C, C)\} \in \mathcal{A}$ .

In questo modo, l'algebra degli eventi  $\mathcal{A}$  cattura tutte le possibili combinazioni di eventi che possono verificarsi nel contesto di due lanci di moneta.

In definitiva

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \{ \emptyset, \\ & (T, T), (T, C), (C, T), (C, C) \\ & \{(T, T) \cup (T, C)\}, \{(T, T) \cup (C, T)\}, \{(T, T) \cup (C, C)\}, \\ & \{(T, C) \cup (C, T)\}, \{(T, C) \cup (C, C)\}, \{(C, T) \cup (C, C)\}, \\ & \{(T, T) \cup (T, C) \cup (C, T)\}, \{(T, T) \cup (T, C) \cup (C, C)\}, \\ & \{(T, T) \cup (C, T) \cup (C, C)\}, \{(T, C) \cup (C, T) \cup (C, C)\}, \\ & \Omega \} \end{aligned}$$

### 5.2.2 Assiomi di Kolmogorov

La probabilità  $P$  è una funzione che trasforma ogni evento  $A$  di  $\mathcal{A}$  in un numero reale

$$P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Tale che

- i.  $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$
- ii.  $P(\Omega) = 1$
- iii.  $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cap B = \emptyset, P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

La forza della teoria consiste nel ricavare tutti i risultati partendo da questi 3 assiomi.

### 5.2.3 Proprietà di $P$

Dagli assiomi precedenti possiamo ricavare diverse proprietà interessanti di  $P$  che non sono scritte in modo esplicito negli assiomi ma si ricavano per dimostrazione.

**Proprietà 5.2.1** (Proprietà Principali di  $P$ ). *Tra le tante enunciamo le più immediate ed utili:*

- 1.  $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{A}$
- 2.  $P(\emptyset) = 0$
- 3.  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
- 4.  $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \bar{B})$
- 5.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

*Dimostrazione.* Nell'ordine

1. Dall'assioma *i* sappiamo che

$$P(A) > 0$$

e dall'assioma *ii* che

$$P(\Omega) = 1$$

Siccome

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

in virtù dell'assioma *iii* otteniamo

$$\begin{aligned} P(A \cup \bar{A}) &= P(\Omega) \\ P(A) + P(\bar{A}) &= 1 \\ P(A) &\leq 1 \end{aligned}$$

2. Siccome il complementare di  $\Omega$  è l'insieme vuoto

$$\bar{\Omega} = \emptyset$$

dalla 1. sappiamo che la probabilità è compresa tra zero ed 1 e quindi

$$\begin{aligned} P(\Omega \cup \emptyset) &= P(\Omega) \\ P(\Omega) + P(\emptyset) &= 1 \\ P(\emptyset) &= 0 \end{aligned}$$

3. Siccome

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

in virtù dell'assioma *iii* otteniamo

$$\begin{aligned} P(A \cup \bar{A}) &= P(\Omega) \\ P(A) + P(\bar{A}) &= 1 \\ P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \end{aligned}$$

4. Osserviamo che

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

e quindi

$$\begin{aligned} P(A) &= P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) \\ P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \\ P(A \cap B) &= P(\bar{A}) - P(A \cap \bar{B}) \\ P(A \cap \bar{B}) &= P(\bar{A}) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

5. Notiamo che

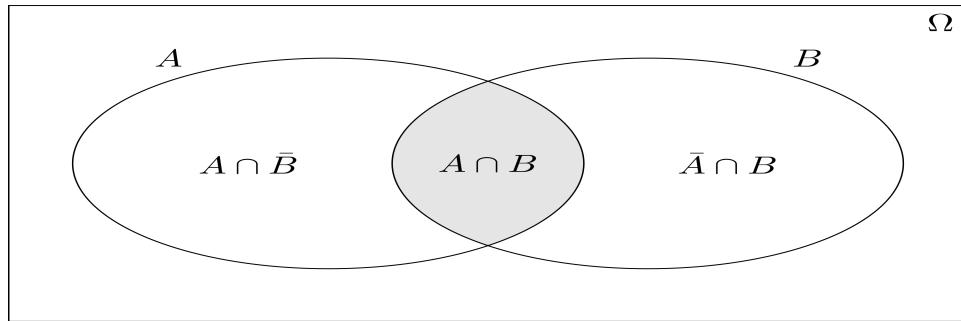
$$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B)$$

cioè  $A \cup B$  si può riscrivere come l'unione di tre eventi disgiunti  $(A \cap \bar{B})$ ,  $(B \cap \bar{A})$  e  $(A \cap B)$ . e quindi

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B)) \\ P(A \cup B) &= P(A \cap \bar{B}) + P(B \cap \bar{A}) + P(A \cap B) \\ P(A \cup B) &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) + P(A \cap B) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(B \cap A) \end{aligned}$$

in figura 5.1 una rappresentazione grafica.

□

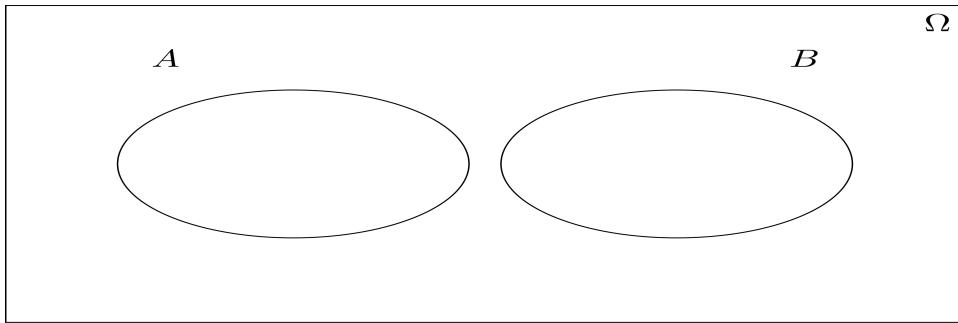


**Figura 5.1:** Regola di De Morgan per due insiemi: la probabilità dell'unione è la somma della probabilità di tre eventi disgiunti

**Definizione 5.2.2** (Eventi Incompatibili).  $A$  e  $B$  si dicono **incompatibili** se e solo se

$$A \cap B = \emptyset$$

in figura 5.2 una rappresentazione grafica.



**Figura 5.2:** Due eventi si dicono incompatibili se sono disgiunti

**Esempio 5.2.2.** Un'urna ha 8 palline bianche numerate da 1 a 8 e 5 palline nere numerate da 5 a 9. L'evento

$$A = \text{esce un numero inferiore a } 4,$$

e l'evento

$$B = \text{esce una pallina nera},$$

Sono chiaramente incompatibili.

### 5.3 Probabilità Condizionata

La probabilità di un evento  $A$  condizionata ad un evento  $B$  risponde alla domanda

*Se  $B$  fosse vero, con quale probabilità sarebbe vero  $A$ ?*

**Definizione 5.3.1** (Probabilità Condizionata). Si definisce probabilità di  $A$  condizionata a  $B$  (probabilità di  $A$  dato  $B$ ) la quantità

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Esempio 5.3.1.** Un'urna ha 8 palline bianche numerate da 1 a 8 e 5 palline nere numerate da 5 a 9. Si considerino l'evento

$$A = \text{esce un numero maggiore o uguale a } 6,$$

e l'evento

$$B = \text{esce una pallina nera}.$$

Ovviamente

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{7}{13} = 0.5385 \\ P(B) &= \frac{5}{13} = 0.3846 \\ P(A \cap B) &= \frac{4}{13} = 0.3077 \end{aligned}$$

e infine

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{\frac{4}{13}}{\frac{5}{13}} = 0.8 \\ P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{4}{13}}{\frac{7}{13}} = 0.5714 \end{aligned}$$

La probabilità condizionata ci consente di esprimere la probabilità dell'intersezione come prodotto di probabilità condizionate. Infatti in alcune circostanze è più facile ricavare una probabilità condizionata invece della probabilità dell'intersezione. La *Chain Rule* è il modo di esprimere probabilità dell'intersezione come prodotto di condizionate.

Versione a coppie

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

la dimostrazione deriva direttamente dalla definizione 5.3.1.

Versione a triple

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

Per mostrare la versione a triple basta analizzare prima l'intersezione di due eventi  $A$  e  $B \cap C$ , ovvero

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(A \cap (B \cap C)) \\ &= P(A)P(B \cap C|A) \\ &= P(A)P(B|A)P(C|A \cap B) \end{aligned}$$

Versione generale

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Per mostrare la versione generale basta iterare il ragionamento in triplette.

### 5.3.1 Indipendenza tra Eventi

L'**indipendenza** è un concetto estremamente importante in probabilità. Se due eventi  $A$  e  $B$  sono *indipendenti* significa che l'accadere o meno dell'uno non altera in alcun modo la probabilità dell'altro.

**Definizione 5.3.2** (Indipendenza tra Eventi). Due eventi  $A$  e  $B$  si dicono **indipendenti** se e solo se

$$\begin{aligned} P(A|B) &= P(A) \\ P(B|A) &= P(B) \end{aligned}$$

e quindi, se  $A$  e  $B$  sono indipendenti

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Infatti

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B)$$

### 5.3.2 Indipendenza e Incompatibilità

Se  $A$  e  $B$  sono **incompatibili** allora **non** sono **indipendenti**, vice versa se  $A$  e  $B$  sono **indipendenti** allora **non** sono **incompatibili**:



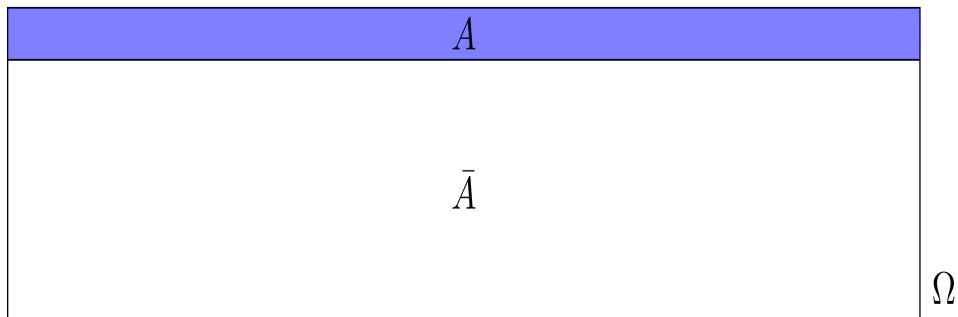
#### Attenzione

- Se  $A \neq \emptyset$  e  $B \neq \emptyset$  sono incompatibili, allora  $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$
- Se  $A$  e  $B$  sono indipendenti, allora  $P(A \cap B) = P(A)P(B) \neq 0$

### 5.3.3 Partizioni di $\Omega$

Un *partizione* di  $\Omega$  è una collezione di due o più eventi disgiunti che uniti insieme restituiscono  $\Omega$ . Se  $A$  è un evento e  $\bar{A}$  è il suo complementare è immediato che la coppia  $\{A, \bar{A}\}$  è una *partizione* in quanto  $A \cup \bar{A} = \Omega$ . In questo caso parleremo di *bipartizione*.

**Definizione 5.3.3** (Bipartizione). Sia  $A$  è un evento e  $\bar{A}$  è il suo complementare, allora la coppia  $\{A, \bar{A}\}$  è una *bipartizione* di  $\Omega$ .

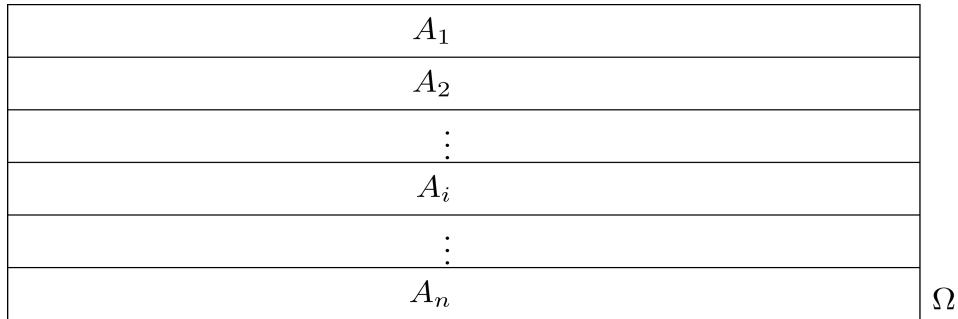


Più in generale definiamo una *partizione finita*:

**Definizione 5.3.4** (Partizione finita). Sia  $\{A_1, \dots, A_n\}$ ,  $n < +\infty$  una collezione di eventi di  $\Omega$  tali che

1.  $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$
2.  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

Allora  $\{A_1, \dots, A_n\}$  è detta una *partizione* (finita) di  $\Omega$

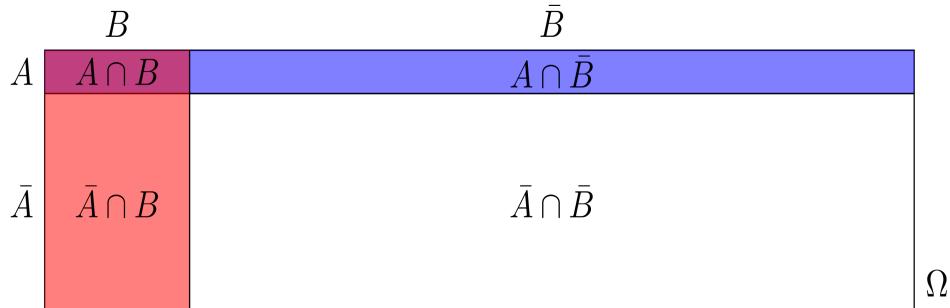


#### 5.3.4 Teorema delle probabilità totali

Il teorema delle probabilità totali permette di esprimere la probabilità di un evento come somma della probabilità delle intersezioni che lo compongono.

**Teorema 5.3.1** (Probabilità Totali versione a coppie). *Siano  $A$  e  $B$  due eventi diversi dal vuoto, allora*

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$



*Dimostrazione.* Si parte considerando l'identità insiemistica

$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

e quindi

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}), \quad \text{per la chain rule} \end{aligned}$$

□

**Esempio 5.3.2.** Quando piove Giulio arriva in ritardo con probabilità 0.18, mentre se non piove arriva in ritardo con probabilità 0.01. Le previsioni del tempo dicono che domani pioverà con probabilità 0.85. Calcolare la probabilità che Giulio, domani, arrivi in ritardo.

**Soluzione.** Sia  $B$  = “Domani Giulio arriverà in ritardo” e sia  $A$  = “Domani pioverà”. Sappiamo dalle previsioni che  $P(A) = 0.85$ , mentre  $P(\bar{A}) = 1 - 0.85 = 0.15$ . Inoltre sappiamo che  $P(B|A) = 0.18$  mentre  $P(B|\bar{A}) = 0.01$ . Inoltre osserviamo che  $B$  si può dividere nell’intersezione in due insiemi disgiunti: piove *ed* arriva in ritardo *oppure* non piove *ed* arriva in ritardo, in simboli

$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

Dal teorema dell’probabilità totali

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \\ &= 0.85 \times 0.18 + 0.15 \times 0.01 \\ &= 0.1545 \end{aligned}$$

Il teorema può essere esteso alla versione a triple: Siano  $\{A_1, A_2, A_3\}$  e  $\{B_1, B_2, B_3\}$  due partizioni di  $\Omega$ :  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ,  $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ ,  $A_2 \cap A_3 = \emptyset$  e  $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ , e  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ,  $B_1 \cap B_3 = \emptyset$ ,  $B_2 \cap B_3 = \emptyset$  e  $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ . Allora

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(A_1)P(B_1|A_1) + P(A_2)P(B_1|A_2) + P(A_3)P(B_1|A_3) \\ P(B_2) &= P(A_1)P(B_2|A_1) + P(A_2)P(B_2|A_2) + P(A_3)P(B_2|A_3) \\ P(B_3) &= P(A_1)P(B_3|A_1) + P(A_2)P(B_3|A_2) + P(A_3)P(B_3|A_3) \end{aligned}$$

**Teorema 5.3.2 (Probabilità Totali versione Generale).** Siano  $\{A_1, \dots, A_n\}$  e  $\{B_1, \dots, B_m\}$  due partizioni di  $\Omega$ , ovvero  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $\forall i \neq j$  e  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$  e  $B_i \cap B_j = \emptyset$ ,  $\forall i \neq j$  e  $\Omega = \bigcup_{i=1}^m B_i$ . Allora

$$P(B_j) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B_j|A_i), \quad j = 1, \dots, m$$

	$B_1$	$B_2$	...	$B_j$	...	$B_m$	
$A_1$	$A_1 \cap B_1$	$A_1 \cap B_2$		$A_1 \cap B_j$		$A_1 \cap B_m$	
$A_2$	$A_2 \cap B_1$	$A_2 \cap B_2$		$A_2 \cap B_j$		$A_2 \cap B_m$	
$\vdots$							
$A_i$	$A_i \cap B_1$	$A_i \cap B_2$		$A_i \cap B_j$		$A_i \cap B_m$	
$\vdots$							
$A_n$	$A_n \cap B_1$	$A_n \cap B_2$		$A_n \cap B_j$		$A_n \cap B_m$	$\Omega$

*Dimostrazione.* Si parte considerando l'identità insiemistica

$$B_j = (A_1 \cap B_j) \cup (A_2 \cap B_j) \cup \dots \cup (A_n \cap B_j)$$

e quindi

$$\begin{aligned} P(B_j) &= P(A_1 \cap B_j) + P(A_2 \cap B_j) + \dots + P(A_n \cap B_j) \\ &= P(A_1)P(B_j|A_1) + P(A_2)P(B_j|A_2) + \dots + P(A_n)P(B_j|A_n), \quad \text{per la chian rule} \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B_j|A_i) \end{aligned}$$

□

**Esempio 5.3.3.** Un'urna contiene 10 palline: due etichettate con  $A$ , tre etichettate con  $B$  e le rimanenti cinque etichettate con  $C$ . Se si estrae la pallina  $A$  si estrae da l'urna  $\mathcal{A}$  che contiene 3 palline vincenti e una perdente, se si estrae la pallina  $B$  si estrae da l'urna  $\mathcal{B}$  che contiene due palline vincenti e una perdente e se si estrae la pallina  $C$  si estrae da l'urna  $\mathcal{C}$  che contiene 1 pallina vincente e due perdenti. Qual è la probabilità di vincere?

**Soluzione.** Anzitutto notiamo che

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{2}{10} \\ P(B) &= \frac{3}{10} \\ P(C) &= \frac{5}{10} \end{aligned}$$

Sia  $V$  = “Vincere”, dai dati abbiamo che

$$P(V) = P(A)P(V|A) + P(B)P(V|B) + P(C)P(V|C)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{10} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{10} \times \frac{1}{3} \\
 &= 0.5167
 \end{aligned}$$

### 5.3.5 Il Teorema di Bayes

Il teorema di Bayes è un risultato probabilistico che consente di esprimere le probabilità condizionate ed è utilizzato come base per quella che è nota come teoria statistica bayesiana, di cui non entreremo nel dettaglio.

**Teorema 5.3.3** (Teorema di Bayes versione a coppie.). *Si considerino due eventi  $A$  e  $B$  di cui sono note  $P(A)$ ,  $P(B|A)$  e  $P(B|\bar{A})$ , allora*

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}
 P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, && \text{per definizione} \\
 &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}, && \text{per la chain rule} \\
 &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})}, && \text{per il teorema delle prob. tot.}
 \end{aligned}$$

□

**Esempio 5.3.4.** Quando piove Giulio arriva in ritardo con probabilità 0.18, mentre se non piove arriva in ritardo con probabilità 0.01. Le previsioni del tempo dicono che domani pioverà con probabilità 0.85. Se il giorno dopo Giulio entrasse in ritardo con qual probabilità avrebbe piovuto?

**Soluzione.** Sia  $B$  = “Domani Giulio arriverà in ritardo” e sia  $A$  = “Domani pioverà”. Sappiamo dalle previsioni che  $P(A) = 0.85$ , mentre  $P(\bar{A}) = 1 - 0.85 = 0.15$ . Inoltre sappiamo che  $P(B|A) = 0.18$  mentre  $P(B|\bar{A}) = 0.01$ . Inoltre osserviamo che  $B$  si può dividere nell’intersezione in due insiemi disgiunti: piove *ed* arriva in ritardo *oppure* non piove *ed* arriva in ritardo, in simboli

$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

Dal teorema della probabilità totale

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \\
 &= 0.85 \times 0.18 + 0.15 \times 0.01 \\
 &= 0.1545
 \end{aligned}$$

Dal teorema di Bayes

$$\begin{aligned}
P(B|A) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} \\
&= \frac{0.85 \times 0.18}{0.85 \times 0.18 + 0.15 \times 0.01} \\
&= 0.9903
\end{aligned}$$

**Teorema 5.3.4** (Teorema di Bayes versione Generale). *Siano  $\{A_1, \dots, A_n\}$  e  $\{B_1, \dots, B_n\}$  due partizioni di  $\Omega$ , di cui sono note  $P(A_i), \forall i$  e  $P(B_j|A_i), \forall i, j$ , allora*

$$P(A_i|B_j) = \frac{P(A_i)P(B_j|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B_j|A_i)}$$

**Esempio 5.3.5.** Un'urna contiene 10 palline: due etichettate con  $A$ , tre etichettate con  $B$  e le rimanenti cinque etichettate con  $C$ . Se si estrae la pallina  $A$  si estrae da l'urna  $\mathcal{A}$  che contiene 3 palline vincenti e una perdente, se si estrae la pallina  $B$  si estrae da l'urna  $\mathcal{B}$  che contiene due palline vincenti e una perdente e se si estrae la pallina  $C$  si estrae da l'urna  $\mathcal{C}$  che contiene 1 pallina vincente e due perdenti. Giulio ha appena giocato e ha vinto, qual è la probabilità che sia uscita una pallina etichettata con  $C$ ?

**Soluzione.** Anzitutto notiamo che

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{2}{10} \\
P(B) &= \frac{3}{10} \\
P(C) &= \frac{5}{10}
\end{aligned}$$

Sia  $V$  = “Vincere”, dai dati abbiamo che

$$\begin{aligned}
P(V) &= P(A)P(V|A) + P(B)P(V|B) + P(C)P(V|C) \\
&= \frac{2}{10} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{10} \times \frac{1}{3} \\
&= 0.5167
\end{aligned}$$

In virtù del teorema di Bayes

$$\begin{aligned}
P(C|V) &= \frac{P(C)P(V|C)}{P(A)P(V|A) + P(B)P(V|B) + P(C)P(V|C)} \\
&= \frac{\frac{5}{10} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{10} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{10} \times \frac{1}{3}} \\
&= 0.3226
\end{aligned}$$

## 5.4

## Specchietto finale utile per gli esercizi elementari

$0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{A}$	la probabilità è compresa tra 0 e 1.
$P(\Omega) = 1$	la prob. dell'evento certo è 1,
$P(\emptyset) = 0$	la prob. dell'insieme vuoto è zero.
$P(A) = 1 - P(\bar{A})$	regola del complementare
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	regola della somma (de Morgan)
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	<b>se e solo se A e B sono incompatibili:</b> terzo assioma di Kolmogorov
$P(A \cap B) = P(A)P(B A) = P(B)P(A B)$	regola del prodotto (chain rule)
$P(A \cap B) = P(A)P(B)$	se e solo se A e B sono indipendenti
$P(B) = P(A)P(B A) + P(\bar{A})P(B \bar{A})$	Teorema delle probabilità totali

## 6.1 Definizione formale di una VC discreta

Una variabile casuale, o numero casuale, è un numero che non sappiamo in anticipo quale valore varrà: il numero di Teste nei prossimi 10 lanci, i millimetri di pioggia che cadranno in Emilia Romagna nelle prossime 24 ore, il numero di ricoverati nell'ospedale Maggiore di Bologna nel 2025.

Dal punto di vista formale una variabile casuale è una numerizzazione dell'evento certo. Si consideri un partizione finita o al più numerabile dell'evento certo:

$$\{E_1, \dots, E_k\}, E_i \cap E_j, \forall i \neq j, E_1 \cup \dots \cup E_k = \Omega$$

Una VC  $X$  è una funzione che mappa la partizione sulla retta reale

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$X(E_j) = x_j$ , ad ogni evento  $E_j$  viene assegnato un numero

Si definisce  $S_X$  il **supporto** della VC  $X$ , ed è l'insieme dei valori che la VC è suscettibile di assumere.

Resta definita la **funzione di probabilità** di  $X$  che è data da:

$$f(x) = P(X = x) = P(E_j : X(E_j) = x)$$

Una variabile casuale  $X$  è un numero che ancora non sappiamo quanto varrà, potrà assumere uno qualunque dei valori  $x$  del supporto  $S_X$  e lo assumerà con una data probabilità  $f(x) = P(X = x)$ .

**Esempio 6.1.1.** Consideriamo il lancio di due monete identiche, la partizione associata è

- $E_1 = \{T, T\}$ , la prima e la seconda moneta mostrano Testa.
- $E_2 = \{T, C\}$ , la prima moneta mostra Testa e la seconda Croce.
- $E_3 = \{C, T\}$ , la prima moneta mostra Croce e la seconda Testa.
- $E_4 = \{C, C\}$ , la prima e la seconda moneta mostrano Croce.

Si considerino le tre variabili nella tabella qui sotto

$j$	$E_j$	$X(E_j)$	$Y(E_j)$	$W(E_j)$
1	$E_1 = \{T, T\}$	$X(E_1) = 2$	$Y(E_1) = 0$	$W(E_1) = 1$
2	$E_2 = \{T, C\}$	$X(E_2) = 1$	$Y(E_2) = 1$	$W(E_2) = 0$
3	$E_3 = \{C, T\}$	$X(E_3) = 1$	$Y(E_3) = 1$	$W(E_3) = 0$
4	$E_4 = \{C, C\}$	$X(E_4) = 0$	$Y(E_4) = 2$	$W(E_4) = 1$

$X$  conta il numero di Teste (0, 1 o 2),  $Y$  conta il numero di Croci (0, 1 o 2),  $W$  vale uno se i due lanci sono identici e vale zero altrimenti.

Se la moneta è perfetta ( $P(T) = P(C) = 0.5$ ) allora:

$$\begin{aligned}
 P(E_1) &= P(\{T, T\}) \\
 &= P(T)P(T), \quad \text{in virtù dell'indipendenza} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\
 P(E_2) &= P(\{T, C\}) \\
 &= P(T)P(C), \quad \text{in virtù dell'indipendenza} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\
 P(E_3) &= P(\{C, T\}) \\
 &= P(C)P(T), \quad \text{in virtù dell'indipendenza} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\
 P(E_4) &= P(\{C, C\}) \\
 &= P(C)P(C), \quad \text{in virtù dell'indipendenza} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
 P(X = 0) &= P(E_1) \\
 &= \frac{1}{4} \\
 P(X = 1) &= P(E_2 \cup E_3) \\
 &= P(E_2) + P(E_3) \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \\
 P(X = 2) &= P(E_4) \\
 &= \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

### 6.1.1 Descrizione di una VC

Un  $X$  VC ha molte analogie con una VS,  $X$  ha un *supporto* ovvero l'insieme dei valori che  $X$  può assumere, una funzione d probabilità che produce numeri compresi tra zero e uno che sommano ad uno (come le frequenze relative), la Funzione di Ripartizione che, anziché cumulare le frequenze, cumula le probabilità, il Valore Atteso che è l'analogo della media e la Varianza che è l'analogo della varianza descrittiva. In sintesi

**Nota**

Una VC discreta è **identificata** in maniera univoca da

- Il suo supporto  $S_X$ .
- La sua funzione di probabilità  $f(x)$  o la sua funzione di ripartizione  $F$ .
- Il suo valore atteso  $E(X)$ .
- La sua varianza  $V(X)$ .

**Definizione 6.1.1** (Supporto). Sia  $X$  una VC, si definisce  $S_X$  il supporto di  $X$ , l'insieme di tutti i possibili valori che  $X$  è suscettibile di assumere.

**Esempio 6.1.2.** Lancio una moneta due volte e definisco  $X$  la VC che *conta il numero di volte che osservo Testa in due lanci*. La VC  $X$  potrà assumere solo 3 valori: 0 (zero volte Testa in due lanci), 1 (una volta Testa in due lanci), e 2 (2 volte Testa in due lanci). E quindi

$$S_X = \{0, 1, 2\}$$

**Definizione 6.1.2** (Funzione di Probabilità). Sia  $X$  una VC con supporto  $S_X$ , si definisce  $f$  la funzione di probabilità: è la probabilità che la VC  $X$  assuma esattamente il valore  $x$

$$f(x) = P(X = x), \quad x \in S_X$$

**Esempio 6.1.3.** Si consideri un'urna che contiene 4 palline:

$$E_1 = \boxed{1}, E_2 = \boxed{2}, E_3 = \boxed{2}, E_4 = \boxed{3}$$

Sia  $X$  la VC che rappresenta il numero sulla pallina:

$$\begin{aligned} X(E_1) &= 1 \\ X(E_2) &= 2 \\ X(E_3) &= 2 \\ X(E_4) &= 3 \end{aligned}$$

ha come supporto:

$$S_X = \{1, 2, 3\}$$

e come funzione di probabilità:

$$\begin{aligned} f(1) &= P(X = 1) = P(E_1) = \frac{1}{4} \\ f(2) &= P(X = 2) = P(E_2 \cup E_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \\ f(3) &= P(X = 3) = P(E_3) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

La funzione di probabilità  $f$  si comporta come le frequenze relative, la  $f$  è compresa tra zero e uno, per ogni  $x$  e la somma della  $f$  calcolata su ogni  $x$  dà uno.

**Proprietà 6.1.1** (Funzione di probabilità). *Sia  $X$  una VC con supporto  $S_X$  e funzione di probabilità  $f$ , allora*

- $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in S_X$
- $\sum_{x \in S_X} f(x) = 1$ .

La Funzione di Ripartizione  $F$  di una VC  $X$  cumula tutta la probabilità fino ad  $x$ :

**Definizione 6.1.3** (Funzione di Ripartizione di una VC).

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x^* \leq x} f(x^*)$$

**Esempio 6.1.4** (Continua). Continuando l'esempio precedente:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{4}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{4}{4} & x \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

La funzione di ripartizione gode di diverse proprietà. Una, in particolare sarà utilissima per il calcolo delle probabilità della VC continua che vedremo più avanti.

**Proprietà 6.1.2** (Funzione di Ripartizione). *La funzione di ripartizione  $F$  di una VC  $X$  è, per definizione:*

$$F(x) = P(X \leq x)$$

*$F$  gode delle seguenti proprietà:*

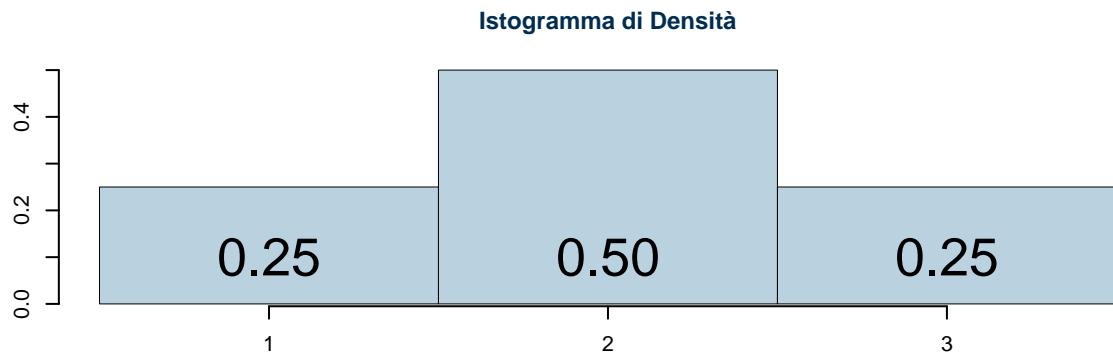
1. *Non decrescente, ossia  $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$*
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ .
3. *Continua a destra, ossia  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$ .*
4.  $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ .

La funzione di ripartizione di una VC si comporta la funzione di ripartizione di una VS. Altre caratteristiche si possono calcolare, come i **percentili** di ordine  $p$ : Il percentile  $x_p$  è quel valore che divide la distribuzione di  $X$  in due:  $P(X \leq x_p) = p, \quad P(X > x_p) = 1 - p$

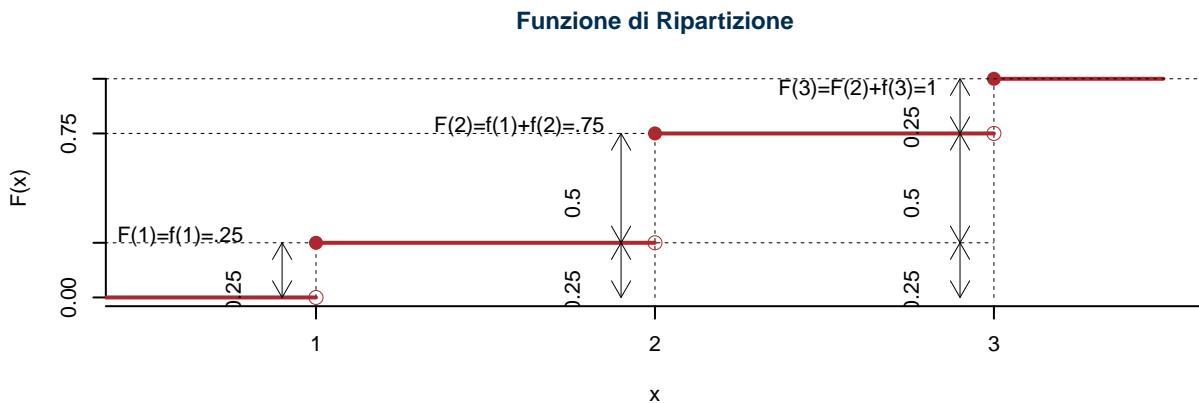
**Definizione 6.1.4** (Percentile di una VC). Sia  $X$  una VC con supporto  $S_X$  e con Funzione di Ripartizione  $F$ , si definisce il  $p$ -esimo percentile di  $X$ , il valore  $x_p$ , tale che:

$$x_p : F(x_p) = p$$

La distribuzione può essere rappresentata graficamente con un istogramma di densità. Esattamente come per la VC quantitative discrete una VC può essere rappresentata in intervalli di ampiezza uno costruiti intorno ai dati del supporto. Nel nostro esempio di prima:



Analogamente possiamo costruire la funzione di ripartizione cumulando le probabilità. Nell'esempio di sopra otterremmo:



### 6.1.2 Operazioni tra VC

Le VC sono numeri che non sappiamo in anticipo che valore assumeranno. Ma siccome diventeranno numeri li potremo sommare, sottrarre, moltiplicare, ecc. sia con numeri costanti che con altre VC.

**Esempio 6.1.5.** Sia  $X$  la VC con supporto  $S_X = \{-1, 0, +1\}$  e con funzione di probabilità

$$\begin{aligned} f(-1) &= \frac{1}{5} \\ f(0) &= \frac{3}{5} \\ f(+1) &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

e sia  $Y$  la VC con supporto  $S_Y = \{0, +1\}$  e con funzione di probabilità

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2} \\ f(+1) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Se poniamo

$$S = X + Y$$

$S$  è la VC che rappresenta la somma di due VC: casuale è  $X$ , casuale è  $Y$ , casuale sarà la somma tra  $X$  ed  $Y$ .

	-1;	1/5	0;	3/5	1;	1/5
0; 1/2	-1;	1/10	0;	3/10	1;	1/10
1; 1/2	0;	1/10	1;	3/10	2;	1/10

E ricaviamo la distribuzione di,  $S$

$S$	-1	0	1	2
$P(S)$	1/10	4/10	4/10	1/10

## 6.2 Valore Atteso, e Varianza di una VC

Il **valore atteso** di una VC  $X$  è l'analogo della media aritmetica di una VC, le modalità di  $X$  vengono pesate con le probabilità invece che con le frequenze.

**Definizione 6.2.1** (Valore Atteso di una VC discreta). Si definisce  $E(X)$  il valore atteso della VC  $X$  con supporto  $S_X$  e funzione di probabilità  $f$ :

$$E(X) = \sum_{x \in S_x} x f(x)$$



### Attenzione

Il valore atteso di una VC è un numero.

La **varianza** di una VC è del tutto analoga alla varianza di una VS.

**Definizione 6.2.2** (Varianza di una VC discreta). Si definisce  $V(X)$  la varianza della VC  $X$  con supporto  $S_X$  e funzione di probabilità  $f$ :

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - E(X))^2) \\ &= \sum_{x \in S_x} (x - E(X))^2 f(x), \quad \text{oppure equivalentemente} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= E(X^2) - E^2(X) \\
 &= \sum_{x \in S_X} x^2 f(x) - E^2(X).
 \end{aligned}$$

così come la sua standard deviation.

**Definizione 6.2.3** (Standard Deviation di una VC discreta). Si definisce  $SD(X)$  la Standard Deviation della VC  $X$  con supporto  $S_X$  e funzione di probabilità  $f$ , la radice della sua varianza

$$SD(X) = \sqrt{V(X)}$$

**Esempio 6.2.1** (Continua). Continuiamo l'esempio precedente e otteniamo, il valore atteso:

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{2}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 2$$

e la varianza di  $X$

$$V(X) = 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{2}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} - 2^2 = 0.5$$

Le proprietà di valore atteso e varianza di una VC sono del tutto analoghe alle rispettive di una VS.

**Proprietà 6.2.1** (Proprietà del Valore Atteso di una VC). *Le proprietà del valore atteso,  $E(X)$  sono:*

1.  $x_{\min} \leq E(X) \leq x_{\max}$ ,  $x_{\min}, x_{\max} \in S_X$ ,
2.  $E(X - E(X)) = 0$ ,
3.  $E(X - E(X))^2 < E(X - d)^2 \quad \forall d \neq E(X)$ ,
4.  $E(a + bX) = a + b E(X)$ .
5.  $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

Esiste anche l'analogo della proprietà di associatività per il valore atteso, ma richiede alcuni risultati che esulano dallo scopo di questi appunti e non verrà riportata.

Anche per la varianza di una VC valgono le stesse proprietà della varianza di una VS. In particolare

**Proprietà 6.2.2** (Proprietà della Varianza di una VC). *Le proprietà della Varianza,  $V(X)$  sono:*

1.  $V(X) \geq 0$ ,
2.  $V(X) = 0$  se e solo se  $P(X = x) = 1$
- 3.

$$V(a + bX) = b^2 V(X)$$

4. *Se  $X$  e  $Y$  sono indipendenti, allora*

$$V(aX + bY) = V(aX - bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y), \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Notiamo che nel caso di una VC  $X$  la sua varianza vale zero se e solo se la VC assume un solo valore con probabilità uno. Quindi una VC che non varia, ovvero una costante.

**Attenzione**

Se  $a = 1$  e  $b = 1$  allora

$$V(X + Y) = V(X - Y) = V(X) + V(Y)$$

le varianze non si sottraggono mai.

**Proprietà 6.2.3** (Proprietà della SD di una VC). *Le proprietà della Standard Deviation di  $X$ ,  $SD(X)$  sono:*

1.  $SD(X) \geq 0$ ,
2.  $SD(X) = 0$  se e solo se  $P(X = x) = 1$
- 3.

$$SD(a + bX) = |b|V(X)$$

4. *Se  $X$  e  $Y$  sono indipendenti, allora*

$$SD(aX + bY) = SD(aX - bY) = \sqrt{a^2V(X) + b^2V(Y)}, \forall a, b \in \mathbb{R}$$

**Attenzione**

Se  $a = 1$  e  $b = 1$  allora

$$SD(X + Y) = SD(X - Y) = \sqrt{V(X) + V(Y)}$$

la SD di una somma non si esprime come la somma delle SD degli addendi.

### 6.3 Indipendenza tra VC

In generale due VC  $X$  e  $Y$  si dicono indipendenti se e solo se:

$$P(X \in A \cap Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B), \forall A \subset S_X, \forall B \subset S_Y$$

Per le VC discrete la relazione di indipendenza si può scrivere:

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y), \forall x \in S_X, \forall y \in S_Y$$

### 6.4 VC condizionate (complementi)

La probabilità condizionata di  $X$  dato  $Y$  si scrive

$$P(X \in A | Y \in B) = \frac{P(X \in A \cap Y \in B)}{P(Y \in B)}$$

Se  $X$  e  $Y$  sono discrete si può scrivere

$$\begin{aligned} f(x|y) &= P(X = x | Y = y) \\ &= \frac{P(X = x \cap Y = y)}{P(Y = y)} \end{aligned}$$

e si legge: *la probabilità che  $X$  assuma il valore  $x$  dato che  $Y$  ha assunto il valore  $y$  è  $f(x|y)$ .*

### 6.4.1 Valore atteso e varianza condizionata (complementi)

Sia  $X$  una VC discreta con supporto  $S_X$ . Si definisce il valore atteso di  $X$  condizionato ad  $Y = y$ , la quantità

$$E(X|Y = y) = \sum_{x \in S_X} x f(x|y)$$

Si definisce varianza di  $X$  condizionato ad  $Y = y$ , la quantità

$$V(X|Y = y) = \sum_{x \in S_X} (x - E(X|Y = y))^2 f(x|y)$$

### 6.4.2 Esempio di indipendenza tra VC

Sia  $Y$  una VC con supporto  $S_Y = \{-1, +1\}$  e con funzione di probabilità

$$\begin{aligned} f_Y(-1) &= \frac{1}{2} \\ f_Y(+1) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

la Y al piede della f serve a non confondere la funzione di probabilità della Y con quella della X. Se  $X$  ed  $Y$  sono **indipendenti** allora:

$$\begin{aligned} P(X = x \cap Y = y) &= f(x, y) \\ &= f_X(x) f_Y(y) \end{aligned}$$

$f_X(1) = \frac{1}{4}$	$f_X(2) = \frac{2}{4}$	$f_X(3) = \frac{1}{4}$
$f_Y(-1) = \frac{1}{2}$	$f(1, -1) = 0.125$	$f(3, -1) = 0.125$
$f_Y(+1) = \frac{1}{2}$	$f(1, +1) = 0.125$	$f(3, +1) = 0.125$

## 6.5 Specchietto finale per le VC discrete

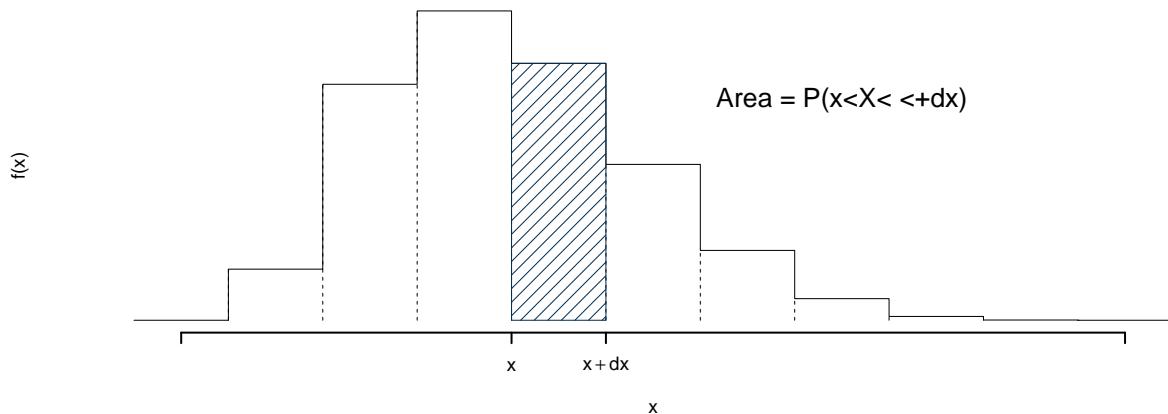
$S_X$	il supporto della VC $X$ : l'insieme di tutti i possibili valori che la VC può assumere.
$S_X = \{x_1, \dots, x_k\}$	Se $X$ è una VD discreta il suo supporto ha:
$S_X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$	un numero finito, o al più numerabile di elementi.
$f(x) = P(X = x), x \in S_X$	$f$ è la funzione di probabilità, indica la probabilità che la VC $X$ assuma esattamente il valore $x$ .
$E(a + bX) = a + bE(X)$	linearità
$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$	
$V(X) = E((X - E(X))^2)$	Varianza della VC $X$
$= \sum_{x \in S_X} x^2 f(x) - E^2(X)$	
$V(a + bX) = b^2 V(X)$	
$SD(X) = \sqrt{V(X)}$	Standard Deviation della VC $X$
$SD(a + bX) =  b SD(X)$	
Indipendenza tra VC	
$P(X \in A \cap Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$	$\forall A \subset S_X, \forall B \subset S_Y$
$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$	$\forall x \in S_X, \forall y \in S_Y$
$V(aX + bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y)$	se e solo se $X$ e $Y$ sono indipendenti
$SD(aX + bY) = \sqrt{a^2 V(X) + b^2 V(Y)}$	se e solo se $X$ e $Y$ sono indipendenti.
	n.b. la SD di una somma non si può esprimere con la somma delle SD.

## 6.6 Le VC continue

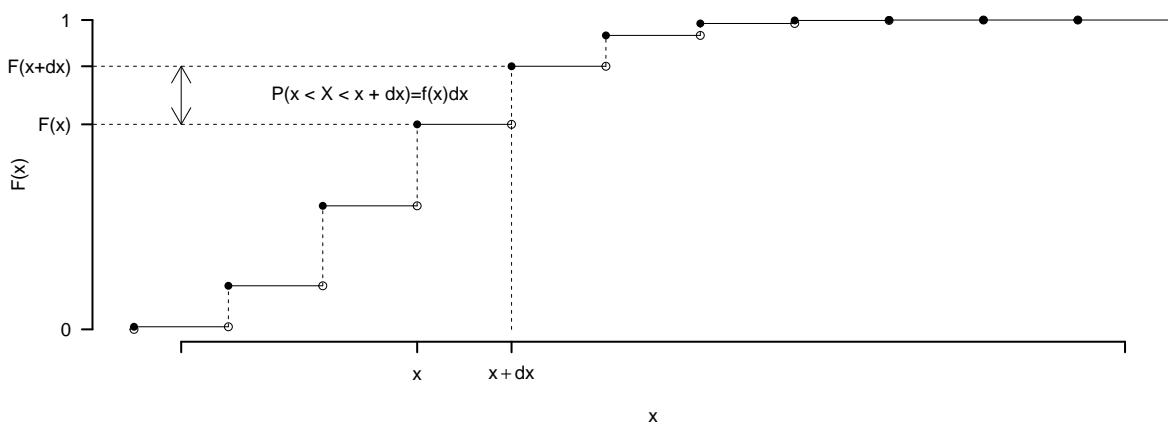
Le VC che hanno un supporto più che numerabile,  $S_X \subseteq \mathbb{R}$ , cioè un sottoinsieme della retta reale o la retta reale stessa vengono chiamate VC continue. Siccome un intervallo di numeri reali contiene una quantità più che numerabile di punti è impossibile probabilizzare tutti i punti dell'intervallo. Invece di probabilizzare i singoli numeri vengono probabilizzati gli intervalli.

Concettualmente si definiscono immaginando di mandare la precisione di una misura all'infinito. Ogni misura è un conteggio, una lunghezza si può misurare in *quanti* metri, o in *quanti centimetri* centimetri, o in *quanti millimetri*, ecc.

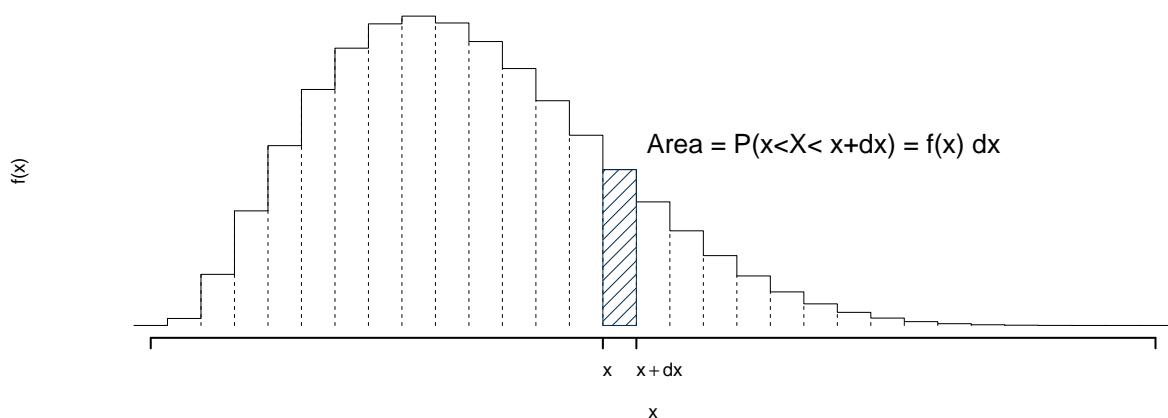
L'idea è di dividere il supporto in classi e costruire un istogramma di densità tale che l'area sottesa ad una classe si la probabilità della classe stessa. Se per esempio dividiamo l'intervallo in 11 intervalli, otteniamo, graficamente



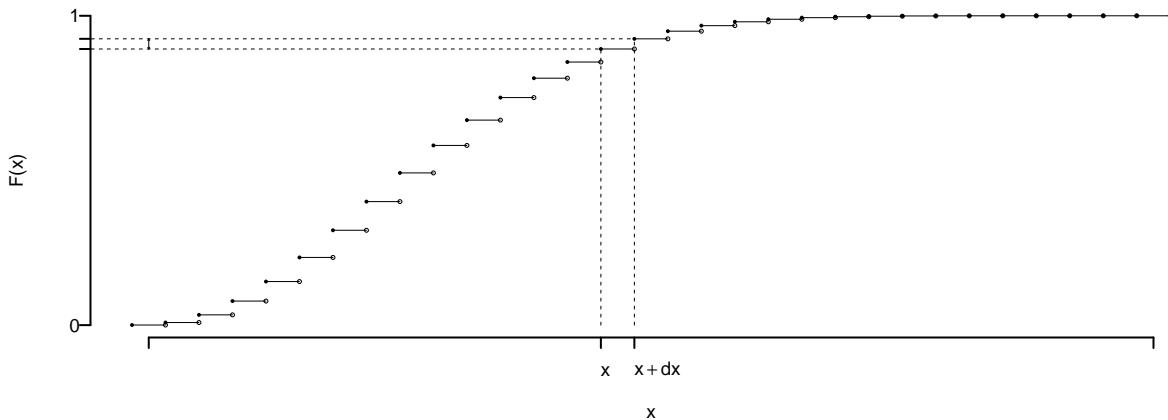
La relativa Funzione di Ripartizione  $F$  sarà



Mandare  $dx$  a zero significa farlo diventare progressivamente sempre più piccolo

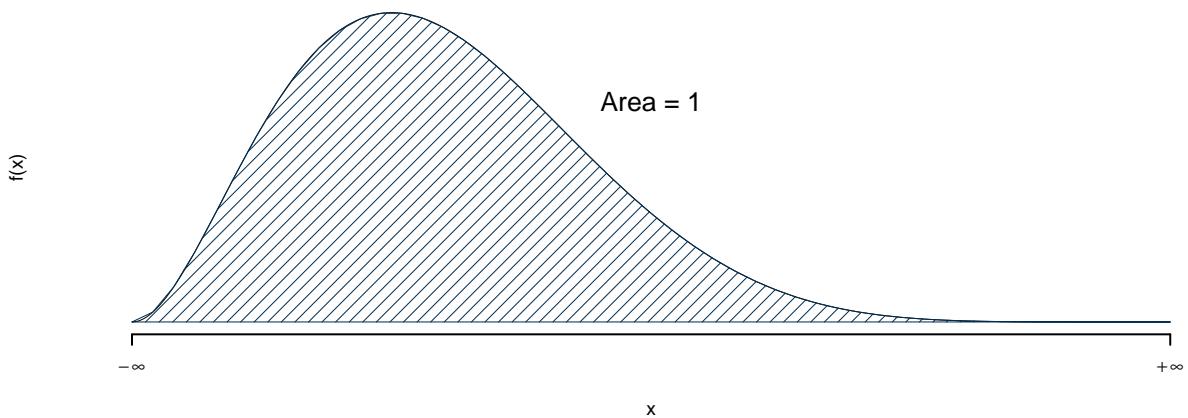


La relativa Funzione di Ripartizione  $F$  sarà

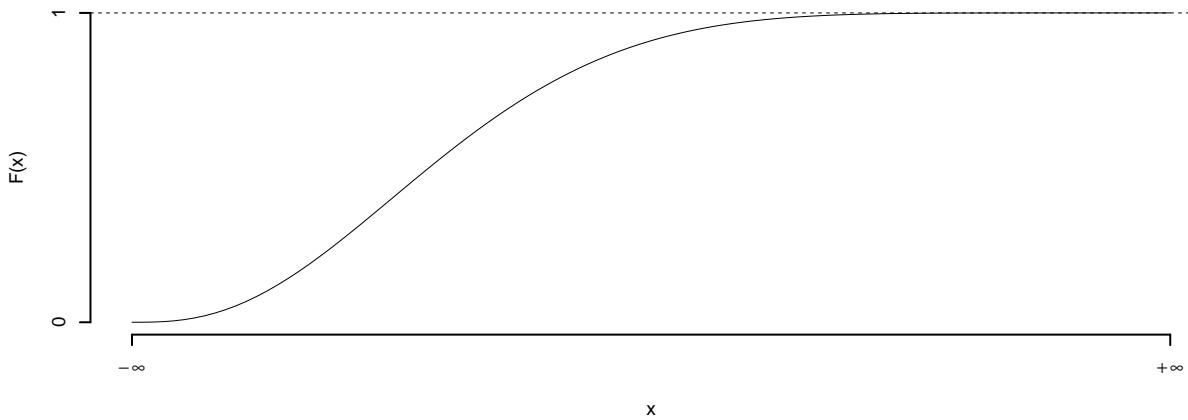


Una VC continua  $X$  è caratterizzata dal supporto  $S_X \subseteq \mathbb{R}$  e dalla funzione di densità  $f$  la cui area sottostante a  $S_X$  è uguale ad 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

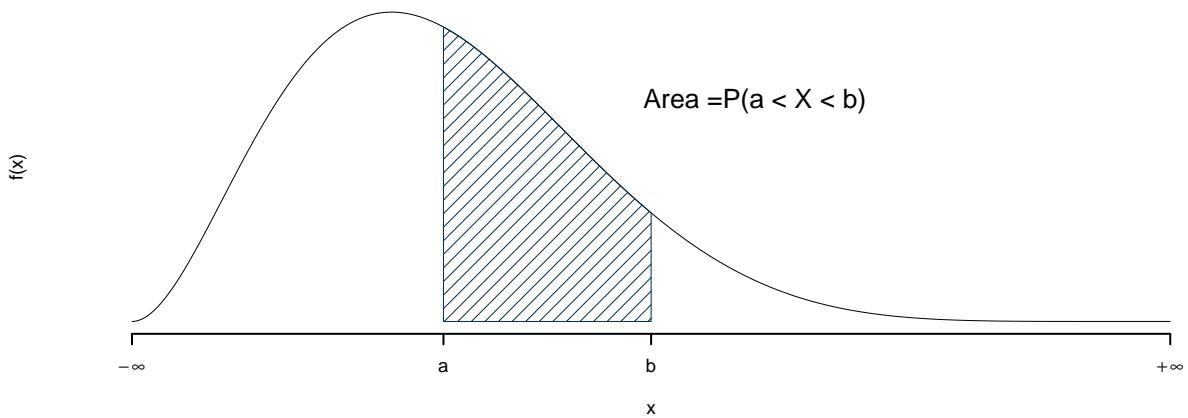


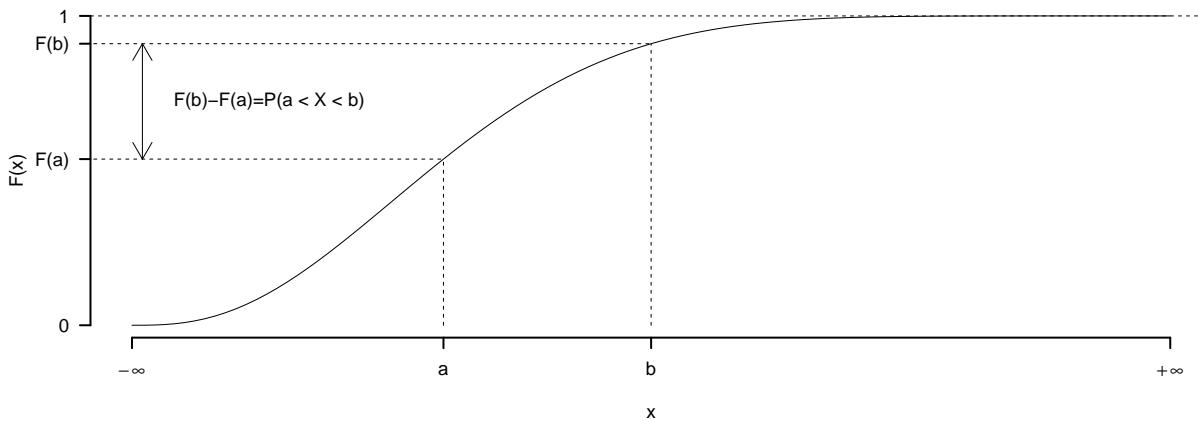
La relativa Funzione di Ripartizione  $F$  sarà



La probabilità di un intervallo qualunque  $(a, b)$  è l'area sottesa ad  $f$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$





Questa applicazione esemplifica il passaggio dal discreto al continuo e il concetto di *modello*: VC continua.

### 6.6.1 Valore Atteso e Varianza di una VC continua

Se  $X$  è una VC con supporto  $S_X = (x_{\min}, x_{\max})$ , con  $-\infty \leq x_{\min} < x_{\max} \leq +\infty$ , allora si definisce

$$E(X) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x f(x) dx$$

e

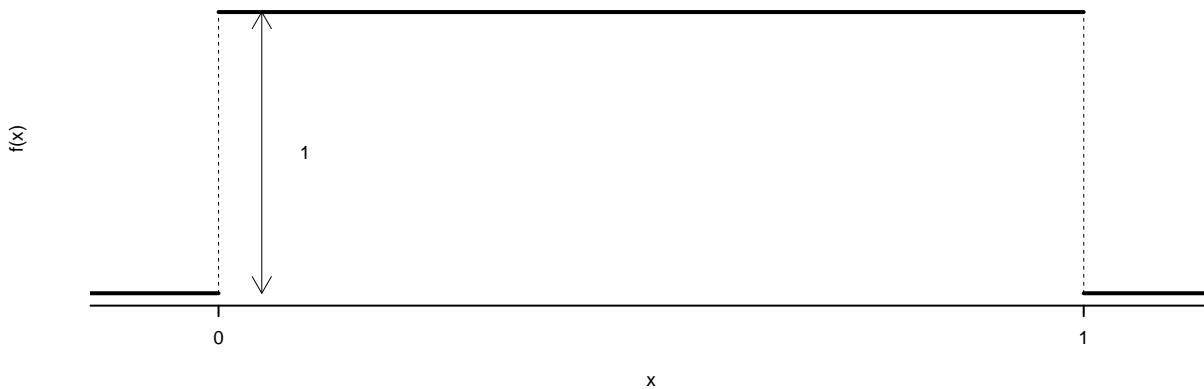
$$V(X) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

### 6.6.2 La VC uniforme

La VC uniforme è utile per prendere confidenza con le VC continue ed è definita nel seguente modo:  $S_X = [0, 1]$  e

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si tratta di una funzione a gradino che vale uno nell'intervallo  $[0, 1]$  e zero altrove.

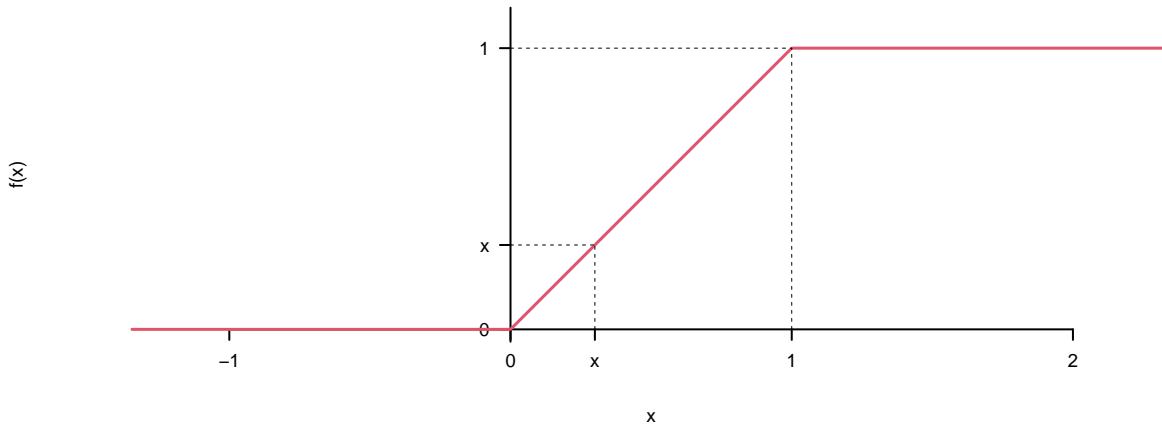


La sua funzione di ripartizione è

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

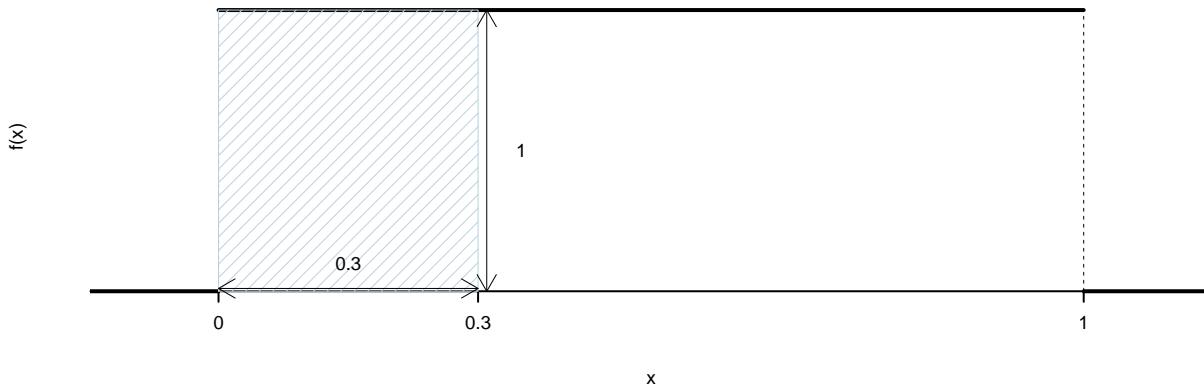
Usiamo la lettera  $t$  invece della  $x$  perché la  $x$  è usata per definire  $F$  essendo  $f(x) = 0$  per ogni  $x < 0$  allora  $\int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_0^x f(t)dt$  e dunque

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



Ovvero la probabilità che  $X \leq x$  è l'area tra zero ed  $x$  della funzione a gradino. Per esempio

$$F(0.3) = P(X \leq 0.3) = (\text{base} = 0.3) \times (\text{altezza} = 1) = 0.3$$



Il valore atteso è

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\
 &= \int_0^1 x dx \quad \text{poiché } f \text{ vale 1 in } [0,1] \text{ e 0 altrove} \\
 &= \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

La varianza

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\
 E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \\
 &= \int_0^1 x^2 dx \quad \text{poiché } f \text{ vale 1 in } [0,1] \text{ e 0 altrove} \\
 &= \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1^3}{3} - \frac{0^2}{3} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V(X) &= \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\
 &= \frac{4-3}{12} \\
 &= \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

## 6.7 Operazioni sulle VC

Le VC sono numeri che non sappiamo in anticipo che valore avranno, quindi siamo autorizzati a fare operazioni. Sia  $X$  una VC con supporto  $S_X$  e funzione di probabilità  $f$ . Se  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , posto

$$Y = g(X)$$

Allora  $Y$  è una VC.

**Esempio 6.7.1.** Sia  $X$  una VC con supporto  $\{-1, 0, 1\}$  e con funzione di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se } x = -1 \\ \frac{2}{4}, & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{se } x = +1 \end{cases}$$

posto

$$Y = g(X) = 2 + 3X$$

allora

$$S_Y = \{-1, 2, 5\}$$

ovvero se  $x = -1$ ,  $y = 2 + 3 \times (-1) = -1$ , se  $x = 0$ ,  $y = 2 + 3 \times 0 = 2$ , se  $x = 1$ ,  $y = 2 + 3 \times 1 = 5$  e quindi

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se } y = -1 \\ \frac{2}{4}, & \text{se } y = 2 \\ \frac{1}{4}, & \text{se } y = 5 \end{cases}$$

**Esempio 6.7.2.** Sia  $X$  una VC con supporto  $\{-1, 0, 1\}$  e con funzione di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se } x = -1 \\ \frac{2}{4}, & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{se } x = +1 \end{cases}$$

posto

$$Y = g(X) = X^2$$

allora

$$S_Y = \{0, 1\}$$

ovvero se  $x = -1$ ,  $y = (-1)^2 = 1$ , se  $x = 0$ ,  $y = 0^2 = 0$ , se  $x = 1$ ,  $y = 1^2 = 1$  e quindi

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}P(Y = 1) = P(X = -1 \cup X = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } y = 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{se } y = 1 \end{cases}$$

**Esempio 6.7.3.** Sia  $X$  una VC con supporto  $\{-1, 0, 1\}$  e con funzione di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se } x = -1 \\ \frac{2}{4}, & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{se } x = +1 \end{cases}$$

posto

$$Y = g(X) = X^2$$

allora

$$S_Y = \{0, 1\}$$

ovvero se  $x = -1$ ,  $y = (-1)^2 = 1$ , se  $x = 0$ ,  $y = 0^2 = 0$ , se  $x = 1$ ,  $y = 1^2 = 1$  e quindi

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}P(Y = 1) = P(X = -1 \cup X = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } y = 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{se } y = 1 \end{cases}$$

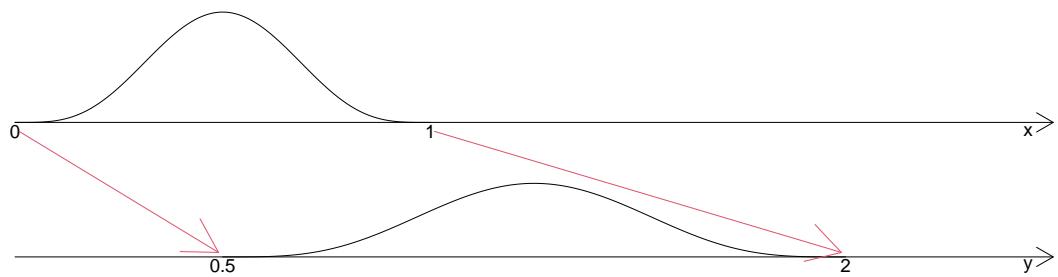
**Esempio 6.7.4.** Sia  $X$  un VC continua con supporto  $S_X = [0, 1]$  e funzione di densità  $f(x)$ . Posto

$$Y = 0.5 + 1.5 \cdot X$$

allora

$$S_Y = [0.5, 2]$$

infatti se  $X = 0$  allora  $Y = 0.5 + 1.5 \cdot 0 = 0.5$ , mentre se  $X = 1$  allora  $Y = 0.5 + 1.5 \cdot 1 = 2$ .





# Variabili Casuali di particolare interesse

7

Le variabili casuali rappresentano i mattoncini fondamentali con cui si costruiscono i modelli probabilistici e statistici. Alcune variabili casuali, in particolare, emergono come strumenti privilegiati per descrivere classi molto ampie di problemi. La loro importanza deriva dalla semplicità e generalità con cui riescono a rappresentare fenomeni complessi, rendendole elementi centrali in numerose applicazioni.

Queste variabili casuali, che chiamiamo **di particolare interesse**, sono caratterizzate da una distribuzione nota e convenzionalmente identificata da un nome. Esse non sono semplicemente funzioni generiche, ma rappresentano **modelli probabilistici** completamente definiti, a eccezione di un **numero finito di parametri** che devono essere specificati. Questi parametri controllano aspetti fondamentali della distribuzione, come il centro, la dispersione o la forma.

Per rappresentare formalmente questa idea, adottiamo la seguente notazione: se  $X$  è una variabile casuale con distribuzione identificata dalla sigla  $\mathcal{L}$  e parametrizzata da un vettore di parametri  $\theta$ , scriviamo:

$$X \sim \mathcal{L}(\theta)$$

Questa espressione si legge:

*X è distribuita come una variabile casuale di tipo  $\mathcal{L}$  con parametro  $\theta$ .*

La scelta del simbolo  $\theta$  è intenzionalmente astratta. In questo libro, useremo  $\theta$  esclusivamente per rappresentare un **parametro generico** o un vettore di parametri. Nessun modello specifico che vedremo avrà mai un parametro chiamato  $\theta$ : i parametri dei modelli saranno sempre identificati da simboli più specifici, come  $\mu, \sigma^2, \lambda$ , che rifletteranno il significato del parametro nel contesto della distribuzione. Questa scelta è importante per mantenere il rigore formale e per distinguere il livello generale della teoria da quello specifico delle applicazioni.

In ogni caso, l'insieme dei valori possibili per  $\theta$ , chiamato **spazio dei parametri** e indicato con  $\Theta$ , definisce il dominio di validità della distribuzione. È l'insieme dei valori per cui la distribuzione ha senso probabilistico.

Questa notazione, benché astratta, è fondamentale per costruire un linguaggio che sia universale, sintetico e adattabile a contesti diversi. Essa ci permette di comunicare non solo che  $X$  segue una certa distribuzione, ma anche di precisare come i parametri controllano il comportamento della distribuzione stessa. Sarà utile sia nel contesto probabilistico, dove i parametri sono spesso fissati a priori, sia in quello statistico, dove i parametri devono essere stimati dai dati osservati.

## 7.1 La VC di Bernoulli

La VC di Bernoulli codifica ogni bipartizione di  $\Omega$  nei numeri zero e uno. Sia  $A$  un evento qualunque la VC di Bernoulli assegna  $X = 1$  se  $A$  è vero e  $X = 0$  se  $A$  è falso. Se per esempio estraggo a caso uno studente da un'aula codifico con 1 il fatto che sia maschio e con 0 che sia femmina. La VC  $X$  ha come supporto

$$S_X = \{0, 1\}$$

Definiamo con  $\pi$  la probabilità che  $X = 1$  e dunque

$$\begin{cases} X = 1, & \text{con probabilità } \pi \\ X = 0, & \text{con probabilità } 1 - \pi \end{cases}$$

La precedente può essere scritta in modo più compatto

$$f(x) = P(X = x) = \pi^x(1 - \pi)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}$$

infatti

$$\begin{aligned} f(1) &= P(X = 1) = \pi^1(1 - \pi)^{1-1} = \pi \\ f(0) &= P(X = 0) = \pi^0(1 - \pi)^{1-0} = 1 - \pi \end{aligned}$$

Diremo che  $X$  è distribuita come una Bernoulli di parametro  $\pi$  e si scrive  $X \sim \text{Ber}(\pi)$ . Lo spazio dei parametri in questo caso è  $\pi \in [0, 1]$ , cioè  $\pi$  essendo un probabilità non può essere scelto più piccolo di zero o più grande di uno.

**Esempio.** Un lancio di una moneta perfetta è descritto da una Bernoulli di parametro  $\pi = \frac{1}{2}$

**Esempio.** L'estrazione da un'urna che contiene 1 sfera vincente e 9 perdenti è descritto da una Bernoulli  $\pi = \frac{1}{10}$

### 7.1.1 Valore Atteso e Varianza

Se  $X \sim \text{Ber}(\pi)$ , allora

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x \in S_X} xf(x) \\ &= 1 \cdot \pi + 0 \cdot (1 - \pi) \\ &= \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{x \in S_X} (x - E(X))^2 f(x) \\ &= (1 - \pi)^2 \cdot \pi + (0 - \pi)^2 \cdot (1 - \pi) \\ &= (1 - \pi)^2 \cdot \pi + \pi^2 \cdot (1 - \pi) \\ &= \pi((1 - \pi)^2 + \pi(1 - \pi)) \\ &= \pi(1 - \pi)(1 - \pi + \pi) \\ &= \pi(1 - \pi) \end{aligned}$$

### 7.1.2 In Sintesi

Se  $X$  è distribuita come una Bernoulli di parametro  $\pi$ , allora

Notazione	$X \sim \text{Ber}(\pi)$
Supporto	$S_X = \{0, 1\}$
Funzione di probabilità	$f(x) = \pi^x(1 - \pi)^{1-x}$
Spazio dei parametri	$\pi \in [0, 1]$
Valore Atteso	$E(X) = \pi$
Varianza	$V(X) = \pi(1 - \pi)$

## 7.2 La VC Binomiale

La VC Binomiale consente di calcolare la probabilità di avere un certo numero di successi in un certo numero di prove indipendenti le une dalle altre. Se per esempio lanciamo una moneta perfetta 15 volte potremmo chiederci con quale probabilità otterremmo 8 volte testa su 15 lanci.

### 7.2.1 La VC Binomiale attraverso un esempio

Si consideri un'urna che contiene 1 bussolotto rosso e 2 bianchi, estraiamo 5 volte con reintroduzione, vogliamo calcolare la probabilità di avere 3 bianchi (e quindi 2 rossi), su 5 estrazioni.

$$E = 3 \text{ bianchi su 5 estrazioni}$$

Chi sono gli eventi che realizzano  $E$ ?

$$\begin{aligned} E = \{E_1 &= (B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap R_4 \cap R_5) \cup \\ E_2 &= (B_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap B_4 \cap R_5) \cup \\ E_3 &= (B_1 \cap R_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap R_5) \cup \\ &\dots\} \end{aligned}$$

Osserviamo che ogni estrazione dall'urna è descritta da una Bernoulli  $X_1, \dots, X_5$ , ovvero che la VC che conta 1 se esce Bianco e 0 se esce Rosso è:

$$X_i \sim \text{Ber}(\pi = 2/3), \quad i = 1, \dots, 5$$

Le 5 Bernoulli che rappresentano le 5 estrazioni dall'urna sono tutte tra di loro **Indipendenti e Identicamente Distribuite**, sono **IID**.

Osserviamo pure che l'evento  $E$  è vero se e solo se  $X = X_1, \dots, X_5 = 3$ . E dunque la probabilità dell'evento  $E_1$  sarà

$$\begin{aligned} P(E_1) &= P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 1 \cap X_4 = 0 \cap X_5 = 0) \\ &= P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)P(X_3 = 1)P(X_4 = 0)P(X_5 = 0), \quad \text{in virtù della indipendenza} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
&= 0.0329
\end{aligned}$$

Notiamo che  $1 + 1 + 1 + 0 + 0 = 3$ . E dunque la probabilità dell'evento  $E_2$  sarà

$$\begin{aligned}
P(E_2) &= P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 0 \cap X_4 = 1 \cap X_5 = 0) \\
&= P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)P(X_3 = 0)P(X_4 = 1)P(X_5 = 0), \text{ in virtù della indipendenza} \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
&= 0.0329
\end{aligned}$$

Anche stavolta notiamo che  $1 + 1 + 0 + 1 + 0 = 3$ . E dunque la probabilità dell'evento  $E_3$  sarà

$$\begin{aligned}
P(E_3) &= P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0 \cap X_3 = 1 \cap X_4 = 1 \cap X_5 = 0) \\
&= P(X_1 = 1)P(X_2 = 0)P(X_3 = 1)P(X_4 = 1)P(X_5 = 0), \text{ in virtù della indipendenza} \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
&= 0.0329
\end{aligned}$$

Tutti gli eventi  $E_i$  hanno la stessa probabilità e dunque

$$P(E_i) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0.0329$$

E dunque

$$\begin{aligned}
P(E) &= P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots) \\
&= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \dots, \text{ per via della incompatibilità} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots \\
&= \#\{\text{di modi in cui posso disporre 3B su 5}\} \cdot 0.0329
\end{aligned}$$

In quanti modi posso disporre 3 successi nelle 5 prove?

sequenze	conteggio
1,1,1,0,0	1
1,1,0,1,0	2
1,1,0,0,1	3
1,0,1,1,0	4
1,0,1,0,1	5
1,0,0,1,1	6
0,1,1,1,0	7
0,1,1,0,1	8
0,1,0,1,1	9
0,0,1,1,1	10

In 10 modi diversi, per cui:

$$P(E) = 10 \cdot 0.0329 = 0.3292$$

Il *Coefficiente Binomiale* calcola il numero di possibili combinazioni senza doverle scrivere tutte (in quanti modi posso riempire n scatole numerate con k palline indistinguibili).

Nel nostro caso:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1)(2 \cdot 1)} = 10$$

### 7.2.2 Il modello

Siano  $X_1, \dots, X_n$  n VC IID, tutte di Bernoulli

$$X_i \sim \text{Ber}(\pi), \quad \pi \in [0, 1]$$

Sia

$$X = X_1 + \dots + X_n$$

allora  $X$  è chiamata **VC Binomiale**

$$X \sim \text{Binom}(n; \pi)$$

è la VC che conta *il numero di successi in n prove* indipendenti e identicamente distribuite di Bernoulli, ogni prova ha probabilità  $\pi$  di avere *successo*.

Il supporto di  $X$  è

$$S_X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

Lo spazio dei parametri è

$$0 \leq \pi \leq 1 \rightarrow \pi \in [0, 1]$$

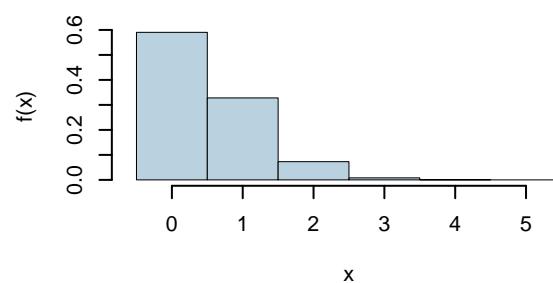
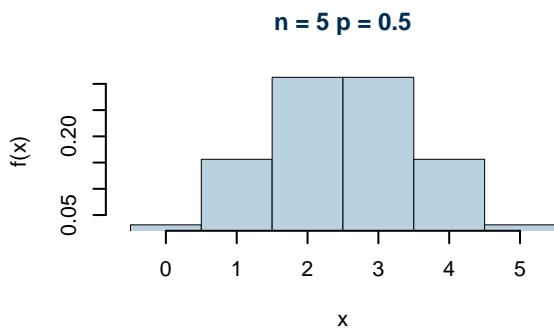
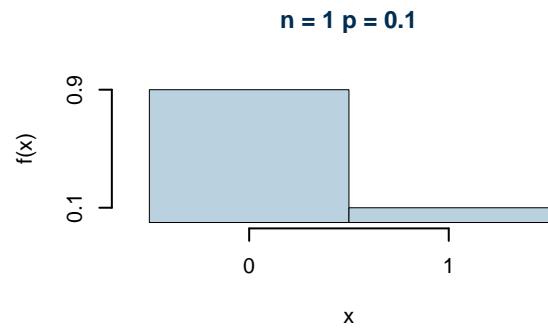
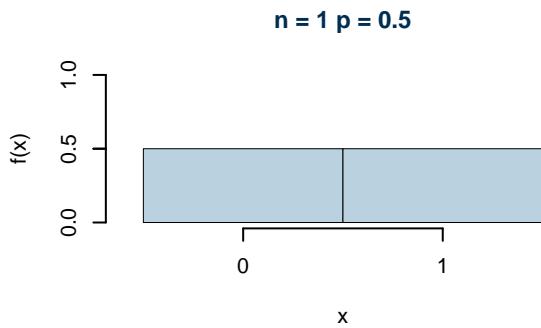
La funzione di probabilità di  $X$  è

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$$

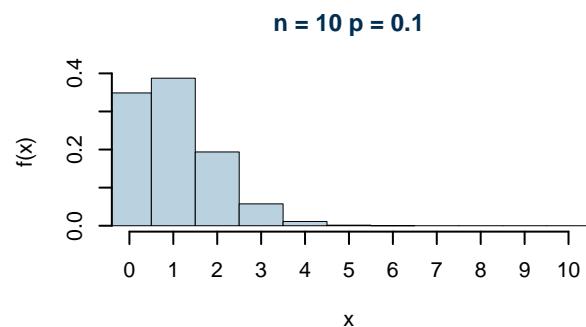
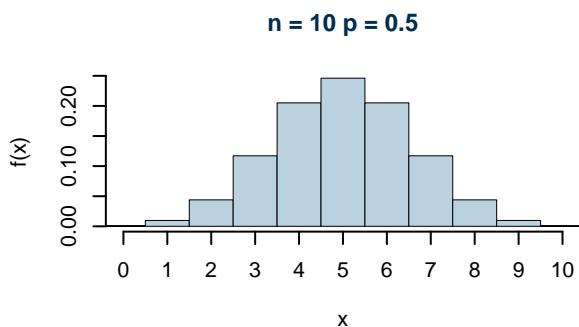
Il valore atteso e la varianza sono, rispettivamente

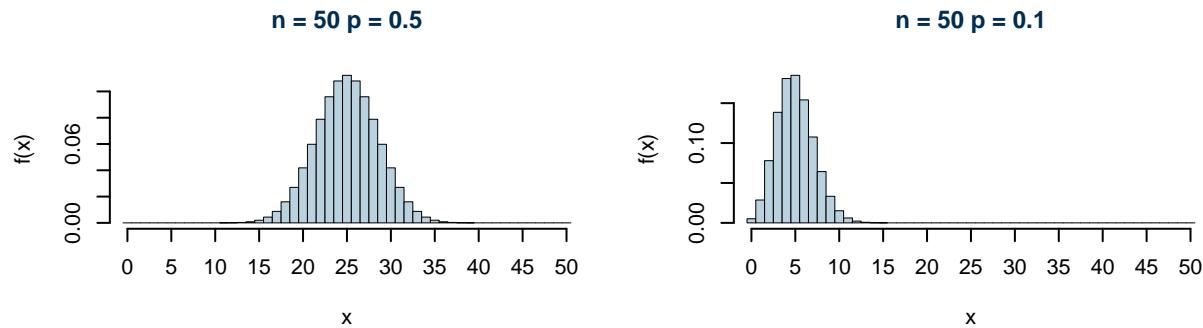
$$E(X) = n\pi \quad V(X) = n\pi(1 - \pi)$$

**Esempi** ( $n = 1$  e  $n = 5$ )



**Esempi** ( $n = 10$  e  $n = 50$ )





### 7.2.3 Dimostrazione del Valore atteso e della Varianza

se  $X \sim \text{Binom}(n; \pi)$  allora è la somma di  $n$  prove di Bernoulli IID  $X_i \sim \text{Ber}(\pi)$ :

$$X = X_1 + \dots + X_n$$

e sappiamo che

$$E(X_i) = \pi, \quad V(X_i) = \pi(1 - \pi), \quad \forall i = 1, \dots, n$$

quindi

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + \dots + X_n) \\ &= E(X_1) + \dots + E(X_n) \\ &= \pi + \dots + \pi \\ &= n\pi \\ V(X) &= V(X_1 + \dots + X_n) \\ &= V(X_1) + \dots + V(X_n), \text{ in virtù dell'indipendenza} \\ &= \pi(1 - \pi) + \dots + \pi(1 - \pi) \\ &= n\pi(1 - \pi) \end{aligned}$$

### 7.2.4 Esempio

Si lancia un dado a sei facce non truccato  $n = 5$  volte, si vince se si ottiene un punteggio strettamente maggiore di 4.

1. Calcolare la probabilità non vincere nessuna volta in  $n = 5$  tentativi.

**Soluzione.** La variabile casuale che conta il numero di vittorie in  $n = 5$  lanci è la Binomiale, la probabilità di vittoria nel singolo lancio si calcola facilmente:

$$\pi = P(\text{Dado} > 4) = P(\text{Dado} = 5 \cup \text{Dado} = 6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

La probabilità di non vincere in nessuno degli  $n$  tentativi equivale a calcolare la probabilità che  $X$  sia uguale a zero

$$P(X = 0) = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x} = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{5-0} = 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 0.0412$$

2. Calcolare la probabilità vincere *al massimo* due volte in  $n = 5$  tentativi.

**Soluzione.** La probabilità di vincere al massimo due volte su  $n$  tentativi equivale a calcolare la probabilità che  $X$  sia minore o uguale due

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0 \cup X = 1 \cup X = 2) \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \binom{5}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{5-0} + \binom{5}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{5-1} + \binom{5}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{5-2} \\ &= 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^4 + 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ &= 0.7901 \end{aligned}$$

3. Calcolare la probabilità vincere *almeno* due volte in  $n = 5$  tentativi.

**Soluzione.** La probabilità di vincere almeno due volte su  $n$  tentativi equivale a calcolare la probabilità che  $X$  sia maggiore o uguale due

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= P(X = 2 \cup X = 3 \cup X = 4 \cup X = 5) \\ &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\ &= 1 - \left(1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{5-0} + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{5-1}\right) \\ &= 0.5391 \end{aligned}$$

## 7.2.5 Proprietà

**Proprietà 7.2.1 (Variabile Casuale Binomiale).** *Sia  $X \sim \text{Binom}(n; \pi)$ , allora:*

1.  *$E(X)$  e  $V(X)$  crescono al crescere di  $n$*
2. *La distribuzione di  $X$  è perfettamente simmetrica se  $\pi = 0.5$*
3. *La distribuzione di  $X$  è tende a diventare simmetrica se  $n \rightarrow \infty$ , per ogni valore di  $0 < \pi < 1$*
4. **Proprietà riproduttiva:** *Siano  $X_1, X_2, \dots, X_m$   $m$  VC indipendenti, ognuna  $X_i \sim \text{Binom}(n_i, \pi)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , allora*

$$X_1 + \dots + X_m \sim \text{Binom}(n_1 + \dots + n_m; \pi)$$

Si osservi che una Binomiale per  $n = 1$  e  $\pi$  equivale ad una Bernoulli di parametro  $\pi$

$$X \sim \text{Binom}(1, \pi) \sim \text{Ber}(\pi)$$

e quindi dalla proprietà riproduttiva abbiamo che se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sono  $n$  VC indipendenti, ognuna  $X_i \sim \text{Binom}(1, \pi)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , allora

$$X_1 + \dots + X_n \sim \text{Binom}(n; \pi)$$

Lanciare 5 volte la stessa moneta e contare il numero di teste equivale, dal punto di vista probabilistico, a lanciare 5 monete identiche e contare il numero di teste.

### 7.2.6 In Sintesi

Se  $X$  è distribuita come una Binomiale di parametro  $\pi$ , allora

Notazione	$X \sim \text{Binom}(n, \pi)$
Supporto	$S_X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$
Funzione di probabilità	$f(x) = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$
Spazio dei parametri	$\pi \in [0, 1], n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
Valore Atteso	$E(X) = n\pi$
Varianza	$V(X) = n\pi(1 - \pi)$

**Proprietà riproduttiva:** Siano  $X_1, X_2, \dots, X_m$   $m$  VC indipendenti, ognuna  $X_i \sim \text{Binom}(n_i, \pi), i = 1, \dots, m$ , allora

$$X_1 + \dots + X_m \sim \text{Binom}(n_1 + \dots + n_m; \pi)$$

## 7.3 La VC di Poisson

### 7.3.1 Obiettivo

Trovare una variabile casuale che ci consenta di probabilizzare particolari fenomeni espressi in forma di conteggi:

- Numero di telefonate in arrivo ad un centralino di emergenza in un'ora
- Numero di interventi richiesti in assistenza in 24h
- Numero di automobili in fila ad un semaforo in orario di punta
- Numero di volte che si è cercato lavoro negli ultimi tre mesi

Sono tutti fenomeni che hanno un supporto indefinito, perché il fenomeno potrebbe essere zero, oppure uno, oppure due, oppure... e non è possibile fissare manualmente infiniti valori di probabilità.

### 7.3.2 Storia

La distribuzione *Poisson* fu introdotta da Siméon-Denis Poisson nel 1838 nel suo articolo "Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile". Tra le tante applicazioni venne utilizzata per studiare la variabile casuale  $X$  *numero di morti per calcio di cavallo*. Evento raro, ma possibile nel IX secolo. Se il numero  $n$  di calci da cavallo fossero stati pochi, la distribuzione sarebbe binomiale,  $X \sim \text{Binom}(n; \pi)$ , dove  $\pi$  è la probabilità di morire avendo preso un calcio. Pur essendo  $\pi$  un numero molto basso, nel 1800  $n$  invece è un numero molto elevato

### 7.3.3 Il modello

Poisson assume che il valore atteso di  $X$  sia  $E(X) = n \cdot \pi = \lambda$ , dove  $\lambda$  è un *numero fissato*. Si deduce facilmente che

$$\pi = \frac{\lambda}{n}$$

La distribuzione di  $X$  diventa allora

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x} \\ &= \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \\ &= \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \\ &= \frac{\lambda^x}{x!} \frac{n!}{(n-x)!n^x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \end{aligned}$$

Infine si calcola il limite per  $n \rightarrow \infty$ . Anzitutto analizziamo il supporto

$$S_X = \{0, 1, \dots, n\}$$

Se  $n \rightarrow \infty$  il supporto di  $X$  diventa

$$S_X = \{0, 1, \dots, +\infty\} = \mathbb{N}$$

Osserviamo la funzione di probabilità:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^x}{x!} \frac{n!}{(n-x)!n^x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

In quanto

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-x)!n^x} &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} &= e^{-\lambda}, \quad \text{si tratta di un limite notevole} \end{aligned}$$

La variabile di Poisson  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$  è quella variabile che ha supporto tutti i numeri naturali

$$S_X = \mathbb{N}$$

con funzione di probabilità

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

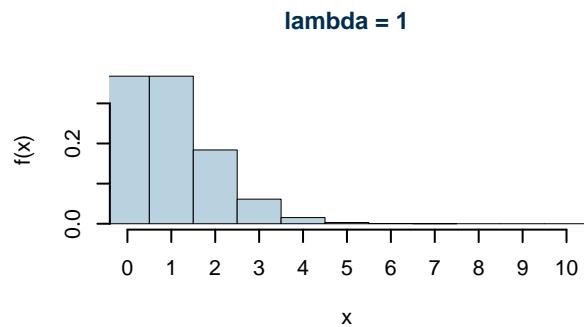
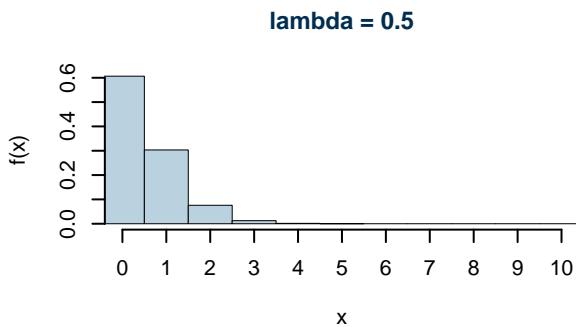
lo spazio dei parametri è

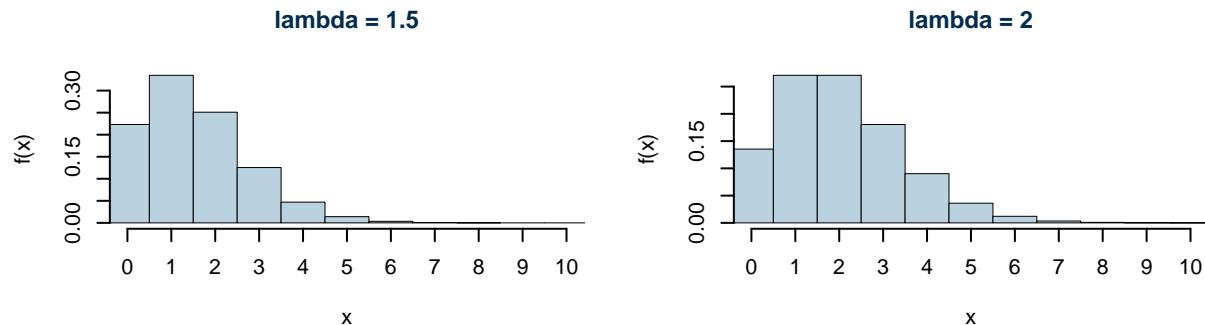
$$\lambda > 0 \rightarrow \Theta = (0, +\infty) = \mathbb{R}^+$$

Il valore atteso e la varianza sono

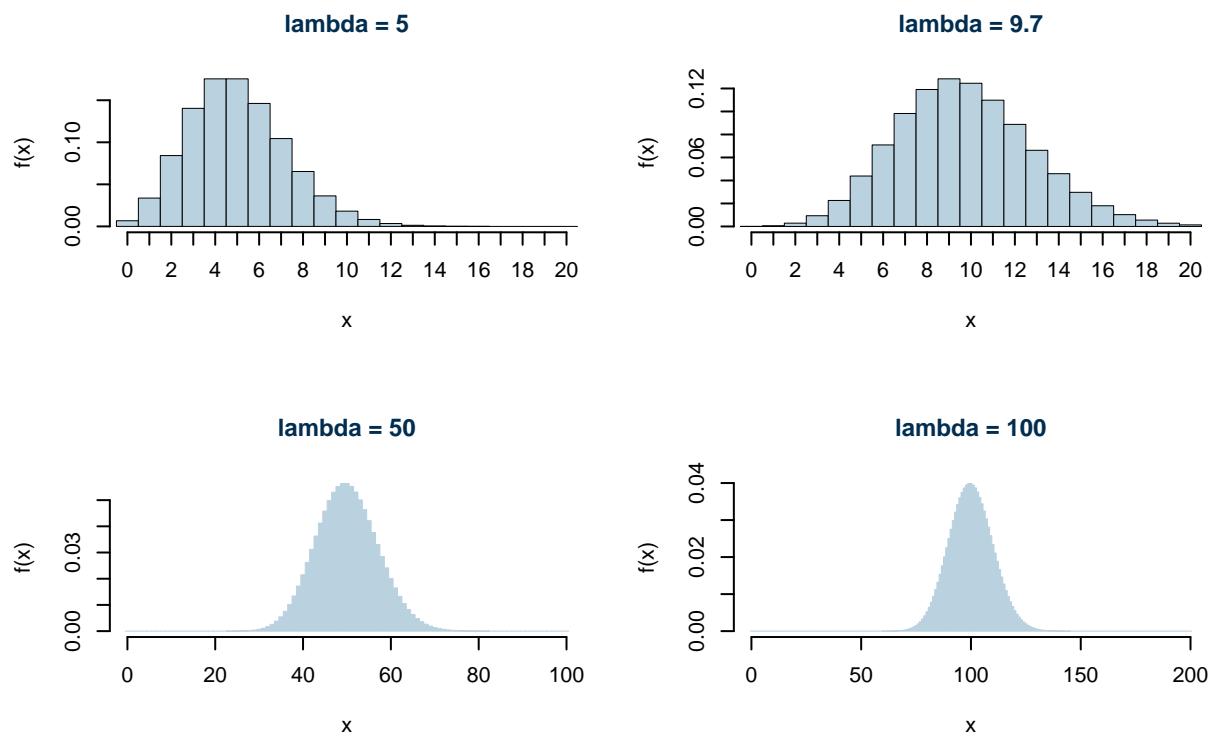
$$E(X) = \lambda, \quad V(X) = \lambda$$

**Alcuni esempi per  $\lambda \leq 2$**





Alcuni esempi per  $\lambda \geq 5$



#### 7.3.4 Dimostrazione del Valore atteso e della Varianza della Poisson

Ricordiamo che la Poisson è il limite di una binomiale, il valore atteso della binomiale  $n\pi$ , al limite si ottiene

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} n\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\lambda}{n} = \lambda$$

la varianza della binomiale è  $n\pi(1 - \pi)$ , al limite

$$V(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} n\pi(1 - \pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\lambda}{n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = \lambda$$

### 7.3.5 Esempio

Sia  $X$  il numero di persone in fila alla cassa 1 di in un supermercato in orario di punta, si *assume* che  $X$  sia *ben modellata* da una Poisson di parametro  $\lambda = 3.5$ , e si scrive  $X \sim \text{Pois}(3.5)$ .

1. Calcolare la probabilità che *nessuno* sia in fila

**Soluzione.**

$$P(X = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = \frac{3.5^0}{0!} e^{-3.5} = 0.0302$$

2. Calcolare la probabilità di avere *al massimo* 2 persone in fila

**Soluzione.**

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0 \cup X = 1 \cup X = 2) \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \frac{3.5^0}{0!} e^{-3.5} + \frac{3.5^1}{1!} e^{-3.5} + \frac{3.5^2}{2!} e^{-3.5} \\ &= 0.0302 + 0.1057 + 0.185 = 0.3208 \end{aligned}$$

3. Calcolare la probabilità di avere *almeno* 2 persone in fila

**Soluzione.**

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= P(X = 2 \cup X = 3 \cup X = 4 \cup \dots) \\ &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\ &= 1 - (0.0302 + 0.1057) = 0.8641 \end{aligned}$$

4. Calcolare la probabilità che il numero di persone in fila sia *compreso* tra 2 e 4, estremi inclusi

**Soluzione.**

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 4) &= P(X = 2 \cup X = 3 \cup X = 4) \\ &= 0.185 + 0.2158 + 0.1888 = 0.1359 \end{aligned}$$

### 7.3.6 Proprietà della Poisson

**Proprietà 7.3.1** (Variabile Casuale di Poisson).

1. Siano  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ,  $n$  VC indipendenti, tali che

$$X_i \sim \text{Pois}(\lambda_i)$$

allora

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$$

2. Sia  $X \sim \text{Binom}(n; \pi)$ , se  $n$  cresce ( $n \uparrow$ ) e  $\pi$  decresce ( $\pi \downarrow$ ) e il loro prodotto rimane fisso in

$$n\pi = \lambda > 0$$

allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} X \sim \text{Pois}(\lambda)$ .

### 7.3.7 In Sintesi

Se  $X$  è distribuita come una Poisson di parametro  $\lambda$ , allora

Notazione	$X \sim \text{Pois}(\lambda)$
Supporto	$S_X = \{0, 1, 2, \dots\} \equiv \mathbb{N}$
Funzione di probabilità	$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$
Spazio dei parametri	$\lambda \in [0, +\infty) \equiv \mathbb{R}^+$
Valore Atteso	$E(X) = \lambda$
Varianza	$V(X) = \lambda$

**Proprietà riproduttiva:** Siano  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ,  $n$  VC indipendenti, tali che

$$X_i \sim \text{Pois}(\lambda_i)$$

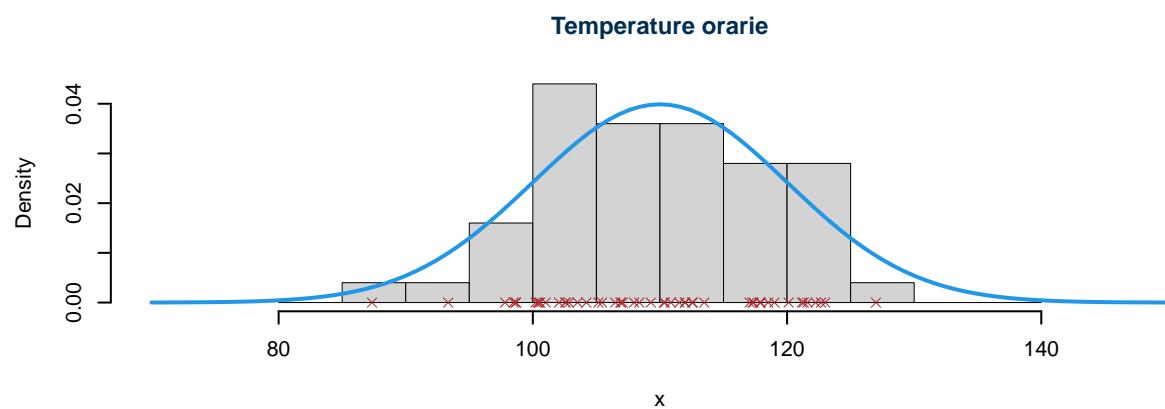
allora

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$$

## 7.4 La VC Normale

### 7.4.1 Obiettivo

L'obiettivo è trovare una variabile casuale che ci consenta di probabilizzare fenomeni simmetrici espressi in forma di misure: Temperatura di un locale, utile netto giornaliero di un negozio, errore commesso nel misurare una distanza, ecc. Sono tutti fenomeni che si esprimono con numeri decimali a volte con una precisione che può essere indefinitamente aumentata (ad esempio il peso, il tempo, la temperatura, ecc.), che possono assumere anche valori negativi



### 7.4.2 Storia

La distribuzione *Normale* fu proposta da Gauss (1809) nell'ambito della teoria degli errori, ed è stata attribuita anche a Laplace (1812), che ne definì le proprietà principali in anticipo rispetto alla trattazione più completa fatta da Gauss.

Nata in ambito fisico, la distribuzione è detta *distribuzione degli errori accidentali* in quanto la distribuzione degli errori commessi nel misurare ripetutamente una stessa grandezza, è molto bene approssimata da questa VC.

$$\text{Misura osservata} = \text{Misura vera} + \text{Errore di misura}$$

e dunque

$$\text{Errore di misura} = \text{Misura osservata} - \text{Misura vera}$$

L'errore di misura è, in tantissimo casi, simmetrico rispetto allo zero:

$$P(\text{Errore di misura} > +\epsilon) = P(\text{Errore di misura} < -\epsilon), \forall \epsilon \geq 0$$

(la probabilità di sovrastimare la misura di una quantità maggiore  $\epsilon$  è uguale alla probabilità di sottostimarla di una minore quantità  $\epsilon$ )

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} P(|\text{Errore di misura}| > \epsilon) = 0$$

### 7.4.3 Il modello

La VC *Normale*,  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  è una distribuzione *continua* con supporto con supporto

$$S_X = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R}$$

Dipende da due parametri  $\mu$  e  $\sigma^2$ . Lo spazio dei parametri è

$$\Theta = \{(-\infty < \mu < +\infty) \cap (\sigma^2 > 0)\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

Con densità di probabilità (non richiesta all'esame)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2},$$

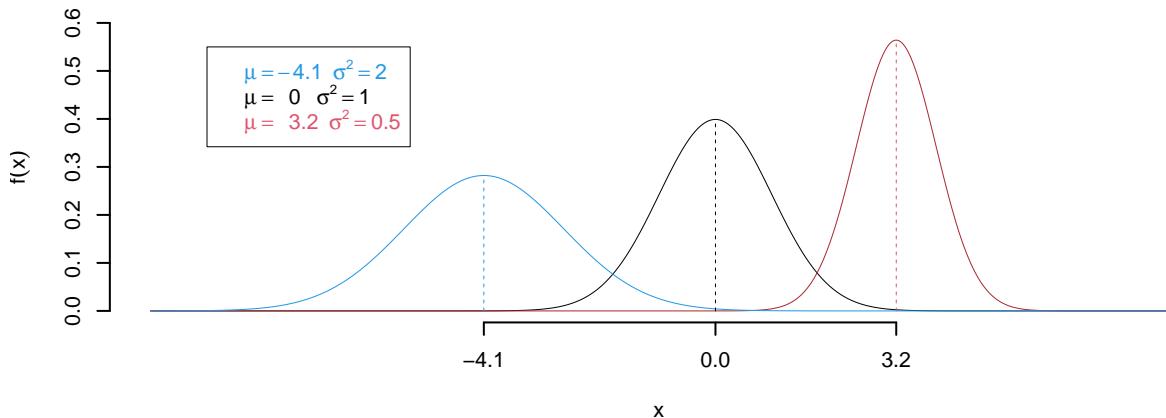
Attenzione, in questo caso  $\pi = 3.1415...$  è la costante trigonometrica. Descrizione:

- ha forma *campanulare*;
- è simmetrica rispetto al parametro  $\mu$ ;
- ha due punti di flesso in  $\mu \pm \sigma$ ;

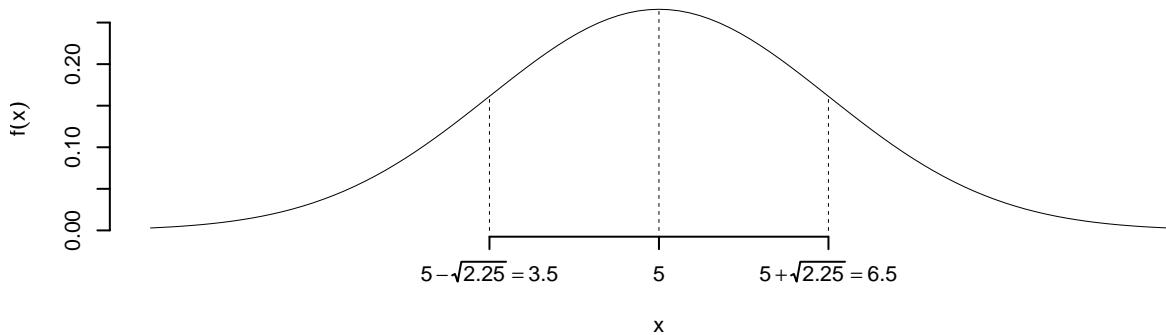
Con valore atteso e varianza:

$$E(X) = \mu, \quad V(X) = \sigma^2$$

### Esempi



Esempio  $X \sim N(5, 2.25)$ , posizione dei flessi



#### 7.4.4 Proprietà della Normale

La normale gode di molte proprietà interessanti, tutte le combinazioni lineari di una normale sono normali e anche la combinazione lineare di normali indipendenti è normale. Più formalmente

**Proprietà 7.4.1 (Proprietà della Normale).** *Le principali proprietà dell'normale sono*

1. *Sia  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , posto*

$$Y = a + bX, \quad a \ e \ b \ \text{due numeri reali qualunque}$$

*allora*

$$Y \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$$

2. *Siano  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ,  $n$  VC indipendenti, tali che*

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$$

posto

$$Y = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$$

dove  $a_1, \dots, a_n$  sono  $n$  numeri reali qualunque, allora

$$Y \sim N(a_1 \mu_1 + \dots + a_n \mu_n, a_1^2 \sigma_1^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2)$$

Il punto 1. ci dice che ogni normale è legata ad un'altra, infatti se  $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$  e  $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ , allora

$$\mu_Y + \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot (X - \mu_X) \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

Il punto 2. ci dice che la combinazione lineare di normali indipendenti è normale, con media e varianza che si combinano secondo le regole di media e varianza.

**Casi speciali per  $n = 2$**

Se  $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  e  $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  allora:

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$



### Attenzione

#### Attenzione

$$X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

**Esempio 7.4.1.** Sia  $X_1 \sim N(2.1, 3.4)$  e  $X_2 \sim N(5.2, 2.7)$ , allora

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &\sim N(2.1 + 5.2 = 7.3, 3.4 + 2.7 = 6.1) \\ X_1 - X_2 &\sim N(2.1 - 5.2 = -3.1, 3.4 + 2.7 = 6.1) \end{aligned}$$

### Spiegazione

Dalla proprietà 2. osserviamo che, se  $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  e  $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  posto

$$Y = X_1 - X_2$$

allora

$$Y = (+1)X_1 + (-1)X_2$$

$a_1 = +1, a_2 = -1$  e dunque

$$\begin{aligned} Y &\sim N((+1)\mu_1 + (-1)\mu_2, (+1)^2 \sigma_1^2 + (-1)^2 \sigma_2^2) \\ &\sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \end{aligned}$$

Nella differenza di due normali le medie si **sottraggono** le varianze si **sommano**.

### 7.4.5 La normale standard

Si definisce la *Normale Standard* la normale con parametri  $\mu = 0$  e  $\sigma^2 = 1$ . Viene indicata con la lettera  $Z$ ,  $Z \sim N(0, 1)$ .

Dalla proprietà 1. si osserva che se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , posto

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = -\frac{\mu}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}X$$

allora

$$E(Z) = -\frac{\mu}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}E(X) = -\frac{\mu}{\sigma} + \frac{\mu}{\sigma} = 0$$

e

$$V(Z) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 V(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

Sia  $Z \sim N(0, 1)$ , siano  $\mu$  e  $\sigma^2 > 0$  due numeri qualunque, posto

$$X = \mu + \sigma Z$$

allora

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

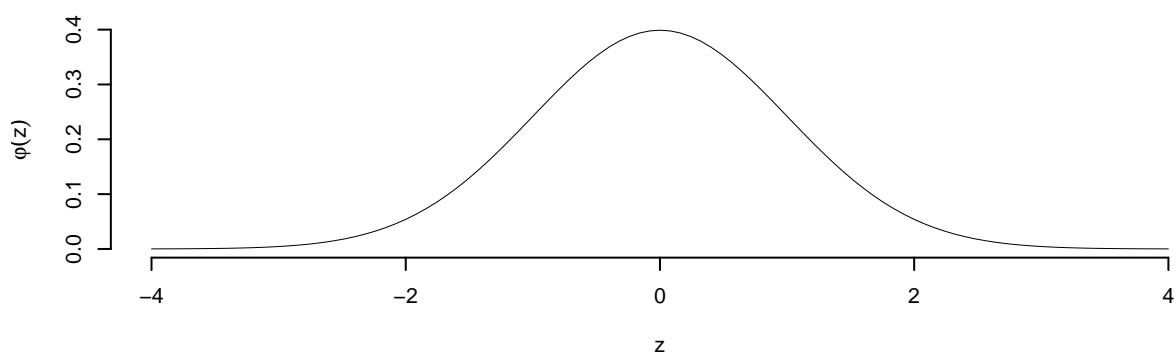
Quindi tutte le normali sono legate tra di loro, in particolare sono tutte legate alla Normale Standard.

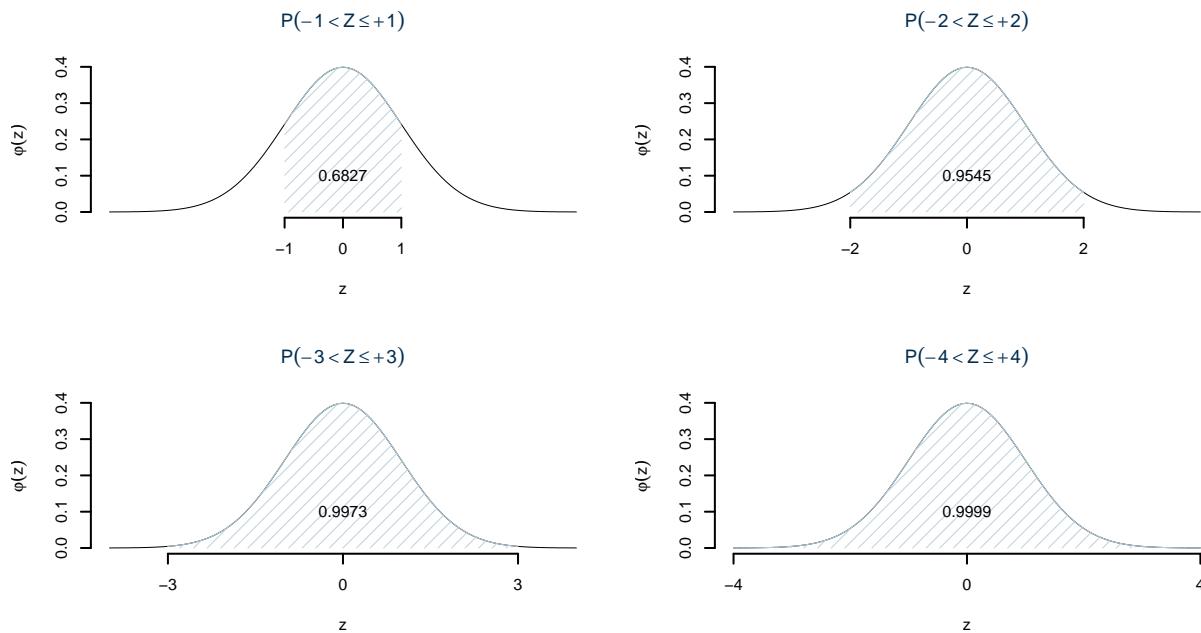
La normale standard ha densità di probabilità chiama  $\phi$  (da non richiesta all'esame)

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

È una funzione simmetrica intorno a zero e dunque:

$$\phi(-z) = \phi(z)$$



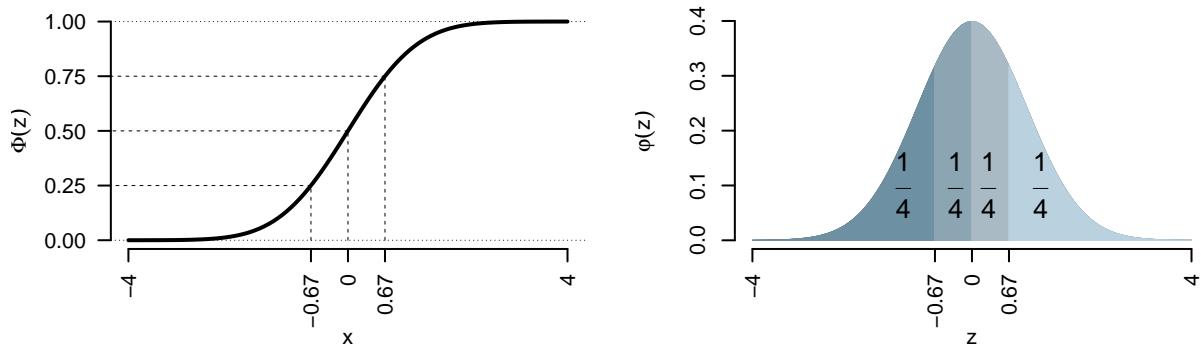


#### 7.4.6 La Funzione di Ripartizione della Normale Standard

Si definisce  $\Phi$  la funzione di ripartizione della normale standard,  $Z \sim N(0, 1)$

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \phi(t) dt$$

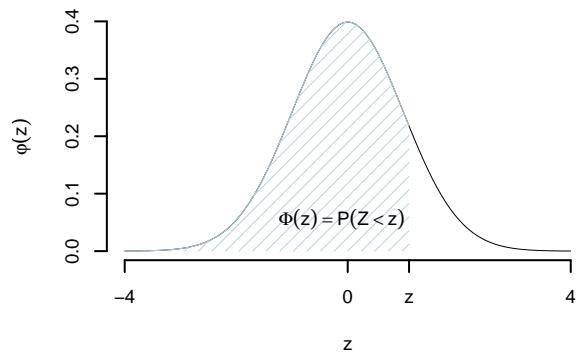
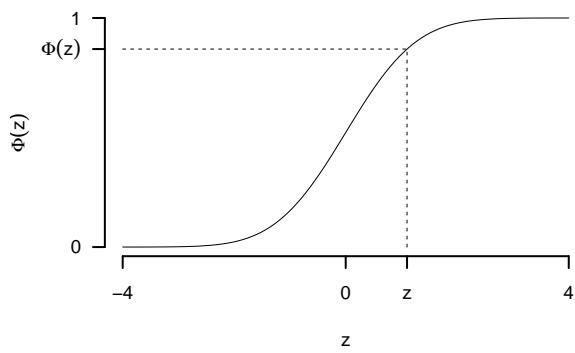
Rappresenta la probabilità che la variabile  $Z$  assuma un valore minore o uguale a  $z$



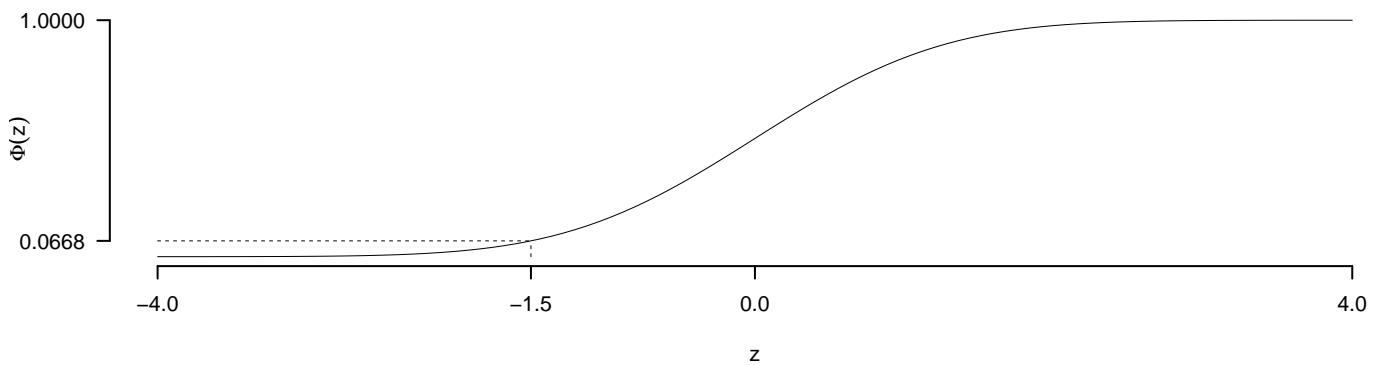
Osserviamo che

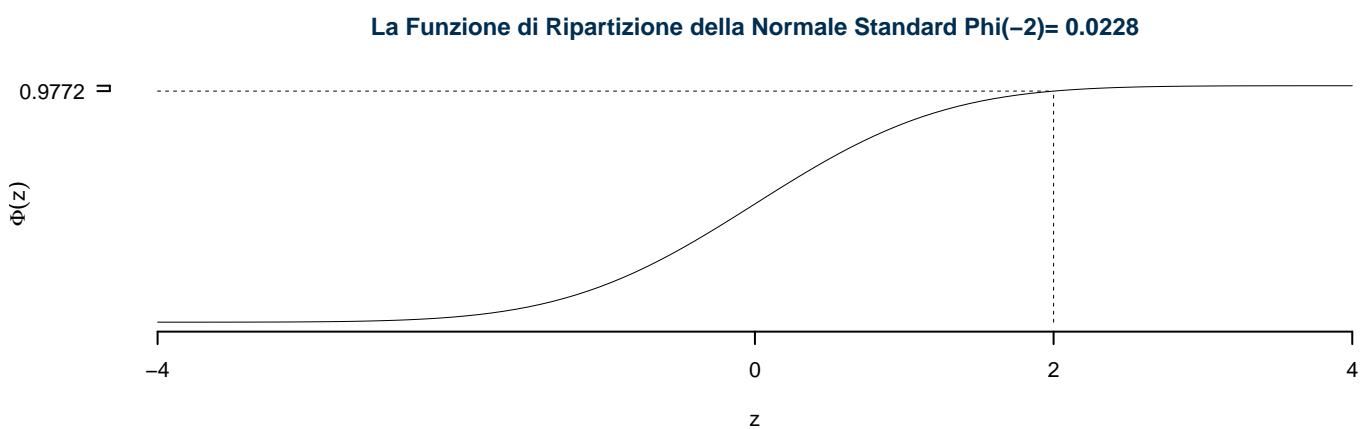
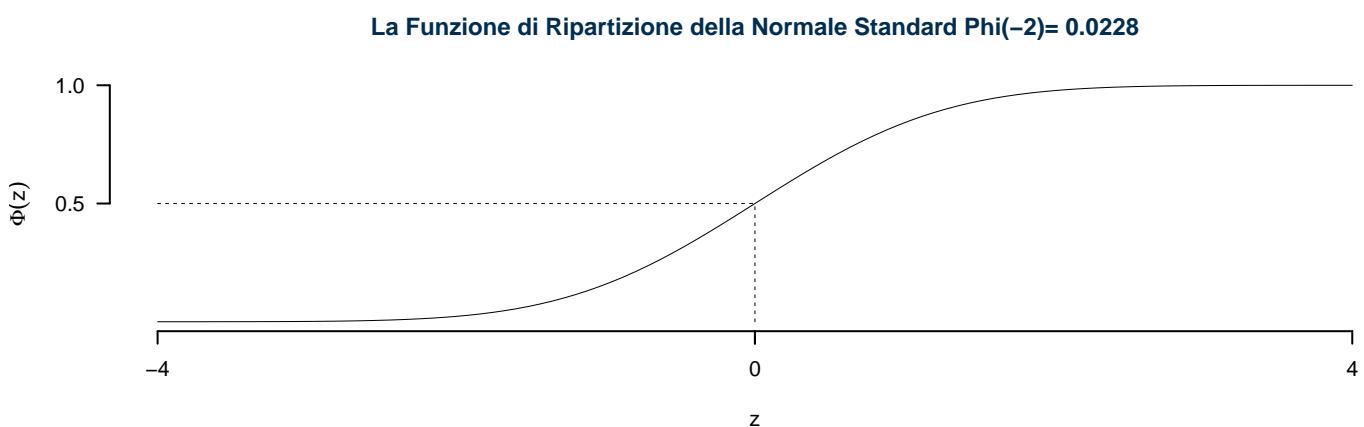
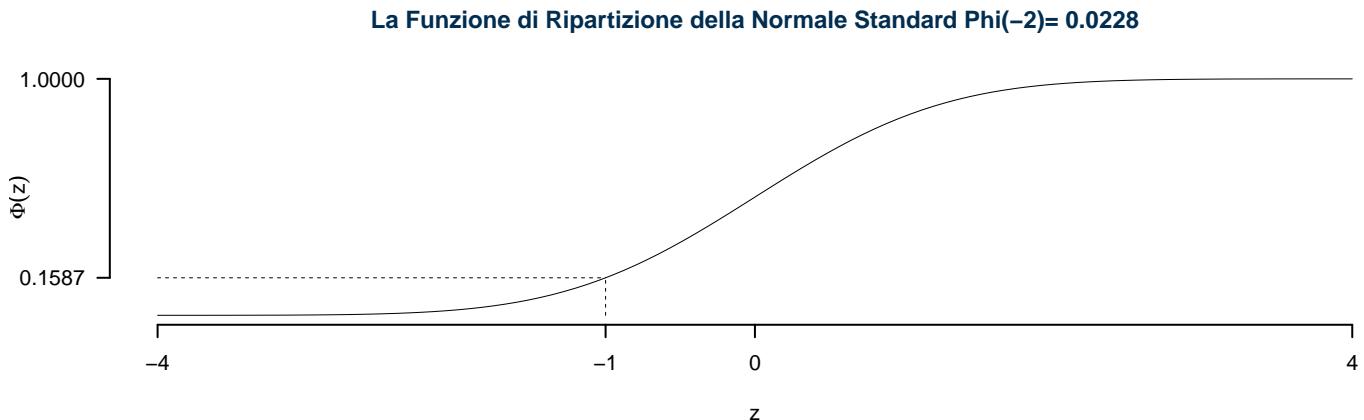
$$\begin{aligned}\Phi(0) &= \frac{1}{2} \\ \Phi(z) &= 1 - \Phi(-z)\end{aligned}$$

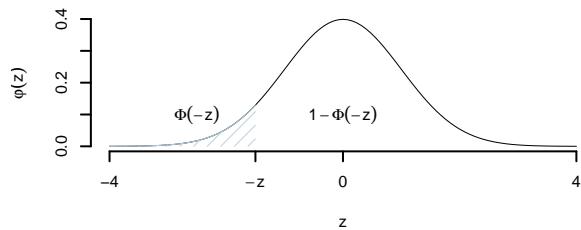
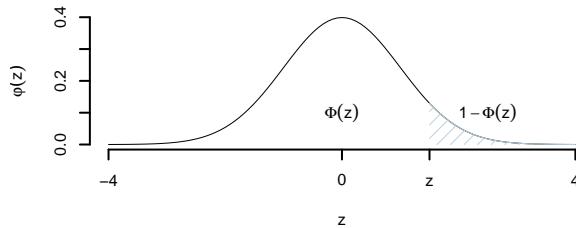
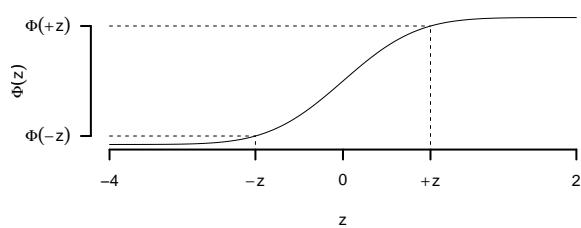
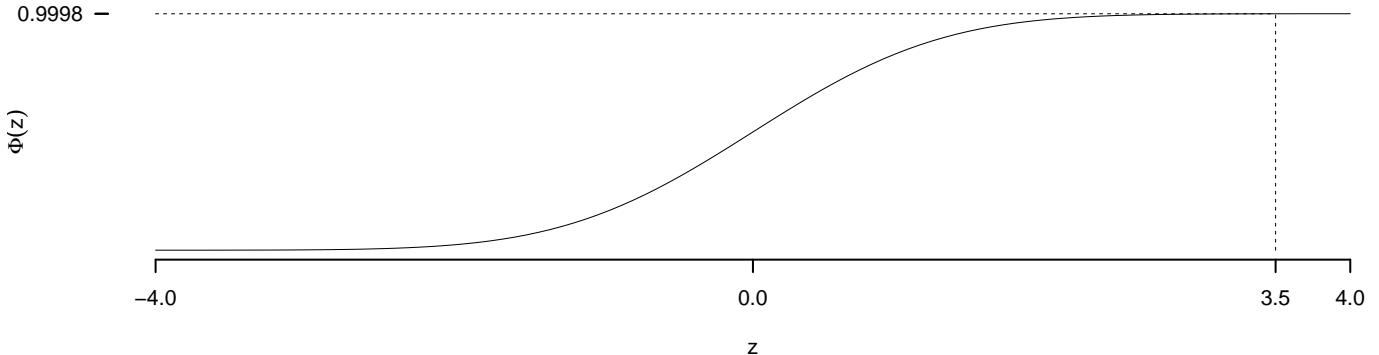
### La Funzione di Ripartizione della Normale Standard



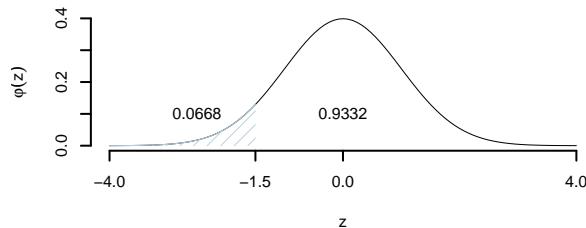
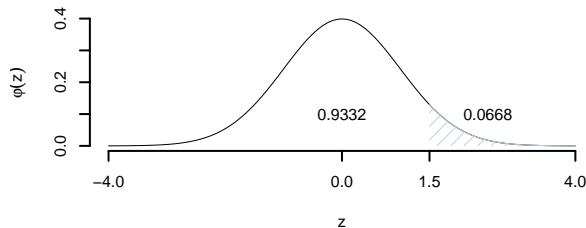
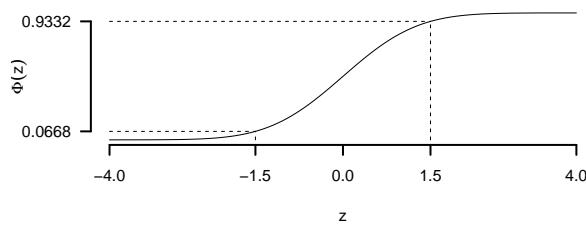
### La Funzione di Ripartizione della Normale Standard $\Phi(-2) = 0.0228$



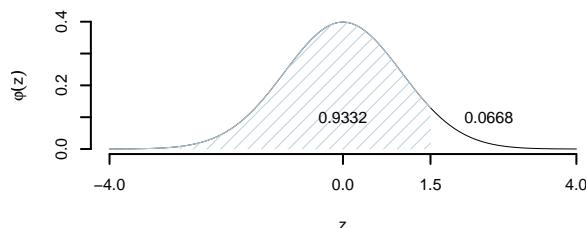
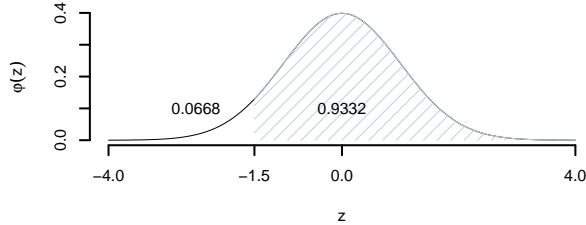
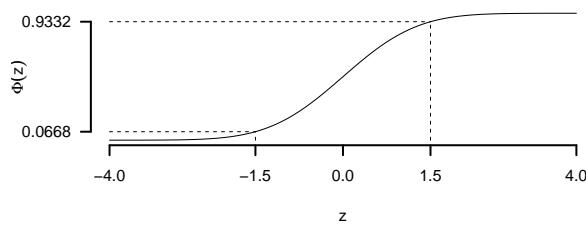


La Funzione di Ripartizione della Normale Standard  $\Phi(-2) = 0.0228$ 

Esempio  $z = -1.5$ ,  $\Phi(-1.5) = 1 - \Phi(+1.5) = 0.0668$



Esempio  $z = +1.5$ ,  $\Phi(+1.5) = 1 - \Phi(-1.5) = 0.9332$

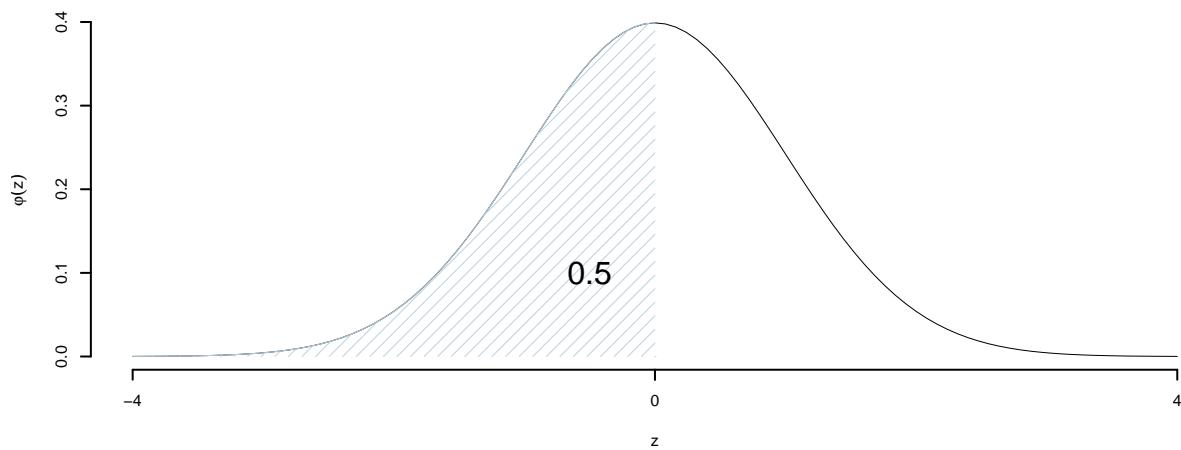


#### 7.4.7 La tavole Statistiche della $Z$

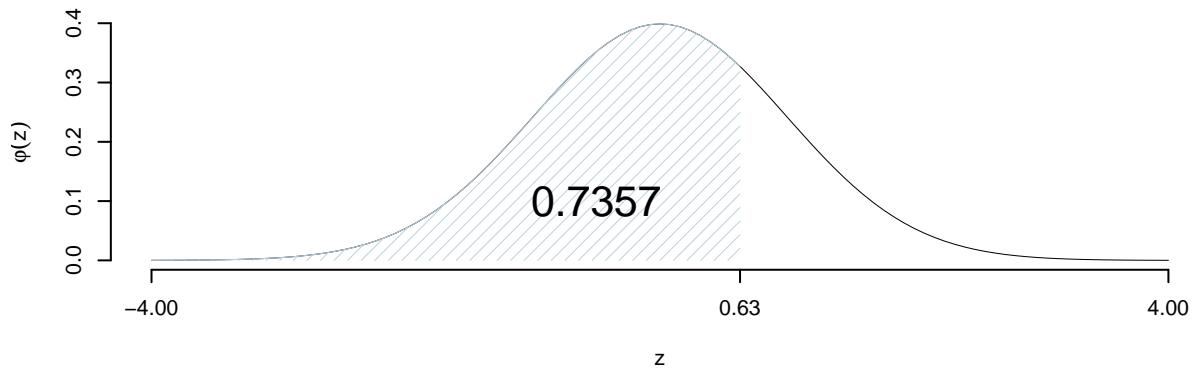
La VC normale standard  $Z \sim N(0, 1)$  è tabulata nelle tavole statistiche. La tabulazione calcola  $\Phi(z)$  per  $z = 0.00, 0.01, 0.02, \dots, 4.08, 4.09$ . I valori negativi non sono tabulati ma si ricavano dalle proprietà di simmetria della normale. Le tavole si presentano come una matrice dimensione  $40 \times 10$ . Le righe rappresentano gli interi e i decimi di  $z$ , le colonne i centesimi.

Esempi:

$$\Phi(0) = \frac{1}{2} = 0.5$$

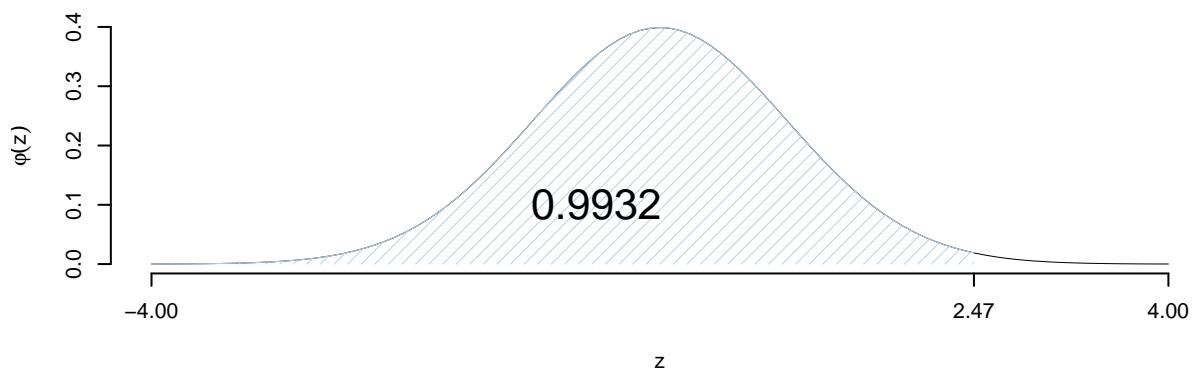


Esempio  $\Phi(0.63) = 0.7357$



Esempi  $\Phi(2.47) = 0.9932$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
continua	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	<b>0.9850</b>	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	<b>0.9884</b>	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	<b>0.9911</b>	0.9913	0.9916
<b>2.4</b>	<b>0.9918</b>	<b>0.9920</b>	<b>0.9922</b>	<b>0.9925</b>	<b>0.9927</b>	<b>0.9929</b>	<b>0.9931</b>	<b>0.9932</b>	<b>0.9934</b>	<b>0.9936</b>
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	<b>0.9949</b>	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	<b>0.9962</b>	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	<b>0.9972</b>	0.9973	0.9974
continua	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...



### 7.4.7.1 Uso delle tavole se $z < 0$

Siccome

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

allora

$$\Phi(z) = \begin{cases} \text{se } z \geq 0, & \Phi(z), \text{ da leggere direttamente dalle tavole} \\ \text{se } z < 0, & 1 - \Phi(+|z|) \end{cases}$$

**Esempio 7.4.2.** Calcolare  $P(Z \leq 1.12)$ :  $1.12 \geq 0$  e quindi dalle tavole

$$P(Z \leq 1.12) = \Phi(1.12) = 0.8686$$

**Esempio 7.4.3.** Calcolare  $P(Z \leq -1.12)$ :  $-1.12 < 0$  e quindi

$$P(Z \leq -1.12) = \Phi(-1.12) = 1 - \Phi(+1.12) = 0.1314$$

### 7.4.7.2 Calcolo di $P(Z > z)$

Ricordiamo che per definizione

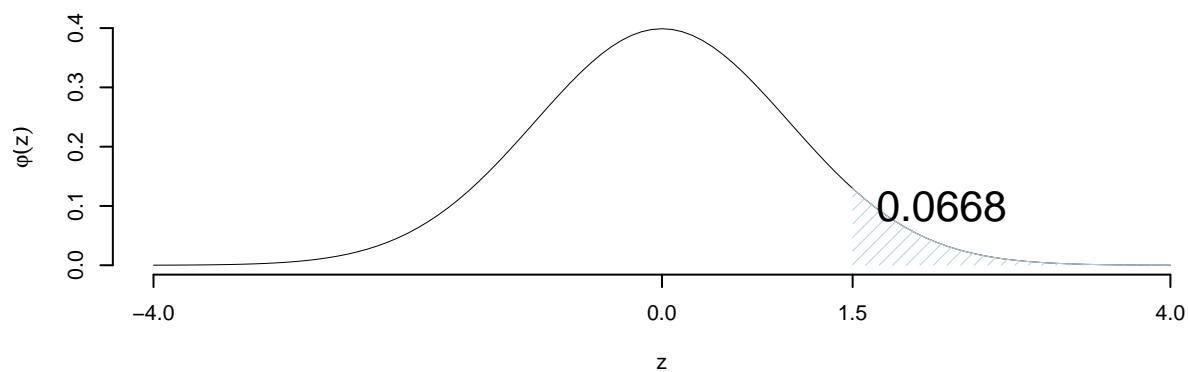
$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

Siccome il complementare di  $\{Z \leq z\}$  è  $\{Z > z\}$ , dalle proprietà della probabilità abbiamo

$$P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - \Phi(z)$$

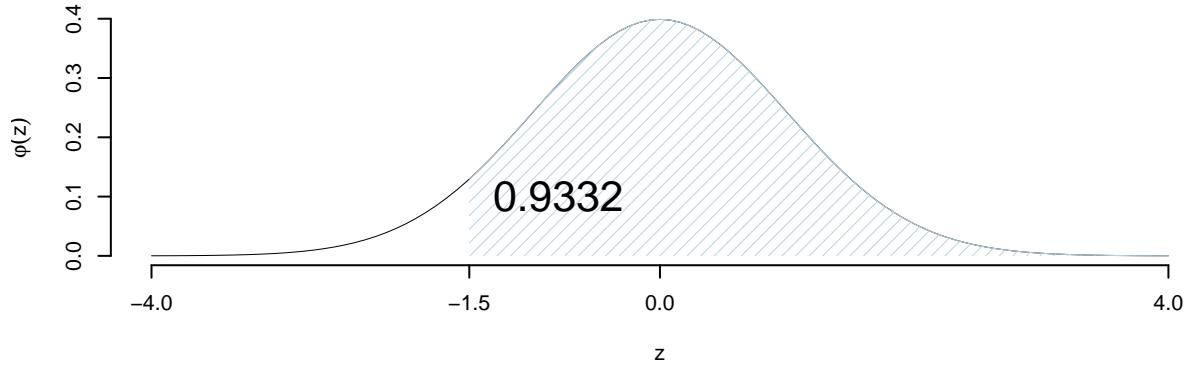
**Esempio 7.4.4.** calcolare la probabilità che  $Z$  si maggiore di 1.5

$$P(Z > 1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$



**Esempio 7.4.5.** Calcolare la probabilità che  $Z$  si maggiore di -1.5

$$P(Z > -1.5) = 1 - \Phi(-1.5) = 1 - (1 - \Phi(+1.5)) = \Phi(+1.5) = 0.9332$$



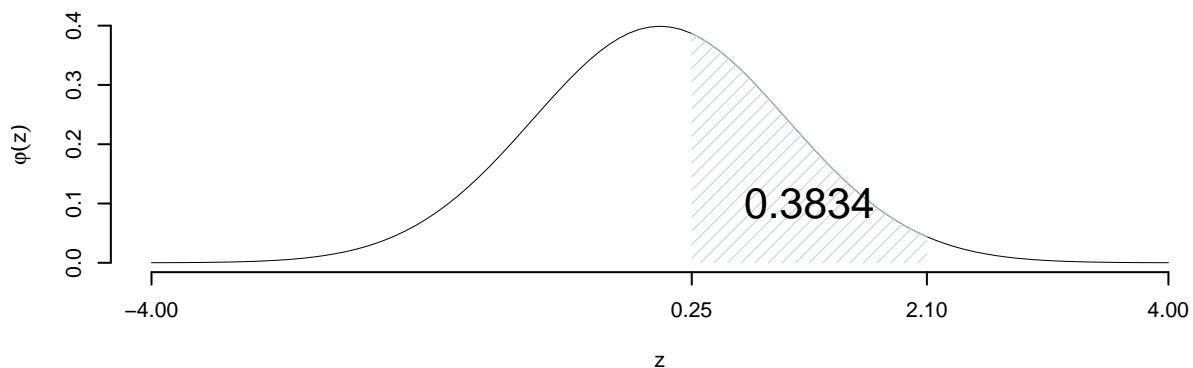
#### 7.4.7.3 Calcolo della probabilità di intervalli

Obiettivo: calcolare la probabilità che  $Z$  si avveri nell'intervallo  $(z_1, z_2]$ . Dalle proprietà della funzione di ripartizione abbiamo

$$P(z_1 < Z \leq z_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$

**Esempio 7.4.6.** Calcolare la probabilità che  $Z$  si avveri tra 0.25 e 2.1

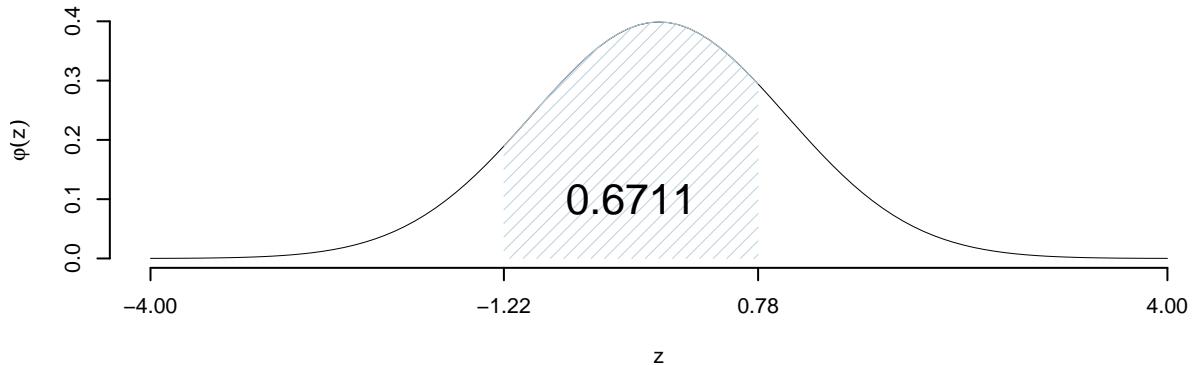
$$P(0.25 < Z \leq 2.1) = \Phi(2.1) - \Phi(0.25) = 0.9821 - 0.5987 = 0.3834$$



**Esempio 7.4.7.** Calcolare la probabilità che  $Z$  si avveri tra -1.22 e 0.78

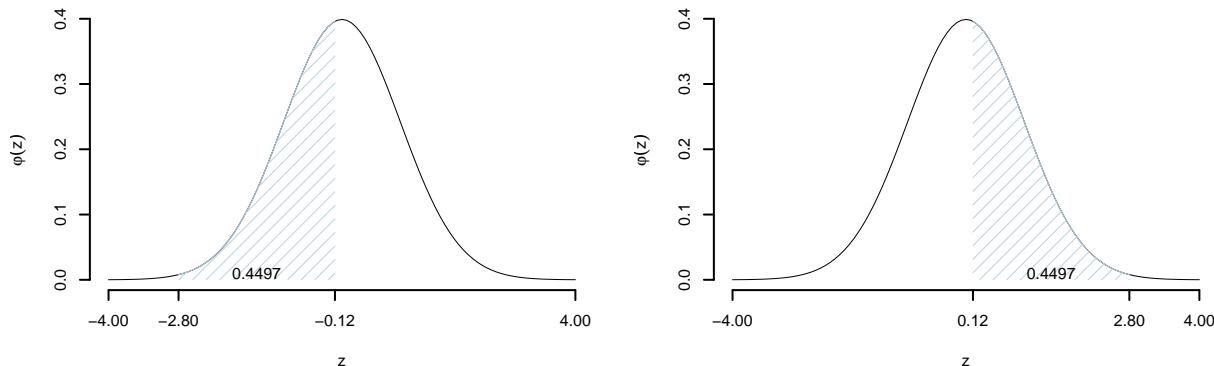
$$P(-1.22 < Z \leq 0.78) = \Phi(0.78) - \Phi(-1.22)$$

$$\begin{aligned}
 &= \Phi(0.78) - (1 - \Phi(+1.22)) \\
 &= 0.7823 - (1 - 0.8888) \\
 &= 0.6711
 \end{aligned}$$



**Esempio 7.4.8.** Calcolare la probabilità che  $Z$  si avveri tra  $-2.8$  e  $-0.12$

$$\begin{aligned}
 P(-2.8 < Z \leq -0.12) &= \Phi(-0.12) - \Phi(-2.8) \\
 &= (1 - \Phi(+0.12)) - (1 - \Phi(+2.8)) \\
 &= \Phi(+2.8) - \Phi(+0.12) \\
 &= 0.4497
 \end{aligned}$$



#### 7.4.7.4 Calcolo su una normale qualunque $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Sia data  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , obiettivo calcolare

$$P(x_1 < X \leq x_2)$$

dove  $x_1$  e  $x_2$  sono due numeri reali qualunque.

Ricordiamo che

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, \quad Z \sim N(0, 1)$$

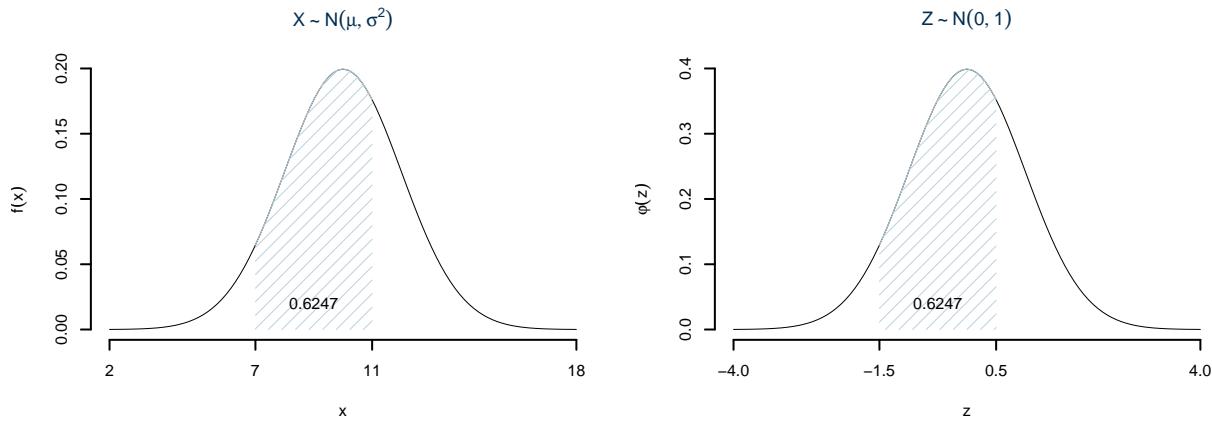
E dunque

$$\begin{aligned} P(x_1 < X \leq x_2) &= P\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P(z_1 < Z \leq z_2) \end{aligned}$$

dove  $z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$  e  $z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$

**Esempio 7.4.9.** Sia  $X \sim N(10, 4)$ , calcolare la probabilità che  $7 < X \leq 11$

$$\begin{aligned} P(7 < X \leq 11) &= P\left(\frac{7 - 10}{\sqrt{4}} < \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{11 - 10}{\sqrt{4}}\right) \\ &= P(-1.5 < Z \leq 0.5) \\ &= \Phi(0.5) - \Phi(-1.5) \\ &= \Phi(0.5) - (1 - \Phi(1.5)) \\ &= 0.6915 - (1 - 0.9332) \\ &= 0.6247 \end{aligned}$$



Questa applicazione esemplifica l'uso delle tavole e risolve ogni tipo intervallo: Normale

### Osservazione

Abbiamo detto che per definizione la Funzione di Ripartizione di una VC  $X$  è:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Nelle funzioni di ripartizione di VC *continue*, e quindi anche per la normale, accade che

$$P(X \leq x) \geq 0$$

ma

$$P(X = x) = 0$$

e quindi, se  $X$  è VC continua

$$P(X \leq x) = P(X < x)$$

e analogamente

$$P(X \geq x) = P(X > x)$$

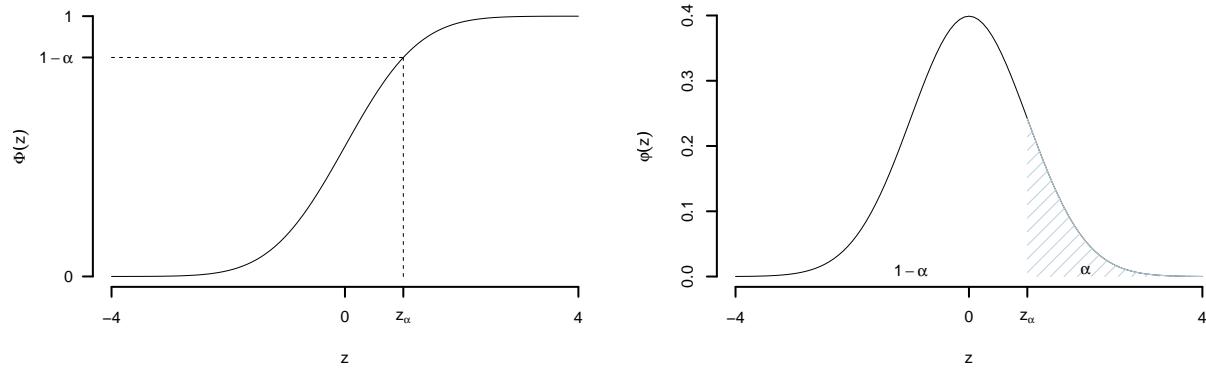
Se  $X$  è VC continua

$$P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X < x_2)$$

#### 7.4.7.5 Il problema inverso

Obiettivo: data  $Z \sim N(0, 1)$ , sia  $0 < \alpha < 1$  un numero fissato, si cerca qual valore  $z_\alpha$  tale che:

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha$$



**Esempio 7.4.10.** Per  $\alpha$  qualunque. Sia  $\alpha = 0.15$  cerchiamo quel valore  $z_{0.15}$  tale che

$$P(Z > z_{0.15}) = 0.15$$

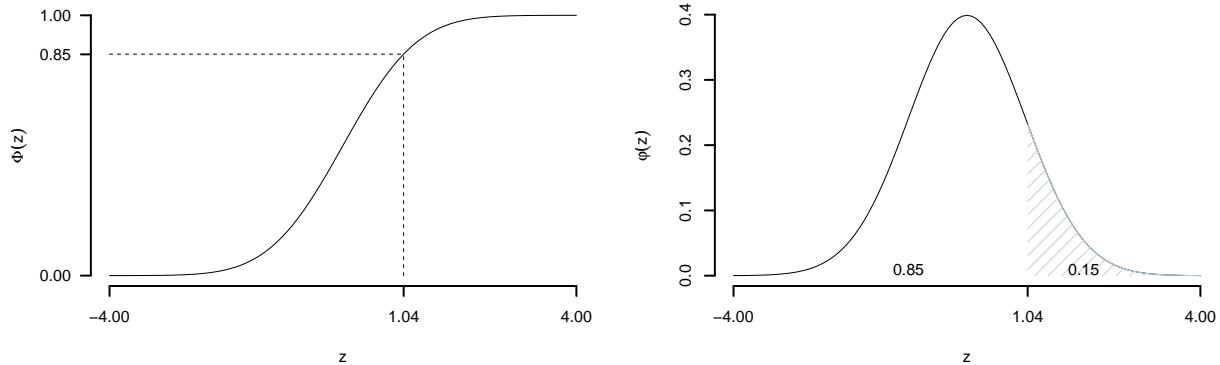
Dalla regola del complemento otteniamo

$$P(Z \leq z_{0.15}) = 1 - 0.15 = 0.85$$

Cerchiamo nelle tavole della normale quale valore di  $z$  si avvicina di più a 0.85

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
continua	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
<b>1.0</b>	<b>0.8413</b>	<b>0.8438</b>	<b>0.8461</b>	<b>0.8485</b>	<b>0.8508</b>	<b>0.8531</b>	<b>0.8554</b>	<b>0.8577</b>	<b>0.8599</b>	<b>0.8621</b>
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
continua	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

e dunque  $z_{0.15} \approx 1.04$



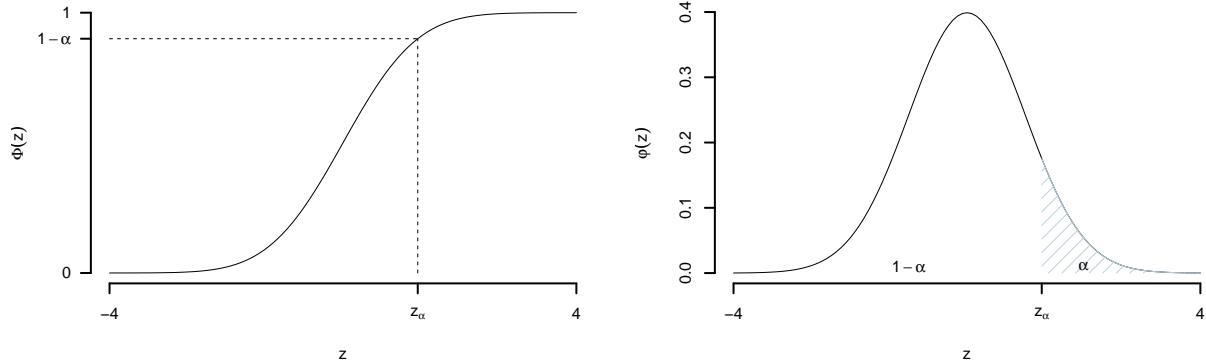
#### 7.4.7.6 Alcuni valori speciali di $\alpha$

Alcuni valori di  $\alpha$  sono di particolare interesse per le future applicazioni questi valori sono

0.5, 0.25, 0.1, 0.05, 0.025, 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005

Per tali valori le tavole della normale vengono arricchite con una tabella supplementare

$\alpha$	0.5	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
$z_\alpha$	0.0000	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902	3.2905
$\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$	0.5	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995



**Esempio 7.4.11.** Se  $\alpha = 0.1$  allora  $z_{0.1} = 1.2816$

$$P(Z > 1.2816) = 0.1, \quad P(Z \leq 1.2816) = 0.9$$

Se  $\alpha = 0.025$  allora  $z_{0.025} = 1.96$

$$P(Z > 1.96) = 0.025, \quad P(Z \leq 1.96) = 0.975$$

### 7.4.8 In Sintesi

Se  $X$  è distribuita come una Normale di parametri  $\mu$  e  $\sigma^2$ , allora

Notazione	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$
Supporto	$S_X = (\infty, +\infty) \equiv \mathbb{R}$
Funzione di probabilità	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$
Spazio dei parametri	$\mu \in (-\infty, +\infty) \equiv \mathbb{R}$ $\sigma^2 \in (0, +\infty) \equiv \mathbb{R}^+$ $(\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$
Valore Atteso	$E(X) = \mu$
Varianza	$V(X) = \sigma^2$

#### Proprietà:

1. Sia  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , posto

$$Y = a + bX, \quad a \text{ e } b \text{ due numeri reali qualunque}$$

allora

$$Y \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$$

2. Siano  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ,  $n$  VC indipendenti, tali che

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$$

posto

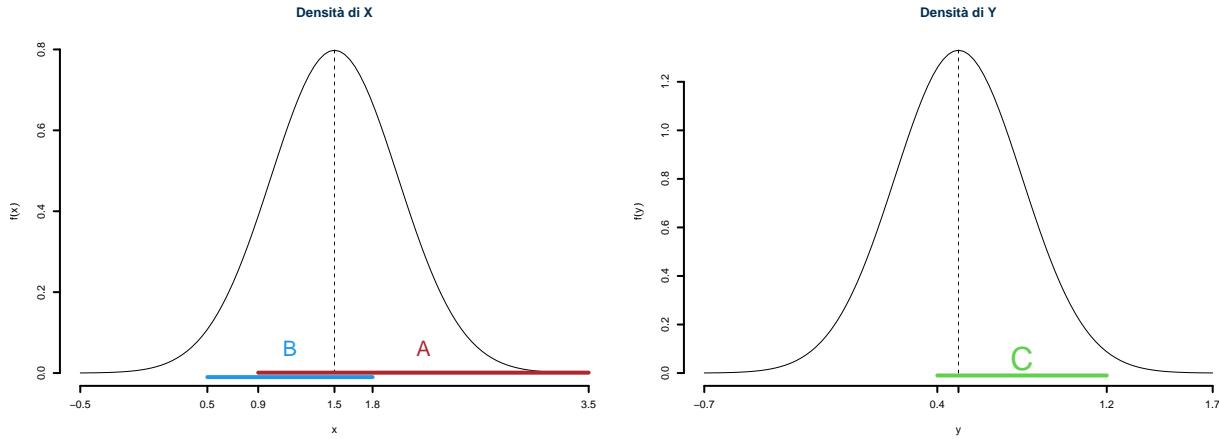
$$Y = a_1X_1 + \dots + a_nX_n$$

dove  $a_1, \dots, a_n$  sono  $n$  numeri reali qualunque, allora

$$Y \sim N(a_1\mu_1 + \dots + a_n\mu_n, a_1^2\sigma_1^2 + \dots + a_n^2\sigma_n^2)$$

### 7.4.9 Esempio

Siano  $X \sim N(1.5, 0.25)$  e sia  $Y \sim N(0.5, 0.09)$ ,  $X$  e  $Y$  **indipendenti**. Si considerino i seguenti insiemi:  $A = \{X > 0.9\}$ ,  $B = \{0.5 < X < 1.8\}$ ,  $C = \{0.4 < Y < 1.2\}$



1. Calcolare  $P(B)$ .

$$\begin{aligned}
 P(0.5 < X \leq 1.8) &= P\left(\frac{0.5 - 1.5}{\sqrt{0.25}} < \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \leq \frac{1.8 - 1.5}{\sqrt{0.25}}\right) \\
 &= P(-2 < Z \leq 0.6) \\
 &= \Phi(0.6) - \Phi(-2) \\
 &= \Phi(0.6) - (1 - \Phi(2)) \\
 &= 0.7257 - (1 - 0.9772) \\
 &= 0.7029
 \end{aligned}$$

2. Calcolare di  $P(A)$ .

$$\begin{aligned}
 P(X > 0.9) &= P\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} > \frac{0.9 - 1.5}{\sqrt{0.25}}\right) \\
 &= P(Z > -1.2) \\
 &= 1 - P(Z < -1.2) \\
 &= 1 - (1 - \Phi(1.2)) \\
 &= 0.8849
 \end{aligned}$$

alternativamente possiamo osservare che

$$A = \{X > 0.9\} = \{0.9 < X \leq +\infty\}$$

$$\begin{aligned}
 P(0.9 < X \leq +\infty) &= P\left(\frac{0.9 - 1.5}{\sqrt{0.25}} < \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \leq \frac{+\infty - 1.5}{\sqrt{0.25}}\right) \\
 &= P(-1.2 < Z \leq +\infty) \\
 &= \Phi(+\infty) - \Phi(-1.2) \\
 &= \Phi(+\infty) - (1 - \Phi(1.2)) \\
 &= 1 - (1 - 0.8849) \\
 &= 0.8849
 \end{aligned}$$

3. Calcolare  $P(C)$ .

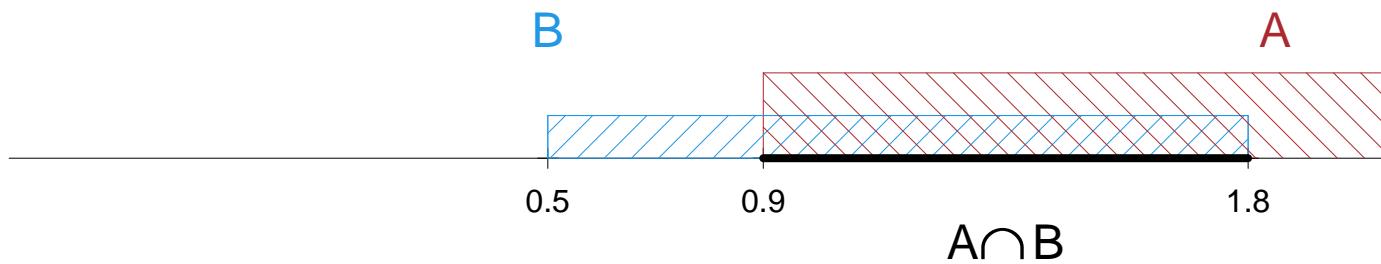
$$\begin{aligned}
 P(0.4 < Y \leq 1.2) &= P\left(\frac{0.4 - 0.5}{\sqrt{0.09}} < \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \leq \frac{1.2 - 0.5}{\sqrt{0.09}}\right) \\
 &= P(-0.33 < Z \leq 2.33) \\
 &= \Phi(2.33) - \Phi(-0.33) \\
 &= \Phi(2.33) - (1 - \Phi(0.33)) \\
 &= 0.9901 - (1 - 0.6293) \\
 &= 0.6194
 \end{aligned}$$

4. Individuare l'insieme  $A \cap B$ .

Osserviamo che

$$A \cap B = \{X > 0.9\} \cap \{0.5 < X < 1.8\} = \{0.9 < X < 1.8\}$$

e quindi  $A \cap B$  è un **intervallo** sulla retta di supporto di  $X$



5. Calcolare  $P(A \cap B)$ .

$$\begin{aligned}
 P(0.9 < X \leq 1.8) &= P\left(\frac{0.9 - 1.5}{\sqrt{0.25}} < \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \leq \frac{1.8 - 1.5}{\sqrt{0.25}}\right) \\
 &= P(-1.2 < Z \leq 0.6) \\
 &= \Phi(0.6) - \Phi(-1.2) \\
 &= \Phi(0.6) - (1 - \Phi(1.2)) \\
 &= 0.7257 - (1 - 0.8849) \\
 &= 0.6106
 \end{aligned}$$

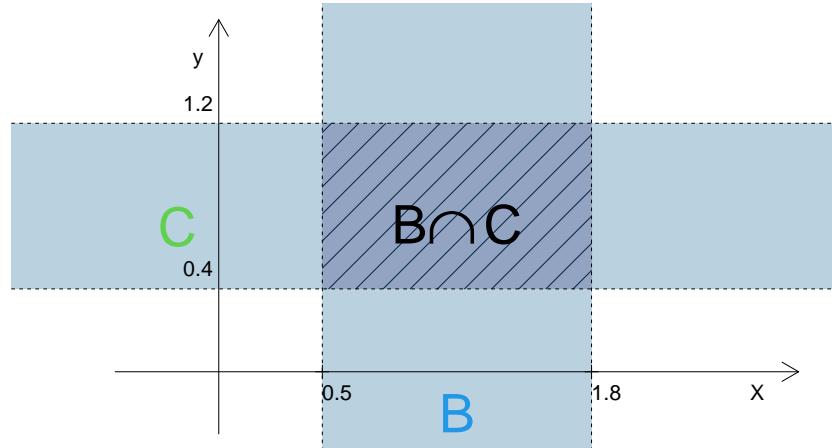
Osservare che  $0.6107 = P(A \cap B) \neq P(A)P(B) = 0.6221$ , il motivo è che  $A$  e  $B$  **non sono eventi indipendenti**, perché sono due insiemi della stessa variabile  $X$ .

6. Individuare l'insieme  $B \cap C$ .

Quando invece osserviamo  $B \cap C$  vediamo che

$$B \cap C = \{0.5 < X < 1.8\} \cap \{0.4 < Y < 1.2\} = \{0.5 < X < 1.8\} \times \{0.4 < Y < 1.2\}$$

e dunque  $B \cap C$  è un **rettangolo** sul piano  $(X, Y)$



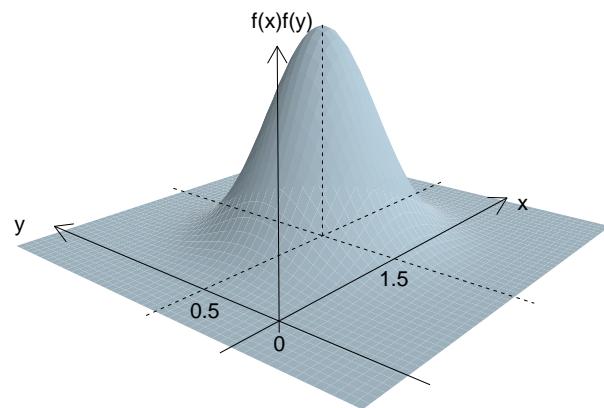
7. Calcolare  $P(B \cap C)$ .

Anzitutto osserviamo che la coppia di VC  $(X, Y)$  vive sul piano e la densità di probabilità è una superficie

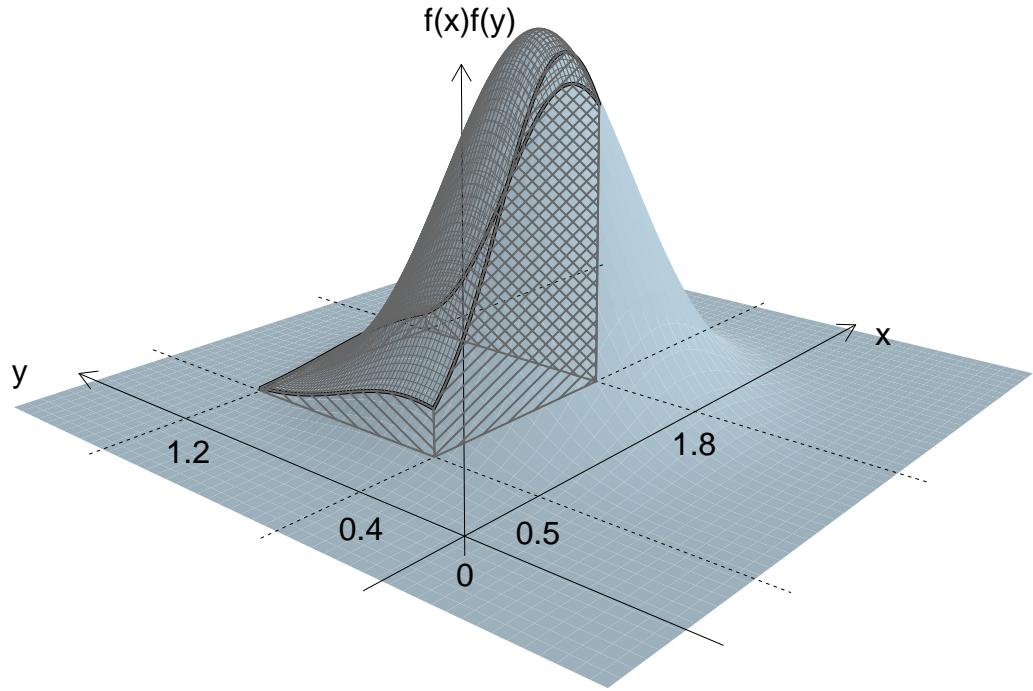
$$f(x, y) = f(x)f(y)$$

dove  $f(x, y)$  è la densità della normale doppia in  $(x, y)$   $f(x)$  è la densità di  $X$  e  $f(y)$  è la densità di  $Y$ .

Dal punto di vista grafico:



Calcolare  $P(B \cap C)$  equivale a calcolare il **volumen** sotteso della densità doppia al rettangolo  $B \cap C$ :



Operativamente basta moltiplicare le due probabilità:

$$P(\{x_1 < X < x_2\} \cap \{y_1 < Y < y_2\}) = P(\{x_1 < X < x_2\})P(\{y_1 < Y < y_2\}), \quad \text{in virtù dell'indipendenza}$$

E dunque:

$$P(B \cap C) = P(B)P(C) = 0.703 \times 0.6207 = 0.4364$$

8. Calcolare di  $P(A \cup B)$ .

Iniziamo osservando che

$$A \cup B = \{X > 0.9\} \cup \{0.5 < X < 1.8\} = \{X > 0.5\}$$

e dunque

$$\begin{aligned} P(X > 0.5) &= P\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} > \frac{0.5 - 1.5}{\sqrt{0.25}}\right) \\ &= P(Z > -2) \\ &= 1 - P(Z < -2) \\ &= 1 - (1 - \Phi(2)) \\ &= 0.9772 \end{aligned}$$

9. Calcolare  $P(B \cup C)$ .

Iniziamo osservando che

$$B \cup C = \{0.5 < X < 1.8\} \cup \{0.4 < Y < 1.2\}$$

e dunque, dalla regola della somma otteniamo:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0.703 + 0.6207 - 0.4364 = 0.8874$$

10. Calcolare  $P(A|B)$ .

Dalla definizione di probabilità condizionata otteniamo:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

e dunque:

$$P(A|B) = \frac{0.6107}{0.703} = 0.8687$$

11. Calcolare  $P(B|C)$ .

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B)P(C)}{P(C)} = P(B) = 0.703$$

Osservazione:  $X$  e  $Y$  sono **indipendenti** e quindi  $B$  e  $C$  sono a loro volta eventi indipendenti: la probabilità che  $B$  sia *vero* non cambia se  $C$  è *vero* o se  $C$  è *falso*.

12. Sia  $W = X + Y$ , calcolare la probabilità che  $W < 1$ .

Dalle proprietà della normale otteniamo che  $W \sim N(1.5 + 0.5, 0.25 + 0.09)$  e dunque

$$\begin{aligned} P(W < 1) &= P\left(\frac{W - \mu_W}{\sigma_W} < \frac{1 - 1.5}{\sqrt{0.34}}\right) \\ &= P(Z < -1.71) \\ &= 1 - \Phi(1.71) \\ &= 0.0436 \end{aligned}$$

13. Sia  $V = X - Y$ , calcolare la probabilità che  $V < 1.2$ .

Dalle proprietà della normale otteniamo che  $V \sim N(1.5 - 0.5, 0.25 + 0.09)$  e dunque

$$\begin{aligned} P(V < 1.2) &= P\left(\frac{V - \mu_V}{\sigma_V} < \frac{1.2 - 1}{\sqrt{0.34}}\right) \\ &= P(Z < 0.34) \\ &= \Phi(0.34) \\ &= 0.6331 \end{aligned}$$

14. Sia  $V = X - Y$ , posto  $A = \{V > 0\}$  e  $B = \{V < 1.2\}$ . Calcolare  $P(A|B)$

L'evento  $A$  è vero se  $V > 0$  e l'evento  $B$  è vero se  $V < 1.2$ . Chiedersi quanto vale  $P(A|B)$  equivale a chiedersi ``è stato estratto un numero casuale  $V$ , non so quanto vale ma so che è minore di 1.2, con quale probabilità è maggiore di zero?''

Dalla definizione di probabilità condizionata

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(\{V > 0\} \cap \{V < 1.2\})}{P(V < 1.2)} \\ &= \frac{P(0 < V < 1.2)}{P(V < 1.2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(0 < V \leq 1.2) &= P\left(\frac{0-1}{\sqrt{0.34}} < \frac{V-\mu_V}{\sigma_V^2} \leq \frac{1.2-1}{\sqrt{0.34}}\right) \\ &= P(-1.71 < Z \leq 0.34) \\ &= \Phi(0.34) - \Phi(-1.71) \\ &= \Phi(0.34) - (1 - \Phi(1.71)) \\ &= 0.6331 - (1 - 0.9564) \\ &= 0.5895 \end{aligned}$$

E quindi

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(0 < V < 1.2)}{P(V < 1.2)} \\ &= \frac{0.5894}{0.6331} \\ &= 0.9311 \end{aligned}$$

14. Sia  $V = X - Y$ , posto  $A = \{V > 0\}$  e  $B = \{V < 1.2\}$ . Calcolare  $P(B|A)$

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(\{V > 0\} \cap \{V < 1.2\})}{P(V > 0)} \\ &= \frac{P(0 < V < 1.2)}{P(V > 0)} \end{aligned}$$

dobbiamo solo calcolare  $P(V > 0)$

$$\begin{aligned}
 P(V > 0) &= P\left(\frac{V - \mu_V}{\sigma^2} > \frac{0 - 1}{\sqrt{0.34}}\right) \\
 &= P(Z > -1.71) \\
 &= 1 - P(Z < -1.71) \\
 &= 1 - (1 - \Phi(1.71)) \\
 &= 0.9564
 \end{aligned}$$

E quindi

$$\begin{aligned}
 P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\
 &= \frac{0.5894}{0.9564} \\
 &= 0.6163
 \end{aligned}$$

# Il Teorema del Limite Centrale

# 8

## 8.1 Successioni di VC

Una successione di variabili casuali è espressa da un numero infinito di variabili casuali  $\{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$ .

**Esempio 8.1.1.** Sia

$$\begin{aligned} X_1 &\sim N(0, 1) \\ X_2 &\sim N\left(0, \frac{1}{2}\right) \\ X_3 &\sim N\left(0, \frac{1}{3}\right) \\ &\dots \\ X_n &\sim N\left(0, \frac{1}{n}\right) \\ &\dots \end{aligned}$$

**Esempio 8.1.2.** Sia

$$\begin{aligned} X_1 &\sim \text{Binom}(1, \pi) \\ X_2 &\sim \text{Binom}(2, \pi) \\ &\dots \\ X_n &\sim \text{Binom}(n, \pi) \\ &\dots \end{aligned}$$

Siamo interessati a sapere se la successione converge ad una VC  $X$ . Ma essendo VC e non numeri il concetto di convergenza è più complesso. Esistono diversi tipi di convergenza e non entreremo nella trattazione sistematica del tema. Mostreremo solo le convergenze che ci interessano per sviluppare il resto della teoria.

**Definizione 8.1.1 (Convergenza in Distribuzione).** Si dice che la successione  $\{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$  converge in distribuzione alla VC  $X$  se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x), \quad \forall x \in S_X$$

dove  $F_n$  e  $F$  rappresentano la funzione di ripartizione di  $X_n$  e di  $X$ , rispettivamente. E si scrive

$$X_n \xrightarrow{d} X$$

**Definizione 8.1.2 (Convergenza in Probabilità).** Si dice che la successione  $\{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$  converge in probabilità alla VC  $X$  se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$$

e si scrive

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

**Definizione 8.1.3** (Convergenza in Media Quadratica). Si dice che la successione  $\{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$  converge in media quadratica alla VC  $X$  se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E((X_n - X)^2) = 0$$

e si scrive

$$X_n \xrightarrow{L^2} X$$

## 8.2 Somme e Medie di VC

Siano  $X_1, \dots, X_n$   $n$  VC IID, tali che  $E(X_i) = \mu$  e  $V(X_i) = \sigma^2$ . Chiamiamo  $S_n$  la somma delle  $X_i$

$$S_n = X_1 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

Dalle proprietà del valore atteso e della varianza otteniamo

$$\begin{aligned} E(S_n) &= E(X_1 + \dots + X_n) \\ &= E(X_1) + \dots + E(X_n) \\ &= \mu + \dots + \mu \\ &= n\mu \\ V(S_n) &= V(X_1 + \dots + X_n) \\ &= V(X_1) + \dots + V(X_n) \\ &= \sigma^2 + \dots + \sigma^2 \\ &= n\sigma^2 \end{aligned}$$

Chiamiamo  $\bar{X}$  la media delle  $X_i$

$$\bar{X} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Dalle proprietà del valore atteso e della varianza otteniamo

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= E\left(\frac{S_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} E(S_n) \\ &= \mu \\ V(\bar{X}) &= V\left(\frac{S_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2} V(S_n) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

**Attenzione**

Le VC  $X_1, \dots, X_n$  sono VC qualunque non necessariamente normali, il fatto che chiamiamo  $E(X_i) = \mu$  e  $V(X_i) = \sigma^2$  è solo una convenzione e non deve fare pensare ai parametri della normale.

**Teorema 8.2.1 (Legge dei Grandi Numeri).** *Siano  $X_1, \dots, X_n$  n VC IID, tali che  $E(X_i) = \mu$  e  $V(X_i) = \sigma^2$ . Posto*

$$\bar{X} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

*allora  $\bar{X}$  converge in media quadratica alla VC  $X$  che assume il valore  $\mu$  con probabilità 1.*

*Dimostrazione.* Dalla definizione di convergenza in media quadratica, dobbiamo studiare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E((\bar{X} - X)^2)$$

Siccome  $X$  è tale che  $P(X = \mu) = 1$  allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E((\bar{X} - \mu)^2)$$

ma essendo  $E((\bar{X} - \mu)^2) = V(\bar{X}) = \sigma^2/n$  otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$$

□

Quindi la media di VC converge alla media dell'urna se il numero di VC aumenta all'infinito. Ma mentre converge al punto della media, cosa succede? A questa domanda rispondono i teoremi centrali del limite.

### 8.3 Teoremi del Limite Centrale

I *Teoremi del Limite Centrale* (TLC), central limit theorems, sono una famiglia di teoremi sul limite delle somme di VC. Occupano un posto centrale nella teoria della probabilità e dell'inferenza statistica. Esistono molti enunciati a seconda delle ipotesi di partenza. La potenza del teorema è che, non importa quale sia la distribuzione di partenza delle  $X_i$ , la loro somma, per  $n$  abbastanza grande, è approssimabile con una distribuzione normale. In questo corso mostriamo il teorema più noto e lo decliniamo in tre casi particolari.

**Teorema 8.3.1 (TLC per la Somma).** *Siano  $X_1, \dots, X_n$ , n Variabili Casuali (VC) Indipendenti e Identicamente Distribuite (IID), tali che  $E(X_i) = \mu$ ,  $V(X_i) = \sigma^2$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Posto*

$$S_n = X_1 + \dots + X_n,$$

*allora*

$$S_n \underset{a}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$$

Il TLC per la somma asserisce che la somma di VC IID, se il numero di addendi è sufficientemente grande, si può approssimare con una normale semplificando notevolmente il calcolo.

Siccome una media non è altro che una somma diviso  $n$ , valore atteso e varianza le abbiamo già ricavate, otteniamo

**Teorema 8.3.2 (TLC per la Media).** *Siano  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n$  Variabili Casuali (VC) Indipendenti e Identicamente Distribuite (IID), tali che  $E(X_i) = \mu$ ,  $V(X_i) = \sigma^2$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Posto*

$$\bar{X} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n},$$

allora

$$\bar{X} \underset{a}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Il TLC per la media asserisce che la media di VC IID, se il numero di elementi che la contengono è sufficientemente grande, si può approssimare con una normale semplificando notevolmente il calcolo. La varianza di questa normale  $\sigma^2/n$  va a zero per  $n$  che diverge, e ci riporta alla legge dei grandi numeri.

Se consideriamo le  $X_i$  tutte Bernoulli di parametro  $\pi$  sappiamo che  $E(X_i) = \pi$  e  $V(X_i) = \pi(1-\pi)$ . Dedichiamo alla media di Bernoulli un simbolo speciale che sarà più chiaro più avanti.

$$\hat{\pi} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

sostituendo valore atteso e varianza nel TLC della media otteniamo:

**Teorema 8.3.3 (TLC per la Proporzione).** *Siano  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n$  Variabili Casuali (VC) Indipendenti e Identicamente Distribuite (IID), tali che  $X_i \sim \text{Ber}(\pi)$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Posto*

$$\hat{\pi} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n},$$

allora

$$\hat{\pi} \underset{a}{\sim} N\left(\pi, \frac{\pi(1-\pi)}{n}\right)$$

Il TLC per la proporzione è sempre il TLC per la media ma per VC di Bernoulli. Ci dice che la proporzione osservata su un campione di  $n$  VC di Bernoulli è normale con media  $\pi$  e varianza che va a zero con  $n$  che diverge.

### Nota

La notazione  $\sim_a$  non è una notazione standard ma è diventata una prassi con i miei studenti per semplificare la notazione completa che sarebbe più elaborata. Per esempio nel caso del TLC della somma anziché scrivere

$$S_n \underset{a}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$$

avremmo dovuto scrivere

$$S_n \xrightarrow{d} X, \quad X \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

che complica troppo la trattazione.

### 8.3.1 Esempio Somma

Siano  $X_1, X_2, \dots, X_n$  n VC IID con supporto  $S_X = \{-1, 0, +1\}$  e con funzione di probabilità

$$\begin{cases} P(X = -1) = \frac{1}{3} \\ P(X = 0) = \frac{1}{3} \\ P(X = +1) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Consideriamo

$$S_2 = X_1 + X_2$$

il supporto di  $S_2$  sarà

$$S_{S_2} = \{-2, -1, 0, +1, +2\}$$

$S_2 = -2$  se sia  $X_1 = -1$  e  $X_2 = -1$ ,  $S_2 = -1$  se sia  $X_1 + X_2 = -1$  ecc. mettiamo in tabella

	-1;	1/3	0;	1/3	1;	1/3
-1; 1/3	-2;	1/9	-1;	1/9	0;	1/9
0; 1/3	-1;	1/9	0;	1/9	1;	1/9
1; 1/3	0;	1/9	1;	1/9	2;	1/9

E ricaviamo la distribuzione di  $S_2$

$S_2$	-2	-1	0	1	2
$P(S_2)$	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9

Se siamo interessati ad  $S_3$

$$S_3 = X_1 + X_2 + X_3 = S_2 + X_3$$

lavoriamo come prima facendo la somma tra  $S_2$  e  $X_1$

	-1;	1/3	0;	1/3	1;	1/3
-2; 1/9	-3;	1/27	-2;	1/27	-1;	1/27
-1; 2/9	-2;	2/27	-1;	2/27	0;	2/27
0; 3/9	-1;	3/27	0;	3/27	1;	3/27
1; 2/9	0;	2/27	1;	2/27	2;	2/27
2; 1/9	1;	1/27	2;	1/27	3;	1/27

E ricaviamo la distribuzione di  $S_3$

$S_3$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P(S_3)$	$1/27$	$3/27$	$6/27$	$7/27$	$6/27$	$3/27$	$1/27$

Iteriamo il ragionamento per  $S_4$

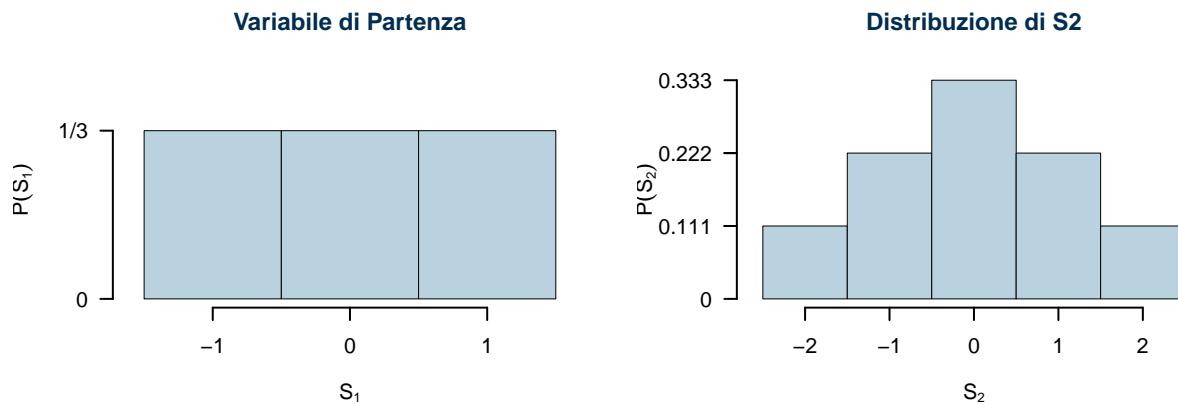
$$S_4 = S_3 + X_4$$

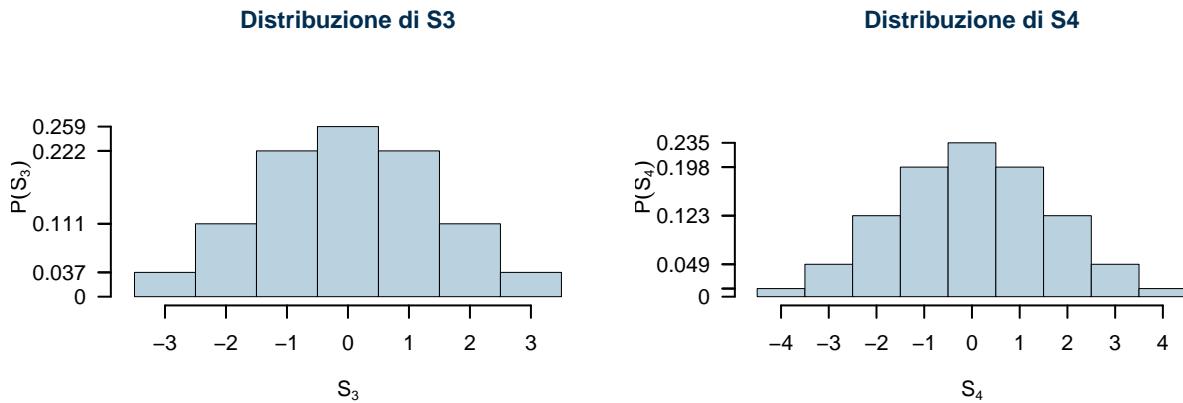
	-1;	$1/3$	0;	$1/3$	1;	$1/3$
$-3; 1/27$	-4;	$1/81$	-3;	$1/81$	-2;	$1/81$
$-2; 3/27$	-3;	$3/81$	-2;	$3/81$	-1;	$3/81$
$-1; 6/27$	-2;	$6/81$	-1;	$6/81$	0;	$6/81$
$0; 7/27$	-1;	$7/81$	0;	$7/81$	1;	$7/81$
$1; 6/27$	0;	$6/81$	1;	$6/81$	2;	$6/81$
$2; 3/27$	1;	$3/81$	2;	$3/81$	3;	$3/81$
$3; 1/27$	2;	$1/81$	3;	$1/81$	4;	$1/81$

E ricaviamo la distribuzione di  $S_4$

$S_4$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$P(S_4)$	$1/81$	$4/81$	$10/81$	$16/81$	$19/81$	$16/81$	$10/81$	$4/81$	$1/81$

Osserviamo i grafici per  $n = 1, \dots, 4$





Calcolare  $S_n$  se  $n$  è un numero elevato è difficoltoso. Il TLC ci viene incontro. Possiamo calcolare valore atteso e varianza della VC della VC che ha generato il sistema.

$$\begin{aligned} E(X) &= -1\frac{1}{3} + 0\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = 0 \\ V(X) &= (-1)^2\frac{1}{3} + 0^2\frac{1}{3} + 1^2\frac{1}{3} - 0^2 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

e quindi in virtù del TLC per la somma

$$S_n \underset{a}{\sim} N(n \cdot 0, n \cdot 2/3)$$

Se per esempio  $n = 50$

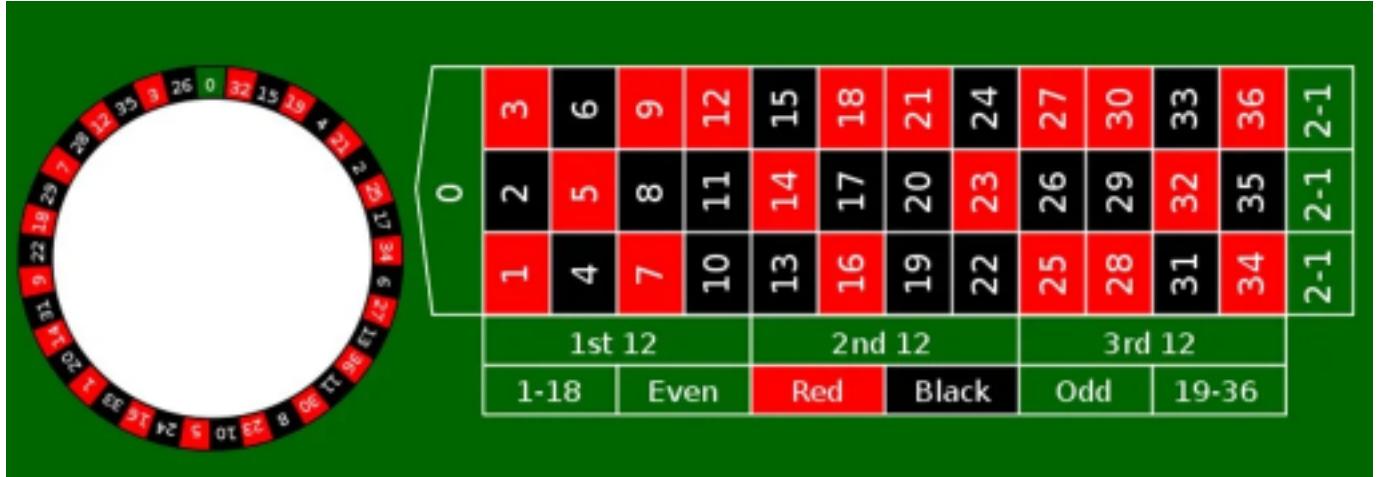
$$S_{50} \underset{a}{\sim} N(0, 50 \cdot 2/3)$$

e quindi se volessi calcolare la probabilità che  $S_{50} < 3$  useremmo la distribuzione normale

$$\begin{aligned} P(S_n < 3) &= P\left(\frac{S_n - \mu}{V(S_n)} < \frac{3 - 0}{\sqrt{33.33}}\right) \\ &= P(Z < 0.52) \\ &= \Phi(0.52) \\ &= 0.6985 \end{aligned}$$

### 8.3.2 Roulette

**Il gioco.** Una giocata dalla roulette equivale ad estrarre da un'urna che contiene 37 bussolotti numerati da 0 a 36.



Si può puntare su diverse combinazioni: pari o dispari, rosso o nero, da 1 a 18 o da 19 a 36,... e altre combinazioni. Se puntiamo 1€, per esempio, su Rosso la vincita/perdita sarà:

$$\begin{cases} +1\text{€}, & \text{se esce Rosso} \\ -1\text{€}, & \text{se non esce Rosso} \end{cases}$$

Giocheremo, sempre puntando un euro alla volta, per  $n$  volte. La VC  $R_i$  che descrive l'evento Rosso o non Rosso, nella giocata  $i$ , è una Bernoulli di parametro

$$\pi = \frac{18}{37} = 0.4865$$

Sia la VC  $X_i$  che descrive la vincita/perdita

$$X_i = -1 + 2R_i$$

Se  $R_i = 1$  allora  $X_i = -1 + 2 \times 1 = +1$ , mentre se  $R_i = 0$  allora  $X_i = -1 + 2 \times 0 = -1$  La VC  $R_i \sim \text{Ber}(\pi = 0.4865)$  e quindi

$$\begin{aligned} E(R_i) &= 0.4865 \\ V(R_i) &= 0.4865 \times (1 - 0.4865) \end{aligned}$$

E quindi

$$\begin{aligned} E(X_i) &= -1 + 2 \times 0.4865 \\ &= -0.02703 \\ V(X_i) &= 2^2 \times 0.4865 \times (1 - 0.4865) \\ &= 0.9993 \end{aligned}$$

Le  $X_i$  sono tutte tra di loro Indipendenti e Identicamente Distribuite (IID). Se quindi giochiamo  $n$  volte la VC che conta il numero di euro vinti/persi è

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

Riscrivendo in termini di  $R_i$

$$\begin{aligned} S_n &= -1 + 2R_1 - 1 + 2R_2 + \dots + (-1) + 2R_n \\ &= -n + 2(R_1 + \dots + R_n) \\ &= -n + 2R \end{aligned}$$

$R = R_1 + \dots + R_n \sim \text{Bin}(n; \pi = 0.4865)$  Se per esempio gioco due ( $n = 2$ ) volte

$$S_2 = X_1 + X_2$$

il supporto di  $S_2$  è l'insieme  $\{-2, 0, +2\}$ .

$$\begin{aligned} P(S_2 = -2) &= P(R_1 + R_2 = 0) = \binom{2}{0} 0.4865^0 (1 - 0.4865)^2 = 0.2637 \\ P(S_2 = 0) &= P(R_1 + R_2 = 1) = \binom{2}{1} 0.4865^1 (1 - 0.4865)^1 = 0.4996 \\ P(S_2 = +2) &= P(R_1 + R_2 = 2) = \binom{2}{0} 0.4865^2 (1 - 0.4865)^0 = 0.2367 \end{aligned}$$

Se per esempio gioco tre ( $n = 3$ ) volte

$$S_3 = X_1 + X_2 + X_3 = S_2 + X_3$$

il supporto di  $S_3$  è l'insieme  $\{-3, -1, +1, +3\}$ .

$$\begin{aligned} P(S_3 = -3) &= P(R_1 + R_2 + R_3 = 0) = \binom{3}{0} 0.4865^0 (1 - 0.4865)^3 = 0.1354 \\ P(S_3 = -1) &= P(R_1 + R_2 + R_3 = 1) = \binom{3}{1} 0.4865^1 (1 - 0.4865)^2 = 0.3849 \\ P(S_3 = +1) &= P(R_1 + R_2 + R_3 = 2) = \binom{3}{2} 0.4865^2 (1 - 0.4865)^1 = 0.3646 \\ P(S_3 = +3) &= P(R_1 + R_2 + R_3 = 3) = \binom{3}{3} 0.4865^3 (1 - 0.4865)^0 = 0.1151 \end{aligned}$$

Se per esempio gioco tre ( $n = 10$ ) volte

$$S_{10} = S_9 + X_{10}$$

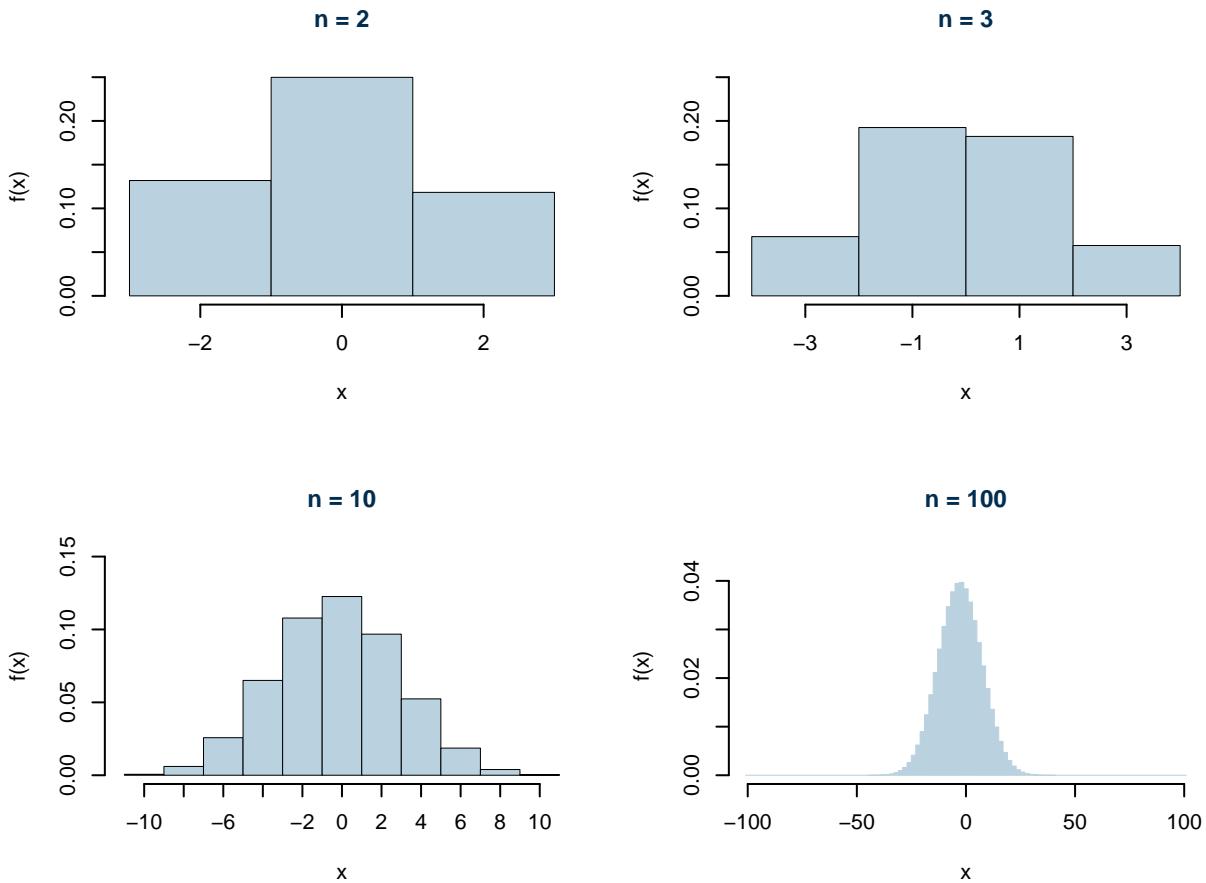
Se per esempio gioco tre ( $n = 100$ ) volte

$$S_{100} = S_{99} + X_{100}$$

La probabilità di non perdere è data da.

$$P(S_{100} > 0) = P(-100 + 2R > 0)$$

$$\begin{aligned}
&= P(R > 100/2) \\
&= P(R > 50) \\
&= P(R = 51) + P(R = 52) + \dots + P(R = 100) \\
&= \binom{100}{51} 0.4865^{51} (1 - 0.4865)^{49} + \binom{100}{52} 0.4865^{52} (1 - 0.4865)^{48} + \dots \\
&\quad + \binom{100}{100} 0.4865^{100} (1 - 0.4865)^0 \\
&= 0.3553
\end{aligned}$$



### Approssimazione normale

$$\begin{aligned}
\mu &= E(X_i) \\
&= -1 + 2 \times 0.4865 \\
&= -0.02703 \\
\sigma^2 &= V(X_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2^2 \times 0.4865 \times (1 - 0.4865) \\
 &= 0.9993
 \end{aligned}$$

posto

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

e dunque

$$\begin{aligned}
 E(S_n) &= E(X_1 + \dots + X_n) \\
 &= E(X_1) + \dots + E(X_n) \\
 &= \mu + \dots + \mu \\
 &= n\mu \\
 &= -2.7027 \\
 V(S_n) &= V(X_1 + \dots + X_n) \\
 &= V(X_1) + \dots + V(X_n) \\
 &= \sigma^2 + \dots + \sigma^2 \\
 &= n\sigma^2 \\
 &= n \times 0.9993
 \end{aligned}$$

Per  $n = 100$

$$\begin{aligned}
 E(S_n) &= 100 \times (-0.02703) \\
 &= -2.7027 \\
 V(S_n) &= 100 \times 0.9993 \\
 &= 99.927
 \end{aligned}$$

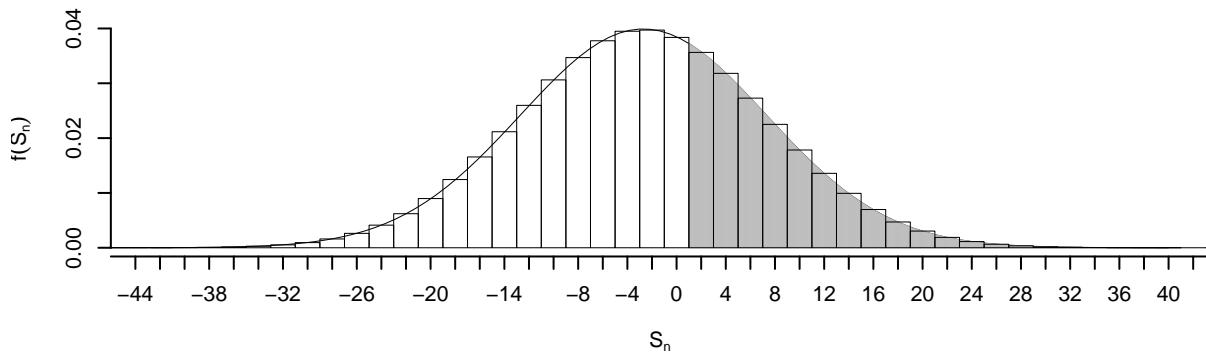
In virtù del teorema del limite centrale

$$\begin{aligned}
 S_{100} &\underset{a}{\sim} N(100 \times (-0.02703), 100 \times 0.9993) \\
 &\underset{a}{\sim} N(-2.7027, 99.927)
 \end{aligned}$$

E quindi

$$P(S_n > 0) = P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} > \frac{0 - (-2.7027)}{\sqrt{99.93}}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= P(Z > 0.27) \\
 &= 1 - P(Z < 0.27) \\
 &= 1 - \Phi(0.27) \\
 &= 0.3936
 \end{aligned}$$



### Nota

I due valori di probabilità esatta 0.3553 e quello approssimato 0.3934 sono diversi nella seconda cifra decimale. Questo è dovuto al fatto che la normale calcola anche parte dell'istogramma della binomiale in zero. Per ovviare e migliorare l'approssimazione basta spostare sulla fine del rettangolo dello zero il calcolo della normale. Senza entrare nel dettaglio si ricava che il rettangolo finisce per  $S_n = 1$  e dunque

$$\begin{aligned}
 P(S_n > 1) &= P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} > \frac{1 - (-2.7027)}{\sqrt{99.93}}\right) \\
 &= P(Z > 0.37) \\
 &= 1 - P(Z < 0.37) \\
 &= 1 - \Phi(0.37) \\
 &= 0.3557
 \end{aligned}$$

# Statistiche campionarie

9

## 9.1 Risultati preliminari

Consideriamo  $n$  variabili casuali,  $X_1, \dots, X_n$ , IID, con valore atteso e varianza, rispettivamente,  $\mu$  e  $\sigma^2$ . Sono dati che stiamo per osservare e quindi sono casuali.

**Definizione 9.1.1.** Una **statistica campionaria**,  $S$ , è una funzione dei dati  $X_1, \dots, X_n$

$$S(X_1, \dots, X_n) = s \in \mathbb{R}$$

Come funzione di VC  $S = S(X_1, \dots, X_n)$  è una VC. Ad esempio la *media* dei dati è una statistica, il *25-esimo percentile* è una statistica, la *mediana* dei dati, la *varianza*, ecc. Ci possiamo porre alcune domande, per esempio:

- come si distribuisce una media campionaria di valori casuali?

$$\hat{\mu} = \bar{X} \underset{a}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

dove,  $E(\hat{\mu}) = \mu$ ,  $V(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{n}$

- Come si distribuisce la varianza campionaria di valori casuali?

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2 \sim ?$$

## 9.2 La distribuzione Chi-quadro $\chi^2$

**Definizione 9.2.1.** Siano  $Z_1, \dots, Z_n$ ,  $n$  VC, IID,  $Z_i \sim N(0, 1)$ , posto,

$$Y = Z_1^2 + \dots + Z_n^2, \quad \text{allora} \quad Y \sim \chi_n^2$$

La distribuzione della somma del quadrato di  $n$  normali standard è distribuita come un chi-quadro con  $n$  *gradi di libertà*

La VC ha come supporto tutta la retta reale positiva:

$$S_Y = \{y > 0\} = \mathbb{R}^+$$

Lo spazio dei parametri non ha interesse statistico

$$n \in \mathbb{Z}^+$$

Funzione di probabilista o densità:

$$f(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

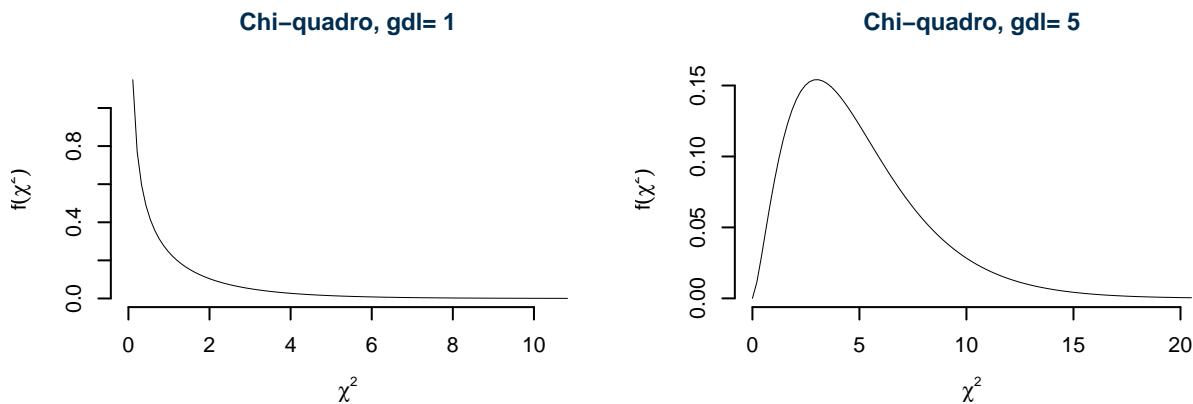
dove

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

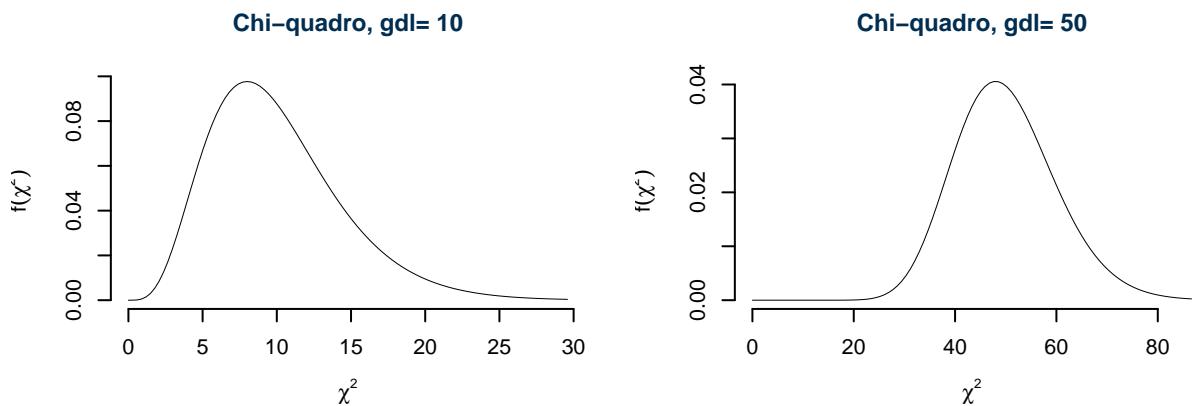
- per  $n = 1$  ha una forma iperbolica;
- per  $n > 2$  è a forma campanulare con un'asimmetria positiva (coda lunga a dx);
- in virtù del TLC se  $n$  diverge allora  $Y \xrightarrow{d} N(n, 2n)$ .

$$E(Y) = n, \quad V(Y) = 2n$$

In figure 9.1 e 9.1 la forma della densità al variare di  $n$ .



**Figura 9.1:** La densità della VC Chi-quadro per diversi valori di  $n$



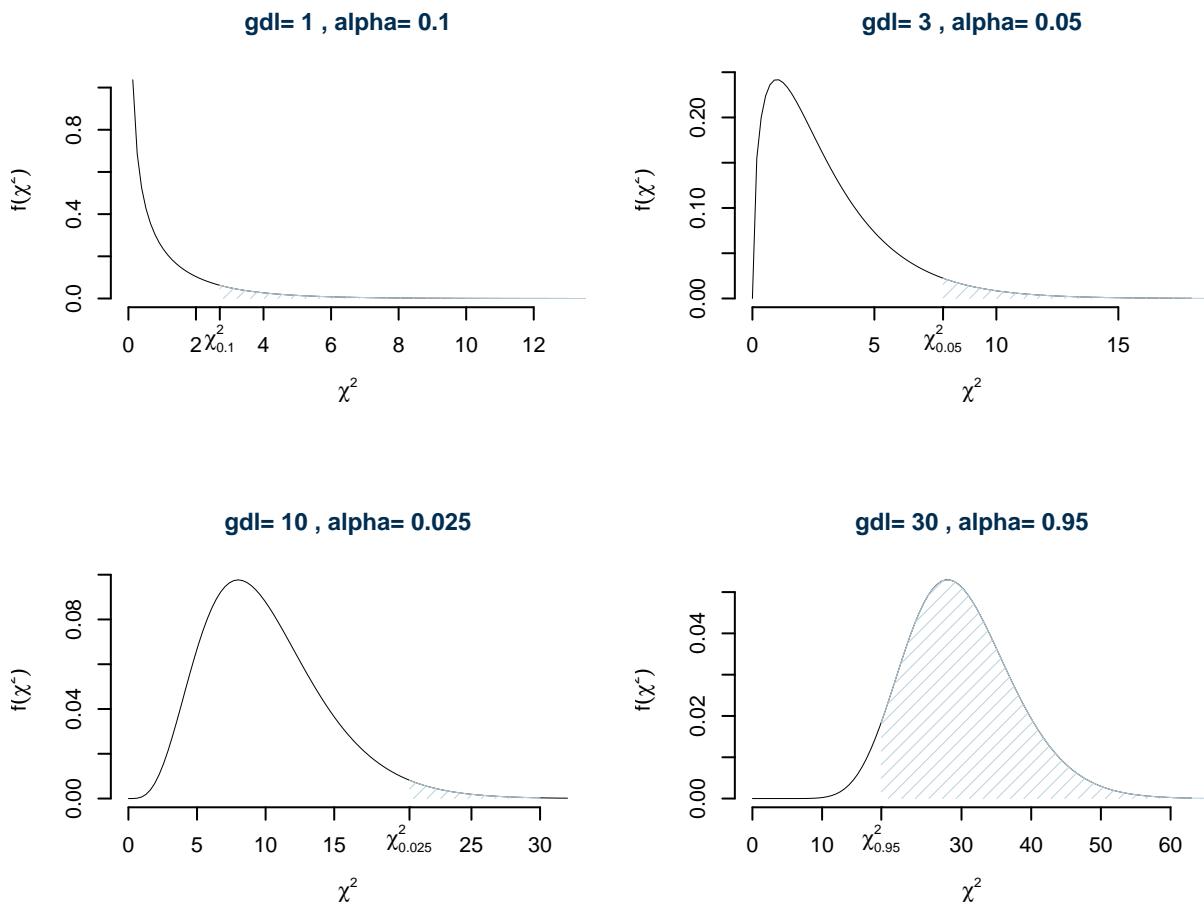
**Figura 9.2:** La densità della VC Chi-quadro per diversi valori di  $n$

### 9.2.1 Le tavole del $\chi^2$

Non c'è una sola distribuzione  $\chi^2$  ma tante quante sono i possibili gradi di libertà. Per comodità editoriale vengono mostrati solo alcuni valori delle code, per alcuni gradi di libertà. Offrono il percentile della  $\chi^2$  per diversi gradi di libertà e diversi valori di  $\alpha$ , ovvero

$$P(\chi_n^2 > \chi_{n;\alpha}^2) = \alpha$$

per alcuni valori di  $n$  e di  $\alpha$ . Le tavole si presentano in forma tabellare dove ogni riga è indicizzata dal grado di libertà e ogni colonna dal valore di probabilità  $\alpha$ .



Quindi per esempio se sono interessato a sapere quale valore del  $\chi_3^2$  lascia alla sua destra lo 0.05 dell'area dovrò cercare sulla terza riga in corrispondenza della colonna 0.05 e quindi

$$\chi_{3;0.05}^2 = 7.8147$$

**Tabella 9.1:** Prime 8 righe delle tavole del  $\chi^2$  (1/2)

GdL	$\alpha = 0.99950$	$\alpha = 0.99900$	$\alpha = 0.99500$	$\alpha = 0.99000$	$\alpha = 0.97500$	$\alpha = 0.95000$	$\alpha = 0.90000$
1	0.00000	0.00000	0.00004	0.00016	0.00098	0.00393	0.01579
2	0.00100	0.00200	0.01003	0.02010	0.05064	0.10259	0.21072
3	0.01528	0.02430	0.07172	0.11483	0.21580	0.35185	0.58437
4	0.06392	0.09080	0.20699	0.29711	0.48442	0.71072	1.06362
5	0.15814	0.21021	0.41174	0.55430	0.83121	1.14548	1.61031
6	0.29941	0.38107	0.67573	0.87209	1.23734	1.63538	2.20413
7	0.48487	0.59849	0.98926	1.23904	1.68987	2.16735	2.83311
8	0.71038	0.85710	1.34441	1.64650	2.17973	2.73264	3.48954

**Tabella 9.2:** Prime 8 righe delle tavole  $\chi^2$  (2/2)

GdL	$\alpha = 0.10000$	$\alpha = 0.05000$	$\alpha = 0.02500$	$\alpha = 0.01000$	$\alpha = 0.00500$	$\alpha = 0.00100$	$\alpha = 0.00050$
1	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944	10.82757	12.11567
2	4.60517	5.99146	7.37776	9.21034	10.59663	13.81551	15.20180
3	6.25139	7.81473	9.34840	11.34487	12.83816	16.26624	17.73000
4	7.77944	9.48773	11.14329	13.27670	14.86026	18.46683	19.99735
5	9.23636	11.07050	12.83250	15.08627	16.74960	20.51501	22.10533
6	10.64464	12.59159	14.44938	16.81189	18.54758	22.45774	24.10280
7	12.01704	14.06714	16.01276	18.47531	20.27774	24.32189	26.01777
8	13.36157	15.50731	17.53455	20.09024	21.95495	26.12448	27.86805

### 9.3 La distribuzione $t$ -di Student

**Definizione 9.3.1.** Siano  $Z \sim N(0, 1)$  e  $Y \sim \chi_n^2$ ,  $Z$  e  $Y$  indipendenti, posto,

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/n}} \quad \text{allora} \quad T \sim t_n$$

Il rapporto tra una normale standard e un la radice di un chi-quadro diviso per i suoi gradi di libertà è distribuito come una  $t$ -Student con  $n$  gradi di libertà

La VC ha come supporto tutta la retta reale:

$$S_T = \mathbb{R}$$

Lo spazio dei parametri non ha interesse statistico

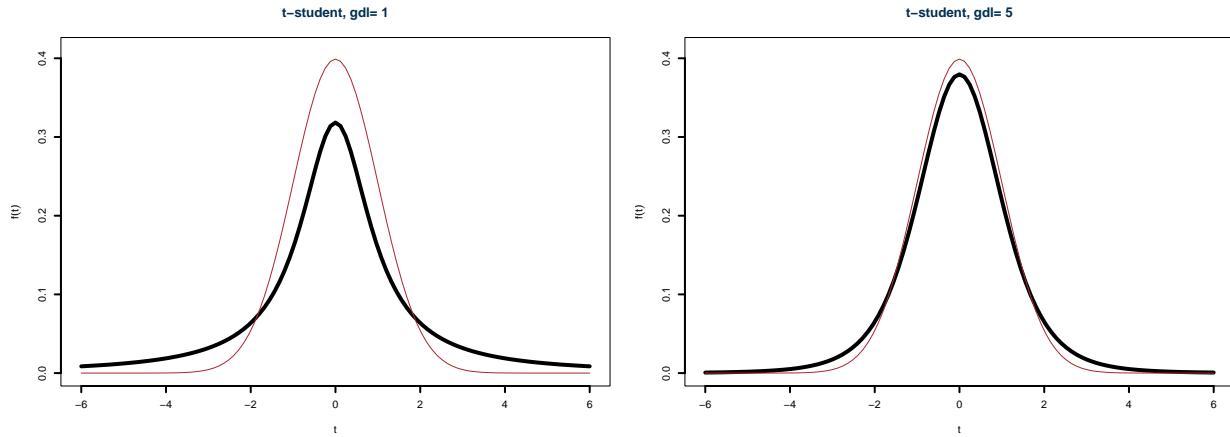
$$n \in \mathbb{Z}^+$$

Funzione di probabilista o densità.

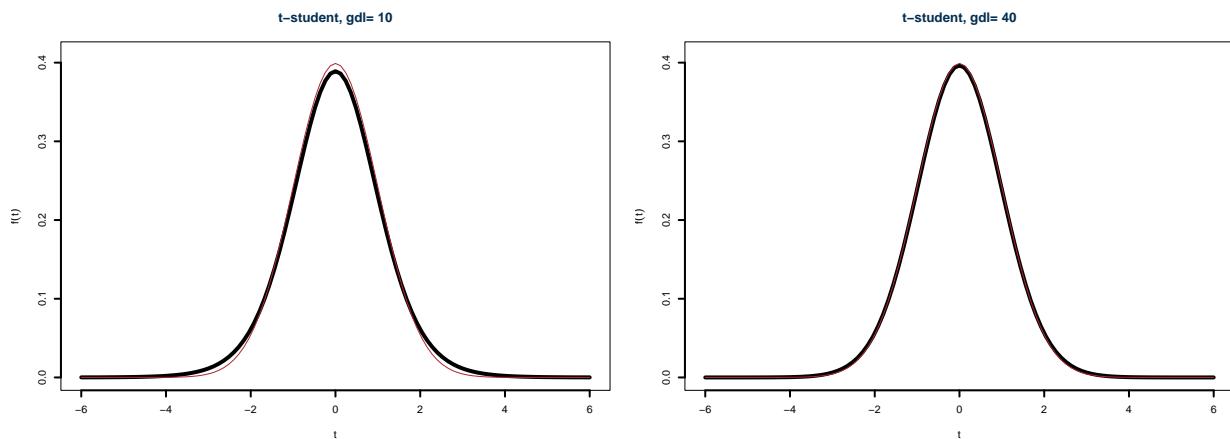
- è a forma campanulare
- è simmetrica rispetto a zero
- all'aumentare di  $n$  le code si abbassano
- Se  $n \rightarrow \infty$ , allora  $t_n \rightarrow N(0, 1)$

$$E(Y) = 0, \quad V(Y) = \frac{n}{n-2}$$

In figura 9.3 e 9.4 il confronto tra la  $t$ -di Student e la normale standard, per diversi valori di  $n$ .



**Figura 9.3:** confronto tra la  $t$ -di student e la normale standard, per diversi valori di  $n$



**Figura 9.4:** confronto tra la  $t$ -di student e la normale standard, per diversi valori di  $n$

### 9.3.1 Le tavole della $t$

Non c'è una sola distribuzione  $t$  ma tante quante sono i possibili gradi di libertà. Per comodità editoriale vengono mostrati solo alcuni valori delle code, per alcuni gradi di libertà. Sulle tavole leggiamo:

$$P(T > t_{n;\alpha}) = \alpha$$

per alcuni valori di  $n$  e di  $\alpha$ . Le tavole si presentano in forma tabellare dove ogni riga è indicizzata dal grado di libertà e ogni colonna dal valore di probabilità  $\alpha$ . Per conoscere quale valore  $t_{6;0.025}$  della  $t_6$  con 6 gradi di libertà, tale che

$$P(T > t_{6;0.025}) = 0.025$$

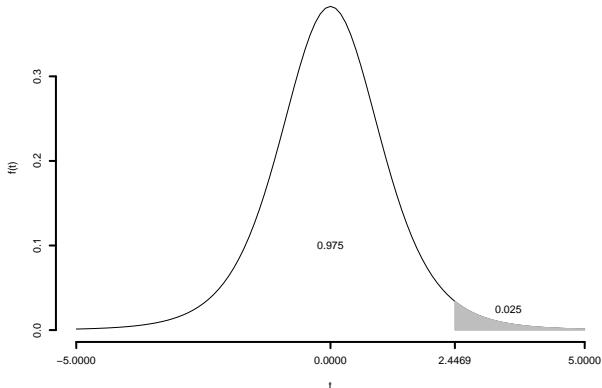
**Tabella 9.3:**  $\alpha = 0.025$ , con 6 gradi di libertà

GdL	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	$\alpha = 0.001$	$\alpha = 0.0005$
1	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567	318.3088	636.6192
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	22.3271	31.5991
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	10.2145	12.9240
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	7.1732	8.6103
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	5.8934	6.8688
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.2076	5.9588
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	4.7853	5.4079
8	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	4.5008	5.0413
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	4.2968	4.7809
10	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.1437	4.5869
...	...	...	...	...	...	...	...

**Tabella 9.4:**  $\alpha = 0.005$ , con 15 gradi di libertà

GdL	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	$\alpha = 0.001$	$\alpha = 0.0005$
...	...	...	...	...	...	...	...
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.8520	4.2208
14	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.7874	4.1405
15	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	3.7328	4.0728
16	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.6862	4.0150
17	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.6458	3.9651
...	...	...	...	...	...	...	...

Dunque  $t_{6;0.025} = 2.44691$



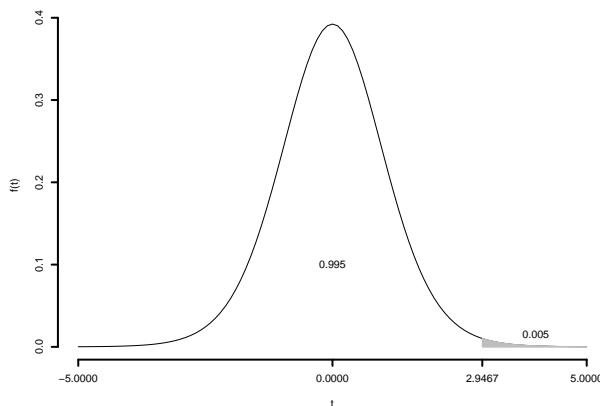
Per conoscere quale valore  $t_{15;0.005}$  della  $t_{15}$  con 15 gradi di libertà, tale che

$$P(T > t_{15;0.005}) = 0.005$$

Dunque  $t_{15;0.005} = 2.94671$

**Tabella 9.5:**  $\alpha = 0.0005$ , con 49 gradi di libertà

GdL	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	$\alpha = 0.001$	$\alpha = 0.0005$
...	...	...	...	...	...	...	...
46	1.3002	1.6787	2.0129	2.4102	2.6870	3.2771	3.5150
47	1.2998	1.6779	2.0117	2.4083	2.6846	3.2729	3.5099
48	1.2994	1.6772	2.0106	2.4066	2.6822	3.2689	3.5051
<b>49</b>	<b>1.2991</b>	<b>1.6766</b>	<b>2.0096</b>	<b>2.4049</b>	<b>2.6800</b>	<b>3.2651</b>	<b>3.5004</b>
50	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778	3.2614	3.4960
...	...	...	...	...	...	...	...



Per conoscere quale valore  $t_{49;0.0005}$  della  $t_{49}$  con 49 gradi di libertà, tale che

$$P(T > t_{49;0.001}) = 0.001$$

Dunque  $t_{49;0.001} = 3.2651$

### Nota

L'ultima riga della  $t$ , per un numero infinito di GdL, coincide con la tabella aggiuntiva della  $Z$ . Infatti

GdL	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	$\alpha = 0.001$	$\alpha = 0.0005$
80	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387	3.1953	3.4163
90	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316	3.1833	3.4019
100	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259	3.1737	3.3905
$\infty$	<b>1.2816</b>	<b>1.6449</b>	<b>1.9600</b>	<b>2.3263</b>	<b>2.5758</b>	<b>3.0902</b>	<b>3.2905</b>

La tabella dei percentili della normale è

$\alpha$	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
$z_\alpha$	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902	3.2905
$\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995

## 9.4 La distribuzione di $\hat{\sigma}^2$

Siano  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n$  VC IID, replicazioni della stessa  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . La si definisce la varianza campionaria

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2, \quad \hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

allora

$$\hat{\sigma}^2 \sim \frac{\sigma^2}{n} \chi_{n-1}^2.$$

Osserviamo:

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}^2) &= \frac{\sigma^2}{n} E(\chi_{n-1}^2) \\ &= \frac{n-1}{n} \sigma^2 \end{aligned}$$

## 9.5 La distribuzione della statistica standardizzata

Siano  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n$  VC, IID,  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Si definisce *standardizzazione* di  $\bar{X}$  dati rispetto a  $\mu$ :

$$T = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\hat{\sigma} / \sqrt{n-1}}$$

Allora

$$T \sim t_{n-1}.$$

---

# Parte III

# Inferenza

---



## 10.1 Inferire: dalla reazione istintiva al linguaggio formale

Inferire significa trarre una conclusione a partire da qualcosa di noto. Secondo la Treccani:

Trarre, partendo da una determinata premessa o dalla constatazione di un fatto, una conseguenza, un giudizio, una conclusione.

Questa definizione comprende sia l'inferenza come ragionamento astratto, che parte da premesse per giungere a nuove idee, sia l'inferenza come processo empirico, che collega osservazioni a conclusioni utili per agire o comprendere. In entrambi i casi, si tratta di un'operazione che produce conoscenza, e che permette di orientarsi nel tempo: dal passato al futuro, dal noto all'ignoto.

La capacità di inferire non è un'esclusiva dell'essere umano. Molti animali, attraverso l'esperienza, apprendono regolarità e le utilizzano per adattare il proprio comportamento. Un predatore che anticipa i movimenti della preda, o una preda che coglie un segnale di pericolo, mettono in atto forme di inferenza implicita, fondate su associazioni, ma prive di consapevolezza riflessiva. In questi casi, inferire significa principalmente prevedere per agire.

Nell'uomo, però, questa capacità si arricchisce di nuovi livelli. L'esperienza non genera soltanto risposte, ma stimola domande: "perché è successo?", "cosa lo ha causato?", "cosa succederebbe se...?". Emergono così forme più sofisticate di inferenza: si cercano cause, si immaginano alternative, si costruiscono modelli mentali del mondo. È il passaggio dall'azione alla spiegazione, dalla previsione al ragionamento.

Col tempo, questa facoltà si distacca progressivamente dal contingente e dall'immediato. L'essere umano è in grado di simulare scenari ipotetici, anche non osservati, e di concatenare tra loro idee astratte, senza più bisogno di un riscontro diretto nell'esperienza. Questo è il livello dell'inferenza simbolica, che consente di costruire catene deduttive, esplorare spazi logici, formulare ipotesi generali.

Per rendere questi ragionamenti condivisibili e controllabili, l'uomo ha sviluppato strumenti simbolici e formali. È così che nascono la logica, la matematica, la probabilità e infine la statistica. L'inferenza statistica, in particolare, si colloca al crocevia tra osservazione e astrazione: parte dall'esperienza, ma la elabora con metodi rigorosi, capaci di rappresentare l'incertezza e di generalizzare i risultati. È la forma più recente e più strutturata di una capacità che affonda le sue radici nell'evoluzione biologica e che, attraverso la cultura, si è trasformata in una teoria unificata della conoscenza.

Nel vocabolario della logica e della teoria della conoscenza, si riconoscono tre forme fondamentali di inferenza: **deduttiva, induttiva diretta e induttiva inversa**, ciascuna con un diverso rapporto tra premesse, osservazioni ed esiti.

L'inferenza deduttiva, tipica della logica formale, parte da premesse certe per arrivare a conclusioni necessarie. È il tipo di ragionamento che governa la matematica: dati alcuni assunti iniziali, le conclusioni sono logicamente inevitabili e già contenute nelle premesse. Questo tipo di inferenza è deterministico e privo di incertezze.

L'inferenza induttiva diretta, invece, opera nel campo della probabilità. Partendo da un modello noto o da una distribuzione che descrive un fenomeno, permette di calcolare la probabilità di osservare determinati esiti. È il

caso di un'urna dalla composizione nota: possiamo determinare con precisione la probabilità che un'estrazione casuale produca un certo risultato. Qui il ragionamento è incerto, ma il modello è dato a priori e costituisce la base delle conclusioni.

L'inferenza induttiva inversa, oggi conosciuta come **inferenza statistica**, ribalta questa prospettiva. Non ci si chiede quali osservazioni aspettarsi da un modello noto, ma quale modello, quali parametri o quali proprietà della popolazione possano spiegare i dati osservati. È il problema dell'urna dalla composizione incognita: data una serie di estrazioni, come possiamo inferire la composizione complessiva? Questo tipo di inferenza è intrinsecamente probabilistico e dipende fortemente dal contesto e dalle ipotesi di partenza.

Ciò che rende l'inferenza statistica così straordinaria è proprio la sua capacità di trasformare osservazioni parziali, influenzate dal caso, in una comprensione più ampia e generalizzabile. Ma ciò che la rende possibile è il linguaggio formale che l'uomo ha costruito per descriverla. Questo linguaggio non solo rende esplicativi i passaggi impliciti del ragionamento, ma permette di comunicare e replicare i risultati, superando i limiti del contesto individuale.

In definitiva, l'inferenza statistica è l'espressione più raffinata di una capacità condivisa con molte specie, ma che l'uomo ha elevato a strumento consapevole e rigoroso. Essa rappresenta un ponte tra l'istinto naturale e la razionalità formale, dimostrando come un processo profondamente radicato nella biologia possa essere trasformato in un metodo universale per comprendere il mondo.

## 10.2 L'inferenza Statistica

### 10.2.1 Il campione e il campionamento

Qualsiasi ragionamento inferenziale parte da un **insieme di dati osservati**, ottenuti attraverso un processo di raccolta più o meno strutturato. Questo insieme viene chiamato **campione**.

Un campione è una collezione di osservazioni che rappresentano, in qualche modo, una porzione di un fenomeno più ampio. Nella pratica, può trattarsi di persone, oggetti, eventi, misurazioni, scelte, comportamenti: ciò che accomuna questi elementi è che vengono **osservati e registrati**, con l'intenzione di trarne informazioni generalizzabili.

L'inferenza statistica nasce proprio da questa intenzione: **risalire da ciò che è osservato a ciò che non lo è**, o non lo è ancora. In questo passaggio, il campione gioca un ruolo centrale: è la principale fonte informativa di cui disponiamo.

Affinché un campione possa davvero rappresentare un contesto più ampio, è essenziale che sia stato **selezionato in modo casuale**. La casualità non è una garanzia, ma è l'unico strumento che abbiamo per **trattare l'incertezza in modo formale**.

Un campione **casuale** è quello in cui ogni unità ha avuto una **probabilità nota e non nulla** di essere inclusa. Questa ipotesi rende possibile l'uso del linguaggio probabilistico per quantificare il margine di errore delle conclusioni, valutare la variabilità delle stime, e costruire intervalli di confidenza o test d'ipotesi.

In assenza di casualità, non esiste una base teorica solida per distinguere ciò che è strutturale da ciò che è contingente, o frutto di una distorsione nella selezione. È per questo che i modelli statistici --- anche i più semplici --- assumono che le osservazioni siano state ottenute da un **campione casuale**, o da un processo che può essere trattato come tale.

Nel corso di questo testo considereremo due principali prospettive sul campione.

Nella prima, la popolazione è un **insieme finito** che sia noto: come l'elenco degli studenti iscritti a un corso, delle famiglie residenti in un comune o delle aziende registrate in una banca dati, oppure no: le aziende che hanno un gestionale che ha più di 10 anni, i consumatori abituali degli spaghetti Barilla. In questo caso, il campione è un sottinsieme selezionato secondo un criterio che può essere casuale (campionamento probabilistico) o deterministico. L'inferenza consiste nel trarre conclusioni sulle statistiche descrittive della popolazione (come una media o una proporzione), basandosi sul campione osservato.

Nella seconda prospettiva, i dati sono visti come **realizzazioni di un esperimento aleatorio**, governato da una legge probabilistica sconosciuta. La popolazione in questo caso non è un elenco finito di unità, ma un **modello** che descrive come i dati vengono generati. Il campione è una sequenza di variabili casuali, generalmente considerate **indipendenti e identicamente distribuite (IID)**. L'inferenza si concentra allora sui **parametri del modello** che meglio spiegano il comportamento osservato.

In entrambe le impostazioni, la probabilità gioca un ruolo cruciale. Non perché ogni fenomeno sia necessariamente aleatorio, ma perché trattare l'incertezza come se fosse il risultato di un meccanismo probabilistico ci permette di ragionare in modo sistematico e controllato.

La probabilità, in questo contesto, non è solo uno strumento di calcolo: è una lingua formale per parlare dell'ignoto, che rende possibile quantificare l'incertezza, dichiarare con quali margini ci si fida di una conclusione, e soprattutto rendere trasparente e replicabile il processo inferenziale.

### 10.2.2 Inferenza da popolazioni finite

Le popolazioni finite rappresentano il contesto più vicino all'intuizione comune. Si tratta di insiemi chiusi e completamente enumerabili di unità, come le persone registrate in un censimento o gli studenti iscritti a un corso. In questi casi, ogni elemento della popolazione può essere associato a una lista, e il campione rappresenta una frazione precisa della popolazione. Questo contesto è tipico delle statistiche ufficiali, come quelle prodotte dall'ISTAT, dall'Eurostat e dall'OCSE.

L'inferenza da popolazioni finite è quindi apparentemente intuitiva, ma richiede un impianto operativo articolato: occorre disporre di un **registro completo della popolazione**, progettare un **disegno di campionamento** adatto (spesso stratificato o a più stadi), costruire e testare strumenti di rilevazione standardizzati (come questionari), e garantire qualità e controllo dei dati raccolti. Si tratta di operazioni costose e complesse, che solo istituzioni pubbliche di grande dimensione e con mandato istituzionale riescono a realizzare su scala nazionale o internazionale.

Ecco alcuni esempi concreti di indagini campionarie su popolazioni finite:

- **L'Indagine sulle forze di lavoro (ISTAT)** ha l'obiettivo di stimare il tasso di occupazione, disoccupazione e inattività della popolazione residente in Italia. La popolazione di riferimento è costituita da tutte le persone residenti in famiglie, escluse le collettività. L'indagine è continua e si basa su un campione a rotazione di circa 77.000 famiglie ogni trimestre, selezionate casualmente. I questionari raccolgono informazioni su attività lavorativa, ricerca di lavoro, orari, contratti e condizioni lavorative.
- **L'Indagine sui consumi delle famiglie (ISTAT)** rileva le spese sostenute per beni e servizi, allo scopo di descrivere i comportamenti di consumo e aggiornare il paniere per l'indice dei prezzi. La popolazione

è costituita dalle famiglie residenti in Italia, e il campione include oltre 30.000 famiglie distribuite lungo l'anno. Le famiglie selezionate devono compilare un diario giornaliero delle spese e rispondere a interviste dettagliate, il che rende l'indagine particolarmente impegnativa.

- **L'indagine EU-SILC (coordinata da Eurostat, realizzata in Italia da ISTAT)** fornisce informazioni su redditi, condizioni abitative, povertà e disuguaglianza. La popolazione è costituita dalle famiglie residenti nei paesi europei. In Italia, il campione supera le 20.000 famiglie, con interviste condotte annualmente e in parte replicate su base panel. I questionari sono armonizzati a livello europeo per consentire il confronto tra paesi.
- **L'indagine PISA (OCSE)** valuta le competenze degli studenti quindicenni in lettura, matematica e scienze, con l'obiettivo di confrontare i sistemi educativi dei paesi partecipanti. La popolazione di riferimento è costituita dagli studenti iscritti al secondo ciclo dell'istruzione secondaria, indipendentemente dall'anno frequentato. In Italia, il campione coinvolge circa 11.000 studenti ogni tre anni, selezionati da un insieme rappresentativo di scuole. I questionari comprendono sia prove cognitive standardizzate sia sezioni dedicate al contesto scolastico, familiare e motivazionale, permettendo analisi multilivello sul rendimento e le disuguaglianze educative.
- **L'indagine PIAAC (OCSE)** valuta le competenze fondamentali degli adulti tra i 16 e i 65 anni, in particolare la capacità di comprendere testi, usare strumenti numerici e risolvere problemi. In Italia, la popolazione campionata è estratta dai registri anagrafici e comprende circa 5.000 individui. Le interviste includono sia un modulo socio-demografico sia prove individuali computerizzate, somministrate in centri di test.
- **L'indagine TALIS (OCSE)** raccoglie informazioni sulle condizioni di lavoro degli insegnanti e dei dirigenti scolastici, esplorando aspetti come la formazione, la soddisfazione professionale, le pratiche didattiche e il clima scolastico. La popolazione di riferimento è costituita dagli insegnanti delle scuole secondarie inferiori. Anche qui il campione è probabilistico e i questionari, somministrati in modo standardizzato, permettono confronti tra paesi.

Queste analisi si basano su campioni estratti da popolazioni note e completamente enumerate. Il disegno campionario, il calcolo dei pesi e l'analisi dei dati tengono esplicitamente conto della struttura finita della popolazione e della complessità del piano di campionamento. La qualità dell'inferenza dipende in larga parte dalla precisione con cui questi aspetti sono progettati e implementati.

### 10.2.3 Inferenza da popolazioni infinite

Nel lavoro statistico reale, capita spesso di trovarsi in contesti in cui la popolazione non è elencabile né finita, o non è nemmeno definibile in modo operativo. In questi casi si adotta un approccio diverso: si assume che i dati osservati derivino da una **popolazione concettualmente infinita**, e si modellano come realizzazioni di una variabile aleatoria. Si tratta di una rappresentazione idealizzata, ma estremamente potente e spesso necessaria per dare senso e struttura all'analisi dei dati.

Esempi classici includono:

- **Processi fisici e ambientali**, come il livello di un fiume, la temperatura media di una regione, o la concentrazione di un inquinante nell'aria. Non possiamo elencare tutti i valori possibili, né osservare tutti i momenti futuri: costruiamo un modello e lavoriamo con i dati come se fossero campioni da una variabile continua.

- **Processi industriali e produttivi**, in cui i pezzi prodotti in futuro non esistono ancora, ma si assume che seguano la stessa legge dei pezzi già osservati.
- **Eventi ripetibili**, come lanci di monete, click su un sito o richieste a un server: non ci interessa una popolazione finita, ma una regolarità stocastica nel lungo periodo.
- **Sperimentazioni controllate**, come i *clinical trials*, in cui si valuta l'efficacia di un farmaco o di una terapia. La popolazione di riferimento è concettualmente infinita (tutti i possibili pazienti), e si ipotizza che l'effetto del trattamento segua una distribuzione probabilistica.
- **Psicologia sperimentale e scienze comportamentali**, dove si testano ipotesi su preferenze, scelte, reazioni, sotto vincoli controllati. Anche in questi casi, si modellano le risposte come esiti stocastici, spesso su scala continua o discreta.
- **Economia sperimentale**, in cui si studiano decisioni individuali o interazioni strategiche (come giochi o aste) in laboratorio. I dati sono trattati come osservazioni da una popolazione astratta, con l'obiettivo di descrivere regolarità comportamentali generalizzabili.

Anche quando i dati provengono da una popolazione finita, può essere utile (o necessario) adottare il punto di vista modellistico, trattando i dati come esiti casuali di un esperimento teorico. È una scelta metodologica che consente di rispondere a domande su effetti, relazioni, rischi, scenari ipotetici.

#### 10.2.4 Inferenza non parametrica e inferenza parametrica

Una volta accettato il quadro modellistico, si aprono due grandi strade a seconda del grado di struttura imposto al modello probabilistico:

- Nell'inferenza **non parametrica** (o *distribution-free*), si assume solo che le osservazioni siano **IID** (indipendenti e identicamente distribuite), ma non si specifica la forma della distribuzione. L'obiettivo è stimare quantità come media, mediana o varianza con il minimo numero di ipotesi. È un approccio flessibile, adatto a situazioni esplorative o con pochi dati.
- Nell'inferenza **parametrica**, si ipotizza che i dati seguano una certa **famiglia di distribuzioni** (ad esempio normale, binomiale, esponenziale...), a meno di pochi parametri ignoti. Questo approccio consente di ottenere inferenze più precise, stimare probabilità di eventi complessi e costruire modelli predittivi, a patto che l'ipotesi sul modello sia ragionevole.

Per esempio:

- Un analista può stimare la **mediana del tempo di percorrenza** su una strada, senza assumere nulla sulla forma della distribuzione: in questo caso si opera in ambito non parametrico.
- Un gestore del traffico può usare un **modello di Poisson** per stimare la probabilità che un incrocio abbia più di 10 auto in coda a mezzogiorno.
- Un epidemiologo può usare un **modello binomiale** per stimare la probabilità che almeno 3 persone in un piccolo gruppo siano infette.

L'adozione di un modello più o meno strutturato comporta sempre un **compromesso tra generalità e precisione**: meno ipotesi permettono maggiore robustezza, ma richiedono strumenti più cauti; più ipotesi rendono le conclusioni più forti, ma più sensibili a eventuali deviazioni dalla realtà.

### 10.3 Sintesi dei contesti

Questa classificazione dei contesti di inferenza aiuta a chiarire il tipo di domande che lo statistico può affrontare. Mentre l'inferenza da popolazioni finite si concentra su contesti pratici e limitati, tipici delle statistiche ufficiali, l'inferenza da popolazioni infinite e da modelli probabilistici consente di affrontare problemi più astratti e complessi, con applicazioni che spaziano dalla scienza alla finanza, dall'industria alla ricerca sperimentale.

### 10.4 Dalle popolazioni ai modelli: la metafora dell'urna

Per fissare le idee sui diversi schemi inferenziali che incontreremo nel corso, possiamo fare ricorso alla metafora dell'urna, già utilizzata nello studio della probabilità. In ciascun caso, l'urna rappresenta un meccanismo stocastico, idealmente realizzabile o puramente concettuale, da cui si ottengono osservazioni mediante un campionamento probabilistico. La metafora non suggerisce un'applicazione, ma si concentra sul **meccanismo probabilistico** alla base di ciascun tipo di inferenza.

Ogni meccanismo di generazione casuale può essere rappresentato da un opportuno **sistema d'urne**. La metafora dell'urna consente di astrarre la nozione di popolazione e di modellare sia fenomeni concreti sia schemi probabilistici più generali.

Un'urna può contenere elementi **in numero finito**, noti o ignoti, e l'estrazione può avvenire **con o senza reintroduzione**, modellando così diversi schemi di campionamento. Ma possiamo spingerci oltre: urne ideali possono rappresentare anche **meccanismi continui** (come una normale) o **conteggi** (come una Poisson), facendo dell'urna un **dispositivo concettuale** che cattura l'idea stessa di casualità controllata.

In questa prospettiva:

- le urne finite senza reintroduzione modellano il campionamento da **popolazioni finite note**, come nei censimenti o nelle statistiche ufficiali;
- le urne con reintroduzione, eventualmente a composizione ignota, rappresentano **popolazioni concettualmente infinite**, come nei modelli Bernoulli o Poisson;
- un'urna che genera numeri reali con legge normale o gamma rappresenta un **modello statistico continuo**, in cui ogni estrazione è una realizzazione di una variabile aleatoria.

La potenza di questa rappresentazione sta nella sua **neutralità applicativa**: possiamo pensare a urne di oggetti fisici, ma anche a urne astratte che sintetizzano comportamenti, eventi, preferenze, misure. In ogni caso, descrivere bene l'urna equivale a **definire un modello statistico**.

#### 10.4.1 Campionamento da un'urna di dimensione nota, senza reinserimento (popolazioni finite)

Un'urna contiene  $N = 100$  bussolotti, un numero ignoto  $R$  di rossi e  $B = N - R$  bianchi. Vengono estratti  $n = 10$  bussolotti **senza reinserimento**, e si osservano  $s = 6$  bianchi.

**Domanda inferenziale:**

Quanti bussolotti bianchi sono contenuti nell'urna? Possiamo stimare  $B$ , o almeno approssimare un intervallo plausibile per la proporzione  $\frac{B}{N}$ ?

### 10.4.2 Campionamento da un'urna a composizione ignota, con reinserimento (popolazioni infinite, modello binomiale)

L'urna ha una composizione fissa ma ignota: una proporzione  $\pi$  di bianchi e  $1 - \pi$  di rossi. Si eseguono  $n = 10$  estrazioni **con reinserimento**, e si osservano  $s = 6$  bianchi.

#### Domanda inferenziale:

Qual è la stima di  $\pi$ , cioè della proporzione di bianchi nell'urna? Possiamo fornire un intervallo credibile per  $\pi$ , sulla base del campione osservato?

### 10.4.3 Campionamento da un'urna che genera numeri reali con legge ignota (popolazioni infinite, inferenza non parametrica)

L'urna genera numeri reali, secondo una distribuzione ignota. Si estraggono  $n = 10$  valori:

$$X = \{2.3, 1.8, 3.1, 2.6, 2.0, 2.5, 2.9, 1.7, 2.1, 2.4\}$$

con media campionaria  $\bar{x} = 2.34$  e varianza campionaria  $s^2 = 0.19$ .

#### Domande inferenziali:

Cosa possiamo concludere sul valore medio  $\mu$  della distribuzione da cui provengono questi dati? E sulla variabilità  $\sigma^2$ ?

Quali margini di incertezza sono associati a queste stime, pur non conoscendo la forma della distribuzione?

### 10.4.4 Campionamento da un'urna che genera conteggi secondo un modello di Poisson (popolazioni infinite, inferenza parametrica discreta)

L'urna genera conteggi secondo una legge di Poisson con parametro  $\lambda$  ignoto. Si osservano

$$Y = \{3, 1, 2, 4, 2, 0, 1, 3, 2, 1\}$$

con media campionaria  $\bar{y} = 1.9$ .

#### Domanda inferenziale:

Possiamo stimare il tasso medio  $\lambda$ ? Quanto è plausibile che il valore vero di  $\lambda$  sia maggiore di 2? Quale margine di errore possiamo associare alla stima ottenuta?

### 10.4.5 Campionamento da un'urna che genera valori reali secondo una distribuzione normale (popolazioni infinite, inferenza parametrica continua)

L'urna genera numeri reali secondo una distribuzione normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Si osservano:

$$x = \{175.2, 179.3, 173.5, 176.1, 178.7, 174.0, 175.9, 177.4, 176.8, 178.1\},$$

con media campionaria  $\bar{x} = 176.5$  e deviazione standard campionaria  $s = 1.8$ .

#### Domanda inferenziale:

Possiamo stimare  $\mu$  e  $\sigma$ , e sulla base di tali stime calcolare la probabilità che un nuovo valore superi una certa soglia? Qual è la probabilità che la prossima estrazione sia superiore a 180?

Nel proseguire, ci concentreremo sull'inferenza da popolazioni infinite e da modelli probabilistici, che sono centrali per lo studio dell'economia e della scienza dei dati. Tuttavia, l'approccio sarà sempre lo stesso: estrarre il massimo di informazioni dai dati osservati, bilanciando rigore e comprensibilità.

## 10.5 Statistica Classica

In questo libro adotteremo il paradigma della **statistica classica**, un approccio che si fonda sull'idea che i dati osservati siano manifestazioni imperfette di una realtà ideale descritta da modelli probabilistici. Pur essendo un sostenitore della prospettiva bayesiana, mi concentrerò su questo approccio tradizionale per il suo valore didattico e per la sua centralità in molti contesti applicativi.

Alla base della statistica classica vi è un'assunzione fondamentale: i parametri di un modello, come  $\mu$ ,  $\sigma^2$  o  $\lambda$ , **esistono** in un senso ideale. Questi parametri non sono osservabili, ma rappresentano la struttura profonda e immutabile della popolazione. Ogni osservazione  $x_i$  e ogni statistica campionaria, come  $\bar{x}$  o  $s^2$ , non sono altro che **ombre** di questa verità ideale, un'emanazione del parametro inosservabile  $\theta$ .

La distinzione tra ciò che è ideale e ciò che è osservabile richiama direttamente la metafora platonica della caverna. I parametri, rappresentati da lettere greche, abitano l'**iperuranio**, il regno delle verità perfette e immutabili. In questo regno, esiste una media ideale, una varianza ideale, una probabilità ideale. I dati osservati e le statistiche campionarie, invece, sono come le **ombre proiettate sulle pareti della caverna**: imperfette, corrotte dalla variabilità del campionamento, ma comunque legate a quella verità profonda che tentiamo di comprendere.

Ad esempio:

- Una singola osservazione  $x_i$  è un'ombra della struttura imposta dal parametro  $\theta$ , ma la sua forma concreta è influenzata dalla variabilità intrinseca del processo probabilistico.
- La media campionaria  $\bar{x}$  è un'approssimazione imperfetta della media ideale  $\mu$ , che abita l'iperuranio.
- La frequenza relativa osservata  $m/n$  riflette solo parzialmente la probabilità ideale  $\pi$  in una distribuzione Bernoulli.

Questo approccio funziona perfettamente come un **gioco mentale rigoroso**, a condizione che le assunzioni del modello siano rispettate. In particolare:

1. Le forme distributive delle variabili casuali devono essere corrette. Se assumiamo che una variabile seguia una distribuzione normale, tale ipotesi deve essere giustificata dai dati o dal contesto.
2. I legami di dipendenza o indipendenza tra le osservazioni devono essere realistici. Ad esempio, l'assunzione che i dati siano indipendenti e identicamente distribuiti (IID) è cruciale in molti modelli, ma deve essere verificata.

Queste assunzioni creano il legame tra il mondo ideale e quello osservato. Senza di esse, la connessione tra le ombre ( $x_i$  e le statistiche campionarie) e la verità ( $\theta$ ) si spezza, e le inferenze statistiche rischiano di essere prive di fondamento.

Ecco una revisione della chiosa, che sottolinea il carattere filosofico e potenzialmente contestabile di questa impostazione, in relazione alle radici empiriste della statistica:

L'idea che  $\theta$  esista in un regno ideale, come verità perfetta e inosservabile, riflette una visione filosofica di derivazione platonica, che può sembrare in contrasto con le radici empiriste su cui si fonda la statistica moderna. La disciplina, infatti, nasce dalla necessità di descrivere e comprendere il mondo reale attraverso dati osservabili, più vicina all'approccio britannico della conoscenza basata sull'esperienza.

Questa apparente tensione tra la ricerca della verità ideale e l'attenzione ai dati concreti non è priva di contraddizioni. La statistica classica si sviluppa su una sottile linea di compromesso: accetta l'esistenza di parametri teorici

per costruire modelli potenti e rigorosi, ma dipende integralmente dalle osservazioni empiriche per avvicinarsi a quelle verità astratte. È un modello mentale che funziona all'interno delle sue assunzioni, ma che rimane soggetto a critica e revisione, specialmente quando queste assunzioni vengono meno.

Nel nostro percorso, accetteremo questo approccio come base metodologica, riconoscendo che esso rappresenta un sistema coerente, anche se non l'unica via possibile per fare inferenza. L'idea di parametri perfetti che governano i dati può essere vista come un artificio concettuale, utile per l'analisi e la modellazione, ma non necessariamente una descrizione della realtà ultima. In questo senso, la statistica classica non è solo uno strumento matematico, ma anche un prodotto di una specifica eredità filosofica, che merita di essere compresa e, quando necessario, interrogata.

### 10.5.1 Un'altra via: la statistica bayesiana

Accanto alla statistica classica, esiste un altro approccio all'inferenza, fondato su una concezione diversa della probabilità: la **statistica bayesiana**. In questa impostazione, il parametro  $\theta$  non è una costante fissa e ignota che governa i dati, ma una **variabile aleatoria** che rappresenta lo **stato di conoscenza** dell'osservatore. La probabilità non misura una frequenza nel lungo periodo, ma **esprime il grado di fiducia** o credenza razionale che si attribuisce a un certo valore di  $\theta$ , alla luce delle informazioni disponibili.

La statistica bayesiana si fonda su un principio semplice e potente: aggiornare le proprie convinzioni quando si osservano nuovi dati. Questo aggiornamento avviene attraverso il **teorema di Bayes**, che combina l'**informazione a priori** (la distribuzione di probabilità assegnata a  $\theta$  prima di osservare i dati) con l'**informazione contenuta nel campione** (attraverso la verosimiglianza) per ottenere una **distribuzione a posteriori** su  $\theta$ , che rappresenta lo stato di conoscenza aggiornato.

Da questo punto di vista, l'inferenza non è più una stima di qualcosa che esiste "là fuori", ma un processo di revisione coerente delle proprie credenze alla luce dell'evidenza. Questo rende l'approccio bayesiano particolarmente adatto in contesti in cui:

- l'esperienza pregressa o la letteratura suggerisce una conoscenza parziale ma strutturata del fenomeno;
- l'incertezza ha un ruolo centrale nella decisione (come nella teoria delle decisioni o nella valutazione dei rischi);
- il numero di osservazioni è limitato, o l'inferenza richiede uno sforzo di integrazione tra fonti diverse.

L'impostazione bayesiana è concettualmente più vicina all'**empirismo epistemico** e ha trovato crescente applicazione grazie alla disponibilità di strumenti computazionali per approssimare le distribuzioni a posteriori (come i metodi Monte Carlo via Markov Chain). Tuttavia, essa richiede anche una maggiore responsabilità soggettiva da parte dell'analista, che deve esplicitare le proprie ipotesi a priori e accettare che l'inferenza dipenda, almeno in parte, da esse.

Nel presente corso non utilizzeremo formalmente il quadro bayesiano, ma ne terremo conto a livello concettuale. In alcuni esercizi verrà proposta l'interpretazione soggettiva della probabilità come alternativa alla frequenza relativa. Più avanti, sarà utile confrontare le risposte classiche e quelle bayesiane a problemi semplici, per cogliere il significato profondo delle differenze tra i due approcci.



Il problema della **stima** nasce quando si vuole assegnare un valore numerico a una quantità incognita, chiamata **parametro**, a partire da un insieme limitato di osservazioni. In statistica, questa operazione si fonda sull'idea che i dati provengano da un **meccanismo aleatorio** e che il parametro rappresenti una proprietà stabile della popolazione o del modello da cui i dati sono stati generati.

Nel nostro contesto, un parametro può essere, ad esempio, la media  $\mu$ , la varianza  $\sigma^2$ , una proporzione  $\pi$ , un tasso  $\lambda$ , o più in generale un elemento  $\theta$  di uno spazio dei parametri  $\Theta$ . La stima si basa sull'uso di un **campione**, ossia un insieme di dati osservati, che contiene informazione parziale sulla popolazione o sul modello.

## 11.1 Campionamento

Un campione casuale è un certo numero di  $n$  di osservazioni prese a caso dalla popolazione  $\mathcal{P}$ . Nel quadro dell'inferenza statistica, il **campionamento** è il processo attraverso cui si seleziona un sottoinsieme di unità da una popolazione  $\mathcal{P}$ , al fine di trarne informazioni utili. Il tipo di inferenza che si può condurre dipende in larga parte dal modo in cui è stato ottenuto il campione.

### 11.1.1 Campioni casuali

Nel nostro percorso considereremo due situazioni fondamentali:

- Il **campionamento con reinserimento** (o con restituzione), dove ogni osservazione è estratta in modo indipendente dalla popolazione o dal modello.
- Il **campionamento senza reinserimento**, dove le osservazioni non sono indipendenti e provengono da una popolazione finita di dimensione  $N$ , da cui vengono estratti  $n$  elementi senza ripetizioni.

Nel primo caso,  $X_1, \dots, X_n$  sono **IID** (indipendenti e identicamente distribuite) e rappresentano il caso classico di inferenza da popolazioni infinite o da modelli. Nel secondo, si ha una struttura di **dipendenza debole** tra le unità campionarie, e l'inferenza deve tener conto della dimensione della popolazione e della frazione di campionamento  $n/N$ .

### 11.1.2 Lessico

Un campione in essere (prima di essere osservato) è una sequenza di VC

$$X_1, \dots, X_n$$

un campione osservato è un insieme di numeri

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

Lo *Spazio dei Campioni*  $\mathcal{S}$  è il supporto della VC multipla  $X_1, \dots, X_n$  è l'insieme di tutti i possibili campioni di ampiezza  $n$ :  $(x_1, \dots, x_n)$  che possiamo osservare.

**Tabella 11.1:** Campioni SR  $n = 2$ 

	0 ; 1/3	1 ; 1/3	3 ; 1/3	7 ; 1/3
0 ; 1/4	-	(0, 1) ; 1/12	(0, 3) ; 1/12	(0, 7) ; 1/12
1 ; 1/4	(1, 0) ; 1/12	-	(1, 3) ; 1/12	(1, 7) ; 1/12
3 ; 1/4	(3, 0) ; 1/12	(3, 1) ; 1/12	-	(3, 7) ; 1/12
7 ; 1/4	(7, 0) ; 1/12	(7, 1) ; 1/12	(7, 3) ; 1/12	-

**Tabella 11.2:** Campionamento CR  $n = 2$ 

	0 ; 1/4	1 ; 1/4	3 ; 1/4	7 ; 1/4
0 ; 1/4	(0, 0) ; 1/16	(0, 1) ; 1/16	(0, 3) ; 1/16	(0, 7) ; 1/16
1 ; 1/4	(1, 0) ; 1/16	(1, 1) ; 1/16	(1, 3) ; 1/16	(1, 7) ; 1/16
3 ; 1/4	(3, 0) ; 1/16	(3, 1) ; 1/16	(3, 3) ; 1/16	(3, 7) ; 1/16
7 ; 1/4	(7, 0) ; 1/16	(7, 1) ; 1/16	(7, 3) ; 1/16	(7, 7) ; 1/16

### 11.1.3 Esempio al finito

Si dispone di un'urna contenente 4 bussolotti

$$\{0, 1, 3, 7\}$$

$$\begin{aligned}
 \mu &= E(X_i) = \sum_{x \in S_X} xP(X = x) \\
 &= 0\frac{1}{4} + 1\frac{1}{4} + 3\frac{1}{4} + 7\frac{1}{4} \\
 &= 2.75 \\
 \sigma^2 &= V(X_i) = \sum_{x \in S_X} x^2P(X = x) - \mu^2 \\
 &= \left(0^2\frac{1}{4} + 1^2\frac{1}{4} + 3^2\frac{1}{4} + 7^2\frac{1}{4}\right) - (2.75)^2 \\
 &= 7.188
 \end{aligned}$$

Se estraiamo  $n = 2$  volte Senza Reinserimento, lo spazio dei campioni è di dimensione  $\#\mathcal{S} = 4 \times 3$  ed è descritto in tabella (11.1).

Se invece estraiamo CR, lo spazio dei campioni è di dimensione  $\#\mathcal{S} = 4^2 = 16$  ed è descritto in tabella (11.2).

## 11.2 Il Modello Statistico

Un **modello statistico** descrive formalmente il processo che ha generato i dati osservati. È composto da due elementi principali:

1. un **modello probabilistico**, che specifica la distribuzione delle osservazioni in funzione di uno o più parametri incogniti;

2. un **piano di campionamento**, che determina le modalità con cui le osservazioni sono state ottenute dalla popolazione di riferimento.

In queste pagine assumeremo sempre che le osservazioni  $X_1, \dots, X_n$  siano **indipendenti e identicamente distribuite** (IID), ossia ottenute tramite **campionamento casuale semplice con reinserimento**. Questo tipo di campionamento è coerente con l'ipotesi che ogni unità del campione sia stata estratta in modo indipendente, e che tutte le unità della popolazione abbiano la stessa probabilità di essere selezionate.

Nel nostro contesto, il modello probabilistico scriveremo con  $X_1, \dots, X_n$   $n$  VC IID, replicazioni della stessa variabile  $X \sim \mathcal{L}(\theta), \theta \in \Theta$

$$X_i \sim \mathcal{L}(\theta), \forall i = 1, \dots, n \quad \theta \in \Theta,$$

dove  $\mathcal{L}(\theta)$  è una famiglia di distribuzioni parametrica e  $\theta$  è il parametro (o vettore di parametri) che descrive la popolazione e  $\Theta$  lo spazio in cui  $\theta$  è definito.

Useremo le lettere greche per i parametri (incogniti) della popolazione e lettere latine per le osservazioni.

### 11.2.1 Esempi

- $X_i \sim \text{Ber}(\pi)$ , con  $\pi \in [0, 1]$ : modello per variabili dicotomiche, adatto per rappresentare esiti binari (successo/insuccesso). In questo caso  $\theta \equiv \pi$  e  $\Theta \equiv [0, 1]$ .
- $X_i \sim \text{Pois}(\lambda)$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ : modello per conteggi, adatto a descrivere eventi rari su un intervallo fissato. In questo caso  $\theta \equiv \lambda$  e  $\Theta \equiv \mathbb{R}^+$ .
- $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ , con  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ : modello per variabili continue, con distribuzione simmetrica e forma a campana. In questo caso  $\theta \equiv (\mu, \sigma^2)$  e  $\Theta \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ .
- $X_i \sim \mathcal{L}(\theta)$ : notazione generica per una famiglia distribuzionale qualsiasi, dove  $\theta \in \Theta$  rappresenta i parametri che vogliamo stimare.

Nel *paradigma classico* la probabilità si assegna alle  $X_i$ , in quanto risultato di un sorteggio casuale

$$P(X_1, \dots, X_n; \theta)$$

Ma non è consentito trattare con lo strumento della probabilità l'incertezza sul parametro  $\theta$  che governa la popolazione. Perché  $\theta$  è incognito ma non è il frutto di una selezione casuale.

Nel *paradigma Bayesiano* l'incertezza sul parametro viene trattata con gli stessi strumenti dell'incertezza sui dati, dando vita ad un teoria coerente e molto utile per alcune applicazioni particolari.

### 11.2.2 Scopo del modello

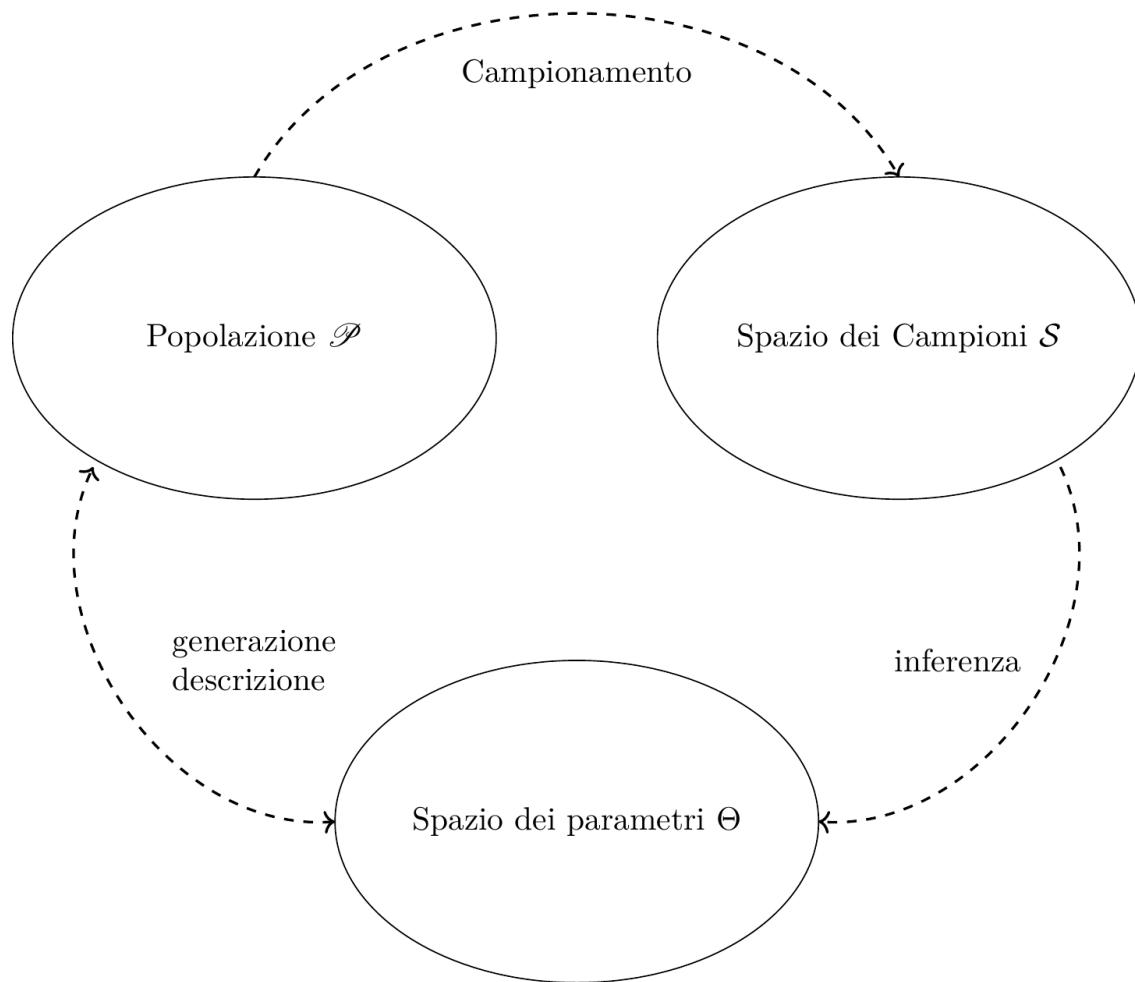
L'obiettivo dell'inferenza statistica è trarre conclusioni sul parametro  $\theta$ , sulla base del campione osservato  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . Lo stesso campione può essere interpretato in modo diverso a seconda del modello adottato: per questo, esplicitare il modello è sempre il primo passo di un'analisi statistica. Perfetto, possiamo riformulare e ampliare il paragrafo sul campionamento, tenendo conto della necessità di collegarlo bene al discorso sull'inferenza e sul modello statistico. Ti propongo una bozza con tono sobrio e coerente con il resto del libro:

### 11.3 Gli stimatori

*Stimare*, in statistica, significa scegliere un punto (stima puntuale) o una regione (stima intervallare) dello spazio dei parametri  $\Theta$  alla luce dei dati  $x_1, \dots, x_n$ .

Uno **stimatore** puntuale (point estimator) è una statistica  $\hat{\theta}$  che trasforma il campione  $X_1, \dots, X_n$  in un punto dello spazio dei parametri:

$$\hat{\theta} : \mathcal{S} \rightarrow \Theta$$

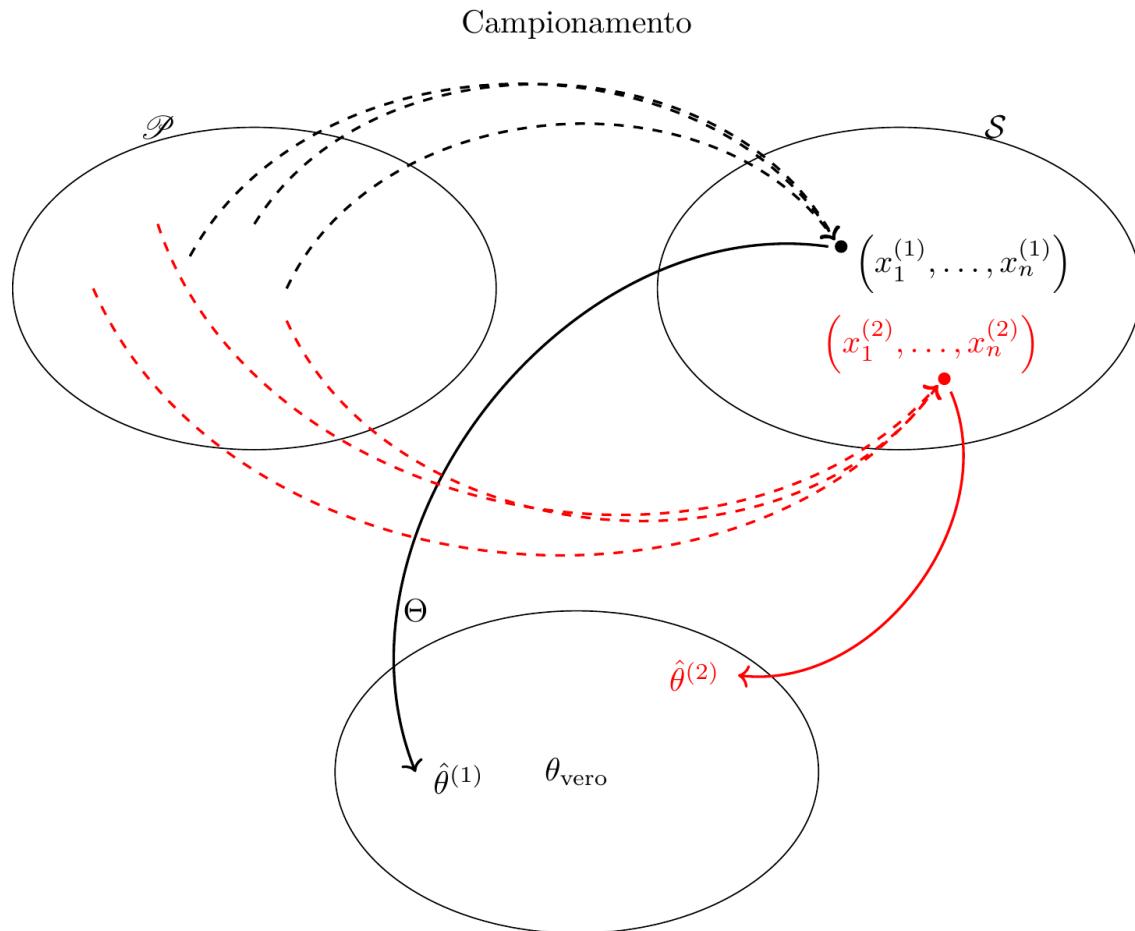


**Figura 11.1:** Schema concettuale dell'inferenza statistica

Il campione  $X_1, \dots, X_n$  casuale viene trasformato attraverso  $\hat{\theta}$  in un punto specifico di  $\Theta$

$$\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \hat{\theta} \in \Theta$$

Uno **stimatore** è una variabile casuale in quanto funzione di valori casuali.



**Figura 11.2:** Ogni campione è un punto nello spazio dei campioni, ad ogni campione corrisponde una stima nello spazio dei parametri

**Esempio 11.3.1.** Da una popolazione che ha  $E(X_i) = \mu$  incognita, potremmo proporre di *stimare*  $\mu$  con la media dei dati che *otterremo*:

$$\hat{\mu}(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} = \hat{\mu}$$

**Esempio 11.3.2.** Da una popolazione di Poisson che ha  $X_i \sim \text{Pois}(\lambda)$ ,  $\lambda$  incognita, potremmo proporre di *stimare*  $\lambda$  con la mediana dei dati che *otterremo*:

$$\hat{\lambda}(X_1, \dots, X_n) = X_{0,5} = \hat{\lambda}$$

### 11.3.1 Stimatori e Stime

#### Nota

- Uno **Stimatore**:  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  è funzione di  $X_1, \dots, X_n$  è una **VC**
- Una **Stima**:  $\hat{\theta}_{\text{obs}} = \hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$  è funzione di  $x_1, \dots, x_n$  e dunque è un **numero**

**Esempio 11.3.3.** Lanciamo una moneta e non sappiamo se è bilanciata, cioè  $\pi$ , la probabilità di ottenere testa, è incognita, potremmo proporre di *stimare*  $\pi$  con la proporzione dei dati e *otterremo*:

$$\hat{\pi}(X_1, \dots, X_n) = \frac{S_n}{n} = \hat{\pi}$$

Estraiamo  $n = 5$  individui dalla popolazione  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1$ ,

Per ottenere  $\hat{\mu}$  la stima di  $\mu$  applichiamo  $\hat{\theta}$  ai dati e otteniamo

$$\hat{\pi}_{\text{obs}} = \hat{\pi}(0, 1, 0, 1, 1) = \frac{3}{5} = 0.6$$

**Esempio 11.3.4.** Da una popolazione che ha  $E(X_i) = \mu$  incognita, potremmo proporre di *stimare*  $\mu$  con la media dei dati che *otterremo*:

$$\hat{\mu}(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \hat{\mu}$$

Estraiamo  $n = 5$  individui dalla popolazione  $x_1 = 2.1, x_2 = 2.4, x_3 = 3.2, x_4 = 1.7, x_5 = 3.0$ ,

Per ottenere  $\hat{\mu}$  la stima di  $\mu$  applichiamo  $\hat{\theta}$  ai dati e otteniamo

$$\hat{\mu}_{\text{obs}} = \hat{\mu}(2.1, 2.4, 3.2, 1.7, 3.0) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{1}{5} 17.8 = 3.56$$

**Esempio 11.3.5.** Da una popolazione di Poisson che ha  $X_i \sim \text{Pois}(\lambda)$ ,  $\lambda$  incognita, potremmo proporre di *stimare*  $\lambda$  con la mediana dei dati che *otterremo*:

$$\hat{\lambda}(X_1, \dots, X_n) = X_{0.5} = \hat{\lambda}$$

Osserviamo  $n = 7$  valori (già riordinati)  $x_{(1)} = 0, x_{(2)} = 0, x_{(3)} = 2, x_{(4)} = 2, x_{(5)} = 3, x_{(6)} = 4, x_{(7)} = 7$ ,

Per ottenere  $\hat{\lambda}$  la stima di  $\lambda$  applichiamo  $\hat{\theta}$  ai dati e otteniamo

$$\hat{\lambda}(x_1, \dots, x_7) = x_{0.5} = x_{(4)} = 2$$

### 11.3.2 Come scegliere uno stimatore

La definizione non offre un criterio per la scelta. Gli stimatori vengono costruiti per avere la miglior *precisione possibile*. La precisione non si può valutare sulla singola *stima* ma studiando, prima di osservare i dati, le proprietà probabilistiche dello *stimatore*.

Le proprietà auspicabili per uno stimatore sono di due tipi

- Esatte (per  $n$  finito)
- Asintotiche (per  $n$  che diverge)

### 11.3.3 Proprietà Auspicabili di uno stimatore (per $n$ finito)

Uno stimatore si dice *corretto* (*unbiased*) se in media cade sul parametro vero.

**Definizione 11.3.1** (Correttezza di uno stimatore). Siano  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n$  VC, IID, replicazioni della stessa  $X \sim \mathcal{L}(\theta)$ , sia  $\hat{\theta}$  uno stimatore per  $\theta$ . Lo stimatore  $\hat{\theta}$  si dice **corretto** se

$$E(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)) = E(\hat{\theta}) = \theta$$

La misura dell'errore di stima è data dalla distanza quadratica media delle stime dal valore vero.

**Definizione 11.3.2** (Mean Squared Error di uno stimatore). Si definisce **Errore Quadratico Medio** (*Mean Squared Error*) la quantità

$$MSE(\hat{\theta}) = E((\hat{\theta} - \theta)^2) = V(\hat{\theta}) + B^2(\hat{\theta})$$

dove

$$B(\hat{\theta}) = |E(\hat{\theta}) - \theta|$$

Se lo stimatore è corretto allora il *MSE* coincide con la varianza dello stimatore.

se  $\hat{\theta}$  è corretto allora

$$MSE(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta})$$

L'efficienza è una quantità teorica che dipende da quantità incognite, ma il suo calcolo teorico può essere utilizzato per confrontare diversi stimatori.

**Definizione 11.3.3** (Efficienza di uno stimatore). Siano  $\hat{\theta}_1$  e  $\hat{\theta}_2$  due stimatori per  $\theta$ , si dice che  $\hat{\theta}_1$  è **più efficiente** di  $\hat{\theta}_2$  se e solo se

$$MSE(\hat{\theta}_1) < MSE(\hat{\theta}_2)$$

#### Nota

Se  $\hat{\theta}_1$  e  $\hat{\theta}_2$  sono entrambi corretti, allora,  $\hat{\theta}_1$  è **più efficiente** di  $\hat{\theta}_2$  se e solo se

$$V(\hat{\theta}_1) < V(\hat{\theta}_2)$$

L'errore di uno stimatore è l'inverso della sua **precisione**.

### 11.3.4 Media aritmetica e varianza campionaria caso IID

Siano  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n$  VC, IID, replicazioni della stessa  $X$  tale che  $E(X) = \mu$  e  $V(X) = \sigma^2$ , sia  $\hat{\theta} \equiv \hat{\mu}$  uno stimatore per  $\mu$

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Dai risultati che già conosciamo sappiamo che

$$E(\hat{\mu}) = \mu$$

e dunque  $\hat{\mu}$  è sempre uno stimatore corretto per  $\mu$ . Essendo  $\hat{\mu}$  corretto per  $\mu$  allora

$$MSE(\hat{\mu}) = V(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Si consideri la varianza campionaria:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2$$

Si può dimostrare che

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 < \sigma^2$$

### 11.3.5 Media aritmetica campionamento SR (popolazioni finite)

Siano  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n$  VC, osservazioni estratte SR da una popolazione  $X$  di  $N$  individui, tale che  $E(X) = \mu$  e  $V(X) = \sigma^2$ , sia  $\hat{\theta} \equiv \hat{\mu}$  uno stimatore per  $\mu$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Allora

$$E(\hat{\mu}) = \mu$$

e dunque  $\hat{\mu}$  è sempre uno stimatore corretto per  $\mu$ . Essendo  $\hat{\mu}$  corretto per  $\mu$  allora

$$MSE(\hat{\mu}) = V(\hat{\mu})$$

Per calcolare  $V(\hat{\mu})$  dobbiamo tenere conto della *frazione di campionamento*  $n/N$

$$MSE(\hat{\mu}) = \frac{N-n}{N-1} \frac{\sigma^2}{n}$$

dove  $\frac{N-n}{N-1}$  è chiamato *coefficiente di correzione per popolazioni finite*. Osserviamo che più alto è  $n$  più il coefficiente tende ad 1. Se  $n = N$  il coefficiente diventa zero il campione è diventato l'intera popolazione e l'incertezza sulla media è zero.

**Tabella 11.3:** Valori medi dei campioni SR senza reinserimento di due elementi

	0 ; 1/3	1 ; 1/3	3 ; 1/3	7 ; 1/3
0 ; 1/4	-	0.5 ; 1/12	1.5 ; 1/12	3.5 ; 1/12
1 ; 1/4	0.5 ; 1/12	-	2 ; 1/12	4 ; 1/12
3 ; 1/4	1.5 ; 1/12	2 ; 1/12	-	5 ; 1/12
7 ; 1/4	3.5 ; 1/12	4 ; 1/12	5 ; 1/12	-

### 11.3.6 Esempio al finito

Riprendiamo il nostro esempio al finito con una popolazione di  $N = 4$

$$\{0, 1, 3, 7\}$$

$$\begin{aligned}
 \mu &= E(X_i) = \sum_{x \in S_X} xP(X = x) \\
 &= 0\frac{1}{4} + 1\frac{1}{4} + 3\frac{1}{4} + 7\frac{1}{4} \\
 &= 2.75 \\
 \sigma^2 &= V(X_i) = \sum_{x \in S_X} x^2P(X = x) - \mu^2 \\
 &= \left(0^2\frac{1}{4} + 1^2\frac{1}{4} + 3^2\frac{1}{4} + 7^2\frac{1}{4}\right) - (2.75)^2 \\
 &= 7.188
 \end{aligned}$$

Se estraiamo  $n = 2$  volte Senza Reinserimento, lo spazio dei campioni è di dimensione  $\#\mathcal{S} = 4 \times 3$  ed è descritto in tabella (11.1). Qui scegliamo

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$$

In tabella (11.3) la distribuzione della VC media aritmetica campionaria.

Ricaviamo la distribuzione di  $\hat{\mu}$

$\hat{\mu}$	0.5	1.5	2	3.5	4	5
$P(\hat{\mu})$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

il suo valore atteso

$$E(\hat{\mu}) = \frac{2}{12} \cdot (0.5 + 1.5 + 2 + 3.5 + 4 + 5) = \frac{16.5}{6} = 2.75 = \mu$$

lo stimatore è corretto. Ricaviamo il suo MSE

$$\begin{aligned}
 MSE(\hat{\mu}) &= V(\hat{\mu}) + B^2(\hat{\mu}) \\
 &= V(\hat{\mu}) \quad \text{in virtù della correttezza} \\
 &= \left( 0.5^2 \frac{1}{6} + 1.5^2 \frac{1}{6} + 2^2 \frac{1}{6} + \right. \\
 &\quad \left. + 3.5^2 \frac{1}{6} + 4^2 \frac{1}{6} + 5^2 \frac{1}{6} \right) - (2.75)^2 \\
 &= 2.3958 \\
 &= \frac{4-2}{4-1} \frac{7.1875}{2} \\
 &= \frac{N-n}{N-1} \frac{\sigma^2}{n}
 \end{aligned}$$

Se estraiamo  $n = 2$  volte **con reinserimento**, lo spazio dei campioni è di dimensione  $\#\mathcal{S} = 4 \times 4$  ed è descritto in tabella (11.2). Anche qui scegliamo:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$$

In tabella qui sotto è riportata la distribuzione della variabile casuale media aritmetica campionaria.

	0;	$\frac{1}{4}$	1;	$\frac{1}{4}$	3;	$\frac{1}{4}$	7;	$\frac{1}{4}$
0; $\frac{1}{4}$	0;	$\frac{1}{16}$	0.5;	$\frac{1}{16}$	1.5;	$\frac{1}{16}$	3.5;	$\frac{1}{16}$
1; $\frac{1}{4}$	0.5;	$\frac{1}{16}$	1;	$\frac{1}{16}$	2;	$\frac{1}{16}$	4;	$\frac{1}{16}$
3; $\frac{1}{4}$	1.5;	$\frac{1}{16}$	2;	$\frac{1}{16}$	3;	$\frac{1}{16}$	5;	$\frac{1}{16}$
7; $\frac{1}{4}$	3.5;	$\frac{1}{16}$	4;	$\frac{1}{16}$	5;	$\frac{1}{16}$	7;	$\frac{1}{16}$

E ricaviamo la distribuzione di,  $\hat{\mu}$

$\hat{\mu}$	0	0.5	1	1.5	2	3	3.5	4	5	7
$P(\hat{\mu})$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

Calcoliamo valore atteso e MSE.

$$\begin{aligned}
 E(\hat{\mu}) &= \sum_{\hat{\mu}} \hat{\mu} P(\hat{\mu}) \\
 &= 0 \frac{1}{16} + 0.5 \frac{2}{16} + 1 \frac{1}{16} + 1.5 \frac{2}{16} + 2 \frac{2}{16} + \\
 &\quad + 3 \frac{1}{16} + 3.5 \frac{2}{16} + 4 \frac{2}{16} + 5 \frac{2}{16} + 7 \frac{1}{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2.75 = \mu \quad \text{lo stimatore è corretto} \\
MSE(\hat{\mu}) &= V(\hat{\mu}) + B^2(\hat{\mu}) \\
&= V(\hat{\mu}) \\
&= \left( 0^2 \frac{1}{16} + 0.5^2 \frac{2}{16} + 1^2 \frac{1}{16} + 1.5^2 \frac{2}{16} + 2^2 \frac{2}{16} + \right. \\
&\quad \left. + 3^2 \frac{1}{16} + 3.5^2 \frac{2}{16} + 4^2 \frac{2}{16} + 5^2 \frac{2}{16} + 7^2 \frac{1}{16} \right) - (2.75)^2 \\
&= 3.59375 \\
&= \frac{7.1875}{2} \\
&= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

Consideriamo la stima della varianza

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2} ((X_1 - \hat{\mu})^2 + (X_2 - \hat{\mu})^2)$$

	0; $\frac{1}{4}$	1; $\frac{1}{4}$	3; $\frac{1}{4}$	7; $\frac{1}{4}$
0; $\frac{1}{4}$	0; $\frac{1}{16}$	0.25; $\frac{1}{16}$	2.25; $\frac{1}{16}$	12.25; $\frac{1}{16}$
1; $\frac{1}{4}$	0.25; $\frac{1}{16}$	0; $\frac{1}{16}$	1; $\frac{1}{16}$	9; $\frac{1}{16}$
3; $\frac{1}{4}$	2.25; $\frac{1}{16}$	1; $\frac{1}{16}$	0; $\frac{1}{16}$	4; $\frac{1}{16}$
7; $\frac{1}{4}$	12.25; $\frac{1}{16}$	9; $\frac{1}{16}$	4; $\frac{1}{16}$	0; $\frac{1}{16}$

E ricaviamo la distribuzione di,  $\hat{\sigma}^2$

$\hat{\sigma}^2$	0	0.25	1	2.25	4	9	12.25
$P(\hat{\sigma}^2)$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$

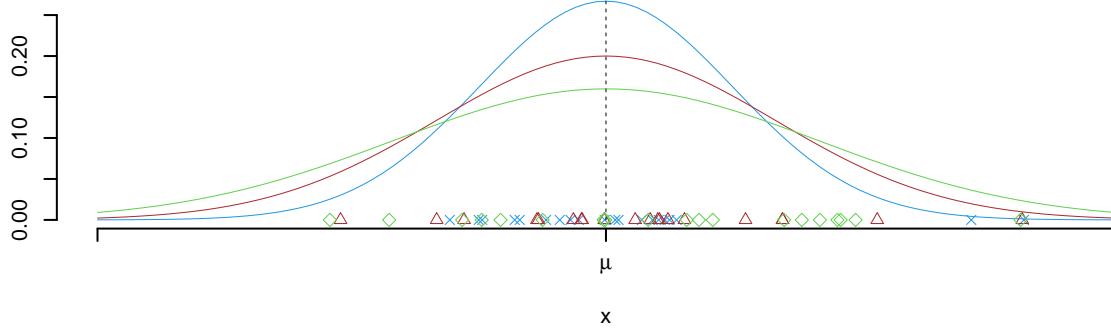
e osserviamo che

$$\begin{aligned}
E(\hat{\sigma}^2) &= \sum_{\hat{\sigma}^2} \hat{\sigma}^2 P(\hat{\sigma}^2) \\
&= 0 \frac{4}{16} + 0.25 \frac{2}{16} + 1 \frac{2}{16} + 2.25 \frac{2}{16} + \\
&\quad + 4 \frac{2}{16} + 9 \frac{2}{16} + 12.25 \frac{2}{16} \\
&= 3.59375 \\
&= \frac{1}{2} 7.1875 \\
&= \frac{n-1}{n} \sigma^2
\end{aligned}$$

### 11.3.7 Distribuzione delle statistiche

Supponiamo di estrarre campioni di ampiezza  $n$  CR da una popolazione con media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$ . Osservo tre diversi stimatori per  $\mu$ :  $\hat{\mu}_1$ ,  $\hat{\mu}_2$  e  $\hat{\mu}_3$

Se si ripetesse l'estrazione un grande numero di volte potremmo vedere i tre stimatori nel grafico qui di seguito. Lo stimatore in con la distribuzione in blu è il più efficiente dei tre: la probabilità che si avveri lontano dal vero parametro è minore che per gli altri due. Mentre lo stimatore in con la distribuzione in verde è il meno efficiente dei tre: la probabilità che si avveri lontano dal vero parametro è maggiore che per gli altri due.



### 11.3.8 Proprietà Auspicabili di uno stimatore (per $n \rightarrow \infty$ )

Siano  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n$  VC, IID, replicazioni della stessa  $X \sim \mathcal{L}(\theta)$ , sia  $\hat{\theta}$  uno stimatore per  $\theta$ .

**Definizione 11.3.4** (Correttezza Asintotica). Lo stimatore  $\hat{\theta}$  si dice **asintoticamente corretto** se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)) = E(\hat{\theta}) = \theta$$

**Esempio 11.3.6.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\sigma}^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2$$

**Definizione 11.3.5** (Consistenza). Lo stimatore  $\hat{\theta}$  si dice **consistente** (in media quadratica) se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} MSE(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} MSE(\hat{\theta}) = 0$$

Essendo

$$MSE(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + B^2(\hat{\theta})$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} MSE(\hat{\theta}) = 0, \text{ se e solo se } \lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\theta}) = 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} B^2(\hat{\theta}) = 0$$

**Esempio 11.3.7 (Consistenza).** Siano  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n$  VC, IID, replicazioni della stessa VC  $X$  con  $E(X) = \mu$  e  $V(X) = \sigma^2$ . Usiamo  $\hat{\mu}$  per stimare  $\mu$ :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{S_n}{n}$$

Siccome  $\hat{\mu}$  è stimatore corretto per  $\mu$ :

$$E(\hat{\mu}) = E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}(E(X_1) + \dots + E(X_n)) = \frac{1}{n}(\mu + \dots + \mu) = \mu$$

Allora

$$MSE(\hat{\mu}) = V(\hat{\mu}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Al divergere di  $n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} MSE(\hat{\mu}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$$

Lo stimatore  $\hat{\mu}$  per  $\mu$  è stimatore **corretto** e **consistente**.

## 11.4 La SD e lo SE

La *standard deviation* (SD)  $\sigma$ , rappresenta la dispersione degli individui dalla media, è un indicatore di *variabilità della popolazione*, per esempio in una popolazione finita di  $N$  individui:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2},$$

la *deviazione standard*  $\sigma$  è la radice della varianza della popolazione  $\sigma^2$ .

Lo *standard error*  $SE(\hat{\theta})$  di uno stimatore  $\hat{\theta}$  per  $\theta$  è un indicatore della *variabilità* dello stimatore nello *spazio dei parametri*

$$SE(\hat{\theta}) = \sqrt{V(\hat{\theta})}$$

Lo *standard error*  $SE(\hat{\theta})$  di uno stimatore  $\hat{\theta}$  per  $\theta$  è la radice della varianza della VC  $\hat{\theta}$ .

La *standard deviation stimata*  $\hat{\sigma}$ , rappresenta la dispersione degli individui *del campione* dalla media *del campione*, è un indicatore di *variabilità del campione*:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2}$$

La *deviazione standard stimata*  $\hat{\sigma}$  è la radice della varianza del campione  $\hat{\sigma}^2$ .

**Esempio 11.4.1.** Lo standard error dello stimatore media aritmetica campionaria  $\hat{\mu}$  per  $\mu$

$$SE(\hat{\mu}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

L'errore che si commette nello stimare una media dipende da due fattori

- la *standard deviation*  $\sigma$  che indica la variabilità degli individui tra di loro
- $1/\sqrt{n}$  che è l'inverso dell'ampiezza del campione

Se  $\sigma$  è incognito viene stimato da (come vedremo nel paragrafo (12.9.4))

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1} \hat{\sigma}^2}$$

Ottenendo

$$\widehat{SE}(\hat{\mu}) = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

## 12.1 Il Modello Statistico

Un modello statistico è l'insieme di un modello probabilistico  $X_i \sim \mathcal{L}(\theta)$  e di un piano di campionamento dalla popolazione  $\mathcal{P}$ . In queste pagine considereremo come unico piano di campionamento il campionamento casuale semplice **con** reintroduzione, ovvero assumeremo sempre le ipotesi IID. Per esempio sono un modello statistico:

- Le  $X_1, \dots, X_n$  sono IID, replicazioni di  $X \sim \text{Ber}(\pi)$ ,  $\pi \in [0, 1]$ .
- Le  $X_1, \dots, X_n$  sono IID, replicazioni di  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .
- Le  $X_1, \dots, X_n$  sono IID, replicazioni di  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $(\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ .
- Le  $X_1, \dots, X_n$  sono IID, replicazioni di  $X \sim \mathcal{L}(\theta)$ ,  $\theta \in \Theta$ .

### 12.1.1 Esiste lo stimatore più efficiente?

Dipende dalle informazioni che abbiamo sulla Popolazione  $\mathcal{P}$ . In contesti *distribution free* e ipotesi IID, senza alcuna ulteriore conoscenza della popolazione, non esistono procedure che possano essere dimostrate *ottimali*, il ricercatore valuta da caso a caso, previa un'attenta analisi descrittiva preliminare. In ipotesi *distribution free* l'intera distribuzione della variabile  $X$  è incognita. Se spostiamo l'attenzione all'*inferenza da modello* ipotizziamo di conoscere la forma della distribuzione di probabilità delle  $X$  a meno dei suoi parametri.

Sotto alcune condizioni di regolarità gli stimatori più efficienti sono gli stimatori di Massima Verosimiglianza. Lo stimatore di massima verosimiglianza parte dell'assunto che tutta l'informazione che un campione fornisce nella comprensione della popolazione risiede in una misura chiamata *Verosimiglianza*.

## 12.2 La Verosimiglianza

La *Verosimiglianza* è una misura di incertezza **non** sul risultato di un esperimento casuale, ma sui meccanismi che generano una sequenza casuale. Nella teoria della verosimiglianza si può parlare di probabilità solo per il campione, ma non per i meccanismi che lo hanno generato. Una volta osservati i dati la conoscenza di questi meccanismi diventa più o meno *verosimile* agli occhi del ricercatore alla luce dell'osservazione.

Nella teoria della verosimiglianza, dunque, si usano due termini diversi: *probabilità* per indicare la misura dell'incertezza sui risultati dell'estrazione del campione e *verosimiglianza* per indicare la misura di incertezza sui meccanismi che hanno prodotto il campione.

La *teoria della verosimiglianza* presuppone la totale ignoranza del ricercatore che esplora un sistema casuale di cui sta cercando di comprendere i parametri.

Se per esempio voglio conoscere la probabilità  $\pi$  di una moneta truccata di porgere Testa, la teoria della verosimiglianza presuppone che per me, prima di osservare il campione, tutti i possibili valori di  $\pi$  siano equamente verosimili, compresi quelli più estremi.

Questa totale ignoranza non è sempre giustificata e per allargare la teoria della verosimiglianza rimando il lettore su testi di statistica Bayesiana che sfruttano il teorema di Bayes per costruire una misura alternativa (più ampia) della verosimiglianza, basata solo sul concetto allargato di probabilità.

Donovan, T. M., and Mickey, R. M. (2019). Bayesian Statistics for Beginners: A Step-by-Step Approach. Oxford: Oxford University Press.

La *funzione di verosimiglianza* è la una funzione di probabilità dei dati, fissata sul campione osservato, in cui la variabile è il parametro. La verosimiglianza è indicata con la lettera  $L$  (*Likelihood*) e si scrive

$$L(\theta; \text{Dati}) \propto P(\text{Dati}; \theta)$$

e si legge che la *verosimiglianza*  $L$  di  $\theta$  è proporzionale  $\propto$  alla probabilità di osservare i dati osservati nell'ipotesi che  $\theta$  sia vera. Il simbolo proporzionale  $\propto$  significa che:

$$L(\theta; \text{Dati}) = \text{Const.} \cdot P(\text{Dati}; \theta)$$

dove *Const.* è una costante qualunque che non dipende da  $\theta$ . Il valore di  $L(\theta; \text{Dati})$  per un  $\theta$  fissato, non ha alcuna significato se non è confrontato con altri valori. Infatti  $L(\theta; \text{Dati})$  **non** è una probabilità, ma se

$$L(\theta_1; \text{Dati}) > L(\theta_2; \text{Dati})$$

Significa che l'ipotesi che sia stato  $\theta = \theta_1$  il valore del parametro del modello che ha generato i dati è più verosimile dell'ipotesi che sia stato  $\theta = \theta_2$ .

### 12.2.1 La Verosimiglianza attraverso un esempio

Supponiamo di avere un'urna che ha solo  $N = 10$  bussolotti alcuni bianchi  $B$  e i rimanenti non bianchi  $\bar{B} = N - B$ , ma non conosciamo  $B$ . Il numero di bianchi  $B$  potrà essere  $0, 1, \dots, 10$ . La VC  $X$  che regista l'evento bianco o nero di una estrazione è chiaramente Bernoulli  $X \sim \text{Ber}(\pi)$  di parametro:

$$\pi = \frac{B}{10}$$

$\pi$  è la proporzione di bussolotti bianchi nell'urna. In questo specifico esempio:

$$\pi \in \left\{ \frac{0}{10} = 0.0, \frac{1}{10} = 0.1, \dots, \frac{9}{10} = 0.9, \frac{10}{10} = 1.0 \right\}$$

Lo spazio dei parametri ha dimensione 11. Uno stimatore ha il compito di scegliere uno di questi 11 valori.

Estraiamo  $n = 5$  bussolotti CR (IID) e otteniamo

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1$$

Se conoscessi  $\pi$  attraverso il calcolo delle probabilità saprei calcolare la probabilità della sequenza (ordinata) 0,1,1,0,1 proveniente da 5 esperimenti di Bernoulli IID

$$\begin{aligned} P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 1 \cap X_4 = 0 \cap X_5 = 1; \pi) &= \\ &= P(X_1 = 0; \pi)P(X_2 = 1; \pi)P(X_3 = 1; \pi)P(X_4 = 0; \pi)P(X_5 = 1; \pi) \\ &= (1 - \pi)\pi\pi(1 - \pi)\pi \\ &= \pi^3(1 - \pi)^5 \end{aligned}$$

La posso calcolare per ogni possibile valore di  $\pi \in \{0.0, 0.1, \dots, 1.0\}$ .

### 12.2.2 Se $\pi$ fosse...

A questo punto graduare decidere i valori di  $\pi$  tra più e meno *verosimili* alla luce dei dati  $\mathbf{x} = (0, 1, 1, 0, 1)$ . Questo si fa sostituendo  $\pi$  con i suoi possibili valori e calcolando la *ipotetica* probabilità.

Se fosse  $\pi = 0$  con quale probabilità avrei osservato la sequenza 0, 1, 1, 0, 1?

$$0^3 \cdot (1 - 0)^2 = 0 \quad \text{l'ipotesi } \pi = 0 \text{ ha verosimiglianza proporzionale a 0}$$

Se fosse  $\pi = 0.1$  con quale probabilità avrei osservato la sequenza 0, 1, 1, 0, 1?

$$0.1^3 \cdot (1 - 0.1)^2 = 0.00081 \quad \text{l'ipotesi } \pi = 0.1 \text{ ha verosimiglianza proporzionale a 0.00081}$$

Se fosse  $\pi = 0.2$  con quale probabilità avrei osservato la sequenza 0, 1, 1, 0, 1?

$$0.2^3 \cdot (1 - 0.2)^2 = 0.00512 \quad \text{l'ipotesi } \pi = 0.2 \text{ ha verosimiglianza proporzionale a 0.00512}$$

Se fosse  $\pi = 0.3$  con quale probabilità avrei osservato la sequenza 0, 1, 1, 0, 1?

$$0.3^3 \cdot (1 - 0.3)^2 = 0.01323 \quad \text{l'ipotesi } \pi = 0.3 \text{ ha verosimiglianza proporzionale a 0.01323}$$

Se fosse  $\pi = 0.4$  con quale probabilità avrei osservato la sequenza 0, 1, 1, 0, 1?

$$0.4^3 \cdot (1 - 0.4)^2 = 0.02304 \quad \text{l'ipotesi } \pi = 0.4 \text{ ha verosimiglianza proporzionale a 0.02304}$$

Se fosse  $\pi = 0.5$  con quale probabilità avrei osservato la sequenza 0, 1, 1, 0, 1?

$$0.5^3 \cdot (1 - 0.5)^2 = 0.03125 \quad \text{l'ipotesi } \pi = 0.5 \text{ ha verosimiglianza proporzionale a 0.03125}$$

Se fosse  $\pi = 0.6$  con quale probabilità avrei osservato la sequenza 0, 1, 1, 0, 1?

$$0.6^3 \cdot (1 - 0.6)^2 = 0.03456 \quad \text{l'ipotesi } \pi = 0.6 \text{ ha verosimiglianza proporzionale a 0.03456}$$

Se fosse  $\pi = 0.7$  con quale probabilità avrei osservato la sequenza 0, 1, 1, 0, 1?

$$0.7^3 \cdot (1 - 0.7)^2 = 0.03087 \quad \text{l'ipotesi } \pi = 0.7 \text{ ha verosimiglianza proporzionale a 0.03087}$$

Se fosse  $\pi = 0.8$  con quale probabilità avrei osservato la sequenza 0, 1, 1, 0, 1?

$$0.8^3 \cdot (1 - 0.8)^2 = 0.02048 \quad \text{l'ipotesi } \pi = 0.8 \text{ ha verosimiglianza proporzionale a 0.02048}$$

Se fosse  $\pi = 0.9$  con quale probabilità avrei osservato la sequenza 0, 1, 1, 0, 1?

$$0.9^3 \cdot (1 - 0.9)^2 = 0.00729 \quad \text{l'ipotesi } \pi = 0.9 \text{ ha verosimiglianza proporzionale a 0.00729}$$

Se fosse  $\pi = 1$  con quale probabilità avrei osservato la sequenza 0, 1, 1, 0, 1?

$$1^3 \cdot (1 - 1)^2 = 0 \quad \text{l'ipotesi } \pi = 1 \text{ ha verosimiglianza proporzionale a 0}$$

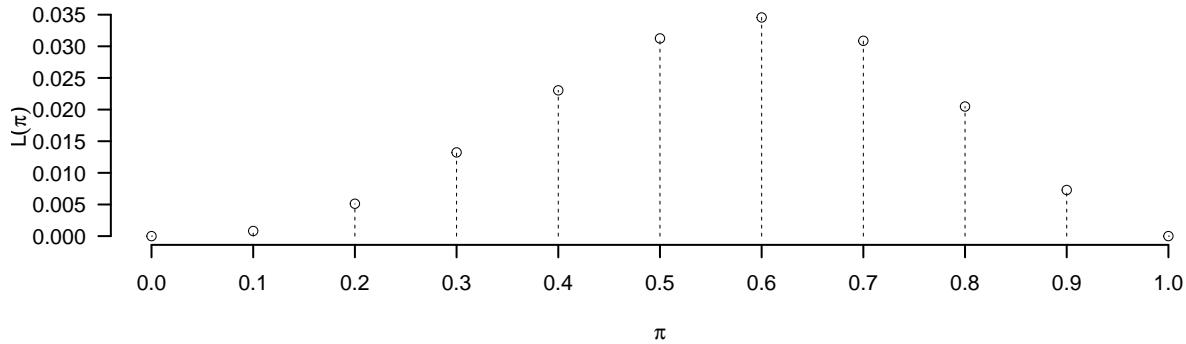
Definiamo la **funzione di verosimiglianza** (Likelihood), la funzione  $L$  del parametro incognito  $\pi$  alla luce dei dati  $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 0, X_5 = 1$  osservati:

$$\begin{aligned}
 L(\pi; X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 0, X_5 = 1) &= \\
 &= L(\pi) \\
 &= K \cdot P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 1 \cap X_4 = 0 \cap X_5 = 1; \pi) \quad \text{con } K > 0 \\
 &\propto P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1 \cap X_3 = 1 \cap X_4 = 0 \cap X_5 = 1; \pi) \\
 &\propto \pi^3(1 - \pi)^2
 \end{aligned}$$

La verosimiglianza gradua quanto un certo valore di  $\pi$  è compatibile con i dati osservati. Per esempio l'ipotesi  $\pi = 0.5$  è più verosimile dell'ipotesi  $\pi = 0.4$ , alla luce dei dati  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1$ ,

$$L(0.5) = 0.0312 > L(0.4) = 0.023$$

Se mettiamo  $\pi$  in ascissa e  $L(\pi)$  in ordinata, otteniamo il grafico della verosimiglianza di  $\pi$ , alla luce dei dati osservati.

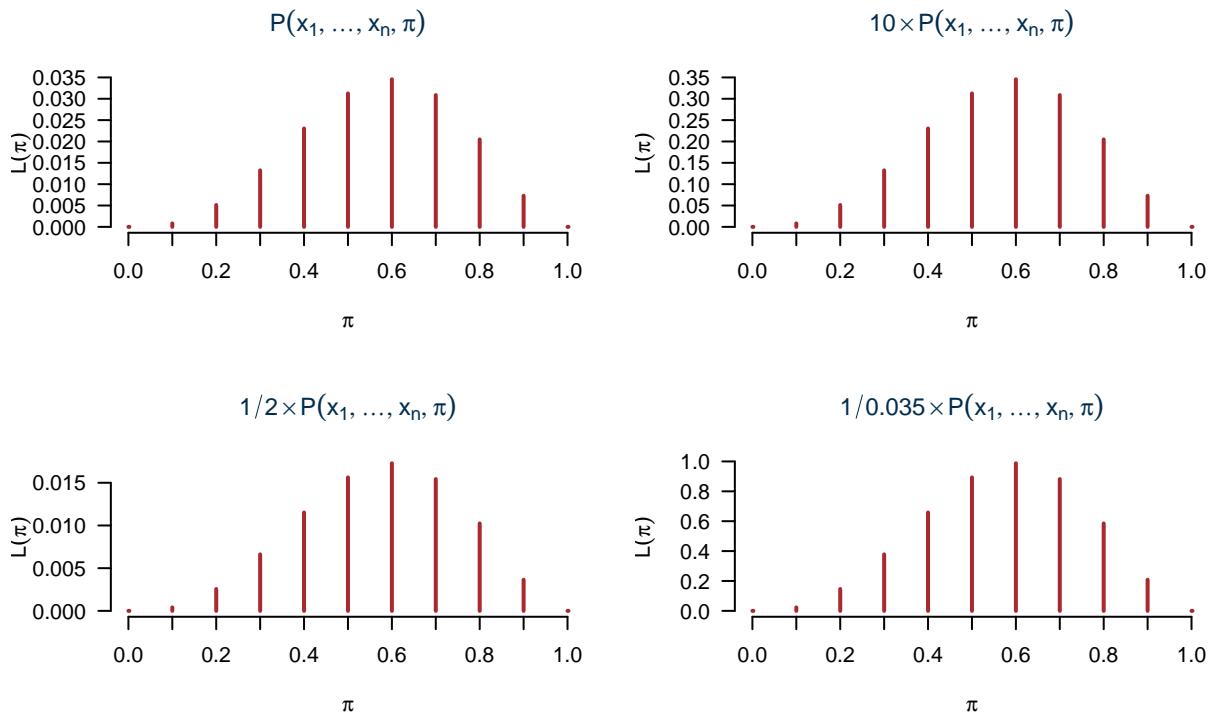


### 12.2.3 La verosimiglianza non è una probabilità

Notiamo che

$$\sum_{\pi \in \{0.0, 0.1, \dots, 1.0\}} L(\pi) = 0 + 0.0008 + \dots + 0 = 0.1666 \neq 1$$

La possiamo moltiplicare per un numero qualunque



#### 12.2.4 La stima di massima verosimiglianza

$$\hat{\pi}_{ML} = \hat{\pi} \text{ è}$$

$$\hat{\pi} \in \{0.0, 0.1, 0.2, \dots, 1.0\} : L(\hat{\pi}) > L(\pi), \forall \pi \neq \hat{\pi}$$

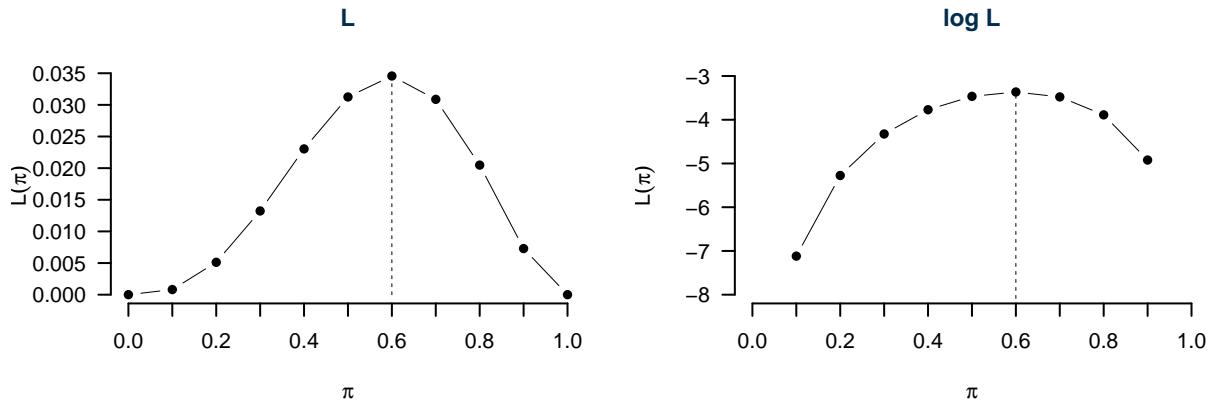
E quindi:

$$\hat{\pi} = 0.6 = \frac{3}{5}$$

Consideriamo  $\ell$ , il logaritmo di  $L$

$$\ell(\pi) = \log L(\pi)$$

$\pi =$	0	0.1000	0.2000	0.3000	0.400	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1
$L(\pi)$	0	0.0008	0.0051	0.0132	0.023	0.0312	0.0346	0.0309	0.0205	0.0073	0
$\ell(\pi)$	-Inf	-7.1185	-5.2746	-4.3253	-3.771	-3.4657	-3.3651	-3.4780	-3.8883	-4.9213	-Inf



### 12.2.5 Esempio IID da popolazione finita (parte due)

Riprendiamo l'esempio di prima: un'urna che ha solo  $N = 10$  bussolotti alcuni bianchi  $B$  altri neri  $N$ , ma non conosciamo  $B$  ed  $N$ . Il numero di bianchi  $B$  potrà essere  $0, 1, \dots, 10$  e  $\pi$  è la proporzione di bussolotti bianchi nell'urna

$$\pi = \frac{B}{10}$$

Estraiamo  $n = 5$  bussolotti CR (IID) e otteniamo 3 *successi* (bussolotto bianco) e 2 *insuccessi* (bussolotto nero). Non conosciamo l'ordine.

$X \sim \text{Binom}(5, \pi)$ , il mio campione è un'estrazione dalla binomiale con  $n = 5$ . Speculiamo su  $\pi$

Se conoscessi  $\pi$  attraverso il calcolo delle probabilità saprei calcolare la probabilità  $P(X) = 3$ , con  $X \sim \text{Binom}(5, \pi)$

$$P(X = 3; \pi) = \binom{5}{3} \pi^3 (1 - \pi)^{5-3} = 10 \cdot \pi^3 (1 - \pi)^2$$

Se fosse  $\pi = 0$  ( $B = 0$ ) con quale probabilità avrei osservato la sequenza  $X = 3$ ?

$$\binom{5}{3} 0^3 \cdot (1 - 0)^2 = 0$$

- l'ipotesi  $\pi = 0$  ha **verosimiglianza** proporzionale a zero

Se fosse  $\pi = 0.1$  ( $B = 1$ ) con quale probabilità avrei osservato la sequenza  $X = 3$ ?

$$\binom{5}{3} 0.1^3 \cdot (1 - 0.1)^2 = 0.0081$$

- l'ipotesi  $\pi = 0.1$  ha **verosimiglianza** proporzionale a 0.0081

...

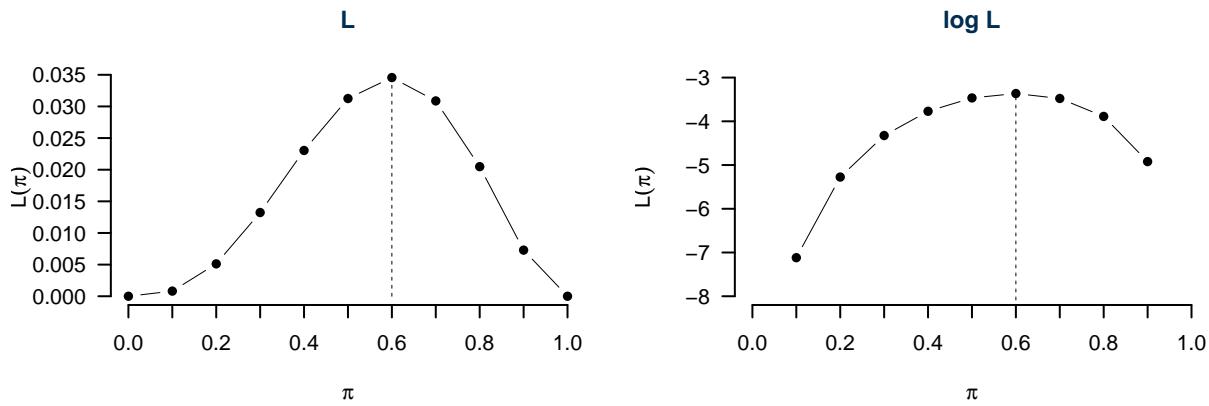
Definiamo la funzione di verosimiglianza (Likelihood), la funzione  $L$  del parametro incognito  $\pi$  alla luce dei dati  $x = 3$  osservati:

$$\begin{aligned} L(\pi; x = 3) &= L(\pi) \\ &\propto P(x = 3; \pi) \\ &= \binom{5}{3} \pi^3 (1 - \pi)^2 \\ &\propto \pi^3 (1 - \pi)^2 \end{aligned}$$

La tabella

$\pi =$	0	0.1000	0.2000	0.3000	0.400	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1
$L(\pi)$	0	0.0008	0.0051	0.0132	0.023	0.0312	0.0346	0.0309	0.0205	0.0073	0
$\log(L(\pi))$	-Inf	-7.1185	-5.2746	-4.3253	-3.771	-3.4657	-3.3651	-3.4780	-3.8883	-4.9213	-Inf

e il grafico



### 12.2.6 Abbiamo trovato il vero $\pi$ ?

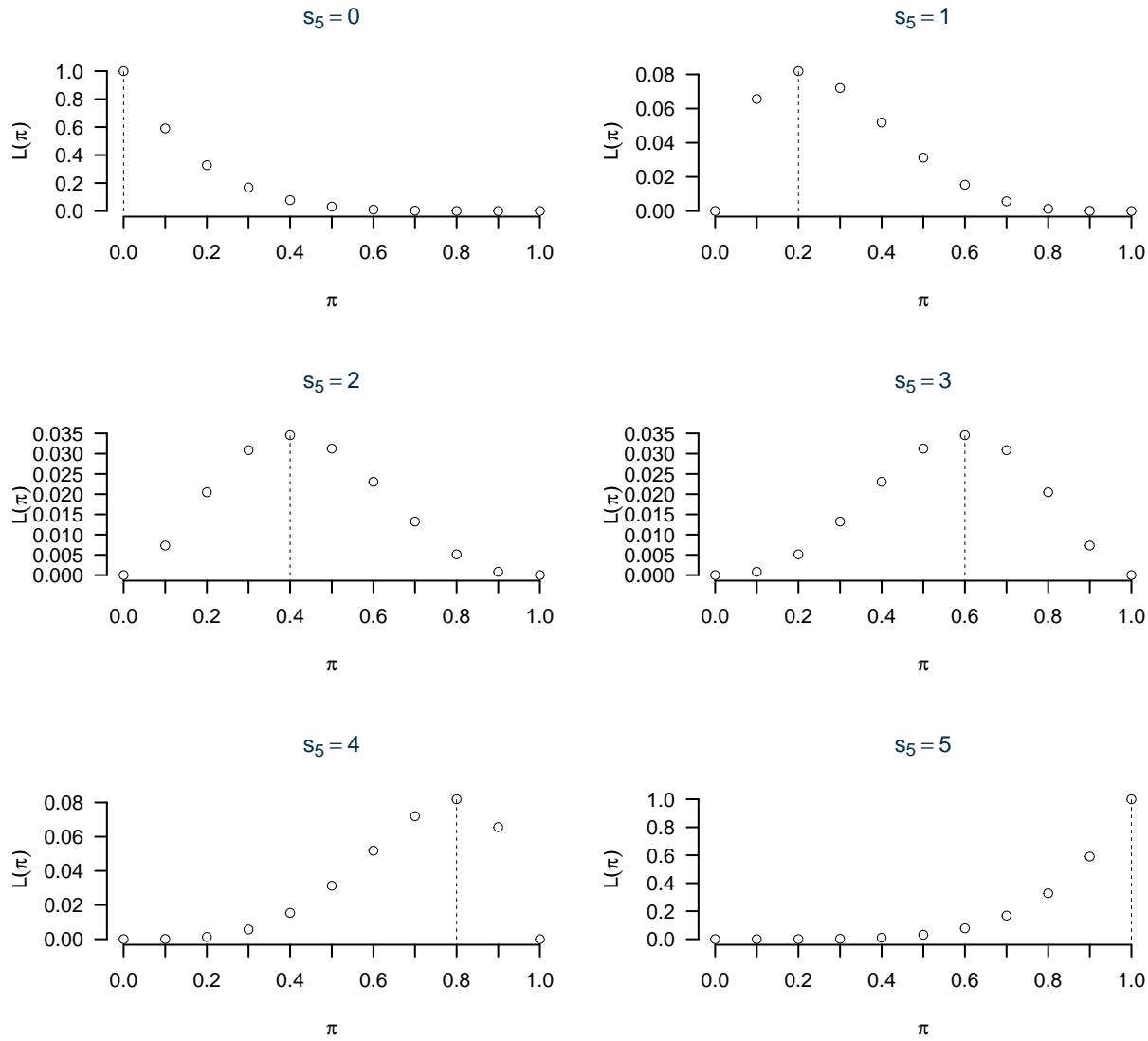
Ovviamente  $\hat{\pi}$  non è  $\pi$  che non conosceremo mai,  $\hat{\pi} = 0.6$  è il valore *più verosimile* tra tutti i possibili valori di  $\pi$ , ma non è  $\pi$ . Ci possiamo chiedere se, per esempio, l'ipotesi  $\pi = 0.5$  è *impossibile*. Anche in questo caso la risposta è negativa,  $\pi = 0.5$  è solo, alla luce dei dati, *meno verosimile* dell'ipotesi  $\pi = 0.6$ . E possiamo anche calcolare di quanto:

$$\frac{L(\hat{\pi} = 0.6)}{L(\pi = 0.5)} = \frac{0.3456}{0.3125} = 1.1059$$

Alla luce dei dati (3 successi su 5 estrazioni) il valore  $\hat{\pi} = 0.6$  è il 10.592% *più verosimile* di  $\pi = 0.5$ .

$$(1.1059 - 1) \times 100\% = 10.592\%$$

### 12.2.7 Muoviamo anche $S_n$



In sintesi, lo spazio  $X \times \Theta$  è l'incrocio tra tutti i possibili  $\pi$  e tutti i possibili  $s_n$ , ne esce una matrice con 10 righe e 10 colonne dove le righe rappresentano  $s_n$  e le colonne  $\pi$ .

	$s_5 = 0$	$s_5 = 1$	$s_5 = 2$	$s_5 = 3$	$s_5 = 4$	$s_5 = 5$
$\pi = 0$	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$\pi = 0.1$	0.5905	0.3280	0.0729	0.0081	0.0005	0.0000
$\pi = 0.2$	0.3277	0.4096	0.2048	0.0512	0.0064	0.0003
$\pi = 0.3$	0.1681	0.3601	0.3087	0.1323	0.0284	0.0024
$\pi = 0.4$	0.0778	0.2592	0.3456	0.2304	0.0768	0.0102
$\pi = 0.5$	0.0312	0.1562	0.3125	0.3125	0.1562	0.0312
$\pi = 0.6$	0.0102	0.0768	0.2304	0.3456	0.2592	0.0778
$\pi = 0.7$	0.0024	0.0284	0.1323	0.3087	0.3601	0.1681
$\pi = 0.8$	0.0003	0.0064	0.0512	0.2048	0.4096	0.3277
$\pi = 0.9$	0.0000	0.0004	0.0081	0.0729	0.3280	0.5905
$\pi = 1$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000

questa tabella, letta per righe ci indica la probabilità, letta per colonne ci indica la *verosimiglianza*.

## 12.3 La Funzione di Verosimiglianza

**Definizione 12.3.1** (Funzione di Verosimiglianza). Siano  $x_1, \dots, x_n$   $n$  osservazioni di  $X \sim \mathcal{L}(\theta)$ ,  $\theta \in \Theta$ , si definisce la verosimiglianza  $L$  di  $\theta$  la funzione:

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = L(\theta) \propto P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n; \theta)$$

La funzione di verosimiglianza è una funzione in  $\theta$  (la variabile) per  $x_1, \dots, x_n$  fissi. Indica quanto un particolare valore di  $\theta$  è supportato dai dati. Più alta è la verosimiglianza più i valori di  $\theta$  che la rendono alta sono supportati dall'evidenza campionaria. Se  $x_1, \dots, x_n$  sono osservazioni *IID* otteniamo

$$\begin{aligned} L(\theta) &\propto P(X_1 = x_1; \theta) \cdot \dots \cdot P(X_n = x_n; \theta) \\ &\propto f(x_1; \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n; \theta) \\ &\propto \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \end{aligned}$$

**Definizione 12.3.2** (Log Verosimiglianza). Si definisce la log-verosimiglianza  $\ell$ :

$$\begin{aligned} \ell(\theta) &= \log L(\theta) \\ &= \log \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \\ &= \sum_{i=1}^n \log f(x_i; \theta) \end{aligned}$$

## 12.4 La Stimatore di massima Verosimiglianza

**Definizione 12.4.1** (Stimatore du Massima Verosimiglianza). Lo stimatore di *massima verosimiglianza* per  $\theta$  è

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} L(\theta) \\ &= \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} \ell(\theta)\end{aligned}$$

$$\hat{\theta} : L(\hat{\theta}) > L(\theta), \forall \theta \neq \hat{\theta}, \quad \ell(\hat{\theta}) > \ell(\theta), \forall \theta \neq \hat{\theta}$$

## 12.5 Il Principio di Verosimiglianza

Secondo la teoria della verosimiglianza, dato un modello statistico tutta l'informazione che un campione  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  porge a  $\theta$  è contenuta nella sua funzione di verosimiglianza.

## 12.6 Verosimiglianza e Statistiche Sufficienti

da scrivere

## 12.7 Caso Bernoulli urna infinita.

Se l'urna è infinita  $N \rightarrow \infty$ , allora  $\pi \in [0, 1]$ . Le variabili  $X_1, \dots, X_n$  tutte replicazioni IID di  $X \sim \text{Ber}(\pi)$ , si realizzano in  $x_1, \dots, x_n$ .

**Esempio.**  $n = 5, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1$ , La probabilità della singola estrazione è

$$P(X_i = x_i; \pi) = f(x_i; \pi) = \pi^{x_i} (1 - \pi)^{1-x_i}$$

La verosimiglianza è

$$\begin{aligned}L(\pi) &\propto \prod_{i=1}^n f(x_i; \pi) \\ &= \prod_{i=1}^n \pi^{x_i} (1 - \pi)^{1-x_i} \\ &= \pi^{x_1} (1 - \pi)^{1-x_1} \pi^{x_2} (1 - \pi)^{1-x_2} \dots \pi^{x_n} (1 - \pi)^{1-x_n} \\ &= \pi^{x_1} \pi^{x_2} \dots \pi^{x_n} (1 - \pi)^{1-x_1} (1 - \pi)^{1-x_2} \dots (1 - \pi)^{1-x_n} \\ &= \pi^{x_1+x_2+\dots+x_n} (1 - \pi)^{1-x_1+1-x_2+\dots+1-x_n} \\ &= \pi^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - \pi)^{n - \sum_{i=1}^n x_i} \\ &= \pi^{s_n} (1 - \pi)^{n - s_n}, \quad s_n = \sum_{i=1}^n x_i\end{aligned}$$

La statistica  $s_n$  contiene **tutta** l'informazione del campione  $x_1, \dots, x_n$ . La log-verosimiglianza è

$$\begin{aligned}\ell(\pi) &= \log L(\pi) \\ &= \log \pi^{s_n} (1 - \pi)^{n - s_n} \\ &= \log \pi^{s_n} + \log(1 - \pi)^{n - s_n} \\ &= s_n \log \pi + (n - s_n) \log(1 - \pi)\end{aligned}$$

Per derivare il  $\pi$  che rende massima la verosimiglianza si deve derivare la funzione  $\ell$  ed uguagliare a zero la derivata prima:

$$\ell'(\pi) = \frac{s_n}{\pi} + (-1) \frac{n - s_n}{1 - \pi} = \frac{s_n}{\pi} - \frac{n - s_n}{1 - \pi}$$

$\hat{\pi}$  è dunque quel valore tale che

$$\ell'(\hat{\pi}) = 0$$

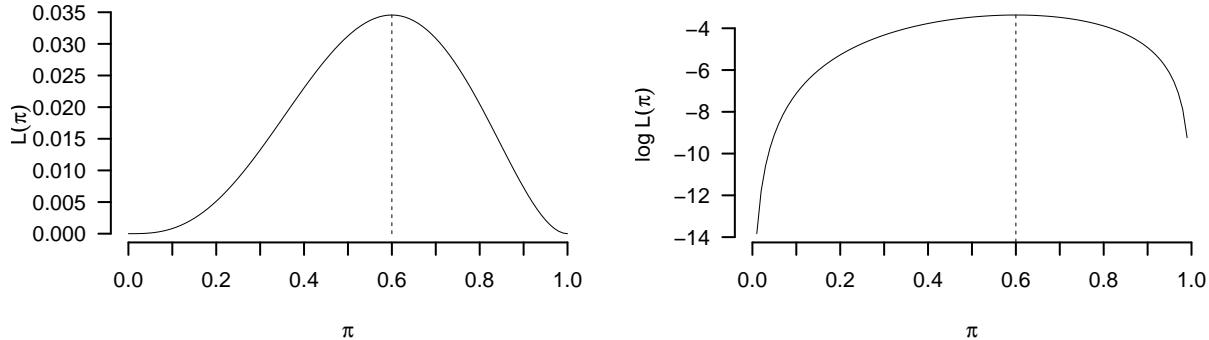
Eguagliamo a zero la derivata prima della log verosimiglianza:

$$\begin{aligned}\ell'(\pi) &= 0 \\ \frac{s_n}{\pi} - \frac{n - s_n}{1 - \pi} &= 0 \\ \frac{s_n(1 - \pi) - (n - s_n)\pi}{\pi(1 - \pi)} &= 0 \quad \text{il denominatore è ininfluente} \\ s_n - s_n\pi - n\pi + s_n\pi &= 0 \\ s_n - n\pi &= 0 \\ n\pi &= s_n \\ \hat{\pi} &= \frac{s_n}{n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\end{aligned}$$

Se  $n = 5, s_5 = 3$  allora:

$$\hat{\pi} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$L(\pi; s_5 = 3), \ell(\pi; s_5 = 3).$$



### 12.7.1 Calcolo delle proprietà di $\hat{\pi}$

Dunque

Siano  $X_1, \dots, X_n$   $n$  VC IID, tali che  $X_i \sim \text{Ber}(\pi)$  lo stimatore di massima verosimiglianza per  $\pi$  è

$$\hat{\pi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Il vero valore di  $\pi$  è incognito ma sappiamo che:

$\hat{\pi}$  è corretto per  $\pi$ , infatti

$$E(\hat{\pi}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{\pi + \dots + \pi}{n} = \frac{n}{n}\pi = \pi$$

E quindi

$$MSE(\hat{\pi}) = V(\hat{\pi}) = \frac{\pi(1-\pi)}{n}$$

che è ancora funzione di  $\pi$ .

Lo stimatore  $\hat{\pi}$  per  $\pi$  è *consistente*, infatti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} MSE(\hat{\pi}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi(1-\pi)}{n} = 0$$

$\hat{\pi}$  è *corretto e consistente* per  $\pi$ .

Osserviamo che:

$$SE(\hat{\pi}) = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

È un risultato teorico che dipende dal *vero*  $\pi$ , che non conosciamo.

L'errore di stima si stima sostituendo a  $\pi$  la sua stima  $\hat{\pi}$

$$\widehat{SE}(\hat{\pi}) = \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}$$

Se  $\hat{\pi} = 0.6$  e  $n = 5$

$$\widehat{SE}(\hat{\pi}) = \sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{5}} = 0.2191$$

**Nota**

Lo Standard Error è l'ordine di grandezza dell'errore commesso.

### 12.7.2 Se $n$ aumenta e $\hat{\pi} = 0.6$

Se  $n = 10$  e  $s_{10} = 6$ , allora anche in questo caso

$$\hat{\pi} = \frac{6}{10} = 0.6$$

ma

$$\widehat{SE}(\hat{\pi}) = \sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{10}} = 0.1549.$$

Se  $n = 20$  e  $s_{10} = 12$ , allora anche in questo caso

$$\hat{\pi} = \frac{12}{20} = 0.6$$

e

$$\widehat{SE}(\hat{\pi}) = \sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{20}} = 0.1095.$$

Se  $n = 100$  e  $s_{100} = 60$ , allora anche in questo caso

$$\hat{\pi} = \frac{60}{100} = 0.6$$

e

$$\widehat{SE}(\hat{\pi}) = \sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{100}} = 0.049.$$

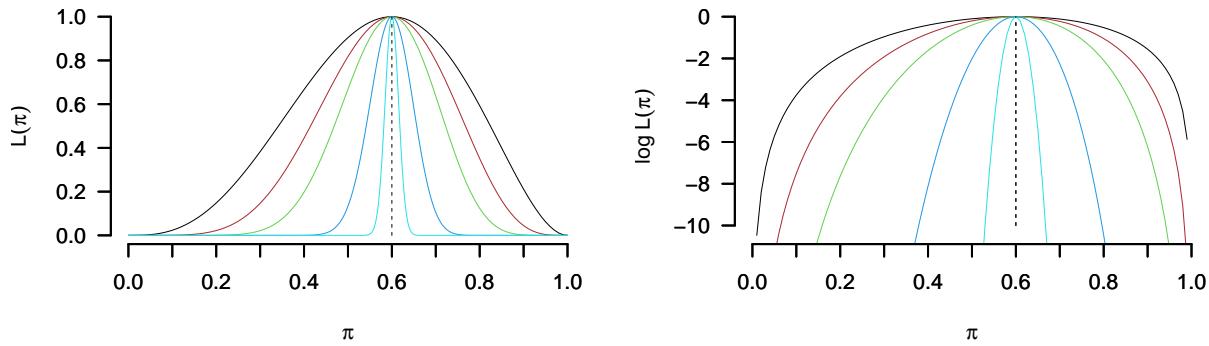
Se  $n = 1000$  e  $s_{10} = 600$ , allora anche in questo caso

$$\hat{\pi} = \frac{600}{1000} = 0.6$$

e

$$\widehat{SE}(\hat{\pi}) = \sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{1000}} = 0.0155.$$

Osserviamo nel grafico  $L(\pi; s_n = 0.6 \cdot n)$  e  $\ell(\pi; s_n = 0.6 \cdot n)$  per  $n = 5, 10, 20, 100, 1000$



### 12.7.3 L'ipotesi $\pi = 0.5$

Se  $n = 5, s_n = 3$  il valore  $\hat{\pi} = 0.6$  è il 10.592% più verosimile di  $\pi = 0.5$ .

$$\frac{L(0.6; s_5 = 3)}{L(0.5; s_5 = 3)} = \frac{0.6^3(1-0.6)^2}{0.5^3(1-0.5)^2} = 1.1059$$

Se  $n = 10, s_n = 6$  il valore  $\hat{\pi} = 0.6$  è il 22.3059% più verosimile di  $\pi = 0.5$ .

$$\frac{L(0.6; s_{10} = 6)}{L(0.5; s_{10} = 6)} = \frac{0.6^6(1-0.6)^4}{0.5^6(1-0.5)^4} = 1.2231$$

Se  $n = 20, s_n = 12$  il valore  $\hat{\pi} = 0.6$  è il 49.5873% più verosimile di  $\pi = 0.5$ .

$$\frac{L(0.6; s_{20} = 6)}{L(0.5; s_{20} = 6)} = \frac{0.6^{12}(1-0.6)^8}{0.5^{12}(1-0.5)^8} = 1.4959$$

Se  $n = 100, s_n = 60$  il valore  $\hat{\pi} = 0.6$  è il 648.9869% più verosimile di  $\pi = 0.5$ .

$$\frac{L(0.6; s_{100} = 60)}{L(0.5; s_{100} = 60)} = \frac{0.6^{60}(1-0.6)^{40}}{0.5^{60}(1-0.5)^{40}} = 7.4899$$

Se  $n = 1000, s_n = 600$  il valore  $\hat{\pi} = 0.6$  è il 55 557 465 413.09% più verosimile di  $\pi = 0.5$ .

$$\frac{L(0.6; s_{1000} = 600)}{L(0.5; s_{1000} = 600)} = \frac{0.6^{600}(1-0.6)^{400}}{0.5^{600}(1-0.5)^{400}} = 555\,574\,655.13$$

## 12.8 Il modello Poisson

Siano  $X_1, \dots, X_n$   $n$  VC IID, replicazioni della stessa  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ , e dunque con funzione di probabilità:

$$f(x_i; \lambda) = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}$$

La verosimiglianza per  $\lambda$  è

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x_2}}{x_2!} e^{-\lambda} \cdot \dots \cdot \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{1}{x_1! x_2! \dots x_n!} \lambda^{x_1} \lambda^{x_2} \dots \lambda^{x_n} e^{-\lambda} e^{-\lambda} \dots e^{-\lambda} \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!} \lambda^{x_1 + \dots + x_n} e^{-\lambda - \dots - \lambda} \\ &\propto \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\lambda} \\ &\propto \lambda^{s_n} e^{-n\lambda}, \quad s_n = \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

Tutta l'**informazione** sulla Poisson è contenuta nella statistica  $s_n$ .

### 12.8.1 La log-verosimiglianza della Poisson

Essendo

$$L(\lambda) \propto \lambda^{s_n} e^{-n\lambda}$$

Allora

$$\begin{aligned} \ell(\lambda) &= \log \lambda^{s_n} e^{-n\lambda} \\ &= \log \lambda^{s_n} + \log e^{-n\lambda} \\ &= s_n \log \lambda - n\lambda, \quad \text{in quanto } \log e^a = a \end{aligned}$$

### 12.8.2 La stima di massima verosimiglianza della Poisson

Essendo

$$\ell(\lambda) = s_n \log \lambda - n\lambda$$

Allora

$$\ell'(\lambda) = \frac{s_n}{\lambda} - n$$

E dunque

$$\ell'(\lambda) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \frac{s_n}{\lambda} - n &= 0 \\
 \frac{s_n}{\lambda} &= n \\
 n\lambda &= s_n \\
 \hat{\lambda} &= \frac{s_n}{n} \\
 \hat{\lambda} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i
 \end{aligned}$$

### 12.8.3 Proprietà dello stimatore di massima verosimiglianza della Poisson $\hat{\lambda}$

Dunque

Siano  $X_1, \dots, X_n$   $n$  VC IID, tali che  $X_i \sim \text{Pois}(\lambda)$  lo stimatore di massima verosimiglianza per  $\lambda$  è

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Correttezza:

$$E(\hat{\lambda}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda = \lambda$$

Mean Squared Error:

$$MSE(\hat{\lambda}) = V(\hat{\lambda}) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{n}{n^2} \lambda = \frac{\lambda}{n}$$

Consistenza:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} MSE(\hat{\lambda}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{n} = 0$$

Standard Error

$$SE(\hat{\lambda}) = \sqrt{\frac{\lambda}{n}}$$

Standard Error stimato

$$\widehat{SE}(\hat{\lambda}) = \sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}}$$

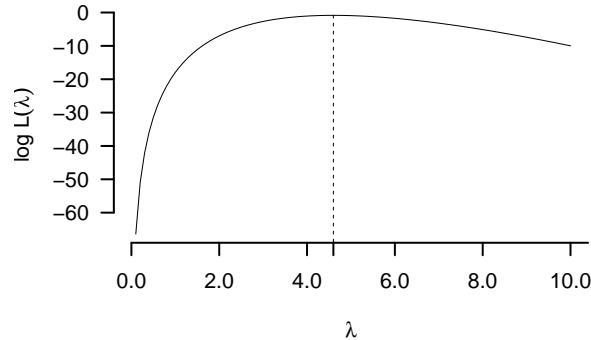
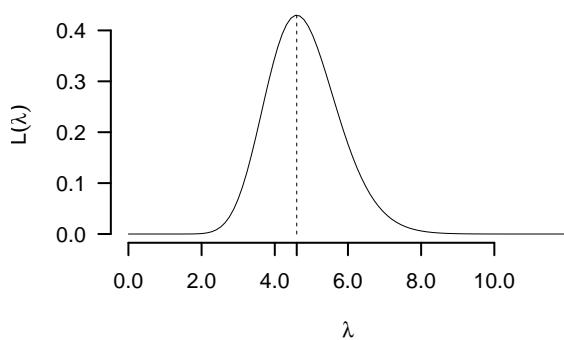
### 12.8.4 Esempio $n = 5$

Il numero di clienti del negozio  $A$  è distribuito come una Poisson di parametro  $\lambda$  incognito. Dopo  $n = 5$  giorni di osservazione si sono osservati i seguenti ingressi  $(3, 4, 5, 8, 3)$ . La stima  $\hat{\lambda}$  di  $\lambda$  è

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{5} \cdot 23 = 4.6$$

Lo Standard Error stimato

$$\widehat{SE}(\hat{\lambda}) = \sqrt{\frac{4.6}{5}} = 0.9592$$



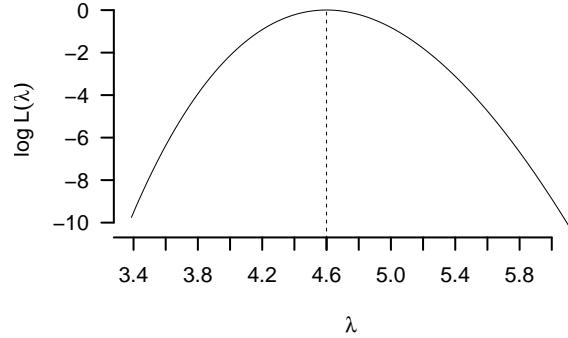
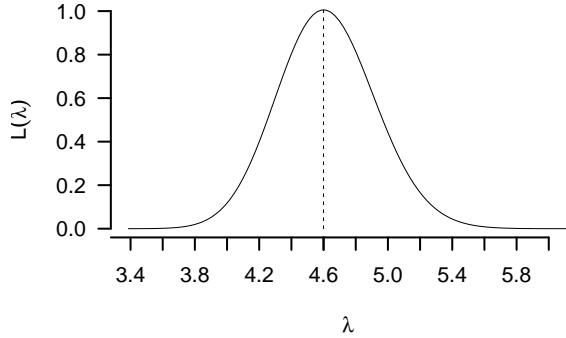
### 12.8.5 Esempio $n = 50$

Il numero di clienti del negozio  $A$  è distribuito come una Poisson di parametro  $\lambda$  incognito. Dopo  $n = 50$  giorni di osservazione si è osservata una media di ingressi pari a ingressi  $(4.6)$ . La stima  $\hat{\lambda}$  di  $\lambda$  è

$$\hat{\lambda} = 4.6$$

Lo Standard Error stimato

$$\widehat{SE}(\hat{\lambda}) = \sqrt{\frac{4.6}{50}} = 0.3033$$



## 12.9 Il modello Normale

Siano  $X_1, \dots, X_n$   $n$  VC IID, replicazioni della stessa  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , e dunque con funzione di probabilità:

$$f(x_i; \mu, \sigma^2)$$

La verosimiglianza per  $(\mu, \sigma^2)$  è

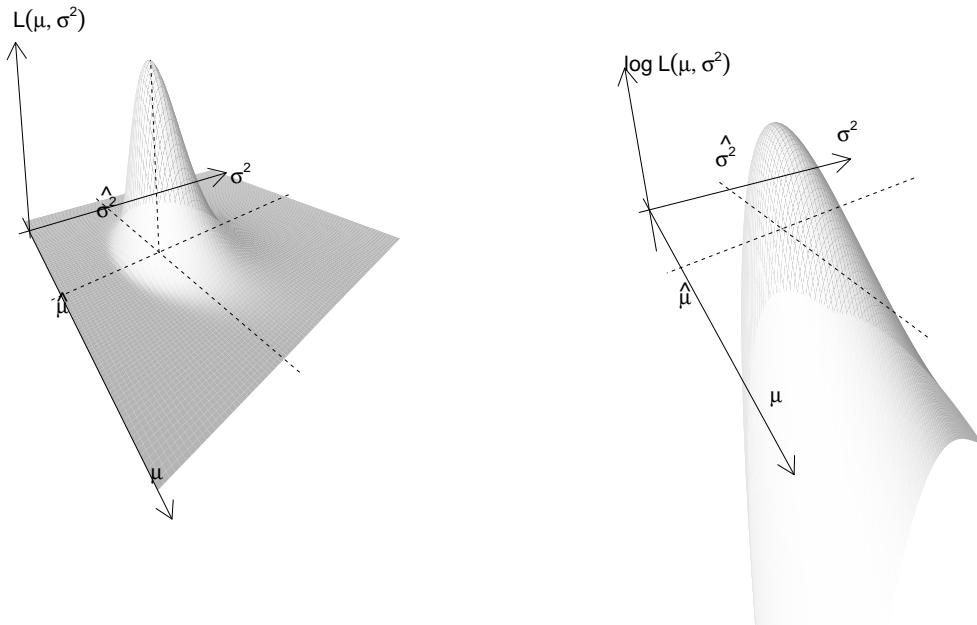
$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu, \sigma^2)$$

La log-verosimiglianza della Normale

Allora

$$\begin{aligned} \ell(\mu, \sigma^2) &= \log \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu, \sigma^2) \\ &= \sum_{i=1}^n \log f(x_i; \mu, \sigma^2) \end{aligned}$$

### 12.9.1 Verosimiglianza e log-verosimiglianza della Normale



### 12.9.2 Le stime di massima verosimiglianza della Normale

Per ottenere  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\sigma}^2$  bisogna eguagliare a zero il sistema di equazioni di derivate di  $\ell(\mu, \sigma^2)$  rispetto a  $\mu$  e  $\sigma^2$

$$\begin{cases} \frac{d\ell(\mu, \sigma^2)}{d\mu} = 0 \\ \frac{d\ell(\mu, \sigma^2)}{d\sigma^2} = 0 \end{cases}$$

#### Proprietà 12.9.1.

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \hat{\mu}^2$$

Tutta l'**informazione** del campione è contenuta nelle statistiche  $\sum_{i=1}^n x_i$  e  $\sum_{i=1}^n x_i^2$ .

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma^2; \mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2} \right)} \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} ((x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \dots + (x_n - \mu)^2)} \\ &\propto \sigma^{-2n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell(\mu, \sigma^2) &= \log L(\mu, \sigma^2; \mathbf{x}) \\ &= \log \sigma^{-2n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right\} \\ &= -n \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\ell(\mu, \sigma^2)}{d\mu} &= +\frac{2}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \\ \frac{d\ell(\mu, \sigma^2)}{d\sigma^2} &= -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \\ &= \frac{-n\sigma^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)}{(\sigma^2)^2} \\ \frac{d\ell(\mu, \sigma^2)}{d\mu} &= 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ \frac{d\ell(\mu, \sigma^2)}{d\sigma^2} &= 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 \end{aligned}$$

□

### 12.9.3 Proprietà di $\hat{\mu}$

Correttezza per  $\mu$ :

$$E(\hat{\mu}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \mu$$

Mean Squared Error per  $\mu$ :

$$MSE(\hat{\mu}) = V(\hat{\mu}) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{n}{n^2} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Consistenza per  $\mu$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} MSE(\hat{\mu}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$$

E lo Standard Error:

$$SE(\hat{\mu}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

Standard Error stimato tra poco verrà ricavato 12.9.5.

### 12.9.4 Proprietà di $\hat{\sigma}^2$

Correttezza per  $\hat{\sigma}^2$ :

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

$\hat{\sigma}^2$  non è stimatore corretto per  $\sigma^2$ .

Correzione di  $\hat{\sigma}^2$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2$$

Osserviamo che

$$E(S^2) = E\left(\frac{n}{n-1} \hat{\sigma}^2\right) = \frac{n}{n-1} E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2$$

$S^2$  è stimatore corretto per  $\sigma^2$ .

### 12.9.5 Lo SE di $\hat{\mu}$

Standard Error

$$SE(\hat{\mu}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

Standard Error stimato.

$$\widehat{SE}(\hat{\mu}) = \sqrt{\frac{S^2}{n}} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n-1}}$$

In quanto

$$\frac{S^2}{n} = \frac{1}{n} S^2 = \frac{1}{n} \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{n-1}$$

### 12.9.6 Esempio $n = 10$

Il fatturato mensile del negozio  $A$  è distribuito come una Normale di parametri  $\mu$  e  $\sigma^2$  incogniti. Dopo  $n = 10$  mesi di osservazione si sono osservati i seguenti fatturati

$$(x_1 = 2.103, x_2 = 3.185, x_3 = 4.588, x_4 = 1.87, x_5 = 2.92, x_6 = 3.132, x_7 = 3.708, x_8 = 2.76, x_9 = 4.984, x_{10} = 2.861)$$

La stima  $\hat{\mu}$  di  $\mu$  è

$$\hat{\mu} = \frac{1}{10} 32.1115 = 3.2112$$

La varianza campionaria  $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \hat{\mu}^2 = \frac{111.8468}{10} - 3.2112^2 = 0.8732$$

$S^2$  la stima corretta di  $\sigma^2$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}^2 = \frac{10}{9} 0.8732 = 0.9702$$

Lo  $SE$  stimato di  $\hat{\mu}$

$$\widehat{SE}(\hat{\mu}) = \sqrt{\frac{0.9702}{10}} = 0.3115$$

### 12.9.7 Esempio $n = 100$

L'ammontare delle transazioni finanziarie compiute al minuto dal server  $A$  è distribuito come una Normale di parametri  $\mu$  e  $\sigma^2$  incogniti. Dopo  $n = 100$  ore di osservazione si sono osservati  $\bar{x} = 3.2112$ ,  $\hat{\sigma} = 0.9344$ . La stima  $\hat{\mu}$  di  $\mu$  è

$$\hat{\mu} = 3.2112$$

La varianza campionaria  $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = 0.9344^2 = 0.8732$$

$S^2$  la stima corretta di  $\sigma^2$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}^2 = \frac{100}{99} 0.8732 = 0.882$$

Lo  $SE$  stimato di  $\hat{\mu}$

$$\widehat{SE}(\hat{\mu}) = \sqrt{\frac{0.882}{100}} = 0.0939$$

### 12.9.8 Perché $n - 1$

Per calcolare la varianza campionaria dobbiamo prima calcolare la media dei dati. Per calcolare la media bisogna sommare i dati, per esempio se  $n = 3$ :  $x_1 = 7$ ,  $x_2 = 8$  e  $x_3 = 11$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 26$$

Ma  $x_1 = 7$ ,  $x_2 = 8$  e  $x_3 = 11$  non sono l'unica tripla di  $x$  che somma a 26, ma  $n - 1 = 2$  valori possono essere scelti liberamente (es  $x_1 = 5$  e  $x_2 = 15$ ): Il terzo è **vincolato**:

$$x_3 = 26 - x_1 - x_2$$

Fissata la somma il sistema *ha perso un grado di libertà*.

## 12.10 Proprietà degli stimatori di massima verosimiglianza

**Proprietà 12.10.1** (Stimatori di massima verosimiglianza). *Siano  $X_1, \dots, X_n$  n VC IID, replicazioni di  $X \sim \mathcal{L}(\theta)$  e sia  $\hat{\theta}$  lo stimatore di massima verosimiglianza per  $\theta$ , allora*

1.  $\hat{\theta}$  non è sempre stimatore corretto ma è sempre corretto asintoticamente:

$$E(\hat{\theta}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta$$

2.  $\hat{\theta}$  non è sempre stimatore a massima efficienza ma lo è sempre asintoticamente:

$$V(\hat{\theta}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I^{-1}(\theta)$$

dove  $I(\theta)$  è l'informazione di Fisher.

3.  $\hat{\theta}$  è asintoticamente distribuito normalmente

$$\hat{\theta} \underset{a}{\sim} N(\theta, I^{-1}(\theta))$$

4. Lo stimatore di massima verosimiglianza è invariante alle trasformazioni monotone invertibili  $g$ :

$$\text{se } \psi = g(\theta), \text{ allora } \hat{\psi} = g(\hat{\theta})$$

1. La proprietà uno riguarda la correttezza. Non sempre gli SMV sono corretti ma lo sono sempre asintoticamente. Esempio: lo stimatore  $\hat{\sigma}^2$  di  $\sigma^2$  non è corretto solo asintoticamente

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma^2$$

2. La seconda proprietà riguarda l'efficienza dello stimatore: non sempre lo SMV è il più efficiente per piccoli campioni, ma quando la numerosità aumenta, lo SMV tende a raggiungere la **massima efficienza possibile**. La quantità

$$I(\theta) = -E(\ell''(\theta))$$

dove  $\ell''(\theta)$  è la derivata seconda della log-verosimiglianza calcolata in  $\theta$ , è chiamata **informazione di Fisher**: misura quanta informazione sul parametro è contenuta nei dati osservati. Tanto maggiore è  $I(\theta)$ , tanto più preciso sarà lo stimatore.

- $I(\theta)$  rappresenta la curvatura media della log-verosimiglianza intorno al punto  $\theta$ .
- $I^{-1}(\theta)$  è un limite teorico: è la soglia sotto la quale la varianza di nessuno stimatore può scendere, e definisce quindi il massimo grado di efficienza raggiungibile.
- Se esiste uno stimatore che raggiunge tale soglia, allora è quello di **massima verosimiglianza**.
- Esempi:  $\hat{\pi}$ ,  $\hat{\lambda}$  e  $\hat{\mu}$  sono stimatori a efficienza massima (anche per  $n$  finito).

$$\begin{aligned} I^{-1}(\hat{\pi}) &= \frac{\pi(1-\pi)}{n} \\ I^{-1}(\hat{\lambda}) &= \frac{\lambda}{n} \\ I^{-1}(\hat{\mu}) &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

3. La proprietà tre ci garantisce che, per  $n$  sufficientemente alto, sappiamo la distribuzione degli SMV

- Esempio: lo stimatore  $\hat{\pi}$  di  $\pi$ , dal TLC

$$\hat{\pi} \underset{a}{\sim} N\left(\pi, \frac{\pi(1-\pi)}{n}\right)$$

- Esempio: lo stimatore  $\hat{\lambda}$  di  $\lambda$ , dal TLC

$$\hat{\lambda} \underset{a}{\sim} N\left(\lambda, \frac{\lambda}{n}\right)$$

4. La proprietà 4 garantisce che trasformazioni invertibili dei parametri non richiedono di ricalcolare la SMV.

- Esempio:  $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$  e dunque  $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$

## 13.1 Obiettivo

Oltre alla stima di un punto specifico  $\hat{\theta}$  dello spazio dei parametri potremmo essere interessati a trovare *regioni più verosimili*.

L'obiettivo è di stimare un intervallo nel quale pensiamo *verosimilmente* si collochi il vero  $\theta$  alla luce dei dati.

Nel gergo dei sondaggisti viene chiamata forbice.

La teoria della verosimiglianza offre tutti gli strumenti per la derivazione coerente di intervalli per una classe molto ampia di modelli di probabilità. La trattazione sistematica attraverso la verosimiglianza esula dagli scopi di questo corso.

In termini più generali per stima intervallare si intende l'indicazione di un intorno di  $\hat{\theta}$ , costruito in modo tale da contenere il valore del parametro incognito con un certo **grado di fiducia** o **livello di affidabilità** associato al metodo di costruzione.

## 13.2 Il Contesto Probabilistico

Supponiamo un caso molto speciale, vogliamo stimaare la media di una normale nell'ipotesi di conoscere la sua varianza. Siano  $X_1, \dots, X_5$ ,  $n = 5$  VC IID,  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2 = 2.25)$ , come  $\mu$  incognita.

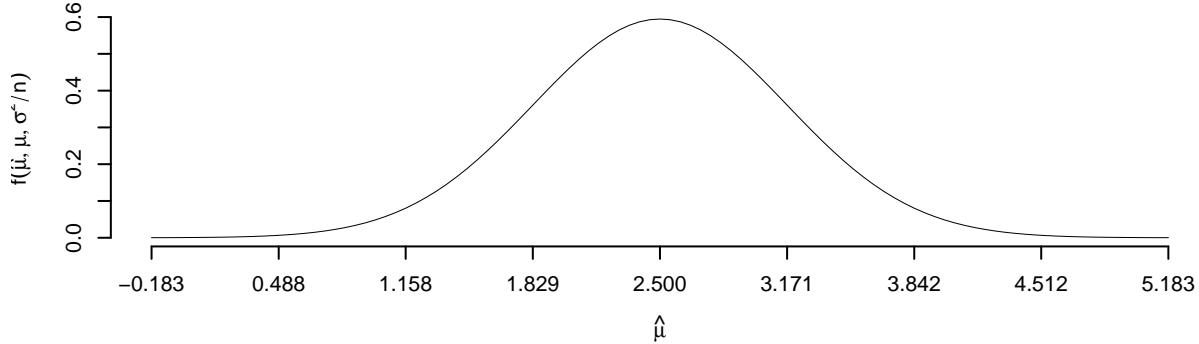
Dalle proprietà della normale

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} = \hat{\mu} \sim N \left( \mu, \frac{\sigma^2}{n} \right), \quad \text{ovvero } \hat{\mu} \sim N \left( \mu, SE^2(\hat{\mu}) \right)$$

Se per esempio  $\mu$  fosse  $\mu = 2.5$ , avremmo

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &\sim N \left( 2.5, \frac{2.25}{5} \right) \\ &\sim N \left( 2.5, \left( \frac{1.5}{\sqrt{5}} \right)^2 \right) \\ &\sim N (2.5, 0.6708^2) \end{aligned}$$

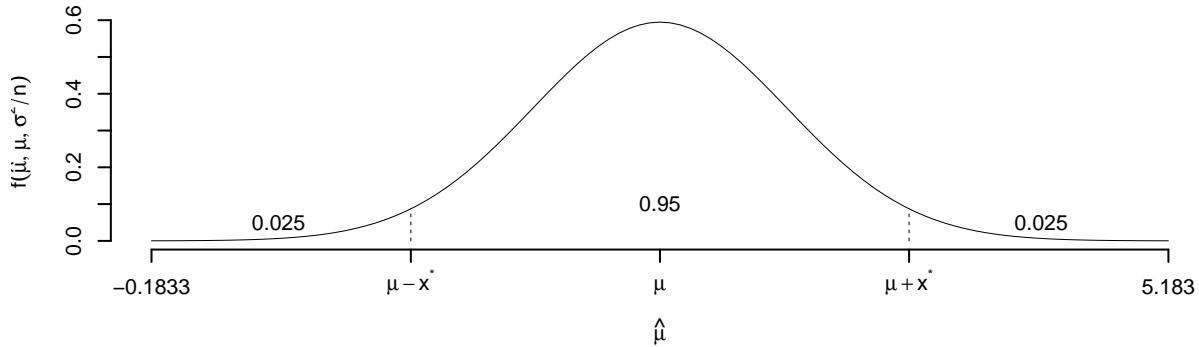
La densità di probabilità di  $\hat{\mu}$ .



### 13.2.1 Un intervallo per $\hat{\mu}$

Domanda: qual è quel valore  $x^* > 0$  tale che

$$P(\mu - x^* < \hat{\mu} < \mu + x^*) = 0.95 ?$$



qual è quel numero  $x^*$  tale che

$$P(\hat{\mu} > \mu + x^*) = 0.025, \quad P(\hat{\mu} < \mu - x^*) = 0.025 ?$$

Trasferiamo il problema sulla normale standard

Se  $Z \sim N(0, 1)$

Qual è quel numero  $z^*$  tale che

$$P(Z > z^*) = 0.025 ?$$

Dall'ultima riga delle tavole osserviamo che  $z^* = 1.96$ , infatti

$$P(Z > 1.96) = 1 - \Phi(1.96) = 1 - 0.975 = 0.025$$

E dunque

$$P(-19.6 < Z < +1.96) = 0.95$$

Ci serviamo delle tavole della Z per  $\hat{\mu}$ , ricordiamo che  $\hat{\mu} \sim N(\mu, SE^2(\hat{\mu}))$ , allora

$$Z = \frac{\hat{\mu} - \mu}{SE(\hat{\mu})} \sim N(0, 1)$$

e quindi

$$\begin{aligned} P(-1.96 < Z < +1.96) &= 0.95 \\ P\left(-1.96 < \frac{\hat{\mu} - \mu}{SE(\hat{\mu})} < +1.96\right) &= 0.95 \\ P(-1.96 SE(\hat{\mu}) < \hat{\mu} - \mu < +1.96 SE(\hat{\mu})) &= 0.95 \\ P(\mu - 1.96 SE(\hat{\mu}) < \hat{\mu} < \mu + 1.96 SE(\hat{\mu})) &= 0.95 \\ P(\mu - 1.96 SE(\hat{\mu}) < \hat{\mu} < \mu + 1.96 SE(\hat{\mu})) &= 0.95 \end{aligned}$$

Se per esempio  $\mu$  fosse  $\mu = 2.5$ , avremmo

$$\begin{aligned} P\left(2.5 - 1.96 \frac{1.5}{\sqrt{5}} < \hat{\mu} < 2.5 + 1.96 \frac{1.5}{\sqrt{5}}\right) &= 0.95 \\ P(2.5 - 1.96 \times 0.6708 < \hat{\mu} < 2.5 + 1.96 \times 0.6708) &= 0.95 \\ P(1.1852 < \hat{\mu} < 3.8148) &= 0.95 \end{aligned}$$

Se invece  $\mu = 1.2$  allora

$$\begin{aligned} P(\mu - 1.96 SE(\hat{\mu}) < \hat{\mu} < \mu + 1.96 SE(\hat{\mu})) &= 0.95 \\ P\left(\mu - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \hat{\mu} < \mu + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= 0.95 \\ P\left(1.2 - 1.96 \frac{1.5}{\sqrt{5}} < \hat{\mu} < 1.2 + 1.96 \frac{1.5}{\sqrt{5}}\right) &= 0.95 \\ P(1.2 - 1.96 \times 0.6708 < \hat{\mu} < 1.2 + 1.96 \times 0.6708) &= 0.95 \\ P(-0.1148 < \hat{\mu} < 2.5148) &= 0.95 \end{aligned}$$

Se  $\mu = 3.4$  allora

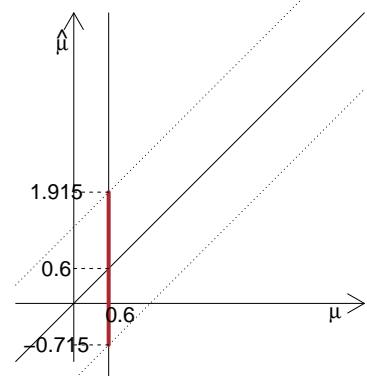
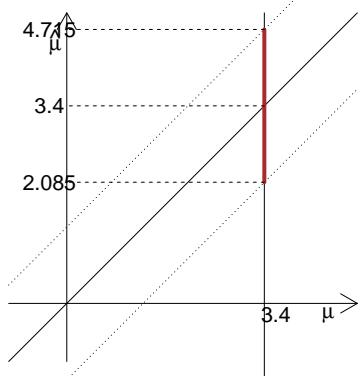
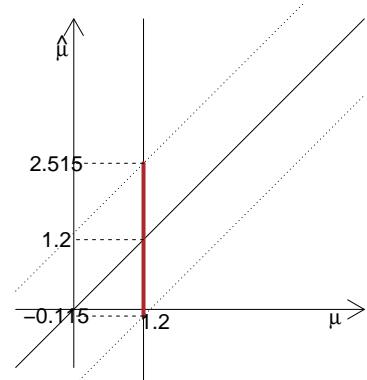
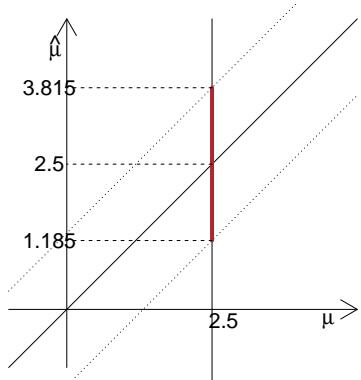
$$\begin{aligned} P\left(3.4 - 1.96 \frac{1.5}{\sqrt{5}} < \hat{\mu} < 3.4 + 1.96 \frac{1.5}{\sqrt{5}}\right) &= 0.95 \\ P(3.4 - 1.96 \times 0.6708 < \hat{\mu} < 3.4 + 1.96 \times 0.6708) &= 0.95 \\ P(2.0852 < \hat{\mu} < 4.7148) &= 0.95 \end{aligned}$$

Se  $\mu = 0.6$  allora

$$P(0.6 - 1.96 \times 0.6708 < \hat{\mu} < 0.6 + 1.96 \times 0.6708) = 0.95$$

$$P(-0.7148 < \hat{\mu} < 1.9148) = 0.95$$

Rimangono fissi  $n$  e  $\sigma^2$ , cambiamo  $\mu$



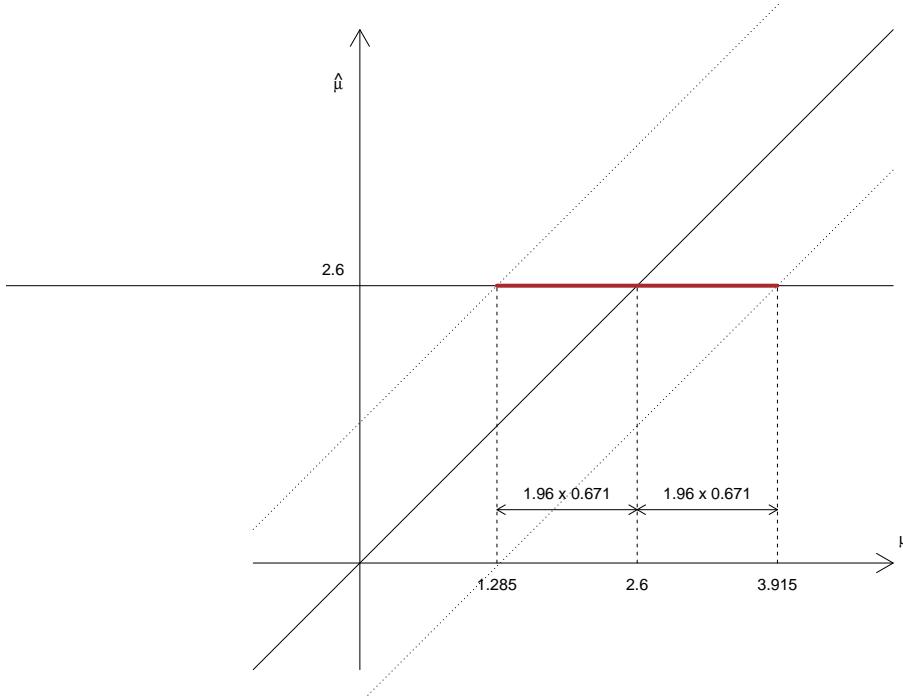
In sostanza

$$P(\mu - 1.96SE(\hat{\mu}) < \hat{\mu} < \mu + 1.96SE(\hat{\mu})) = 0.95$$

$$P\left(\mu - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \hat{\mu} < \mu + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

Significa che la VC  $\hat{\mu}$  si avvererà nell'intervallo  $[\mu - 1.96 \cdot SE(\hat{\mu}), \mu + 1.96 \cdot SE(\hat{\mu})]$  con probabilità 0.95.

### 13.2.2 Invertiamo $\mu$ con $\hat{\mu}$



Algebricamente, osserviamo

$$\begin{aligned}
 P \left( \mu - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \hat{\mu} < \mu + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) &= 0.95 \\
 &\text{sottraggo } \hat{\mu} \text{ e } \mu \\
 P \left( \mu - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu - \hat{\mu} < \mu - \mu - \hat{\mu} < -\hat{\mu} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu - \hat{\mu} \right) &= 0.95 \\
 P \left( -\hat{\mu} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -\mu < -\hat{\mu} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) &= 0.95 \\
 \left( +\hat{\mu} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > +\mu > +\hat{\mu} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) &= 0.95 \quad \text{cambio segno e verso} \\
 P \left( \hat{\mu} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \hat{\mu} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) &= 0.95
 \end{aligned}$$

Questa identità vale per qualunque valore di  $\mu$  e quindi  $[\hat{\mu} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$  è un intervallo dagli estremi

casuali che cade su  $\mu$  95 volte su 100, in media.

### 13.3 Intervalli casuali



#### Attenzione

$$P\left(\hat{\mu} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \hat{\mu} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

**non** è la probabilità che  $\mu$  si trovi tra  $\hat{\mu} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  e  $\hat{\mu} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ,

$$P\left(\hat{\mu} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \hat{\mu} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

è la probabilità che l'**intervallo casuale**  $\left[\hat{\mu} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$  cada su  $\mu$ .

Se quindi  $\hat{\mu} = 2.6$  l'intervallo

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mu} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] &= \left[2.6 - 1.96 \frac{1.5}{\sqrt{5}}, \hat{\mu} + 1.96 \frac{1.5}{\sqrt{5}}\right] \\ &= [1.2852, 3.9148] \end{aligned}$$

L'intervallo  $[1.2852, 3.9148]$  è una realizzazione dell'intervallo casuale  $\left[\hat{\mu} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ .

### 13.4 Intervallo di confidenza per $\mu$ al 95%, $n = 5$ e $\sigma^2 = 2.25$ .

Se  $\hat{\mu} = 2.6$  l'intervallo

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mu} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] &= \left[2.6 - 1.96 \frac{1.5}{\sqrt{5}}, \hat{\mu} + 1.96 \frac{1.5}{\sqrt{5}}\right] \\ &= [1.2852, 3.9148] \end{aligned}$$

è chiamato *intervallo di confidenza* per  $\mu$  al 95%.

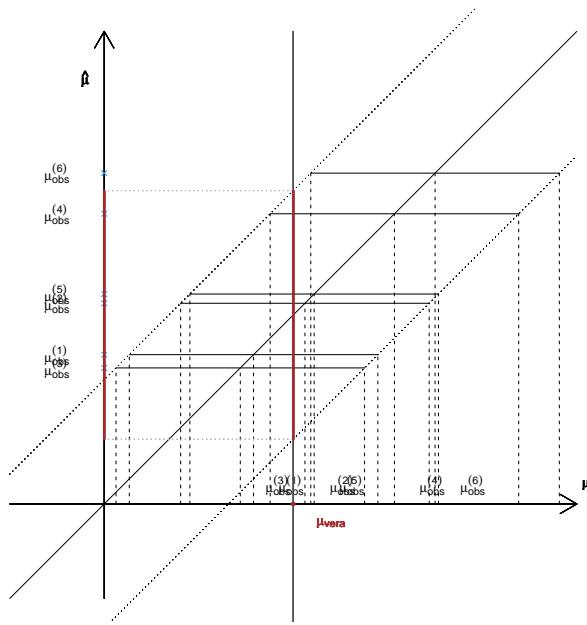


#### Nota

Infelice traduzione di *Confidence Interval*,

- *to be confident that the real parameter is in  $[1.2852, 3.9148]$ , with a confidence level of 95%.*
- *Siamo fiduciosi che il vero parametro si trovi in  $[1.2852, 3.9148]$ , con un livello di fiducia del 95%*

L'intervallo è costruito con una metodologia che 95 volte su 100 produce intervalli che coprono il vero  $\mu$ . Il long run:



## 13.5 Stimatori e intervalli di confidenza

Se  $\theta$  è il parametro da stimare uno stimatore puntuale  $h$  è una VC

$$\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \hat{\theta}$$

Siano  $L_1(X_1, \dots, X_n) = L_1$  e  $L_2(X_1, \dots, X_n) = L_2$  due statistiche tali che  $L_1 \leq L_2$  per ogni campione  $X_1, \dots, X_n$ . L'intervallo

$$[L_1, L_2]$$

è un *intervallo casuale*.

**Definizione 13.5.1.** Un **intervallo di confidenza** per  $\theta$  al livello  $(1 - \alpha) \times 100\%$  è costruito su quella coppia di statistiche  $L_1$  e  $L_2$  tali che

$$P(L_1 < \theta < L_2) = 1 - \alpha$$

Un *intervallo di confidenza* per  $\theta$  al livello  $(1 - \alpha) \times 100\%$  è l'intervallo  $[L_1, L_2]$  calcolato sui dati del campione.

### 13.6 Massima Verosimiglianza e intervalli di confidenza

Se  $\hat{\theta}$  è lo stimatore di massima verosimiglianza per  $\theta$ , se  $n$  è sufficientemente alto

$$\hat{\theta} \underset{a}{\sim} N(\theta, \widehat{SE^2(\hat{\theta})} \equiv I^{-1}(\theta))$$

L'intervalllo di confidenza per  $\theta$  al livello  $(1 - \alpha) \times 100\%$  è ricavato da:

$$P(\hat{\theta} - z_{\alpha/2} \widehat{SE(\hat{\theta})} < \theta < \hat{\theta} + z_{\alpha/2} \widehat{SE(\hat{\theta})}) = 1 - \alpha$$

Un intervallo di confidenza per  $\theta$  al livello  $(1 - \alpha) \times 100\%$  è l'intervalllo  $[\hat{\theta} - z_{\alpha/2} \widehat{SE(\hat{\theta})}, \hat{\theta} + z_{\alpha/2} \widehat{SE(\hat{\theta})}]$  calcolato sui dati del campione.

### 13.7 Intervalli di Confidenza per $\mu$ al livello $(1 - \alpha) \times 100$ , $\sigma^2$ nota

Sia  $0 < \alpha < 1$ , osserviamo che

$$\begin{aligned} P(-z_{\alpha/2} < Z < +z_{\alpha/2}) &= 1 - \alpha \\ P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\hat{\mu} - \mu}{SE(\hat{\mu})} < +z_{\alpha/2}\right) &= 1 - \alpha \\ P\left(\hat{\mu} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \hat{\mu} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

**Definizione 13.7.1** (Intervallo di Confidenza per  $\mu$  ( $\sigma^2$  nota)). Si definisce L'IdC al livello  $(1 - \alpha) \times 100\%$  per  $\mu$  con  $\sigma^2$  nota, l'intervalllo

$$IdC : \left[ \hat{\mu} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Dove  $z_{\alpha/2}$  è quel valore tale che  $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$

$$P\left(\hat{\mu} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \hat{\mu} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

è la probabilità che l'intervalllo casuale  $[\hat{\mu} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$  cada su  $\mu$ .

Il valore  $0 < \alpha < 1$ , può essere qualunque ma solitamente si usa

- $\alpha = 0.05$ : intervalli al  $(1 - 0.05) \times 100\% = 0.95 \times 100\% = 95\%$
- $\alpha = 0.01$ : intervalli al  $(1 - 0.01) \times 100\% = 0.99 \times 100\% = 99\%$
- Gli intervalli per  $\alpha = 0.1$  e  $\alpha = 0.001$ , intervalli al 90% e al 99.9% meno usati.

dalle tavole abbiamo

$\alpha$	$\alpha/2$	$z_{\alpha/2}$		
$\alpha = 0.1$	con $\alpha/2 = 0.05$	e quindi $z_{\alpha/2} = z_{0.05}$	$= 1.6449$	Raro
$\alpha = 0.05$	con $\alpha/2 = 0.025$	e quindi $z_{\alpha/2} = z_{0.025}$	$= 1.96$	Freq.
$\alpha = 0.01$	con $\alpha/2 = 0.005$	e quindi $z_{\alpha/2} = z_{0.005}$	$= 2.5758$	Freq.
$\alpha = 0.001$	con $\alpha/2 = 0.0005$	e quindi $z_{\alpha/2} = z_{0.0005}$	$= 3.2905$	Raro

**Esempio 13.7.1.** Intervallo al 99%,  $\hat{\mu} = 2.6$ ,  $n = 5$ ,  $\sigma^2 = 2.25$ . L'intervallo al 99% implica un  $\alpha = 0.01$ , infatti

$$1 - \alpha = 0.99$$

E dunque

$$\alpha/2 = 0.005$$

Dalle tavole

$$z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.5758$$

Se quindi  $\hat{\mu} = 2.6$  l'intervallo

$$\begin{aligned} \left[ \hat{\mu} - 2.5758 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + 2.5758 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] &= \left[ 2.6 - 2.5758 \frac{1.5}{\sqrt{5}}, 2.6 + 2.5758 \frac{1.5}{\sqrt{5}} \right] \\ &= [0.8721, 4.3279] \end{aligned}$$

È l'intervallo di confidenza per  $\mu$  al 99%

**Esempio 13.7.2.** Intervallo al 99%,  $\hat{\mu} = 2.6$ ,  $n = 5$ ,  $\sigma^2 = 2.25$ . L'intervallo al 90% implica un  $\alpha = 0.1$ , infatti

$$1 - \alpha = 0.90$$

E dunque

$$\alpha/2 = 0.05$$

Dalle tavole

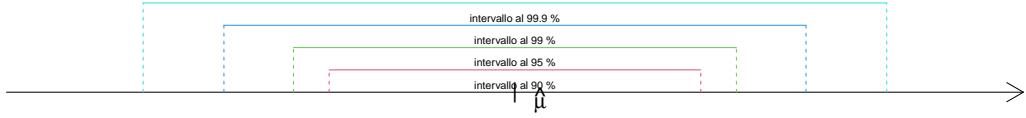
$$z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.6449$$

Se quindi  $\hat{\mu} = 2.6$  l'intervallo

$$\begin{aligned} \left[ \hat{\mu} - 1.6449 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + 1.6449 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] &= \left[ 2.6 - 1.6449 \frac{1.5}{\sqrt{5}}, 2.6 + 1.6449 \frac{1.5}{\sqrt{5}} \right] \\ &= [1.4966, 3.7034] \end{aligned}$$

È l'intervallo di confidenza per  $\mu$  al 90%.

Osserviamo graficamente gli intervalli di confidenza per  $\mu$  con  $\hat{\mu} = 2.6$ ,  $n = 5$  e  $\sigma^2 = 2.25$ , al 90%, 95%, 99% e 99.9%.



	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.001$
$\hat{\mu} - z_{\alpha/2} SE(\hat{\mu})$	1.497	1.285	0.8721	0.3926
$\hat{\mu} + z_{\alpha/2} SE(\hat{\mu})$	3.703	3.915	4.3279	4.8074
Aampiezza	2.207	2.630	3.4558	4.4147

**Esempio 13.7.3.** Un venditore di bustine di tè assicura che ogni bustina ha un peso medio pari a 20g con una SD pari a 1.5g. L'acquirente esegue 6 misure di controllo e ottiene i seguenti risultati: 19; 20; 20.5; 21; 18.5; 15. La media di questi numeri è  $\hat{\mu} = 19$  e  $\hat{\sigma} = 1.979$ . Determinare un IdC al livello di  $(1 - \alpha) = 0.99$  per  $\mu$ .

$$\begin{aligned}
 & \left[ \hat{\mu} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \hat{\mu} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \\
 &= \left[ 19 - 2.576 \frac{1.5}{\sqrt{6}}; 19 + 2.576 \frac{1.5}{\sqrt{6}} \right] \\
 &= [19 - 1.5775; 19 + 1.5775] \\
 &= [17.4225; 20.5775]
 \end{aligned}$$

Notare la modalità di indicare la SD della  $P$  e dei dati. Vi sono due informazioni su  $\sigma$  e bisogna scegliere quella giusta.

### 13.8 Intervalli di Confidenza per $\mu$ al livello $(1 - \alpha) \times 100$ , $\sigma^2$ incognita

Se  $\sigma^2$  è incognito va stimato dai dati

Consideriamo lo stimatore  $S^2$  di  $\sigma^2$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2 = \frac{n}{n-1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2 = \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}^2$$

Ricordiamo che

$$\widehat{SE}(\hat{\mu}) = \sqrt{\frac{S^2}{n}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Ricordiamo infine che

$$T = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\widehat{SE}(\hat{\mu})} \sim t_{n-1}$$

Ovvero

$$T = \frac{\hat{\mu} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

### 13.8.1 $\sigma$ nota e $\sigma$ incognita

Se  $\sigma$  è nota

$$Z = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Se  $\sigma$  è incognita

$$T = \frac{\hat{\mu} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Sia  $0 < \alpha < 1$ , osserviamo che

$$\begin{aligned} P(-t_{n-1;\alpha/2} < T < +t_{n-1;\alpha/2}) &= 1 - \alpha \\ P\left(-t_{n-1;\alpha/2} < \frac{\hat{\mu} - \mu}{\widehat{SE}(\hat{\mu})} < +t_{n-1;\alpha/2}\right) &= 1 - \alpha \\ P\left(\hat{\mu} - t_{n-1;\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \hat{\mu} + t_{n-1;\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

Dove  $t_{n-1;\alpha/2}$  è quel valore tale che  $P(T > t_{n-1;\alpha/2}) = \alpha/2$ ,  $T \sim t_{n-1}$

**Definizione 13.8.1** (Intervallo di Confidenza per  $\mu$  ( $\sigma^2$  incognita)). Si definisce L'IdC al livello  $(1 - \alpha) \times 100\%$  per  $\mu$  con  $\sigma^2$  incognita, l'intervallo

$$IdC : \left[ \hat{\mu} - t_{n-1;\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + t_{n-1;\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

$$P\left(\hat{\mu} - t_{n-1;\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \hat{\mu} + t_{n-1;\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

è la probabilità che l'**intervallo casuale**  $\left[ \hat{\mu} - t_{n-1;\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + t_{n-1;\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$  cada su  $\mu$ .

**Esempio 13.8.1.** Un venditore di bustine di tè assicura che ogni bustina ha un peso medio pari a 20g. L'acquirente esegue 6 misure di controllo e ottiene i seguenti risultati: 19; 20; 20.5; 21; 18.5; 15. La media di questi numeri è  $\hat{\mu} = 19$  e  $\hat{\sigma} = 1.979$ . Determinare un IdC al livello di  $(1 - \alpha) = 0.99$  per  $\mu$ .

$$\alpha = 0.01 \quad \alpha/2 = 0.005, \quad t_{6-1;0.005} = 4.0321$$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{n}{n-1}} \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{6}{6-1}} 1.979 = 2.1679 \\ &= \left[ \hat{\mu} - t_{(n-1);\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}; \hat{\mu} + t_{(n-1);\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right] \\ &= \left[ 19 - 4.0321 \frac{2.1679}{\sqrt{6}}; 19 + 4.0321 \frac{2.1679}{\sqrt{6}} \right] \\ &= [19 - 3.5687; 19 + 3.5687] \\ &= [15.4313; 22.5687] \end{aligned}$$

Si noti che la mancanza di informazioni sulla varianza rende più incerto il risultato; infatti, la lunghezza dell'IdC aumenta.

**Esempio 13.8.2.** Si sono rilevati i tempi dedicati a ciascun cliente da un impiegato di banca in 49 casi e si è ottenuta una media  $\bar{x} = 3.5$  minuti con una SD pari a 0.5 minuti. Determinare un IdC al livello di  $(1 - \alpha) = 0.95$  per  $\mu$ .

$$\alpha = 0.05 \quad \alpha/2 = 0.025. \quad t_{49-1;0.025} = 2.0106$$

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{\frac{n}{n-1}} \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{49}{49-1}} 0.5 = 0.505 \\ &= \left[ \bar{X} - t_{(n-1);\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t_{(n-1);\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right] \\ &= \left[ 3.5 - 2.0106 \frac{0.505}{\sqrt{49}}; 3.5 + 2.0106 \frac{0.505}{\sqrt{49}} \right] \\ &= [3.5 - 0.145; 3.5 + 0.145] \\ &= [3.355; 3.645] \end{aligned}$$

Si noti che per  $n > 120$  si può approssimare con una normale.

### 13.9 IDC per la proporzione

$X_1, \dots, X_n$  VC IID, tutte  $\text{Ber}(\pi)$ . Per il TLC

$$\bar{X} = \hat{\pi} \underset{a}{\sim} N\left(\pi; \frac{\pi(1-\pi)}{n}\right) \Rightarrow \hat{\pi} \underset{a}{\sim} N(\pi; SE^2(\hat{\pi}))$$

E quindi

$$Z = \frac{\hat{\pi} - \pi}{SE(\hat{\pi})} \underset{a}{\sim} N(0, 1) \Rightarrow P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\hat{\pi} - \pi}{SE(\hat{\pi})} < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Infine

$$\begin{aligned} P\left(\hat{\pi} - z_{\alpha/2}SE(\hat{\pi}) < \pi < \hat{\pi} + z_{\alpha/2}SE(\hat{\pi})\right) &= 1 - \alpha \\ P\left(\hat{\pi} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} < \pi < \hat{\pi} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right) &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

l'IdC DIPENDE da  $\pi$  NON NOTA. Per il TLC e  $n$  sufficientemente grande si può sostituire a  $\pi$  dell'IdC la sua stima  $\hat{\pi}$ .

$$\widehat{SE(\hat{\pi})} = \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}$$

Condizioni per l'approssimazione

$$n\pi \geq 5 \quad \text{e} \quad n(1-\pi) \geq 5$$

e quindi l'IdC al livello  $(1 - \alpha) \times 100$  per  $\hat{\pi}$  è:

**Definizione 13.9.1** (Intervallo di Confidenza per  $\pi$ ). Si definisce L'IdC al livello  $(1 - \alpha) \times 100\%$  per  $\pi$  l'intervallo

$$\left[ \hat{\pi} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}; \hat{\pi} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}} \right]$$

**Esempio 13.9.1.** Una indagine sulle intenzioni di voto degli italiani per lo schieramento  $A$  ha mostrato che 240 su 500 lo voterebbero. Determinare un IdC al livello di  $(1 - \alpha) = 0.99$  per  $\pi$ .

$$\alpha = 0.01, \quad \alpha/2 = 0.005, \quad z_{0.005} = 2.5758$$

$$\begin{aligned} \hat{\pi} &= \frac{\text{favorevoli}}{n} = \frac{240}{500} = 0.48 \\ &\left[ \hat{\pi} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}; \hat{\pi} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}} \right] \end{aligned}$$

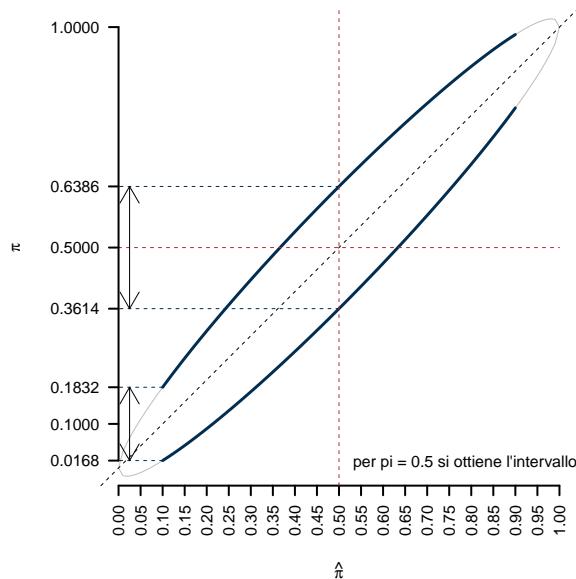
$$\begin{aligned}
&= \left[ 0.48 - 2.576 \sqrt{\frac{0.48(1-0.48)}{500}}; 0.48 + 2.576 \sqrt{\frac{0.48(1-0.48)}{500}} \right] \\
&= [0.48 - 0.0576; 0.48 + 0.0576] \\
&= [0.4224; 0.5376]
\end{aligned}$$

**Esempio 13.9.2.** Una indagine sulle intenzioni di voto degli italiani per lo schieramento  $A$  ha mostrato che 2400 su 5000 lo voterebbero. Determinare un IdC al livello di  $(1 - \alpha) = 0.99$  per  $\pi$ .

$$\begin{aligned}
\hat{\pi} &= \frac{\text{favorevoli}}{n} = \frac{2400}{5000} = 0.48 \\
&\left[ \hat{\pi} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}; \hat{\pi} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}} \right] \\
&= \left[ 0.48 - 2.576 \sqrt{\frac{0.48(1-0.48)}{5000}}; 0.48 + 2.576 \sqrt{\frac{0.48(1-0.48)}{5000}} \right] \\
&= [0.48 - 0.0182; 0.48 + 0.0182] \\
&= [0.4618; 0.4982]
\end{aligned}$$

### 13.9.1 IdC per $\pi$ per $\alpha$ ed $n$ fissati

Se fissiamo  $\alpha$  ed  $n$ , per esempio  $\alpha = 0.05$  ed  $n = 50$ , possiamo variare  $S_n \in \{0, \dots, n\}$  e quindi  $\hat{\pi} \in 0/n, 1/n, \dots, n/n$ . Per ogni valore di  $\hat{\pi}$  calcoliamo l'IdC al livello  $(1 - \alpha)$  e rappresentiamo graficamente



### 13.10 Specchietto Finale per gli IdC

- Si definisce L'IdC al livello  $(1 - \alpha) \times 100\%$  per  $\mu$  con  $\sigma^2$  nota, l'intervallo

$$IdC : \left[ \hat{\mu} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

- Si definisce L'IdC al livello  $(1 - \alpha) \times 100\%$  per  $\mu$  con  $\sigma^2$  incognita, l'intervallo

$$IdC : \left[ \hat{\mu} - t_{n-1; \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + t_{n-1; \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

- Si definisce L'IdC al livello  $(1 - \alpha) \times 100\%$  per  $\pi$  l'intervallo

$$\left[ \hat{\pi} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1 - \hat{\pi})}{n}}, \hat{\pi} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1 - \hat{\pi})}{n}} \right]$$



## 14.1 Le Ipotesi

Siano  $X_1, \dots, X_n$  n VC, replicazioni di  $X \sim \mathcal{L}(\theta)$

Un *Test Statistico* è la scelta tra due ipotesi diverse su  $\theta$  alla luce dei dati che osserveremo:

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0, & \Theta_0 \subset \Theta \\ H_1 : \theta \in \Theta_1, & \Theta_1 \subset \Theta \end{cases}$$

- Se  $\Theta_0 = \{\theta_0\}$  è un solo punto si dice che  $H_0$  è un'ipotesi **semplice**, altrimenti è **composta**
- Se  $\Theta_1 = \{\theta_1\}$  è un solo punto si dice che  $H_1$  è un'ipotesi **semplice**, altrimenti è **composta**

### 14.1.1 Esempi di ipotesi

Esempio: siamo indecisi se l'urna da cui stiamo per estrarre le palline abbia l'80% di palline vincenti oppure il 40%:

$$\begin{cases} H_0 : \pi = 0.8, \\ H_1 : \pi = 0.4 \end{cases}$$

In questo caso,  $H_0$  è un'ipotesi semplice (specifica solo un punto) e un'ipotesi  $H_1$  è semplice serve solo per comprendere la teoria. i primi esempi saranno svolti con due ipotesi semplici.

Esempio: siamo indecisi se il reddito medio degli italiani, di cui stiamo per estrarre un campione, sia uguale a 18 mila € annui oppure minore di 18 mila € annui:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 18, \\ H_1 : \mu < 18 \end{cases}$$

In questo caso,  $H_0$  è un'ipotesi semplice (specifica solo un punto) e  $H_1$  è composta (specifica un'intera regione di  $\Theta$ ) è il caso più interessante nella pratica ed è il caso che svilupperemo maggiormente.

Esempio: siamo indecisi se la SD del reddito degli italiani sia maggiore o minore di 2 mila € annui:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma \geq 2, \\ H_1 : \sigma < 2 \end{cases}$$

In questo caso,  $H_0$  è un'ipotesi composta e  $H_1$  è composta è un caso meno interessante e non svilupperemo

## 14.2 La Decisione

Preparare un test statistico significa dividere lo spazio dei campioni in due

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1, \quad \mathcal{S}_0 \cap \mathcal{S}_1 = \emptyset$$

Il test è una **decisione**: se il campione proverrà da  $\mathcal{S}_0$  il test deciderà per  $H_0$ , se il campione proverrà da  $\mathcal{S}_1$  il test deciderà per  $H_1$ .

Ogni decisione ha delle conseguenze

- Se  $H_0$  è vera ma il campione cade in  $\mathcal{S}_1$  sceglierò  $H_1$  erroneamente
- Se  $H_1$  è vera ma il campione cade in  $\mathcal{S}_0$  sceglierò  $H_0$  erroneamente

### 14.3 La tavola della verità

La *tavola della verità* è una tabella simbolica in cui sulle righe viene scritto il *vero stato di natura* cioè, se  $H_0$  è vera o falsa. Per colonna viene scritta la decisione, cioè se scelgo di tenere  $H_0$  o di rifiutarla in favore di  $H_1$ .

		Decisione	
		decido $H_0$	decido $H_1$
stato di natura	$H_0$	Corretta	Errore I tipo
	$H_1$	Errore II tipo	Corretta

Dunque:

**Definizione 14.3.1** (Errori di primo e secondo tipo). Si definiscono

- L'**errore di primo tipo** è l'errore che si commette scegliendo  $H_1$  quando è vera  $H_0$ .
- L'**errore di secondo tipo** è l'errore che si commette scegliendo  $H_0$  quando è vera  $H_1$ .

Dunque ad ogni decisione corrisponde un possibile errore. Per valutare un test si devono calcolare le probabilità di errore

		Decisione	
		decido $H_0$	decido $H_1$
stato di natura	$H_0$	$1 - \alpha$	$\alpha$
	$H_1$	$\beta$	$1 - \beta$

Dove

**Definizione 14.3.2** (Probabilità degli Errori di primo e secondo tipo).

$$\alpha = P(\text{Errore I tipo}) = P(\text{Decidere } H_1; H_0) = P(X_1, \dots, X_n \in \mathcal{S}_1; H_0)$$

$$\beta = P(\text{Errore II tipo}) = P(\text{Decidere } H_0; H_1) = P(X_1, \dots, X_n \in \mathcal{S}_0; H_1)$$

$\alpha$  è il livello di **significatività** del test,  $\alpha$  è la probabilità di scegliere  $H_1$  quando invece è vera  $H_0$ .  $\beta$  è la probabilità di scegliere  $H_0$  quando invece è vera  $H_1$ .

Infine

**Definizione 14.3.3** (Potenza di un Test).

$$1 - \beta = P(\text{Decidere } H_1; H_1) = P(X_1, \dots, X_n \in \mathcal{S}_1; H_1)$$

$1 - \beta$  è la **potenza del test**,  $1 - \beta$  è la probabilità di scegliere  $H_1$  quando  $H_1$  è vera.

**Esempio 14.3.1** (Spam e Filtri email). Il Un filtro delle email che separa lo *spam* dal *non spam* non è una *procedura certa*

$$\begin{aligned} P(\text{Falso Positivo}) &= P(\text{filtrata spam; non è spam}) = \alpha \\ P(\text{Falso Negativo}) &= P(\text{filtrata non spam; è spam}) = \beta \end{aligned}$$

La tavola della verità

		Filtro	
		Non Spam	Spam
stato di natura	Non Spam	$1 - \alpha$	$\alpha$
	Spam	$\beta$	$1 - \beta$

Obiettivo: costruire il filtro in modo tale che  $\alpha$  sia fissato ad un valore arbitrariamente piccolo  $1 - \beta$  sia la più alta possibile, per  $\alpha$  fissato

## 14.4 Esempio: Scegliere tra due ipotesi semplici

Esempio: siamo indecisi se l'urna da cui stiamo per estrarre le palline abbia l'80% di palline vincenti oppure il 40%:

$$\begin{cases} H_0 : \pi = 0.8, \\ H_1 : \pi = 0.4 \end{cases}$$

Decidiamo di estrarre 10 palline CR (IID),  $X_1, \dots, X_{10}$  per decidere tra  $H_0$  e  $H_1$ . Prima di estrarre le palline possiamo calcolare la probabilità di tutti i possibili campioni *sotto ipotesi*  $H_0$  e *sotto ipotesi*  $H_1$ . La somma

$$S_{10} = X_1 + \dots + X_{10}$$

descrive tutti i possibili campioni Bernoulli IID di ampiezza  $n = 10$ ,  $S_{10} \sim \text{Binom}(\pi)$  e quindi

$$\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$$

e

$$P(S_{10} = s; \pi) = \binom{10}{s} \pi^s (1 - \pi)^{10-s}, \quad \pi \in \{0.8, 0.4\}$$

Possiamo quindi calcolare

$S_n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(S_n; \pi = 0.8)$	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0055	0.0264	0.0881	0.2013	0.3020	0.2684	0.1074
$P(S_n; \pi = 0.4)$	0.0060	0.0403	0.1209	0.2150	0.2508	0.2007	0.1115	0.0425	0.0106	0.0016	0.0001

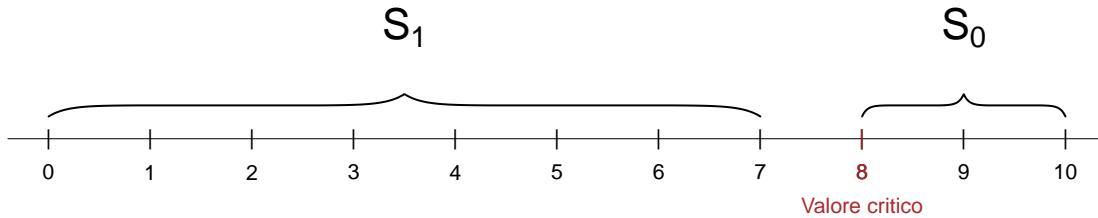
#### 14.4.1 Tre diversi Test a confronto

Sia dato il sistema di ipotesi:

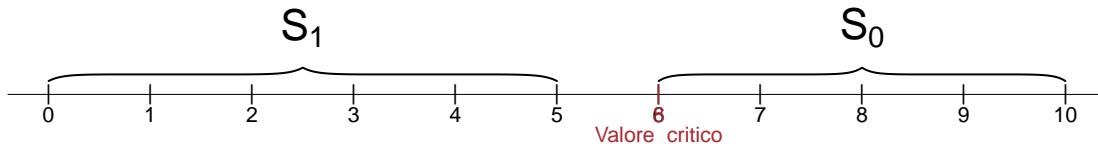
$$\begin{cases} H_0 : \pi = 0.8, \\ H_1 : \pi = 0.4 \end{cases}$$

Un test è una divisione dello spazio dei campioni, e nel modello Bernoulli IID i campioni di ampiezza  $n = 10$  sono riassunti dalla loro somma  $S_{10}$

**Decisione A** Se  $S_{10}/10 \geq 0.8 \Rightarrow S_{10} \geq 8$  allora scelgo  $H_0$ ; se  $S_{10}/10 < 0.8 \Rightarrow S_{10} < 8$  allora scelgo  $H_1$



**Decisione B** Se  $S_{10}/10 \geq 0.6 \Rightarrow S_{10} \geq 6$  allora scelgo  $H_0$ ; se  $S_{10}/10 < 0.6 \Rightarrow S_{10} < 6$  allora scelgo  $H_1$

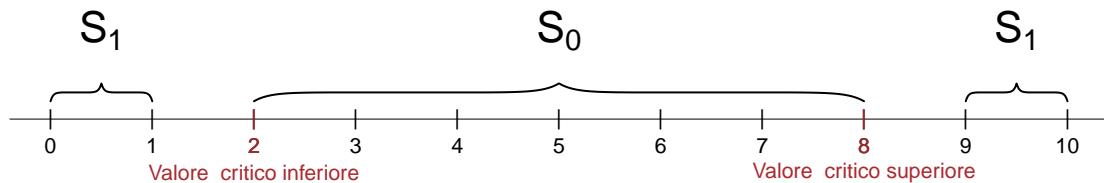


**Decisione C** Se  $0.2 \leq S_{10}/10 \leq 0.8 \Rightarrow 2 \leq S_{10} \leq 8$  allora scelgo  $H_0$ ; se  $S_{10}/10 < 0.2$  oppure  $S_{10} > 0.8$ ,  $\Rightarrow S_{10} < 2$  oppure  $S_{10} > 8$  allora scelgo  $H_1$

$S_n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(S_n; \pi = 0.8)$	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0055	0.0264	0.0881	0.2013	0.3020	0.2684	0.1074
$P(S_n; \pi = 0.4)$	0.0060	0.0403	0.1209	0.2150	0.2508	0.2007	0.1115	0.0425	0.0106	0.0016	0.0001

$S_n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(S_n; \pi = 0.8)$	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0055	0.0264	0.0881	0.2013	0.3020	0.2684	0.1074
$P(S_n; \pi = 0.4)$	0.0060	0.0403	0.1209	0.2150	0.2508	0.2007	0.1115	0.0425	0.0106	0.0016	0.0001



#### 14.4.2 Gli errori della decisione A

Siccome sappiamo calcolare la distribuzione di  $S_{10}$  sotto  $H_0$  e sotto  $H_1$ :

Decisione A:  $\mathcal{S}_0 = \{S_{10} \geq 8\}$  e  $\mathcal{S}_1 = \{S_{10} < 8\}$

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\mathcal{S}_1; H_0) = P(S_{10} = 0 \cup S_{10} = 1 \cup \dots \cup S_{10} = 7) \\ &= 0 + 0 + 0 + 0.001 + 0.006 + 0.026 + 0.088 + 0.201 = 0.3222 \\ \beta &= P(\mathcal{S}_0; H_1) = P(S_{10} = 8 \cup S_{10} = 9 \cup S_{10} = 10) \\ &= 0.011 + 0.002 + 0 = 0.0123\end{aligned}$$

La significatività del test A è  $\alpha = 0.3222$ . La potenza del test A è  $1 - \beta = 0.9877$

Decisione A		
	$H_0$	$H_1$
stato di natura	$\pi = 0.8$	0.6778
	$\pi = 0.4$	0.3222
	0.0123	0.9877

#### 14.4.3 Gli errori della decisione B

Siccome sappiamo calcolare la distribuzione di  $S_{10}$  sotto  $H_0$  e sotto  $H_1$ :

$S_n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(S_n; \pi = 0.8)$	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0055	0.0264	0.0881	0.2013	0.3020	0.2684	0.1074
$P(S_n; \pi = 0.4)$	0.0060	0.0403	0.1209	0.2150	0.2508	0.2007	0.1115	0.0425	0.0106	0.0016	0.0001

Decisione B:  $\mathcal{S}_0 = \{S_{10} \geq 6\}$  e  $\mathcal{S}_1 = \{S_{10} < 6\}$

$$\begin{aligned}
 \alpha &= P(\mathcal{S}_1; H_0) = P(S_{10} = 0 \cup S_{10} = 1 \cup \dots \cup S_{10} = 5) \\
 &= 0 + 0 + 0 + 0.001 + 0.006 + 0.026 = 0.0328 \\
 \beta &= P(\mathcal{S}_0; H_1) = P(S_{10} = 7 \cup \dots \cup S_{10} = 10) \\
 &= 0.111 + 0.042 + 0.011 + 0.002 + 0 = 0.1662
 \end{aligned}$$

La significatività del test B è  $\alpha = 0.0328$ . La potenza del test B è  $1 - \beta = 0.8338$

Decisione B		
	$H_0$	$H_1$
$\pi = 0.8$	0.9672	0.0328
<b>stato di natura</b>	0.1662	0.8338

#### 14.4.4 Gli errori della decisione C

Siccome sappiamo calcolare la distribuzione di  $S_{10}$  sotto  $H_0$  e sotto  $H_1$ :

Decisione C:  $\mathcal{S}_0 = \{2 \leq S_{10} \leq 8\}$  e  $\mathcal{S}_1 = \{S_{10} < 2\} \cup \{S_{10} > 8\}$

$$\begin{aligned}
 \alpha &= P(\mathcal{S}_1; H_0) = P(S_{10} = 0 \cup S_{10} = 1 \cup S_{10} = 9 \cup S_{10} = 10) \\
 &= 0 + 0 + 0.268 + 0.107 = 0.3758 \\
 \beta &= P(\mathcal{S}_0; H_1) = P(S_{10} = 2 \cup \dots \cup S_{10} = 8) \\
 &= 0.121 + 0.215 + 0.251 + 0.201 + 0.111 + 0.042 + 0.011 = 0.952
 \end{aligned}$$

La significatività del test C è  $\alpha = 0.3758$ , la potenza del test C è  $1 - \beta = 0.048$

Decisione C		
	$H_0$	$H_1$
$\pi = 0.8$	0.6242	0.3758
<b>stato di natura</b>	0.9520	0.0480

#### 14.4.5 Confronto

		Decisione A	
		$H_0$	$H_1$
<b>stato di natura</b>	$\pi = 0.8$	0.6778	0.3222
	$\pi = 0.4$	0.0123	0.9877

		Decisione B	
		$H_0$	$H_1$
<b>stato di natura</b>	$\pi = 0.8$	0.9672	0.0328
	$\pi = 0.4$	0.1662	0.8338

		Decisione C	
		$H_0$	$H_1$
<b>stato di natura</b>	$\pi = 0.8$	0.6242	0.3758
	$\pi = 0.4$	0.9520	0.0480

## 14.5 Ipotesi Nulla e Ipotesi Alternativa

Nell'approccio *decisionista* la statistica è di aiuto al decision manager: la decisione tra  $H_0$  e  $H_1$  deve tenero conto dei *costi* che una decisione sbagliata comporta e pesare i *costi* con la probabilità di sbagliare per ottenere una valutazione di *rischio*. Interessante approccio ma non verrà seguito in questo corso.

Nell'approccio *falsificazionista* ([https://it.wikipedia.org/wiki/Principio\\_di\\_falsificabilit%C3%A0](https://it.wikipedia.org/wiki/Principio_di_falsificabilit%C3%A0)), la statistica è di aiuto alla conoscenza del mondo esterno e delle sue *leggi*. Seguiremo questo approccio. In molte discipline  $H_0$  viene chiamata **Ipotesi Nulla** e ha una particolare interpretazione:  $H_0$  è lo stato di conoscenza pregresso. Rappresenta l'ipotesi che i dati non abbiano aggiunto niente di diverso da ciò che già conoscevamo. Sotto  $H_0$  asserisce che la **differenza** tra l'evidenza del campione e l'ipotesi nulla è solo **dovuta al caso**.  $H_1$  è chiamata **ipotesi alternativa**, sotto  $H_1$  la **differenza** tra l'evidenza dei dati e  $H_0$  **non è dovuta al caso** ma ad un *fattore sistematico*. La maggior parte delle volte l'obiettivo della ricerca si conclude positivamente se  $H_0$  viene rifiutata, e dunque i dati presentati nella ricerca hanno aggiunto *conoscenza*.

## 14.6 Rifiutare o non rifiutare $H_0$

Quando si prepara test, spesso, si vuole mostrare che i dati campionari smentiscono alcune ipotesi pregresse.  $H_0$  viene abbandonata (**rifiutata, confutata**) solo se c'è una forte evidenza campionaria contro

- Se  $H_0$  **non** viene rifiutata allora la differenza tra i dati e l'ipotesi nulla è considerata non significativa
- Se  $H_0$  viene rifiutata allora la differenza tra i dati e l'ipotesi è considerata significativa

Rifiutare  $H_0$  **non** significa accettare  $H_1$ , ma sostituire una ipotesi pregressa  $H_0$  con una nuova supportata dai dati,  $H_1$ .  $H_1$  diventa la nuova  $H_0$  e sarà considerata lo stato di conoscenza fino a quando non si troveranno

nuovi dati che la **confutano**. Per preservare  $H_0$  scegliamo una probabilità di significatività bassa

$$\alpha = \{0.05, 0.01, 0.005, 0.001\}$$

- $\alpha = 0.05$  produce un test al 5%
- $\alpha = 0.01$  produce un test all'1%
- ecc.

L'obiettivo è trovare, tra tutte i test a livello  $\alpha$  fissato, quello con potenza più alta. Non sempre il test più potente esiste. Non tratteremo il problema del test più potente in maniera sistematica.

## 14.7 Test per $\mu$ : due ipotesi semplici, $\sigma^2$ nota

Stiamo per estrarre  $n = 10$  VC IID,  $X_1, \dots, X_{10}$  da una normale  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , di cui conosciamo  $\sigma^2 = 3.5^2$ . Per esempio siamo indecisi tra:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 21 \\ H_1 : \mu = \mu_1 = 24 \end{cases}$$

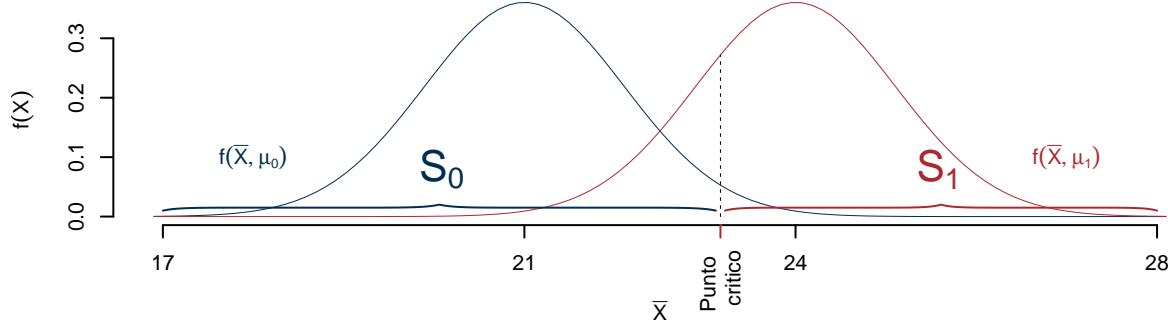
Siccome  $S_{10} = X_1 + \dots + X_{10}$  racchiude tutta l'informazione sulla media  $\mu$  che possiamo estrarre da un campione di normali IID con varianza nota, possiamo ragionare su  $\hat{\mu} = S_{10}/10$  invece che su tutto lo spazio dei campioni  $\mathcal{S}$ .

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n} = 1.1068^2\right)$$

- Sotto  $H_0$   
 $\hat{\mu} \sim N(21, 1.1068^2)$
- Sotto  $H_1$   
 $\hat{\mu} \sim N(24, 1.1068^2)$

### 14.7.1 Test per $\mu$ : scegliere il punto critico

Una decisione consiste nello scegliere il punto critico sullo spazio delle medie:



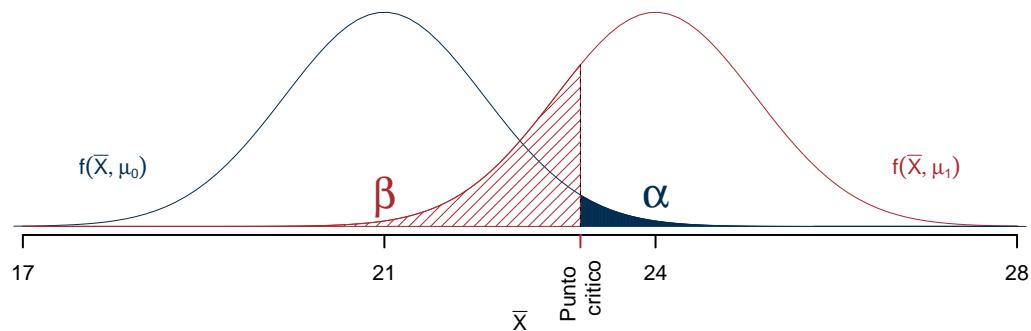
Potremmo prendere, per esempio, come punto critico  $\bar{x} = 23$ : se la media dei dati è minore di 23 sceglierò  $H_0$  altrimenti sceglierò  $H_1$ .

### 14.7.2 Probabilità di errore di primo e di secondo tipo

Fissato il punto critico, per esempio 23, osserviamo

$$\begin{aligned}
 \alpha &= P(\text{Errore I Tipo}) \\
 &= P(\text{Scegliere } H_1 \text{ quando è vera } H_0) \\
 &= P(\bar{X} > 23; H_0) \quad \text{sotto ipotesi } H_0: \mu = 21 \\
 &= 1 - P(\bar{X} \leq 23; H_0) \\
 &= 1 - P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{23 - 21}{3.5/\sqrt{10}}\right) \\
 &= 1 - \Phi(1.807) \\
 &= 0.0354 \\
 \beta &= P(\text{Errore II Tipo}) \\
 &= P(\text{Scegliere } H_0 \text{ quando è vera } H_1) \\
 &= P(\bar{X} < 23; H_1) \quad \text{sotto ipotesi } H_1: \mu = 24 \\
 &= P(\bar{X} \leq 23; H_1) \\
 &= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{23 - 24}{3.5/\sqrt{10}}\right) \\
 &= \Phi(-0.9035) \\
 &= 0.1831
 \end{aligned}$$

Graficamente osserviamo.



### 14.7.3 Test per $\alpha$ fissato, $\alpha = 0.05$

Scegliere il punto critico in questo modo è molto arbitrario e si preferisce scegliere  $\alpha$ . Il valore della probabilità di primo tipo viene scelto basso per preservare  $H_0$  e rifiutarla solo se l'evidenza campionaria è molto a favore di  $H_1$ . Fissiamo un valore di  $\alpha$  abbastanza piccolo, per esempio,  $\alpha = 0.05$ . Trovare il **punto critico** per  $\alpha$  fissato significa risolvere il seguente problema inverso

$$P(\hat{\mu} > \text{Punto Critico}; H_0) = 0.05$$

Sotto  $H_0$

$$\frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\hat{\mu} - 21}{3.5/\sqrt{10}} = \frac{\hat{\mu} - 21}{1.1068} \sim N(0, 1)$$

Problema inverso lo trasferiamo su  $Z$ , per esempio, e trovo il punto critico

$$\begin{aligned} P(Z > z_{0.05}) &= 0.05 \\ z_{0.05} &= 1.6449 \quad \text{letto dalle tavole} \\ P(Z > 1.6449) &= 0.05 \\ P\left(\frac{\hat{\mu} - 21}{1.1068} > 1.6449\right) &= 0.05 \\ P(\hat{\mu} > 21 + 1.6449 \cdot 1.1068) &= 0.05 \\ P(\hat{\mu} > 22.8205) &= 0.05 \\ \text{Punto Critico} &= \mu_0 + z_{0.05} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &= 22.8205 \end{aligned}$$

### 14.7.4 La regola di decisione, $\alpha = 0.05$

- Se risulterà  $\hat{\mu} \leq 22.8205$  allora decideremo di **non rifiutare**  $H_0$
- Se risulterà  $\hat{\mu} > 22.8205$  allora decideremo di **rifiutare**  $H_0$

La **significatività** di questo test è al 5%:

$$\alpha = 0.05 = P(\hat{\mu} > 22.8205; H_0)$$

Per calcolare  $\beta$  dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} \beta &= P(\hat{\mu} < 22.8205; H_1) \\ &= P\left(\frac{\hat{\mu} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{22.8205 - 24}{1.1068}\right) \\ &= P\left(Z < 1.6449 + \frac{21 - 24}{1.1068}\right) \\ &= P(Z < -1.0657) \\ &= \Phi(-1.0657) \\ &= 0.1433 \end{aligned}$$

La **potenza** del test è 85.6714%

$$1 - \beta = 0.8567$$

### 14.7.5 Test per $\alpha$ fissato, $\alpha = 0.01$

Fissiamo un valore di  $\alpha$  abbastanza piccolo, per esempio,  $\alpha = 0.01$ . Trovare il punto critico per  $\alpha$  fissato significa risolvere il seguente problema inverso

$$P(\hat{\mu} > \text{Punto Critico}; H_0) = 0.01$$

Sotto  $H_0$

$$\frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\hat{\mu} - 21}{3.5/\sqrt{10}} = \frac{\hat{\mu} - 21}{1.1068} \sim N(0, 1)$$

Problema inverso lo trasferiamo su  $Z$ , per esempio, e trovo il punto critico

$$\begin{aligned} P(Z > z_{0.01}) &= 0.01 \\ z_{0.01} &= 2.3263 \quad \text{letto dalle tavole} \\ P(Z > 2.3263) &= 0.01 \\ P\left(\frac{\hat{\mu} - 21}{1.1068} > 2.3263\right) &= 0.01 \\ P(\hat{\mu} > 21 + 2.3263 \cdot 1.1068) &= 0.01 \\ \text{Punto Critico} &= \mu_0 + z_{0.01} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &= 23.5748 \end{aligned}$$

### 14.7.6 La regola di decisione, $\alpha = 0.01$

- Se risulterà  $\hat{\mu} \leq 23.5748$  allora decideremo di **non rifiutare**  $H_0$ .
- Se risulterà  $\hat{\mu} > 23.5748$  allora decideremo di **rifiutare**  $H_0$ .

La significatività di questo test è all'1%:

$$\alpha = 0.01 = P(\hat{\mu} > 23.5748; H_0)$$

Per calcolare  $\beta$  dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} \beta &= P(\hat{\mu} < 23.5748; H_1) \\ &= P\left(\frac{\hat{\mu} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{23.5748 - 24}{1.1068}\right) \\ &= P\left(Z < 2.3263 + \frac{21 - 24}{1.1068}\right) \\ &= P(Z < -0.3842) \\ &= \Phi(-0.3842) \\ &= 0.3504 \end{aligned}$$

La **potenza** del test è 64.9576%

$$1 - \beta = 0.6496$$

## 14.8 $H_0$ semplice e $H_1$ composta

Nella pratica più comune, se  $\theta$  è il parametro da testare, analizzeremo i tre seguenti sistemi di ipotesi

Unilaterale destra

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$$

Unilaterale sinistra

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases}$$

Bilaterale

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

## 14.9 La Statistica Test

La **Statistica Test** è una statistica (una funzione dei dati) che agevola il processo decisionale. Consente di non dover trovare il punto critico nello spazio di  $\mathcal{S}$ . Calcolata sul campione osservato consente di decidere immediatamente se il campione porta più evidenza ad  $H_0$  oppure ad  $H_1$ .



### Nota

Se  $\hat{\theta}$  è stimatore per  $\theta$ , con errore di stima  $SE(\hat{\theta})$ , una pratica comune è la statistica test

$$T = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE(\hat{\theta})}$$

come misura di allontanamento da  $H_0$

- se  $\hat{\theta} = \theta_0$ , allora  $T = 0$
- se  $\hat{\theta} > \theta_0$ , allora  $T > 0$
- se  $\hat{\theta} < \theta_0$ , allora  $T < 0$

Se l'errore di stima  $SE(\hat{\theta})$  è grande, allora piccole differenze tra  $\hat{\theta}$  e  $\theta_0$  **non comportano** a grandi variazioni di  $T$  intorno a zero.

Se l'errore di stima  $SE(\hat{\theta})$  è piccolo, allora piccole differenze tra  $\hat{\theta}$  e  $\theta_0$  **comportano** grandi variazioni di  $T$  intorno a zero.

Trovare il punto critico sullo spazio di  $\mathcal{S}$  equivale a trovarlo su  $T$ .

# Test per una media e una proporzione

15

In questo capitolo svilupperemo il test per una media. Essendo la proporzione una particolare media su elementi 0 e 1 la costruzione verrà in automatico. In tutti i casi considereremo un solo campione  $x_1, \dots, x_n$  proveniente da una popolazione che ha media  $E(X_i) = \mu, \forall i$  e  $V(X_i) = \sigma^2, \forall i$ .

Il sistema di ipotesi porrà sempre  $H_0 : \mu = \mu_0$  e si leggerà: la vera media che ha generato i dati è  $\mu_0$ , il fatto che la media dei dati sia  $\hat{\mu}_{\text{obs}} = \bar{x} \neq \mu_0$  è dovuto all'effetto del campionamento e la differenza tra  $\hat{\mu}_{\text{obs}}$  e  $\mu_0$  **non è significativa**. L'ipotesi alternativa  $H_1$ , che sarà unilaterale o bilaterale, si legge al contrario: la differenza tra la media osservata e la media prescritta da  $H_0$  **è significativa** e il campione proviene da una popolazione che non ha media  $\mu_0$ .

Alla luce dei dati decideremo se scegliere di rifiutare  $H_0$  o se non rifiutarla. Costruiremo anche una misura di vicinanza empirica ad  $H_1$ , il  $p_{\text{value}}$ , che ci consentirà di capire quanto l'evidenza empirica dei dati supporti supporti una delle due ipotesi.

## 15.1 Test sulla media, $\sigma^2$ noto

### 15.1.1 Test sulla media, ipotesi unilaterale destra, $\sigma^2$ noto

Siano  $X_1, \dots, X_n, n$  VC, IID:  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$  con  $\sigma^2$  noto. Consideriamo il seguente sistema di ipotesi

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

Dalle proprietà della normale

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

E quindi

$$Z = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Sotto  $H_0 : \mu = \mu_0$  la statistica

$$Z = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

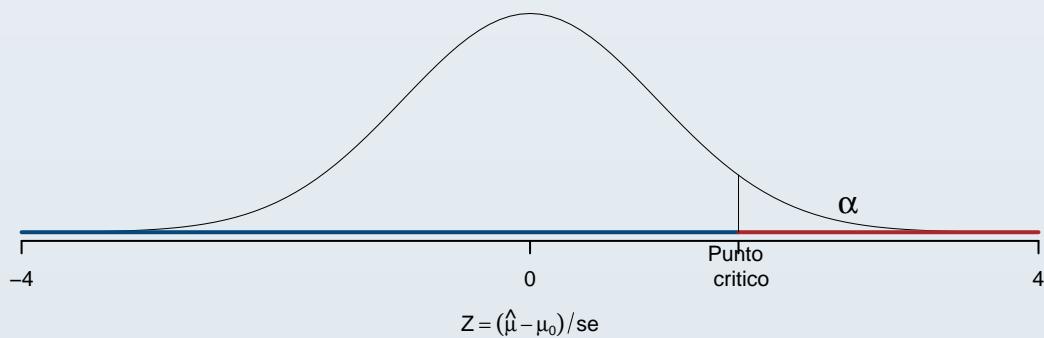
$Z$  osservata sul campione misura l'evidenza contro  $H_0$ , tanto più è alto il valore di  $Z$  tanto più  $H_0$  è inverosimile.

**Decisione sul campione.** Si decide un livello  $\alpha$  e si ricava  $z_\alpha$ , si estrae un campione. Lo stimatore  $\hat{\mu}$  si realizza nella media osservata del campione  $\hat{\mu}_{\text{obs}}$

$$z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu}_{\text{obs}} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- Se  $z_{\text{obs}} < z_\alpha$   $H_0$  **non viene rifiutata** al livello di significatività  $\alpha \times 100\%$
- Se  $z_{\text{obs}} > z_\alpha$   $H_0$  **viene rifiutata** al livello di significatività  $\alpha \times 100\%$

Normale Standard



### 15.1.2 Test sulla media, $\sigma^2$ noto, vari livelli di $\alpha$

Se  $\alpha = 0.05$  allora

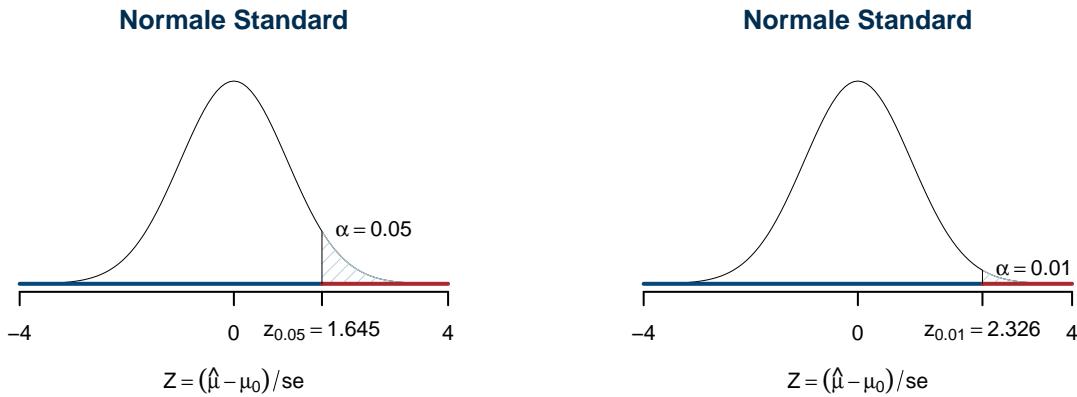
$$\text{Punto Critico} = z_{0.05}, \quad P(Z > z_{0.05}) = 0.05$$

$$z_{0.05} = 1.6449$$

Se  $\alpha = 0.01$  allora

$$\text{Punto Critico} = z_{0.01}, \quad P(Z > z_{0.01}) = 0.01$$

$$z_{0.01} = 2.3263$$



**Esempio 15.1.1.** In un laboratorio, vi sono cavie con peso medio uguale a 30g e una DS pari a 5g. Uno studente seleziona 25 cavie e ottiene un peso medio uguale a 32g con una  $\hat{\sigma}$  pari a 7g. La selezione è casuale o il valore ottenuto della media è troppo alto, a un LdS del 5%?

**Test  $Z$  per una media, variazna nota**

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 30 \\ H_1 : \mu > \mu_0 = 30 \end{cases}$$

B SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST,  $Z$

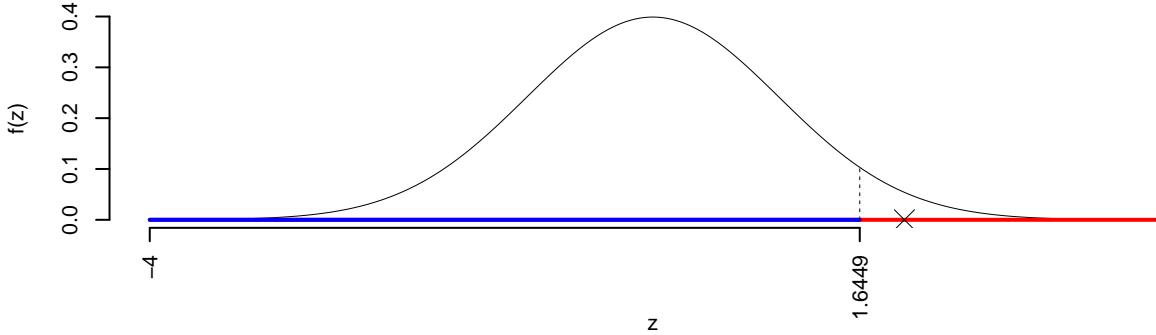
$\sigma^2$  di  $P$  è nota:  $\Rightarrow$  z-Test.

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} &\sim N(0, 1) \\ z_{\text{obs}} &= \frac{(32 - 30)}{5/\sqrt{25}} = 2. \end{aligned}$$

C CONCLUSIONE

La significatività è  $\alpha = 0.05$ , dalle tavole osserviamo  $z_{0.05} = 1.6449$ .

Essendo  $z_{\text{obs}} = 2 > z_{0.05} = 1.6449$  allora **rifiuto**  $H_0$  al 5%.



Cioè rifiutiamo  $H_0$  se

$$\begin{aligned}
 Z &> z_\alpha \\
 Z &> 1.6449 \\
 \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} &> 1.6449 \\
 \hat{\mu} - \mu_0 &> 1.6449 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\
 \hat{\mu} &> \mu_0 + 1.6449 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\
 &> 30 + 1.6449 \frac{5}{\sqrt{25}} \\
 &> 31.6449
 \end{aligned}$$

Se  $H_0$  fosse vera  $\mu = 30$ , 5 volte su 100, un campione di ampiezza  $n = 25$  ha una media che supera 31.6449.

**Esempio 15.1.2.** In un laboratorio, vi sono cavie con peso medio uguale a 30g e una DS pari a 5g. Uno studente seleziona 25 cavie e ottiene un peso medio uguale a 32g con una  $\hat{\sigma}$  pari a 7g. La selezione è casuale o il valore ottenuto della media è troppo alto, a un LdS del 1%?

**Test  $Z$  per una media, variazna nota**

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 30g \\ H_1 : \mu > \mu_0 = 30g \end{cases}$$

B SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST,  $Z$

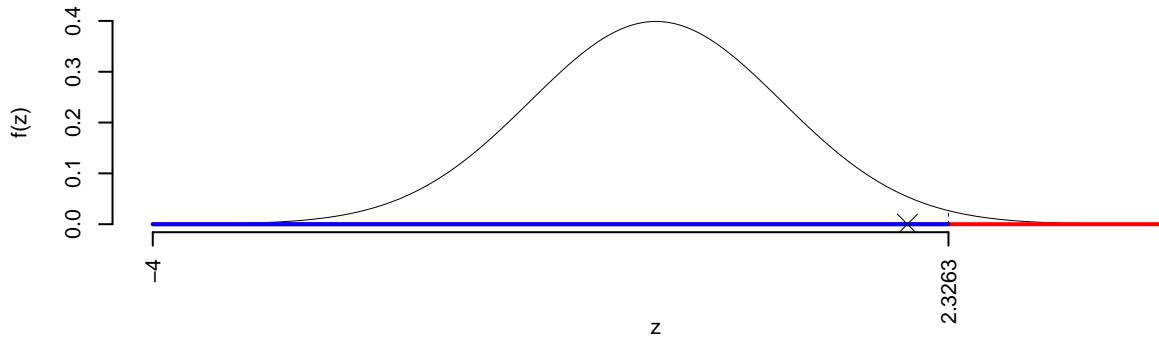
$\sigma^2$  di  $P$  è nota:  $\Rightarrow$  z-Test.

$$\begin{aligned}\frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} &\sim N(0, 1) \\ z_{\text{obs}} &= \frac{(32 - 30)}{5/\sqrt{25}} = 2.\end{aligned}$$

C CONCLUSIONE

La significatività è  $\alpha = 0.01$ , dalle tavole osserviamo  $z_{0.01} = 2.3263$ .

Essendo  $z_{\text{obs}} = 2 < z_{0.01} = 2.3263$  allora **non** rifiuto  $H_0$  al 1%.



Cioè rifiutiamo  $H_0$  se

$$\begin{aligned}Z &> z_\alpha \\ Z &> 2.3263 \\ \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} &> 2.3263 \\ \hat{\mu} - \mu_0 &> 2.3263 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \hat{\mu} &> \mu_0 + 2.3263 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &> 30 + 2.3263 \frac{5}{\sqrt{25}} \\ &> 32.3263\end{aligned}$$

Se  $H_0$  fosse vera  $\mu = 30$ , 5 volte su 100, un campione di ampiezza  $n = 25$  ha una media che supera 32.3263.

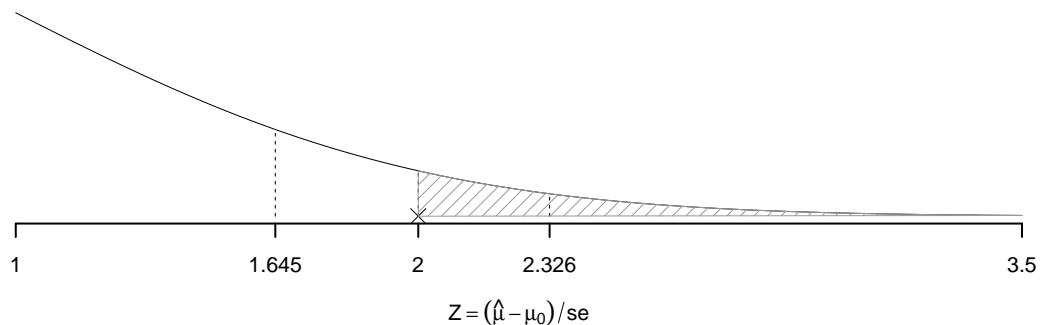
### 15.1.3 La probabilità di significatività osservata il $p_{\text{value}}$

Il  $p_{\text{value}}$  risponde a questa domanda: *Se nell'esempio precedente usassimo  $z_{\text{obs}}$  come punto critico quale sarebbe la probabilità di significatività?*

**Definizione 15.1.1** ( $p_{\text{value}}$  caso unilaterale destro).

$$p_{\text{value}} = P(Z > z_{\text{obs}}; H_0)$$

Normale Standard



$$\begin{aligned}
 p_{\text{value}} &= P(Z > 2) \\
 &= 1 - P(Z < 2) \\
 &= 1 - \Phi(2) \\
 &= 1 - 0.9772 \\
 &= 0.0228
 \end{aligned}$$

#### 15.1.4 Lettura del $p_{\text{value}}$

La probabilità di significatività osservata  $p_{\text{value}}$  ci dice la probabilità, *se fosse vera*  $H_0$  di trovare un campione ancora più in favore di  $H_1$  di quello che ho trovato. In altre parole ci dice, *se fosse vera*  $H_0$ , quanto sarebbe improbabile il nostro campione.

##### Nota

Tanto più basso è il  $p_{\text{value}}$  tanto più forte è l'evidenza dei dati contro  $H_0$ :

- Se  $p_{\text{value}} > 0.1 \rightarrow$  il test **non** è significativo
- Se  $0.05 < p_{\text{value}} \leq 0.1 \rightarrow$  il test è *marginalmente* significativo
- Se  $0.05 < p_{\text{value}} \leq 0.01 \rightarrow$  il test è significativo  $\rightarrow$  significativo al 5%
- Se  $0.001 < p_{\text{value}} \leq 0.01 \rightarrow$  il test è *molto* significativo  $\rightarrow$  significativo all'1%
- Se  $p_{\text{value}} \leq 0.001 \rightarrow$  il test è *estremamente* significativo  $\rightarrow$  significativo sotto all'1%

**Esempio 15.1.3.** In un laboratorio, vi sono cavie con peso medio uguale a 30g e una DS pari a 5g. Uno studente seleziona 50 cavie e ottiene un peso medio uguale a 32g con una  $\hat{\sigma}$  pari a 7g. La selezione è casuale o il valore ottenuto della media è troppo alto?

Test  $Z$  per una media, variazna nota

## [A] FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 30g \\ H_1 : \mu > \mu_0 = 30g \end{cases}$$

[B] SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST,  $Z$ 

$\sigma^2$  di  $P$  è nota:  $\Rightarrow$  z-Test.

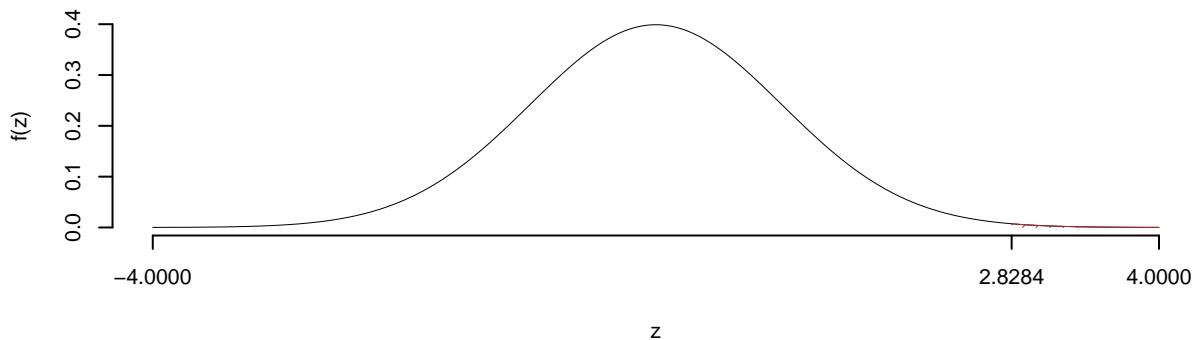
$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} &\sim N(0, 1) \\ z_{\text{obs}} &= \frac{(32 - 30)}{5/\sqrt{50}} = 2.828. \end{aligned}$$

## [C] CONCLUSIONE

Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(Z > 2.83) = 0.002339$$

$$0.001 < p_{\text{value}} = 0.002339 \leq 0.01$$



**Rifiuto**  $H_0$  all'1%,

$0.001 < p_{\text{value}} < 0.01$ , molto significativo \*\*.

Se a parità di statistiche le cavie fossero state  $n = 100$

**Test  $Z$  per una media, variazna nota**

## [A] FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 30g \\ H_1 : \mu > \mu_0 = 30g \end{cases}$$

[B] SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST,  $Z$ 

$\sigma^2$  di  $P$  è nota:  $\Rightarrow$  z-Test.

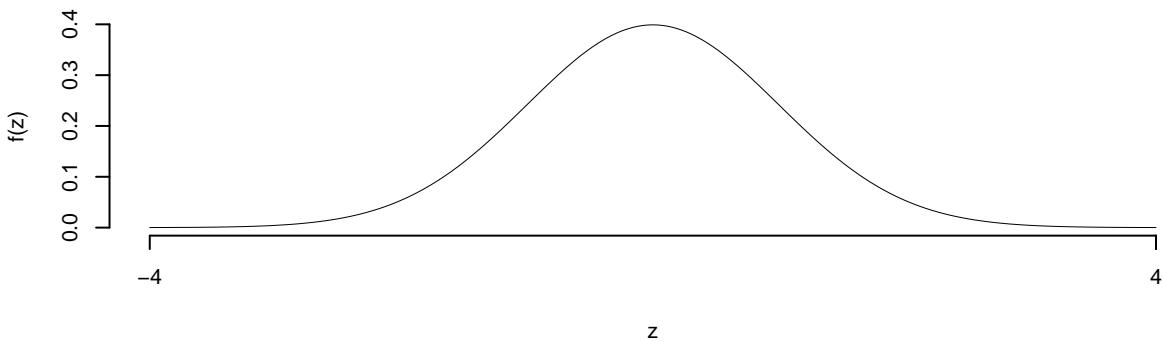
$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} &\sim N(0, 1) \\ z_{\text{obs}} &= \frac{(32 - 30)}{5/\sqrt{100}} = 4. \end{aligned}$$

## [C] CONCLUSIONE

Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(Z > 4) = 0.000032$$

$$0 < p_{\text{value}} = 0.000032 \leq 0.001$$



**Rifiuto**  $H_0$  sotto all'1%,

$p_{\text{value}} < 0.001$ , estremamente significativo **\*\*\***.

### 15.1.5 Test sulla media, ipotesi unilaterale sinistra, $\sigma^2$ noto

Siano  $X_1, \dots, X_n$  n VC, IID:  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$  con  $\sigma^2$  noto.

Consideriamo il seguente sistema di ipotesi

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

Dalle proprietà della normale

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

E quindi

$$Z = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Sotto  $H_0$  la statistica

$$Z = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

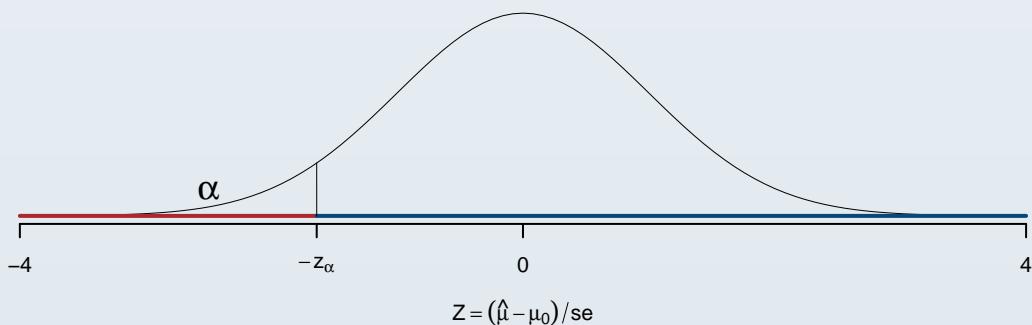
$Z$  osservata sul campione misura l'evidenza contro  $H_0$ , tanto più è basso il valore di  $Z$  tanto più  $H_0$  è inverosimile

**Decisione sul campione.** Si decide un livello  $\alpha$  e si ricava  $z_\alpha$ , si estraе un campione. Lo stimatore  $\hat{\mu}$  si realizza nella media osservata del campione  $\hat{\mu}_{\text{obs}}$

$$z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu}_{\text{obs}} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- Se  $z_{\text{obs}} > -z_\alpha$   $H_0$  non viene rifiutata al livello di significatività  $\alpha \times 100\%$
- Se  $z_{\text{obs}} < -z_\alpha$   $H_0$  viene rifiutata al livello di significatività  $\alpha \times 100\%$

Normale Standard



**Esempio 15.1.4.** La durata, in ore, della resistenza di un transistor alle alte temperature sia  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  e, in base all'esperienza, sia  $\mu_0 = 6$  ore e  $\sigma_0 = 0.5$  ore. Si apportano modifiche alla composizione dei materiali per fare diminuire la durata della resistenza alla temperatura. Si eseguono 16 osservazioni, dalle quali si ottiene una durata media  $\mu_{\text{obs}} = 5.7$  e uno deviazione standard  $s = 0.6$ . Verificare l'ipotesi, al LdS dell'1%, che la resistenza sia rimasta invariata contro l'alternativa che sia diminuita.

**Test  $Z$  per una media, variazna nota**

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 6h \\ H_1 : \mu < \mu_0 = 6h \end{cases}$$

B SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST,  $Z$

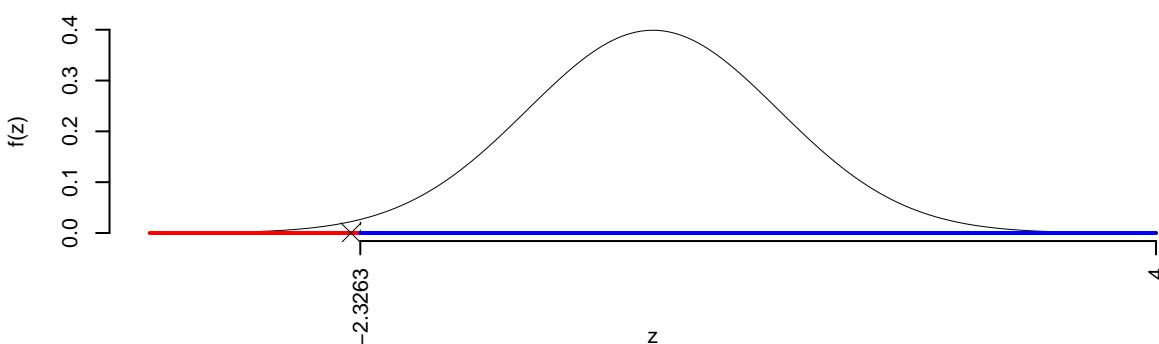
$\sigma^2$  di  $P$  è nota:  $\Rightarrow$  z-Test.

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} &\sim N(0, 1) \\ z_{\text{obs}} &= \frac{(5.7 - 6)}{0.5/\sqrt{16}} = -2.4. \end{aligned}$$

C CONCLUSIONE

La significatività è  $\alpha = 0.01$ , dalle tavole osserviamo  $z_{0.01} = -2.3263$ .

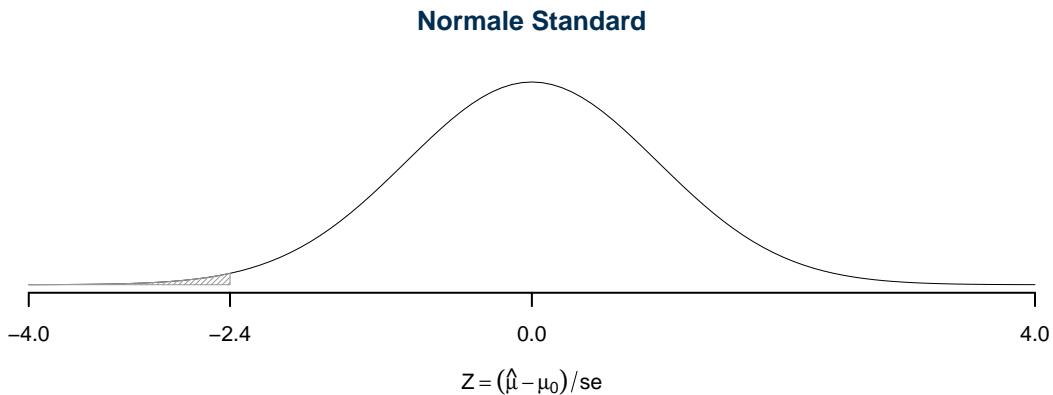
Essendo  $z_{\text{obs}} = -2.4 < z_{0.01} = -2.3263$  allora **rifiuto**  $H_0$  al 1%.



15.1.5.1 La probabilità di significatività osservata il  $p_{\text{value}}$ 

**Definizione 15.1.2** ( $p_{\text{value}}$  caso unilaterale sinistro). Nel caso di ipotesi unilaterale sinistra abbiamo

$$p_{\text{value}} = P(Z < z_{\text{obs}}; H_0)$$



$$\begin{aligned} p_{\text{value}} &= P(Z < -2.4) \\ &= \Phi(-2.4) \\ &= 1 - \Phi(2.4) \\ &= 1 - 0.9918 \\ &= 0.0082 \end{aligned}$$

15.1.6 Test sulla media, ipotesi bilaterale,  $\sigma^2$  noto

Siano  $X_1, \dots, X_n$  n VC, IID:  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$  con  $\sigma^2$  noto. Consideriamo il seguente sistema di ipotesi

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

Sotto  $H_0$  la statistica

$$Z = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

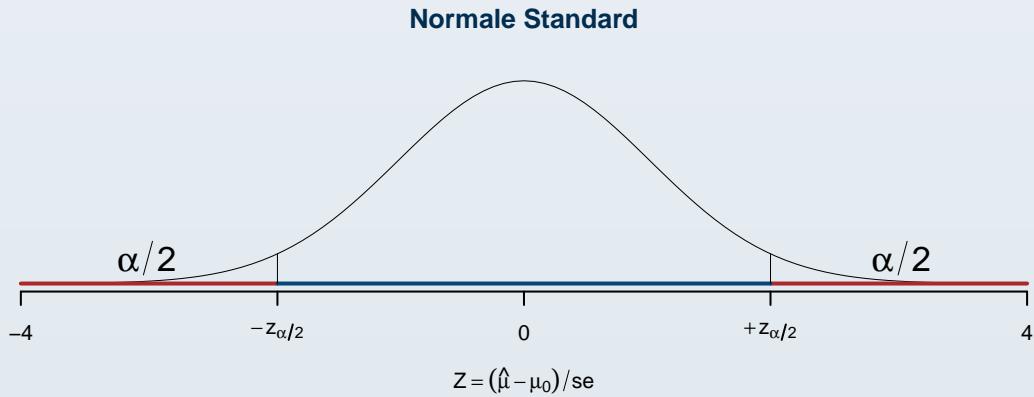
$Z$  osservata sul campione misura l'evidenza contro  $H_0$ , tanto più è il valore di  $Z$  è **diverso** da zero tanto più  $H_0$  è inverosimile

**Decisione sul campione.** Si decide un livello  $\alpha$  e si ricava  $z_{\alpha/2}$ , si estrae un campione. Lo stimatore  $\hat{\mu}$  si

realizza nella media osservata del campione  $\hat{\mu}_{\text{obs}}$

$$z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu}_{\text{obs}} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- Se  $-z_{\alpha/2} \leq z_{\text{obs}} \leq z_{\alpha/2}$   $H_0$  **non viene rifiutata** al livello di significatività  $\alpha \times 100\%$
- Se  $z_{\text{obs}} < -z_{\alpha/2}$ , o  $z_{\text{obs}} > +z_{\alpha/2}$   $H_0$  **viene rifiutata** al livello di significatività  $\alpha \times 100\%$



**Esempio 15.1.5.** Un produttore di semiconduttori afferma che la durata media dei suoi chip è di 300 ore con una deviazione standard di 3 ore. Un'azienda decide di testare la qualità dei chip e conduce un esperimento con 16 chip, ottenendo una durata media di 298 ore e una deviazione standard di 4 ore. I risultati di questo test sono coerenti con l'affermazione del produttore i chip tendono a durare in modo diverso dalla durata dichiarata, al 5%?

**Test  $Z$  per una media, variazna nota**

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 300 \text{ h} \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 = 300 \text{ h} \end{cases}$$

B SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST,  $Z$

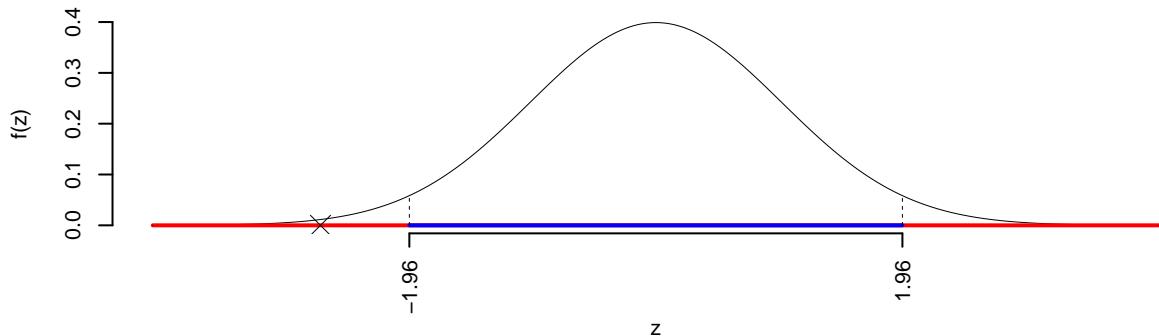
$\sigma^2$  di  $P$  è nota:  $\Rightarrow$  z-Test.

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} &\sim N(0, 1) \\ z_{\text{obs}} &= \frac{(298 - 300)}{3/\sqrt{16}} = -2.667. \end{aligned}$$

C CONCLUSIONE

La significatività è  $\alpha = 0.05$ , dalle tavole osserviamo  $z_{0.025} = 1.96$ .

Essendo  $|z_{\text{obs}}| = 2.6667 > z_{0.025} = 1.96$  allora **rifiuto**  $H_0$  al 5%.



Il  $p_{\text{value}}$  è

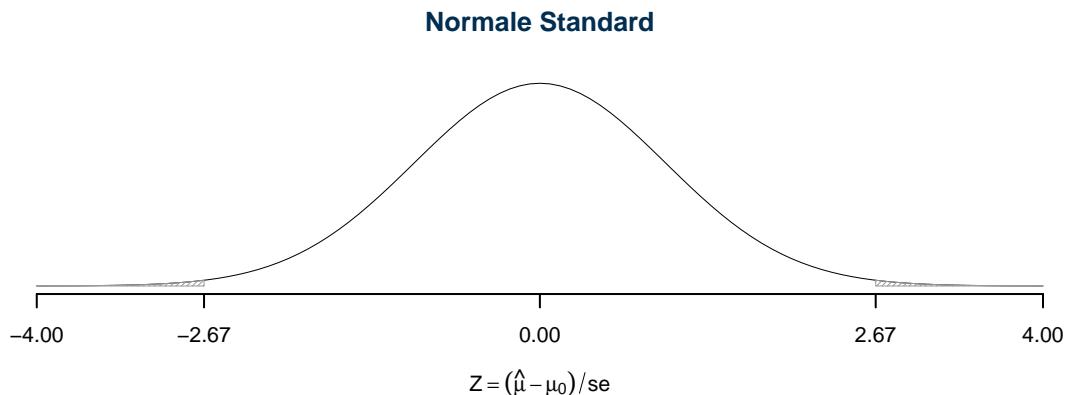
$$p_{\text{value}} = P(|Z| > |2.67|) = 2P(Z > 2.67) = 0.007661$$

$$0.001 < p_{\text{value}} = 0.007661 \leq 0.01$$

#### 15.1.6.1 La probabilità di significatività osservata il $p_{\text{value}}$

**Definizione 15.1.3** ( $p_{\text{value}}$  caso bilaterale). Nel caso di ipotesi bilaterale abbiamo

$$p_{\text{value}} = P(|Z| > |z_{\text{obs}}|; H_0)$$



$$\begin{aligned}
 p_{\text{value}} &= P(|Z| > 2.67) \\
 &= P(Z < -2.67) + P(Z > 2.67) \\
 &= 2 \cdot P(Z > 2.67) \\
 &= 2 \cdot (1 - \Phi(2.67)) \\
 &= 2 \cdot 0.0038 \\
 &= 0.0076
 \end{aligned}$$

## 15.2 Significatività non fissata

Le strategie per decidere per  $H_0$  invece di  $H_1$  cambiano a seconda di cosa rappresentano realmente le due ipotesi. In controllo di qualità industriale  $H_0$  significa conforme agli standard e  $H_1$  non conforme, fissare  $\alpha$  e di conseguenza  $\beta$  è frutto di un bilancio rischi benefici che richiede di esplicitare i costi che l'azienda paga in base all'errore: quando costa commettere l'errore di primo tipo? Quanto costa commettere l'errore di secondo tipo?

In altri contesti di ricerca la lontananza dei dati da  $H_0$  può essere oggetto di dibattito e il  $p_{\text{value}}$  misura esattamente questo. Senza avere fissato in anticipo  $\alpha$  il ricercatore di trova a discutere se il  $p_{\text{value}}$  è sufficientemente piccolo da rigettare l'ipotesi nulla. Il prossimo esempio esemplifica l'approccio

**Esempio 15.2.1.** Un'azienda farmaceutica afferma che la concentrazione media di principio attivo in una certa medicina è di 50 mg con una deviazione standard di 2 mg. Un laboratorio indipendente decide di verificare questa affermazione eseguendo 25 analisi e ottiene una concentrazione media di 51 mg e una deviazione standard di 2.5 mg. I risultati delle analisi sono coerenti con l'affermazione dell'azienda o la concentrazione del principio attivo è maggiore dalla quantità dichiarata?

### Test $Z$ per una media, variazna nota

#### [A] FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 50 \text{ mg} \\ H_1 : \mu > \mu_0 = 50 \text{ mg} \end{cases}$$

#### [B] SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST, $Z$

$\sigma^2$  di  $P$  è nota:  $\Rightarrow$  z-Test.

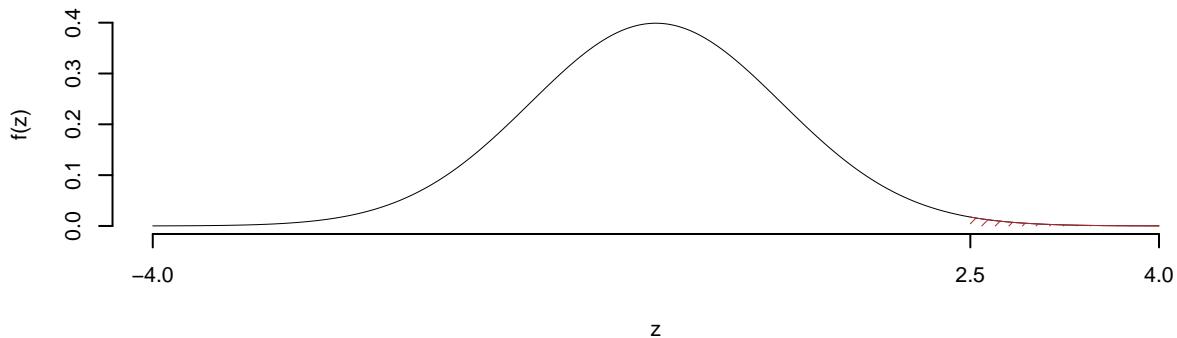
$$\begin{aligned}
 \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} &\sim N(0, 1) \\
 z_{\text{obs}} &= \frac{(51 - 50)}{2 / \sqrt{25}} = 2.5.
 \end{aligned}$$

#### [C] CONCLUSIONE

Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(Z > 2.5) = 0.006210$$

$$0.001 < p_{\text{value}} = 0.006210 \leq 0.01$$



**Rifiuto**  $H_0$  all'1%,

$0.001 < p_{\text{value}} < 0.01$ , molto significativo \*\*.

### 15.3 Test per $\mu, \sigma$ incognita

Se  $\sigma^2$  è incognito va stimato dai dati. Consideriamo lo stimatore  $S^2$  di  $\sigma^2$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2 = \frac{n}{n-1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2 = \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}^2$$

Ricordiamo che

$$\widehat{SE}(\hat{\mu}) = \sqrt{\frac{S^2}{n}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Ricordiamo infine che

$$T = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\widehat{SE}(\hat{\mu})} \sim t_{n-1}$$

Ovvero

$$T = \frac{\hat{\mu} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

E quindi sotto  $H_0$

$$T = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

$T$  è la statistica test che misura l'evidenza dei dati contro  $H_0$

### 15.3.1 Test sulla media, ipotesi unilaterale destra, $\sigma^2$ incognito

Siano  $X_1, \dots, X_n$   $n$  VC, IID:  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$  con  $\sigma^2$  incognito.

Consideriamo il seguente sistema di ipotesi

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

Sotto  $H_0$  la statistica

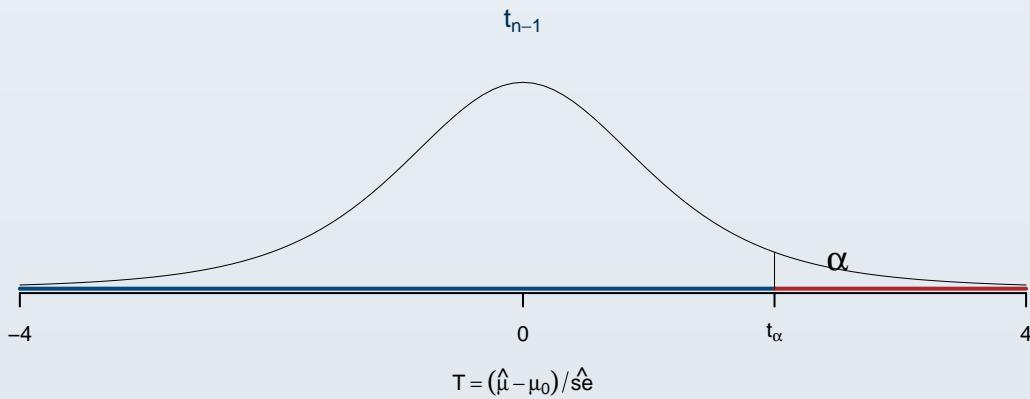
$$T = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

La  $T$  osservata sul campione misura l'evidenza contro  $H_0$ , tanto più è alto il valore di  $Z$  tanto più  $H_0$  è inverosimile

**Decisione sul campione** Si decide un livello  $\alpha$  e si ricava  $t_{n-1; \alpha}$ , si estrae un campione. Lo stimatore  $\hat{\mu}$  si realizza nella media osservata del campione  $\hat{\mu}_{\text{obs}}$

$$t_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu}_{\text{obs}} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

- Se  $t_{\text{obs}} < t_{n-1; \alpha}$   $H_0$  non viene rifiutata al livello di significatività  $\alpha \times 100\%$
- Se  $t_{\text{obs}} > t_{n-1; \alpha}$   $H_0$  viene rifiutata al livello di significatività  $\alpha \times 100\%$



**Esempio 15.3.1.** Un produttore di aspirine afferma che il prodotto lenisce il mal di testa in 30 minuti. Un campione casuale di 25 persone lo usa. Risultato:  $\mu_{\text{obs}} = 31.4$  minuti con  $\hat{\sigma} = 4.2$  minuti. Verificare l'affermazione del produttore a un LdS del 5%.

#### Test $t$ per una media, varianza incognita

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 30m \\ H_1 : \mu > \mu_0 = 30m \end{cases}$$

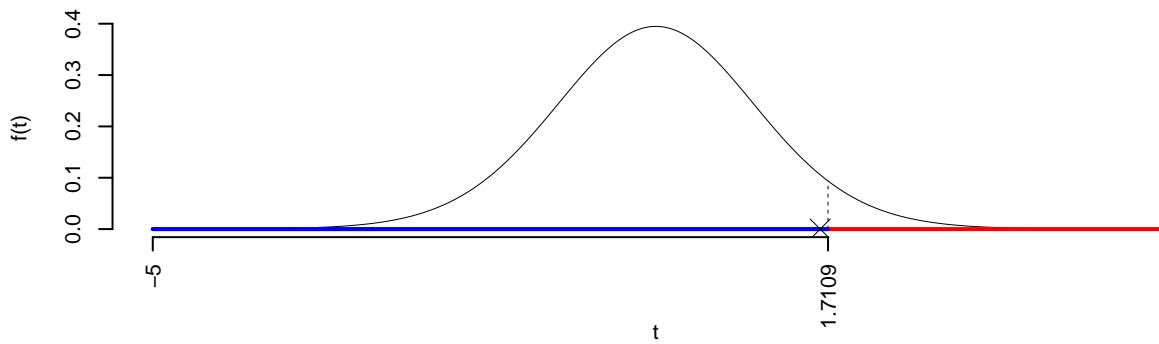
$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{25}{25-1}} \times 4.2 = 4.287$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} &\sim t_{n-1} \\ t_{\text{obs}} &= \frac{(31.4 - 30)}{4.287/\sqrt{25}} = 1.633. \end{aligned}$$

C CONCLUSIONE

La significatività è  $\alpha = 0.05$ , dalle tavole osserviamo  $t_{25-1;0.05} = 1.7109$ .

Essendo  $t_{\text{obs}} = 1.633 < t_{25-1;0.05} = 1.7109$  allora **non** rifiuto  $H_0$  al 5%.



Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(T_{25-1} > 1.63) = 0.057761$$

Attenzione il calcolo del  $p_{\text{value}}$  con la  $T$  è puramente illustrativo e non può essere riprodotto senza una calcolatrice statistica adeguata.

$$0.05 < p_{\text{value}} = 0.057761 \leq 0.1$$

### 15.3.2 Test sulla media, ipotesi unilaterale sinistra, $\sigma^2$ incognito

Siano  $X_1, \dots, X_n$   $n$  VC, IID:  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$  con  $\sigma^2$  incognito. Consideriamo il seguente sistema di ipotesi

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

Sotto  $H_0$  la statistica

$$T = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

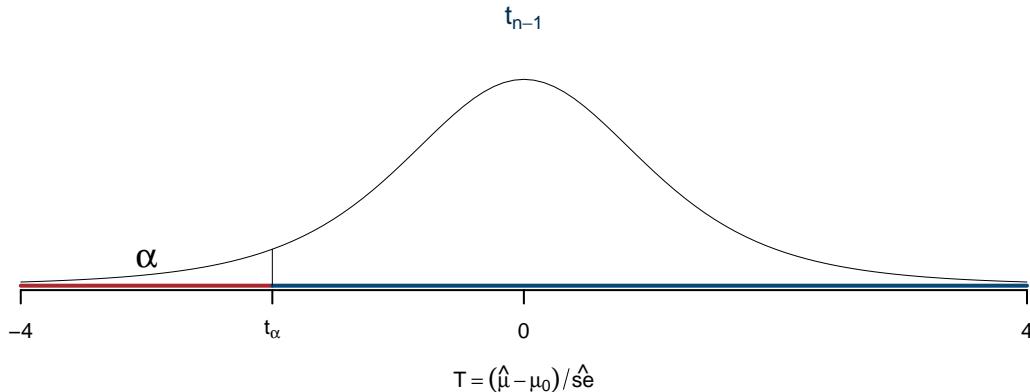
Lo stimatore  $\hat{\mu}$  si realizza nella media osservata del campione  $\hat{\mu}_{\text{obs}}$

$$t_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu}_{\text{obs}} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

**Decisione sul campione** Si decide un livello  $\alpha$  e si ricava  $t_{n-1; \alpha}$ , si estrae un campione. Lo stimatore  $\hat{\mu}$  si realizza nella media osservata del campione  $\hat{\mu}_{\text{obs}}$

$$t_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu}_{\text{obs}} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

- Se  $t_{\text{obs}} > -t_{n-1; \alpha}$   $H_0$  **non viene rifiutata** al livello di significatività  $\alpha \times 100\%$
- Se  $t_{\text{obs}} < -t_{n-1; \alpha}$   $H_0$  **viene rifiutata** al livello di significatività  $\alpha \times 100\%$



**Esempio 15.3.2.** Un Centro dietetico afferma che con i loro programmi si perdono in media 2kg nella prima settimana. Si selezionano casualmente 25 soggetti, tra gli iscritti al programma.

Risultato:  $\bar{X} = 1.5$  kg con  $\hat{\sigma} = 1.4$  kg. Verificare l'affermazione del Centro al LdS del 5%.

**Test  $t$  per una media, varianza incognita**

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 2kg \\ H_1 : \mu < \mu_0 = 2kg \end{cases}$$

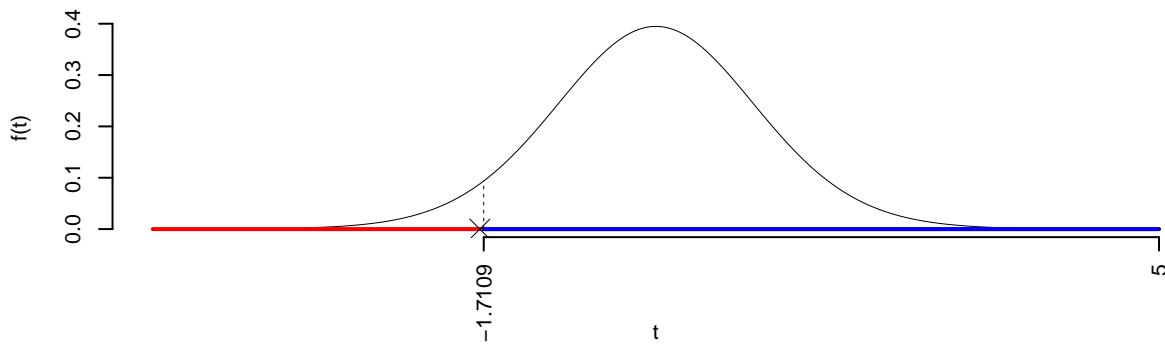
$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{25}{25-1}} \times 1.4 = 1.429$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} &\sim t_{n-1} \\ t_{\text{obs}} &= \frac{(1.5 - 2)}{1.429/\sqrt{25}} = -1.75. \end{aligned}$$

C CONCLUSIONE

La significatività è  $\alpha = 0.05$ , dalle tavole osserviamo  $t_{25-1;0.05} = -1.7109$ .

Essendo  $t_{\text{obs}} = -1.7496 < t_{25-1;0.05} = -1.7109$  allora **rifiuto**  $H_0$  al 5%.



Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(T_{25-1} < -1.75) = 0.046480$$

Attenzione il calcolo del  $p_{\text{value}}$  con la  $T$  è puramente illustrativo e non può essere riprodotto senza una calcolatrice statistica adeguata.

$$0.01 < p_{\text{value}} = 0.046480 \leq 0.05$$

### 15.3.3 Test sulla media, ipotesi bilaterale, $\sigma^2$ incognito

Siano  $X_1, \dots, X_n$  n VC, IID:  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$  con  $\sigma^2$  incognito. Consideriamo il seguente sistema di ipotesi

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

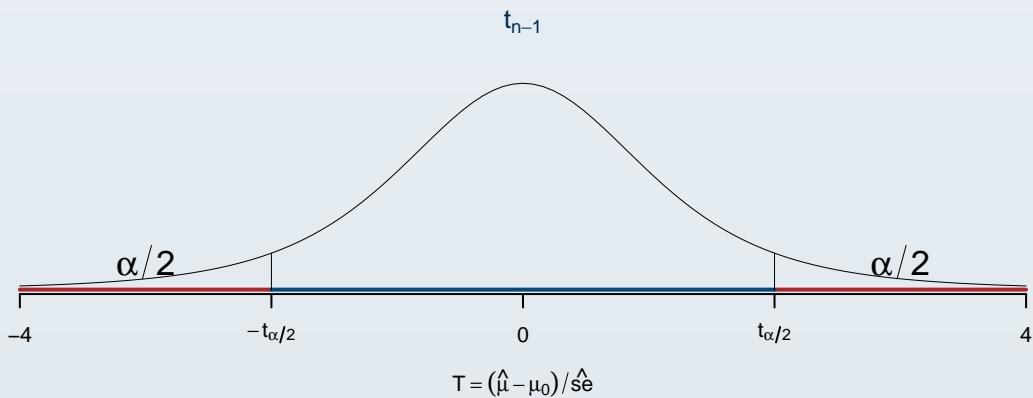
Sotto  $H_0$  la statistica

$$T = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

**Decisione sul campione.** Si decide un livello  $\alpha$  e si ricava  $t_{n-1; \alpha}$ , si estrae un campione. Lo stimatore  $\hat{\mu}$  si realizza nella media osservata del campione  $\hat{\mu}_{\text{obs}}$

$$t_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu}_{\text{obs}} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

- Se  $-t_{n-1; \alpha/2} < t_{\text{obs}} < t_{n-1; \alpha/2}$   $H_0$  **non viene rifiutata** al livello di significatività  $\alpha \times 100\%$
- Se  $t_{\text{obs}} > t_{n-1; \alpha/2}$  o  $t_{\text{obs}} < -t_{n-1; \alpha/2}$   $H_0$  **viene rifiutata** al livello di significatività  $\alpha \times 100\%$



**Esempio 15.3.3.** Eseguite 17 misure di resistenza su 17 campioni di filo. Risultato: la media è 7.5N (Newton) con  $\hat{\sigma} = 1.2N$ .

Il filo è stato ottenuto con un nuovo procedimento, ma non si conoscono i possibili effetti sulla resistenza. Verificare, a un LdS del 5%, l'ipotesi che la resistenza media sia uguale al filo standard, che è 6.8N, contro l'alternativa che sia diverso.

**Test  $t$  per una media, varianza incognita**

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 6.8N \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 = 6.8N \end{cases}$$

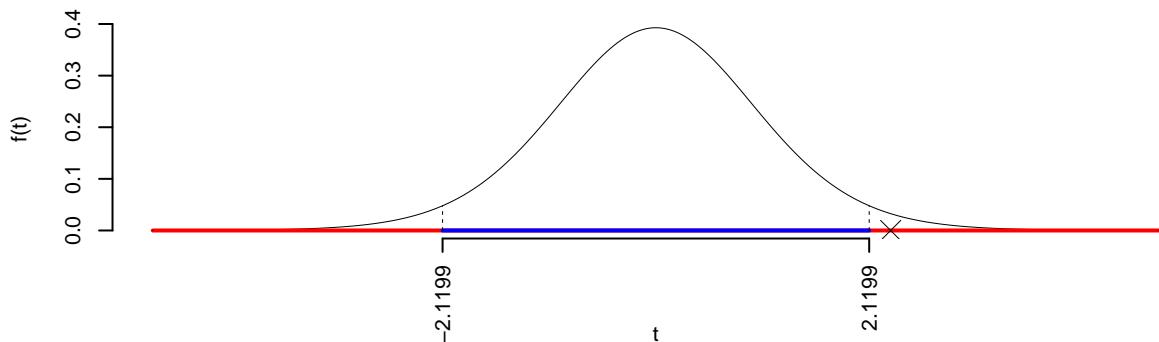
$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{17}{17-1}} \times 1.2 = 1.237$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} &\sim t_{n-1} \\ t_{\text{obs}} &= \frac{(7.5 - 6.8)}{1.237/\sqrt{17}} = 2.333. \end{aligned}$$

C CONCLUSIONE

La significatività è  $\alpha = 0.05$ , dalle tavole osserviamo  $t_{17-1;0.025} = 2.1199$ .

Essendo  $|t_{\text{obs}}| = 2.3333 > t_{17-1;0.025} = 2.1199$  allora **rifiuto  $H_0$**  al 5%.



Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(|T_{17-1}| > |2.33|) = 2P(T_{17-1} > 2.33) = 0.033005$$

Attenzione il calcolo del  $p_{\text{value}}$  con la  $T$  è puramente illustrativo e non può essere riprodotto senza una calcolatrice statistica adeguata.

$$0.01 < p_{\text{value}} = 0.033005 \leq 0.05$$

#### 15.3.4 Significatività non fissata

Come per lo  $z$ -test se la significatività non è fissata potremmo interpretare il solo  $p_{\text{value}}$ , ma il  $p_{\text{value}}$  per la distribuzione  $t$  non è calcolabile senza un'opportuna funzione che manca nelle gran parte delle calcolatrici scientifiche.

Se non si dispone di un software adeguato si possono usare le tavole statistiche e ricavare le soglie critiche per diversi  $\alpha$ . Una strategia comune è fissare

$$\alpha = \{1/10, 1/20, 1/100, 1/1000\} = \{0.1, 0.05, 0.01, 0.001\},$$

ricavare dalle tavole i rispettivi  $t_{n-1, \alpha}$  ( $t_{n-1, \alpha/2}$ , se il test è bilaterale) e vedere dove cade il  $t_{\text{obs}}$

**Esempio 15.3.4.** Un'azienda farmaceutica afferma che la concentrazione media di principio attivo in una certa medicina è di 50 mg. Un laboratorio indipendente decide di verificare questa affermazione eseguendo 25 analisi e ottiene una concentrazione media di 51 mg e una deviazione standard di 2.5 mg. I risultati delle analisi sono coerenti con l'affermazione dell'azienda o la concentrazione del principio attivo tende a differire dalla quantità dichiarata?

**Test  $t$  per una media, varianza incognita**

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 50\% \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 = 50\% \end{cases}$$

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{25}{25-1}} \times 2.5 = 2.552$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} &\sim t_{n-1} \\ t_{\text{obs}} &= \frac{(51 - 50)}{2.552/\sqrt{25}} = 1.96. \end{aligned}$$

C CONCLUSIONE

Siccome  $H_1$  è bilaterale, considereremo  $\alpha/2$ , anziché  $\alpha$

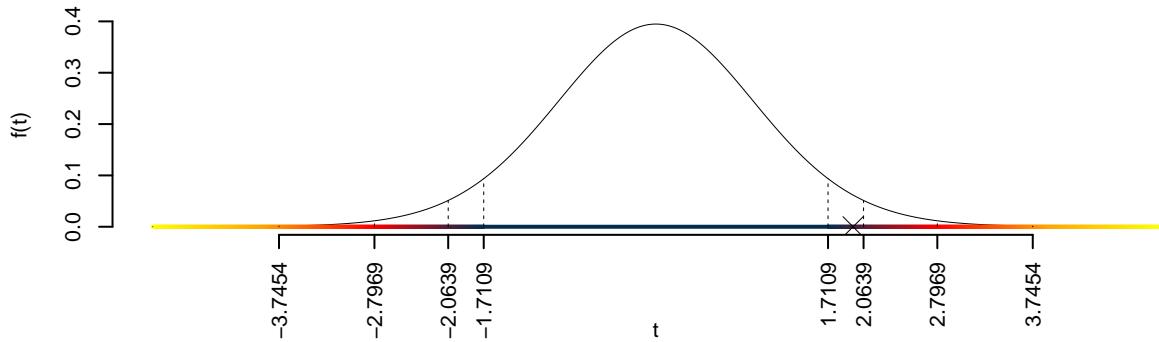
$$\alpha = 0.1, 0.05, 0.01, 0.001 \text{ e quindi } \alpha/2 = 0.05, 0.025, 0.005, 0.0005$$

I valori critici sono

$$t_{25-1;0.05} = 1.7109; t_{25-1;0.025} = 2.0639; t_{25-1;0.005} = 2.7969; t_{25-1;0.0005} = 3.7454$$

Siccome  $1.7109 < |t_{\text{obs}}| = 1.9596 < 2.0639$ , indecisione sul rifiuto di  $H_0$  al 10%,

$0.05 < p_{\text{value}} < 0.1$ , marginalmente significativo •.



Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(|T_{25-1}| > |1.96|) = 2P(T_{25-1} > 1.96) = 0.061756$$

Attenzione il calcolo del  $p_{\text{value}}$  con la  $T$  è puramente illustrativo e non può essere riprodotto senza una calcolatrice statistica adeguata.

$$0.05 < p_{\text{value}} = 0.061756 \leq 0.1$$

## 15.4 Massima verosimiglianza e test

Se  $\hat{\theta}$  è stimatore di massima verosimiglianza per  $\theta$  allora, per  $n$  sufficientemente grande

$$\hat{\theta} \sim N(\theta, SE^2(\hat{\theta}))$$

Sotto ipotesi  $H_0$

$$\hat{\theta} \sim N(\theta_0, SE^2(\hat{\theta}))$$

La statistica test

$$Z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE(\hat{\theta})} \sim N(0, 1)$$

Esempio: se  $\sigma$  è incognita, la statistica test per  $\mu$  è:

$$T = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Se  $n$  diverge

$$t_{n-1} \rightarrow N(0, 1)$$

Se  $n > 100$  il  $t$ -test diventa lo  $z$ -test.

## 15.5 Test per $\pi$

Siano  $X_1, \dots, X_n$   $n$  VC IID, replicazioni di  $X \sim \text{Ber}(\pi)$ . Lo stimatore di massima verosimiglianza

$$\hat{\pi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \stackrel{a}{\sim} N\left(\pi, \frac{\pi(1-\pi)}{n}\right)$$

Sotto  $H_0, \pi = \pi_0$

$$\hat{\pi} \stackrel{a}{\sim} N\left(\pi_0, \frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}\right)$$

E quindi

$$\frac{\hat{\pi} - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)/n}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$$

La statistica osservata è

$$z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\pi}_{\text{obs}} - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)/n}}$$

A seconda di  $H_1$  decideremo con le solite regole

**Esempio 15.5.1.** Lanciamo  $n = 50$  un moneta di cui non siamo sicuri se è truccata oppure no. Osserviamo 30 successi su 50 lanci. Verificare l'ipotesi che la moneta sia bilanciata ( $\pi = 0.5$ ), contro l'alternativa che sia maggiore.

Lo stimatore di massima verosimiglianza è

$$\hat{\pi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

### Test $Z$ per una proporzione

La stima

$$\hat{\pi} = \frac{30}{50} = 0.6$$

#### A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \pi = \pi_0 = 0.5 \\ H_1 : \pi > \pi_0 = 0.5 \end{cases}$$

#### B SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST, $Z$ Test Binomiale per $n$ grande: $\Rightarrow z$ -Test.

$$\frac{\hat{\pi} - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)/n}} \sim N(0, 1)$$

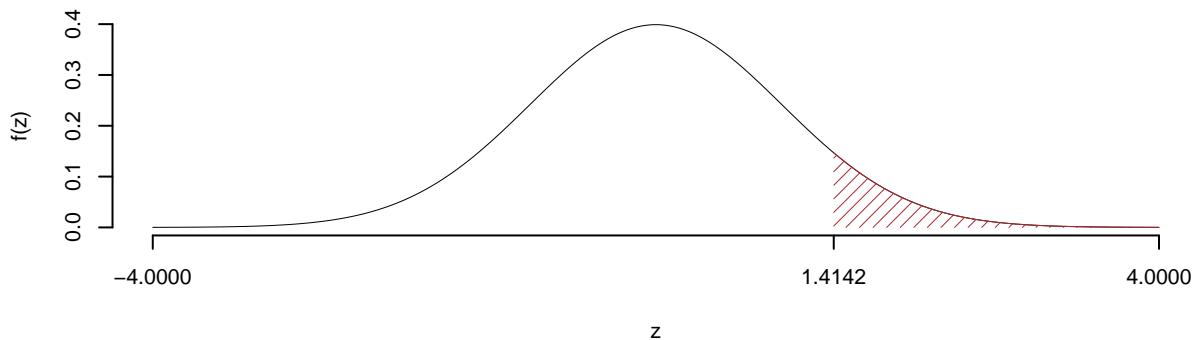
$$z_{\text{obs}} = \frac{(0.6 - 0.5)}{\sqrt{0.5(1 - 0.5)/50}} = 1.414.$$

C CONCLUSIONE

Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(Z > 1.41) = 0.078650$$

$$0.05 < p_{\text{value}} = 0.078650 \leq 0.1$$



Indecisione sul rifiuto di  $H_0$  al 10%,

$0.05 < p_{\text{value}} < 0.1$ , marginalmente significativo □.

**Esempio 15.5.2.** Lanciamo  $n = 100$  un moneta di cui non siamo sicuri se è truccata oppure no. Osserviamo 60 successi su 50 lanci. Verificare l'ipotesi che la moneta sia bilanciata ( $\pi = 0.5$ ), contro l'alternativa che sia maggiore.

Lo stimatore di massima verosimiglianza è

$$\hat{\pi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

**Test  $Z$  per una proporzione**

La stima

$$\hat{\pi} = \frac{60}{100} = 0.6$$

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \pi = \pi_0 = 0.5 \\ H_1 : \pi > \pi_0 = 0.5 \end{cases}$$

[B] SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST,  $Z$  Test Binomiale per  $n$  grande:  $\Rightarrow$  z-Test.

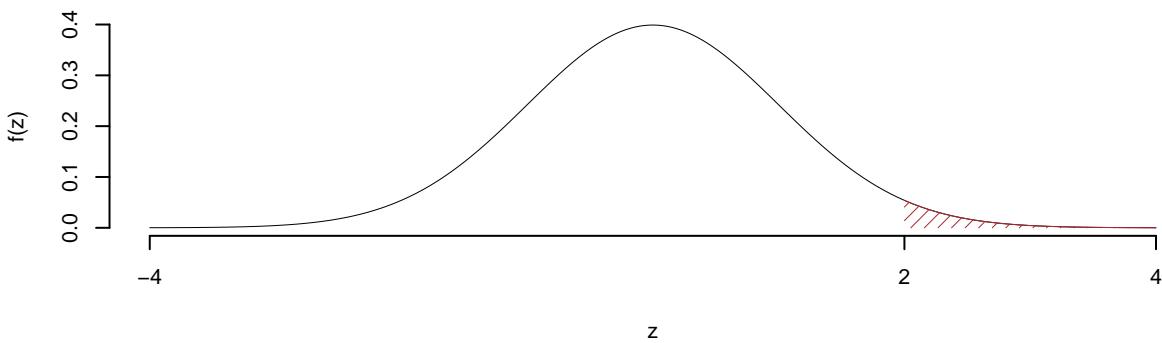
$$\begin{aligned} \frac{\hat{\pi} - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1 - \pi_0)/n}} &\sim N(0, 1) \\ z_{\text{obs}} &= \frac{(0.6 - 0.5)}{\sqrt{0.5(1 - 0.5)/100}} = 2. \end{aligned}$$

[C] CONCLUSIONE

Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(Z > 2) = 0.022750$$

$$0.01 < p_{\text{value}} = 0.022750 \leq 0.05$$



**Rifiuto**  $H_0$  al 5%,

$0.01 < p_{\text{value}} < 0.05$ , significativo  $\boxed{*}$ .

**Esempio 15.5.3.** Lanciamo  $n = 1000$  un moneta di cui non siamo sicuri se è truccata oppure no. Osserviamo 600 successi su 50 lanci. Verificare l'ipotesi che la moneta sia bilanciata ( $\pi = 0.5$ ), contro l'alternativa che sia maggiore.

Lo stimatore di massima verosimiglianza è

$$\hat{\pi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

### Test $Z$ per una proporzione

La stima

$$\hat{\pi} = \frac{600}{1000} = 0.6$$

#### [A] FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \pi = \pi_0 = 0.5 \\ H_1 : \pi > \pi_0 = 0.5 \end{cases}$$

#### [B] SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST, $Z$ Test Binomiale per $n$ grande: $\Rightarrow$ z-Test.

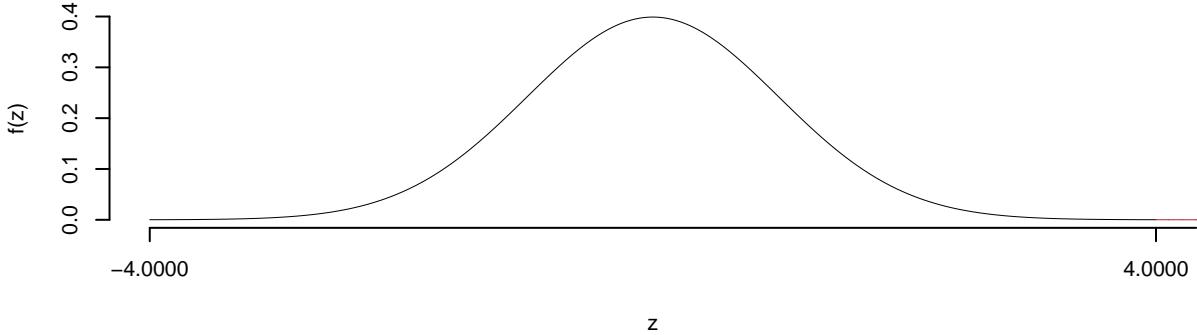
$$\begin{aligned} \frac{\hat{\pi} - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1 - \pi_0)/n}} &\sim N(0, 1) \\ z_{\text{obs}} &= \frac{(0.6 - 0.5)}{\sqrt{0.5(1 - 0.5)/1000}} = 6.325. \end{aligned}$$

#### [C] CONCLUSIONE

Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(Z > 6.32) = 1e - 10$$

$$0 < p_{\text{value}} = 1e - 10 \leq 0.001$$



**Rifiuto**  $H_0$  sotto all'1%,

$p_{\text{value}} < 0.001$ , estremamente significativo **\*\*\***.

**Esempio 15.5.4.** In una indagine su 100 imprese, si ha che 30 imprese decentrano la lavorazione tipo A. Il censimento precedente aveva rilevato una proporzione di decentramento,  $\pi = 0.4$ . Verificare l'ipotesi che il valore osservato sia dovuto al caso, contro l'alternativa che vi sia stata una diminuzione della proporzione di decentramento.

#### Test $Z$ per una proporzione

La stima

$$\hat{\pi} = \frac{30}{100} = 0.3$$

#### **A** FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \pi = \pi_0 = 0.4 \\ H_1 : \pi < \pi_0 = 0.4 \end{cases}$$

#### **B** SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST, $Z$ Test Binomiale per $n$ grande: $\Rightarrow$ z-Test.

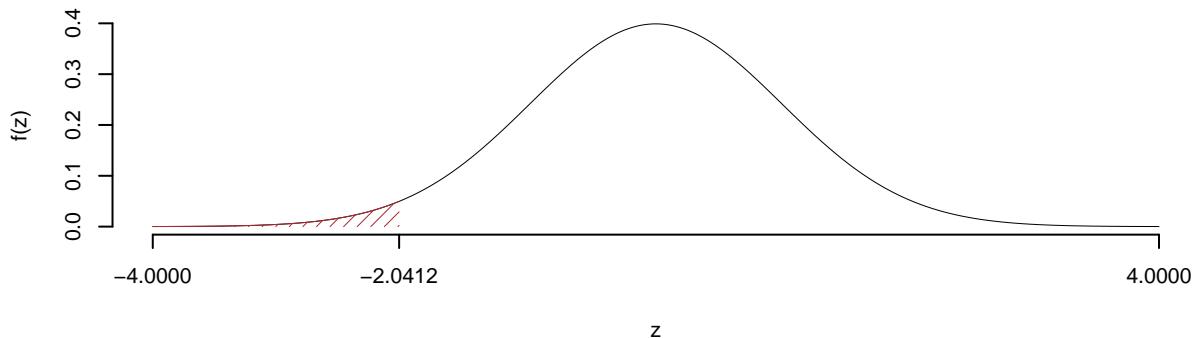
$$\begin{aligned} \frac{\hat{\pi} - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1 - \pi_0)/n}} &\sim N(0, 1) \\ z_{\text{obs}} &= \frac{(0.3 - 0.4)}{\sqrt{0.4(1 - 0.4)/100}} = -2.041. \end{aligned}$$

#### **C** CONCLUSIONE

Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(Z < -2.04) = 0.020613$$

$$0.01 < p_{\text{value}} = 0.020613 \leq 0.05$$



**Rifiuto**  $H_0$  al 5%,

$0.01 < p_{\text{value}} < 0.05$ , significativo  $\boxed{*}$ .

**Esempio 15.5.5.** Una città è composta da 50000 soggetti. Si estrae un campione casuale di 100 soggetti e si trova che 20 soggetti possiedono una connessione a banda ultra-larga. La proporzione posseduta a livello nazionale è pari al 25%. Verificare che nella città la percentuale sia diversa (in più o in meno).

**Test  $Z$  per una proporzione**

La stima

$$\hat{\pi} = \frac{20}{100} = 0.2$$

$\boxed{\text{A}}$  FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \pi = \pi_0 = 0.25 \\ H_1 : \pi \neq \pi_0 = 0.25 \end{cases}$$

$\boxed{\text{B}}$  SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST,  $Z$  Test Binomiale per  $n$  grande:  $\Rightarrow$  z-Test.

$$\frac{\hat{\pi} - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1 - \pi_0)/n}} \sim N(0, 1)$$

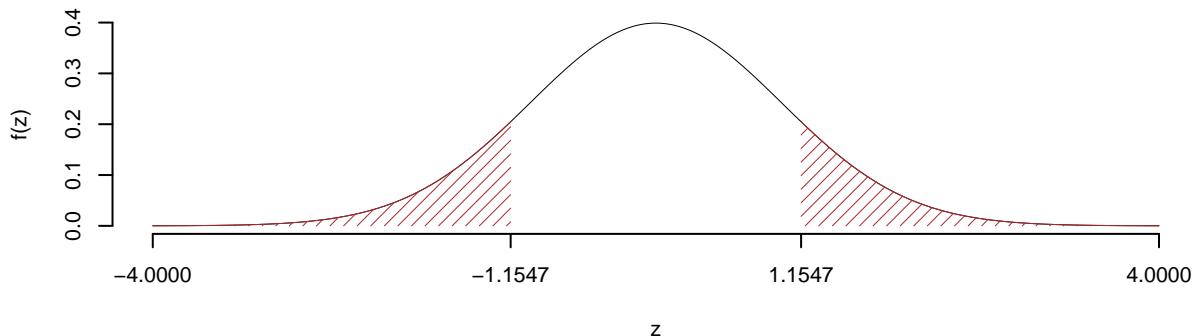
$$z_{\text{obs}} = \frac{(0.2 - 0.25)}{\sqrt{0.25(1 - 0.25)/100}} = -1.155.$$

C CONCLUSIONE

Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(|Z| > |-1.15|) = 2P(Z > 1.15) = 0.248213$$

$$0.1 < p_{\text{value}} = 0.248213 \leq 1$$



**Non** rifiuto  $H_0$  a **nessun** livello di significatività,

$p_{\text{value}} > 0.1$ , *non significativo*

## 15.6 Specchietto Finale per i Test ad un Campione

$H_0 : \mu = \mu_0$	$\sigma^2$	Dist.	Statistica Test	Zona Rifiuto	$p_{\text{value}}$
$H_1 : \mu > \mu_0$		Noto	$Z \quad z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu}_{\text{obs}} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$z_{\text{obs}} > z_\alpha$	$p_{\text{value}} = P(Z > z_{\text{obs}})$
$H_1 : \mu < \mu_0$		Noto	$Z \quad z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu}_{\text{obs}} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$z_{\text{obs}} < -z_\alpha$	$p_{\text{value}} = P(Z < z_{\text{obs}})$
$H_1 : \mu \neq \mu_0$		Noto	$Z \quad z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu}_{\text{obs}} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$ z_{\text{obs}}  >  z_{\alpha/2} $	$p_{\text{value}} = 2P(Z >  z_{\text{obs}} )$
$H_1 : \mu > \mu_0$		Incognito	$t_{n-1} \quad z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu}_{\text{obs}} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t_{\text{obs}} > t_{n-1; \alpha}$	$p_{\text{value}} = P(T > t_{\text{obs}})$
$H_1 : \mu < \mu_0$		Incognito	$t_{n-1} \quad z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu}_{\text{obs}} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t_{\text{obs}} < -t_{n-1; \alpha}$	$p_{\text{value}} = P(T < t_{\text{obs}})$
$H_1 : \mu \neq \mu_0$		Incognito	$t_{n-1} \quad z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu}_{\text{obs}} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$ t_{\text{obs}}  >  t_{n-1; \alpha/2} $	$p_{\text{value}} = 2P(T >  t_{\text{obs}} )$
$H_0 : \pi = \pi_0$		Dist.	Statistica Test	Zona Rifiuto	$p_{\text{value}}$
$H_1 : \pi > \pi_0$			$Z \quad z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\pi}_{\text{obs}} - \pi_0}{\sqrt{\pi(1-\pi)/\sqrt{n}}}$	$z_{\text{obs}} > z_\alpha$	$p_{\text{value}} = P(Z > z_{\text{obs}})$
$H_1 : \pi < \pi_0$			$Z \quad z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\pi}_{\text{obs}} - \pi_0}{\sqrt{\pi(1-\pi)/\sqrt{n}}}$	$z_{\text{obs}} < -z_\alpha$	$p_{\text{value}} = P(Z < z_{\text{obs}})$
$H_1 : \pi \neq \pi_0$			$Z \quad z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\pi}_{\text{obs}} - \pi_0}{\sqrt{\pi(1-\pi)/\sqrt{n}}}$	$ z_{\text{obs}}  >  z_{\alpha/2} $	$p_{\text{value}} = 2P(Z >  z_{\text{obs}} )$



Abbiamo trattato un gruppo di 15 pazienti con un placebo e un secondo gruppo di 10 pazienti con il farmaco A, il numero medio di giorni dei pazienti trattati con il placebo è di 10.4 giorni, con una sd di 2.3 giorni; il numero medio di giorni dei pazienti trattati con il farmaco è di 9.6 giorni, con una sd di 1.9 giorni. - La differenza tra 10.4 e 9.6 è **significativa**? - Il farmaco davvero diminuisce il numero medio di giorni oppure la differenza è colpa del caso?

In un'indagine sul reddito estraiamo un campione di 56 individui dalla città  $A$  e un secondo campione di 67 individui dalla città  $B$ . Il reddito medio del campione estratto da  $A$  è  $\hat{\mu}_A = 15.1$ mila euro lordi annui, con una sd  $\hat{\sigma}_A = 3.1$ mila euro; Il reddito medio del campione estratto da  $B$  è  $\hat{\mu}_B = 18.6$ mila euro lordi annui, con una sd  $\hat{\sigma}_B = 5.7$ mila euro, ci chiediamo se le due città hanno lo stesso reddito medio e la differenza nei campioni è dovuta al caso oppure i due campioni provengono da due città con reddito medio diverso.

Facciamo un sondaggio di opinione sul gradimento di un personaggio  $X$  in due provincie, A e B. Nella provincia A 35 persone su 130 intervistate gradiscono il personaggio  $X$ , nella provincia B 54 su 150 persone intervistate gradiscono il personaggio  $X$ .

- la differenza tra i due campioni è significativa?
- nella provincia A e in quella B la proporzione di gradimento è la stessa e la differenza nei campioni è dovuta al caso oppure no?

## 16.1 Test per due medie

### 16.1.1 il contesto probabilistico

Siano  $X_{1,A}, X_{2,A}, \dots, X_{n_A,A}$   $n_A$  VC IID replicazioni di  $X_A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$  e siano  $X_{1,B}, X_{2,B}, \dots, X_{n_B,B}$   $n_B$  VC IID replicazioni di  $X_B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$

$X_{1,A}, X_{2,A}, \dots, X_{n_A,A}$  è un campione di ampiezza  $n_A$  dalla popolazione  $\mathcal{P}_A$  e  $X_{1,B}, X_{2,B}, \dots, X_{n_B,B}$  è un campione di ampiezza  $n_B$  dalla popolazione  $\mathcal{P}_B$

Ci possiamo chiedere se:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B \\ H_1 : \mu_A > \mu_B \end{cases}$$

*Test Unilaterale*

Oppure se

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B \\ H_1 : \mu_A \neq \mu_B \end{cases}$$

*Test Bilaterale*

Perché solo due possibili  $H_1$ ? Perché l'ipotesi

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B \\ H_1 : \mu_A < \mu_B \end{cases}$$

equivale a

$$\begin{cases} H_0 : \mu_B = \mu_A \\ H_1 : \mu_B > \mu_A \end{cases}$$

### 16.1.2 Derivazione della statistica test

Se  $X_{1,A}, X_{2,A}, \dots, X_{n_A,A}, n_A$  VC IID replicazioni di  $X_A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$  e siano  $X_{1,B}, X_{2,B}, \dots, X_{n_B,B}, n_B$  VC IID replicazioni di  $X_B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$ , allora

$$\hat{\mu}_A \sim N\left(\mu_A, \frac{\sigma_A^2}{n_A}\right) \quad \text{e} \quad \hat{\mu}_B \sim N\left(\mu_B, \frac{\sigma_B^2}{n_B}\right)$$

E dunque, dalle proprietà delle normali

$$\hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B \sim N\left(\mu_A - \mu_B, \frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}\right)$$

E quindi

$$\frac{(\hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} \sim N(0, 1)$$

Sotto  $H_0 : \mu_A = \mu_B$

$$Z = \frac{\hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} \sim N(0, 1)$$

Ma  $\sigma_A$  e  $\sigma_B$  sono incogniti

### 16.1.3 Stima di $\sigma_A$ e $\sigma_B$

Dipende dalle ipotesi che abbiamo sulle due popolazioni:

Ipotesi 1: omogeneità: si ipotizza che in popolazione  $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$ , e dunque sia il campione proveniente da A che quello proveniente da B contribuiscono a stimare la varianza comune di popolazione  $\sigma^2$ .

Ipotesi 2: eterogeneità: si ipotizza che in popolazione  $\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$

In teoria per scegliere tra l'ipotesi di omogeneità e quella di eterogeneità dovremmo fare un test

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \\ H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2 \end{cases}$$

il cui sviluppo esula dagli scopi del corso.

In tutti gli esercizi che faremo l'ipotesi verrà **assunta** nel problema.

### 16.1.4 Ipotesi 1: omogeneità

Sotto ipotesi di omogeneità, entrambi i campioni contribuiscono alla stima della stima comune di  $\sigma^2$ , lo stimatore congiunto (*pooled*) è

$$S_p^2 = \frac{n_A \hat{\sigma}_A^2 + n_B \hat{\sigma}_B^2}{n_A + n_B - 2}$$

E quindi sotto  $H_0$

$$T = \frac{\hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_A} + \frac{S_p^2}{n_B}}} \sim t_{n_A + n_B - 2}$$

La statistica osservata

$$t_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_A} + \frac{S_p^2}{n_B}}}$$

Andrà letta nella direzione di  $H_1$ , sulle tavole della  $t$  con  $n_A + n_B - 2$  gradi di libertà.

### 16.1.5 Ipotesi 2: eterogeneità

Sotto ipotesi di eterogeneità, costruiamo gli stimatori corretti per  $\sigma_A^2$  e  $\sigma_B^2$

$$S_A^2 = \frac{n_A}{n_A - 1} \hat{\sigma}_A^2 \quad S_B^2 = \frac{n_B}{n_B - 1} \hat{\sigma}_B^2$$

E quindi sotto  $H_0$

$$T = \frac{\hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}} \sim t_{n_A + n_B - 2}$$

La statistica osservata

$$t_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}}$$

Andrà letta nella direzione di  $H_1$ , sulle tavole della  $t$  con  $n_A + n_B - 2$  gradi di libertà.

### 16.1.6 Esempio

La direzione vuole verificare se l'ammontare delle vendite di due supermercati,  $A$  e  $B$ , sia la stessa. Un campione di 18 giorni per il supermercato  $A$  fornisce una vendita media giornaliera pari a  $\hat{\mu}_A = 55$  mila euro, con  $\hat{\sigma}_A = 2.9$  mila euro. Un campione di 24 giorni per il supermercato  $B$  fornisce  $\hat{\mu}_B = 57$  mila euro, con  $\hat{\sigma}_A = 3.1$  mila euro.

Sotto assunto di **omogeneità** delle varianze verificare l'ipotesi che la vendita media del supermercato  $A$  sia uguale a quella del supermercato  $B$ , contro l'alternativa sia diversa.

#### Test $T$ per due medie, (omogeneità)

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B \\ H_1 : \mu_A \neq \mu_B \end{cases}$$

B SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST,  $T$

L'ipotesi è di omogeneità e quindi calcoliamo:

$$S_p^2 = \frac{n_A \hat{\sigma}_A^2 + n_B \hat{\sigma}_B^2}{n_A + n_B - 2} = \frac{18 \cdot 2.9^2 + 24 \cdot 3.1^2}{18 + 24 - 2} = 9.551$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_A} + \frac{S_p^2}{n_B}}} &\sim t_{n_A + n_B - 2} \\ t_{\text{obs}} &= \frac{(55 - 57)}{\sqrt{\frac{9.551}{18} + \frac{9.551}{24}}} = -2.076. \end{aligned}$$

C CONCLUSIONE

Siccome  $H_1$  è bilaterale, considereremo  $\alpha/2$ , anziché  $\alpha$

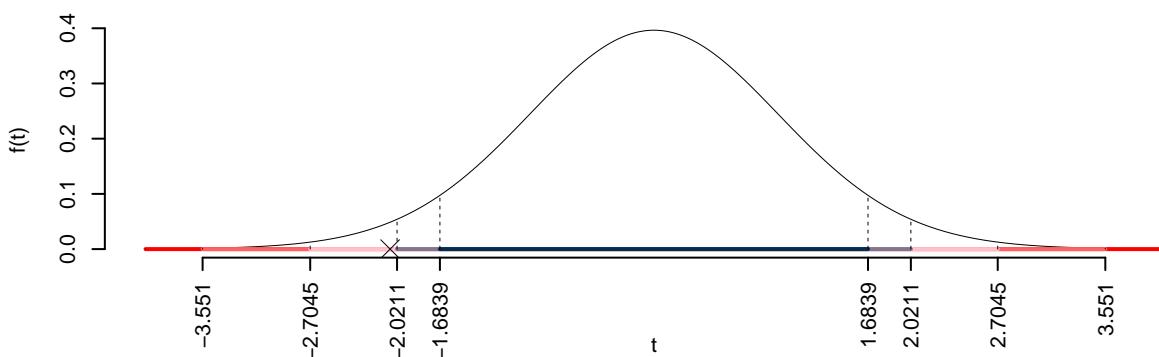
$\alpha = 0.1, 0.05, 0.01, 0.001$  e quindi  $\alpha/2 = 0.05, 0.025, 0.005, 0.0005$

I valori critici sono

$$t_{42-2;0.05} = 1.6839; t_{42-2;0.025} = 2.0211; t_{42-2;0.005} = 2.7045; t_{42-2;0.0005} = 3.551$$

Siccome  $2.0211 < |t_{\text{obs}}| = 2.0756 < 2.7045$ , quindi **rifiuto**  $H_0$  al 5%,

$0.01 < p_{\text{value}} < 0.05$ , significativo \*.



Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(|T_{42-2}| > |-2.08|) = 2P(T_{42-2} > 2.08) = 0.044408$$

Attenzione il calcolo del  $p_{\text{value}}$  con la  $T$  è puramente illustrativo e non può essere riprodotto senza una calcolatrice statistica adeguata.

$$0.01 < p_{\text{value}} = 0.044408 \leq 0.05$$

### 16.1.7 Esempio

Si sperimentano due diete:  $A$  e  $B$ . Per la dieta  $A$  si selezionano a caso 15 soggetti. Dopo due settimane, si osserva una diminuzione di peso:  $\hat{\mu}_A = 6\text{kg}$  con  $\hat{\sigma}_A = 1.2\text{kg}$ . Per la dieta  $B$  si selezionano a caso 18 soggetti. Dopo due settimane, si osserva una diminuzione di peso:  $\hat{\mu}_B = 5\text{kg}$  con  $\hat{\sigma}_B = 1.8\text{kg}$ . Nell'ipotesi di varianze **eterogenee**, verificare, se le due diete sono equivalenti contro l'alternativa che la dieta  $A$  sia più efficace (maggiore) della dieta  $B$ .

#### Test $t$ per due medie, (eterogeneità)

##### A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B \\ H_1 : \mu_A > \mu_B \end{cases}$$

##### B SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST, $T$

$$S_A^2 = \frac{n_A}{n_A - 1} \hat{\sigma}_A^2 = \frac{15}{15 - 1} 1.2^2 = 1.543 \quad S_B^2 = \frac{n_B}{n_B - 1} \hat{\sigma}_B^2 = \frac{18}{18 - 1} 1.8^2 = 3.431$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}} &\sim t_{n_A + n_B - 2} \\ t_{\text{obs}} &= \frac{(6 - 5)}{\sqrt{\frac{1.543}{15} + \frac{3.431}{18}}} = 1.846. \end{aligned}$$

##### C CONCLUSIONE

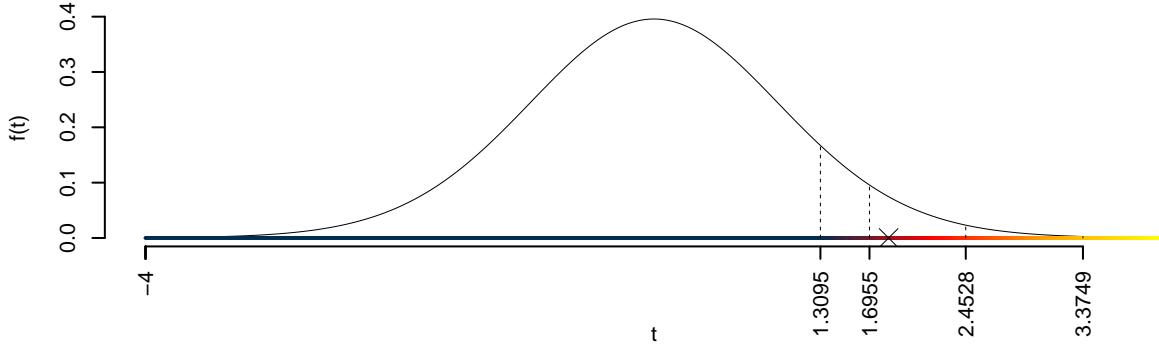
Consideriamo  $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01, 0.001$

I valori critici sono

$$t_{33-2;0.1} = 1.3095; t_{33-2;0.05} = 1.6955; t_{33-2;0.01} = 2.4528; t_{33-2;0.001} = 3.3749$$

Siccome  $1.6955 < t_{\text{obs}} = 1.846 < 2.4528$ , quindi **rifiuto**  $H_0$  al 5%,

$0.01 < p_{\text{value}} < 0.05$ , significativo  $\boxed{*}$ .



Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(T_{33-2} > 1.85) = 0.037229$$

Attenzione il calcolo del  $p_{\text{value}}$  con la  $T$  è puramente illustrativo e non può essere riprodotto senza una calcolatrice statistica adeguata.

$$0.01 < p_{\text{value}} = 0.037229 \leq 0.05$$

## 16.2 Test per due proporzioni

### 16.2.1 Il contesto probabilistico

Siano  $X_{1,A}, X_{2,A}, \dots, X_{n_A,A}$   $n_A$  VC IID replicazioni di  $X_A \sim \text{Ber}(\pi_A)$  e siano  $X_{1,B}, X_{2,B}, \dots, X_{n_B,B}$   $n_B$  VC IID replicazioni di  $X_B \sim \text{Ber}(\pi_B)$

$X_{1,A}, X_{2,A}, \dots, X_{n_A,A}$  è un campione di ampiezza  $n_A$  dalla popolazione  $\mathcal{P}_A$  e  $X_{1,B}, X_{2,B}, \dots, X_{n_B,B}$  è un campione di ampiezza  $n_B$  dalla popolazione  $\mathcal{P}_B$

Ci possiamo chiedere se:

$$\begin{cases} H_0 : \pi_A = \pi_B \\ H_1 : \pi_A > \pi_B \end{cases}$$

*Test Unilaterale*

Oppure se

$$\begin{cases} H_0 : \pi_A = \pi_B \\ H_1 : \pi_A \neq \pi_B \end{cases}$$

*Test Bilaterale*

### 16.2.2 Derivazione della statistica test

Se  $X_{1,A}, X_{2,A}, \dots, X_{n_A,A}$   $n_A$  VC IID replicazioni di  $X_A \sim \text{Ber}(\pi_A)$  e siano  $X_{1,B}, X_{2,B}, \dots, X_{n_B,B}$   $n_B$  VC IID replicazioni di  $X_B \sim \text{Ber}(\pi_B)$ , allora

$$\hat{\pi}_A \underset{a}{\sim} N\left(\pi_A, \frac{\pi_A(1-\pi_A)}{n_A}\right) \quad \text{e} \quad \hat{\pi}_B \underset{a}{\sim} N\left(\pi_B, \frac{\pi_B(1-\pi_B)}{n_B}\right)$$

E dunque, dalle proprietà delle normali

$$\hat{\pi}_A - \hat{\pi}_B \underset{a}{\sim} N\left(\pi_A - \pi_B, \frac{\pi_A(1-\pi_A)}{n_A} + \frac{\pi_B(1-\pi_B)}{n_B}\right)$$

E quindi

$$\frac{(\hat{\pi}_A - \hat{\pi}_B) - (\pi_A - \pi_B)}{\sqrt{\frac{\pi_A(1-\pi_A)}{n_A} + \frac{\pi_B(1-\pi_B)}{n_B}}} \sim N(0, 1)$$

Sotto  $H_0 : \pi_A = \pi_B = \pi_C$

$$Z = \frac{\hat{\pi}_A - \hat{\pi}_B}{\sqrt{\frac{\pi_C(1-\pi_C)}{n_A} + \frac{\pi_C(1-\pi_C)}{n_B}}} \sim N(0, 1)$$

La stima di  $\pi_C$  è

$$\hat{\pi}_C = \frac{\#\{\text{successi nel gruppo A}\} + \#\{\text{successi nel gruppo B}\}}{n_A + n_B} = \frac{n_A \hat{\pi}_A + n_B \hat{\pi}_B}{n_A + n_B}$$

E dunque

$$Z = \frac{\hat{\pi}_A - \hat{\pi}_B}{\sqrt{\frac{\hat{\pi}_C(1-\hat{\pi}_C)}{n_A} + \frac{\hat{\pi}_C(1-\hat{\pi}_C)}{n_B}}} \underset{a}{\sim} N(0, 1)$$

La statistica osservata è

$$z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\pi}_A - \hat{\pi}_B}{\sqrt{\frac{\hat{\pi}_C(1-\hat{\pi}_C)}{n_A} + \frac{\hat{\pi}_C(1-\hat{\pi}_C)}{n_B}}}$$

e andrà letta nella direzione di  $H_1$  sulle tavole della  $Z$ .

### 16.2.3 Esempio

Tra i abitanti del comune  $A$ , si intervistano 80 uomini e 100 donne per capire l'impatto che avrà la legge comunale sul divieto di fumo nei parchi pubblici. Dalle interviste risulta che 70 uomini e 70 donne si dichiarano a favore di tale legge. Verificare l'ipotesi che la nuova legge sia accolta in modo equivalente da donne e uomini, contro l'alternativa che le donne si dimostrino meno propense a accettare tale legge.

**Test  $Z$  per due proporzioni**

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \pi_U = \pi_D \\ H_1 : \pi_U > \pi_D \end{cases}$$

B SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST,  $Z$

$$\hat{\pi}_U = \frac{s_U}{n_U} = \frac{70}{80} = 0.875 \quad \hat{\pi}_D = \frac{s_D}{n_D} = \frac{70}{100} = 0.7$$

Calcoliamo la proporzione comune sotto  $H_0$

$$\pi_C = \frac{s_U + s_D}{n_U + n_D} = \frac{140}{180} = 0.7778$$

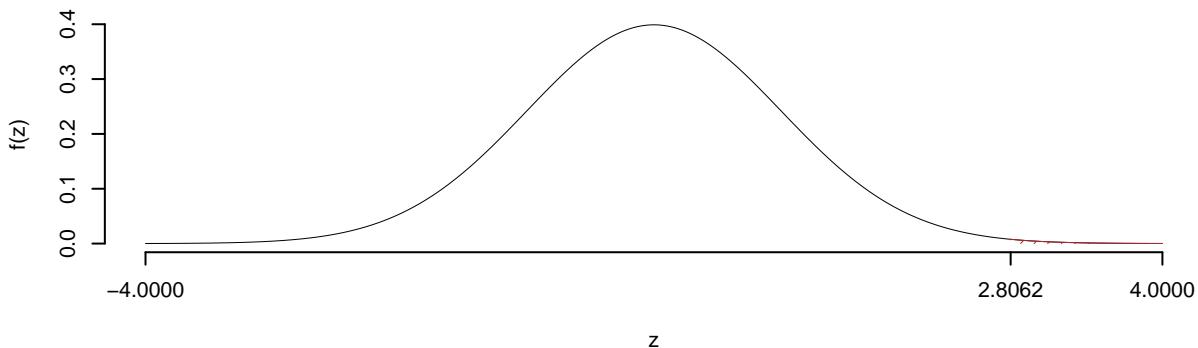
$$\begin{aligned} \frac{\hat{\pi}_U - \hat{\pi}_D}{\sqrt{\frac{\pi_C(1-\pi_C)}{n_U} + \frac{\pi_C(1-\pi_C)}{n_D}}} &\sim N(0, 1) \\ z_{\text{obs}} &= \frac{(0.875 - 0.7)}{\sqrt{\frac{0.7778(1-0.7778)}{80} + \frac{0.7778(1-0.7778)}{100}}} = 2.806. \end{aligned}$$

C CONCLUSIONE

Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(Z > 2.81) = 0.002506$$

$$0.001 < p_{\text{value}} = 0.002506 \leq 0.01$$



**Rifiuto**  $H_0$  all'1%,

$0.001 < p_{\text{value}} < 0.01$ , molto significativo \*\*.

### 16.3 Specchietto Finale per i Test ad Due Campioni

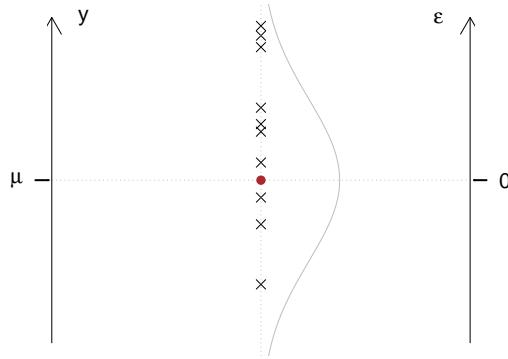
Test $t$ , 2 Campioni	Test $t$ , 2 Campioni	Proporzione, 2 Campioni
Omogeneità	Eterogeneità	
$t_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_A} + \frac{S_p^2}{n_B}}}$	$t_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}}$	$z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\pi}_A - \hat{\pi}_B}{\sqrt{\frac{\hat{\pi}_C(1-\hat{\pi}_C)}{n_A} + \frac{\hat{\pi}_C(1-\hat{\pi}_C)}{n_B}}}$
$S_p^2 = \frac{n_A \hat{\sigma}_A^2 + n_B \hat{\sigma}_B^2}{n_A + n_B - 2}$		$\hat{\pi}_C = \frac{\#\{\text{successi A}\} + \#\{\text{successi B}\}}{n_A + n_B}$ $= \frac{n_A \hat{\pi}_A + n_B \hat{\pi}_B}{n_A + n_B}$



## 17.1 Il modello d'errore

Siano  $Y_1, \dots, Y_n$   $n$  VC IID, replicazioni tc  $Y_i \sim N(\mu, \sigma_\varepsilon^2)$ , dalle proprietà della normale possiamo riscrivere:

$$Y_i = \mu + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$



$Y_i \sim N(\mu, \sigma_\varepsilon^2)$  è equivalente a dire  $Y_i = \mu + \varepsilon_i, \varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

### 17.1.1 Esempi

**Esempio 17.1.1.** Stiamo studiando la produttività media di un ettaro coltivato ad una certa varietà di riso: per prima cosa piantiamo 10 ettari **non** trattati con fertilizzante ( $X = 0$ ) con questa varietà e calcoliamo i quintali per ettaro, otteniamo (28.22, 27.46, 28.89, 28.6, 29.64, 28.69, 26.72, 27.79, 29.9, 29.78)

$$Y_i = \mu_{(X=0)} + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Stimiamo

$$\hat{\mu}_{(X=0)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 28.569$$

e

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \hat{\mu}_{(X=0)}^2$$

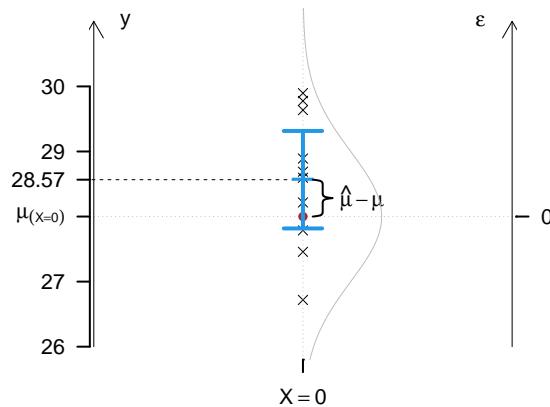
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{10}(28.22^2 + 27.46^2 + 28.89^2 + \dots + 29.9^2 + 29.78^2) - 28.569^2 \\
 &= 0.9881 \\
 \hat{\sigma}_\varepsilon &= 0.994
 \end{aligned}$$

Costruiamo dapprima un intervallo di confidenza sui dati Correggiamo  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$

$$\begin{aligned}
 S_{(X=0)}^2 &= \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}_{(X=0)}^2 \\
 &= \frac{10}{10-1} \cdot 0.9881 \\
 &= 1.0983 \\
 S_{(X=0)} &= 1.048
 \end{aligned}$$

L'intervallo di confidenza al 95% per  $\mu_{(X=0)}$  è

$$\hat{\mu}_{(X=0)} \pm t_{n-1; \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} = 28.569 \pm 2.2622 \frac{1.048}{\sqrt{10}} = (27.8193; 29.3187)$$



E quindi potremmo proporre la **previsione**: quanta produzione ci aspetteremo sul prossimo ettaro che pianteremo con quella varietà di riso?

$$\hat{Y}_{11} = \hat{\mu}_{(X=0)} + \varepsilon_{11}$$

Il valore atteso della previsione è?

$$\begin{aligned}
E(\hat{Y}_{11}) &= E(\hat{\mu}_{(X=0)} + \varepsilon_{11}) \\
&= E(\hat{\mu}_{(X=0)}) + E(\varepsilon_{11}) \\
&= \mu + 0 = \mu
\end{aligned}$$

L'errore di previsione stimato è  $S_{(X=0)} = 1.048$ .

**Esempio 17.1.2.** Supponiamo di aver piantato altri 10 ettari di questa varietà ma su terreni trattati con 1.13 hg ( $X = 1.13$ ) di concime azotato per ettaro e osserviamo (28.16, 30.38, 27.74, 29.07, 30.71, 28.4, 28.53, 28.36, 28.71, 29.14)

$$Y_i = \mu_{(X=1.13)} + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Stimiamo

$$\hat{\mu}_{(X=1.13)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 28.92$$

e

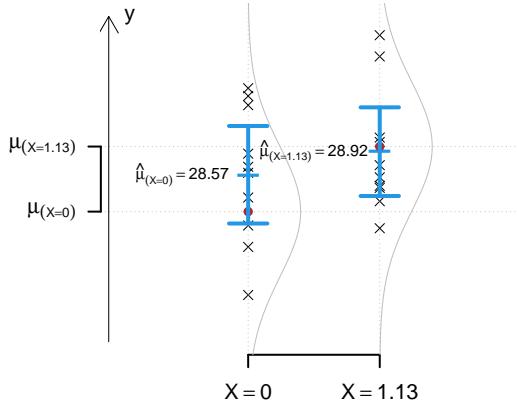
$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \hat{\mu}_{(X=0)}^2 \\
&= \frac{1}{10} (28.16^2 + 30.38^2 + 27.74^2 + \dots + 28.71^2 + 29.14^2) - 28.92^2 \\
&= 0.8157 \\
\hat{\sigma}_\varepsilon &= 0.9032
\end{aligned}$$

Correggiamo  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$

$$\begin{aligned}
S_{(X=1.13)}^2 &= \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}_{(X=0)}^2 \\
&= \frac{10}{10-1} \cdot 0.8157 \\
&= 0.9063 \\
S_{(X=1.13)} &= 0.952
\end{aligned}$$

L'intervallo di confidenza al 95% per  $\mu_{(X=1.13)}$  è

$$\hat{\mu}_{(X=1.13)} \pm t_{n-1; \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} = 28.92 \pm 2.2622 \frac{0.952}{10} = (28.239; 29.601)$$



Se mettiamo a test, otteniamo

**Test  $T$  per due medie, (omogeneità)**

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0: \mu_{(X=1.13)} = \mu_{(X=0)} \\ H_1: \mu_{(X=1.13)} > \mu_{(X=0)} \end{cases}$$

B SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST,  $T$

L'ipotesi è di omogeneità e quindi calcoliamo:

$$S_p^2 = \frac{n_{(X=1.13)} \hat{\sigma}_{(X=1.13)}^2 + n_{(X=0)} \hat{\sigma}_{(X=0)}^2}{n_{(X=1.13)} + n_{(X=0)} - 2} = \frac{10 \cdot 0.9032^2 + 10 \cdot 0.994^2}{10 + 10 - 2} = 1.002$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu}_{(X=1.13)} - \hat{\mu}_{(X=0)}}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_{(X=1.13)}} + \frac{S_p^2}{n_{(X=0)}}}} &\sim t_{n_{(X=1.13)} + n_{(X=0)} - 2} \\ t_{\text{obs}} &= \frac{(28.92 - 28.57)}{\sqrt{\frac{1.002}{10} + \frac{1.002}{10}}} = 0.784. \end{aligned}$$

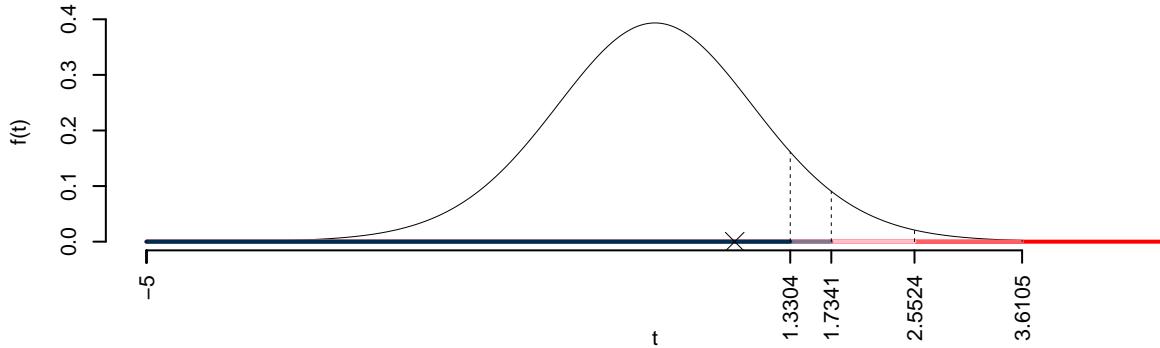
C CONCLUSIONE

Consideriamo  $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01, 0.001$

I valori critici sono

$$t_{20-2;0.1} = 1.3304; t_{20-2;0.05} = 1.7341; t_{20-2;0.01} = 2.5524; t_{20-2;0.001} = 3.6105$$

Siccome  $t_{\text{obs}} = 0.784 < t_{20-2;0.1} = 1.3304$ , quindi **non** rifiuto  $H_0$  a **nessun** livello di significatività,  $p_{\text{value}} > 0.1$ , *non significativo*



Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(T_{20-2} > 0.78) = 0.221609$$

Attenzione il calcolo del  $p_{\text{value}}$  con la  $T$  è puramente illustrativo e non può essere riprodotto senza una calcolatrice statistica adeguata.

$$0.1 < p_{\text{value}} = 0.221609 \leq 1$$

**Esempio 17.1.3.** Supponiamo di aver piantato altri 10 ettari di questa varietà ma su terreni trattati con 2.84 hg ( $X = 2.84$ ) di concime azotato per ettaro e osserviamo (29.03, 32.09, 29.56, 29.59, 28.52, 30.24, 30.2, 29.89, 30.41, 30.94)

$$Y_i = \mu_{(X=2.84)} + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$$

Stimiamo

$$\hat{\mu}_{(X=2.84)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 30.047$$

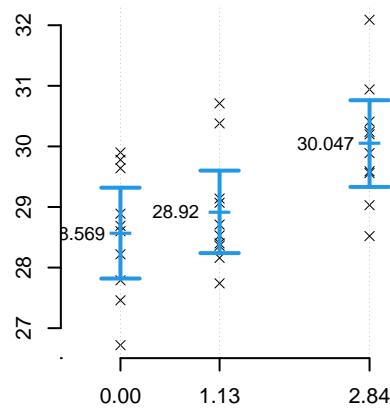
e

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{(X=2.84)}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \hat{\mu}_{(X=2.84)}^2 \\ &= \frac{1}{10} (29.03^2 + 32.09^2 + 29.56^2 + \dots + 30.41^2 + 30.94^2) - 30.047^2 \end{aligned}$$

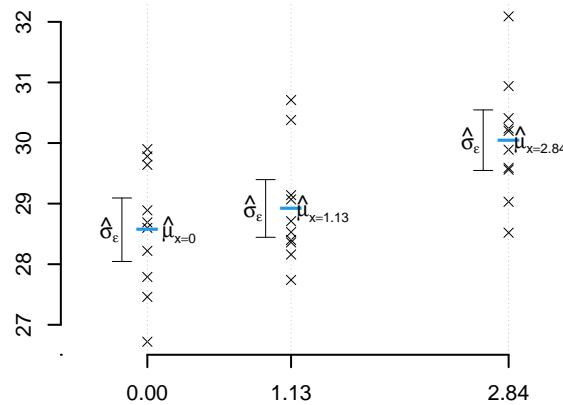
$$\begin{aligned}
 &= 0.9 \\
 \hat{\sigma}_{(X=2.84)} &= 0.9487
 \end{aligned}$$

infine

$$\begin{aligned}
 S_{(X=2.84)}^2 &= \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}_{(X=2.84)}^2 \\
 &= \frac{10}{10-1} \cdot 0.9 \\
 &= 1 \\
 S_{(X=2.84)} &= 1
 \end{aligned}$$

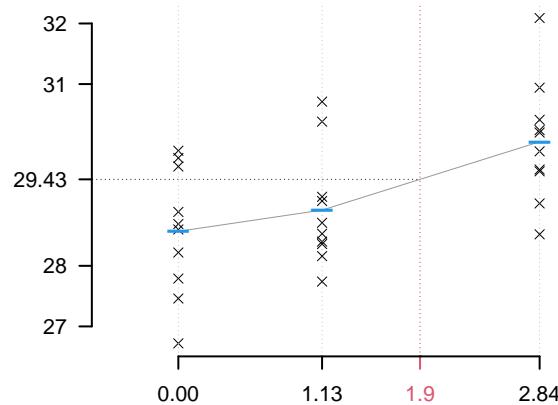


**problema 1:** abbiamo tre stime di  $\mu$  e tre stime di  $\sigma$  ottenute come se i campioni fossero separati. Non abbiamo tenuto conto della natura metrica della  $X$ .



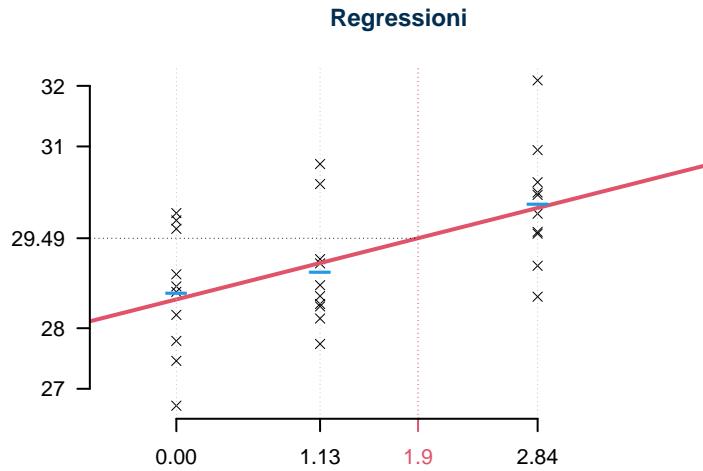
**problema 2:** alla luce di questi dati cosa possiamo dire sulla produzione media se usassimo 1.9 hg di concime per ettaro? Potremmo proporre di congiungere le medie con una spezzata

#### una suggestione



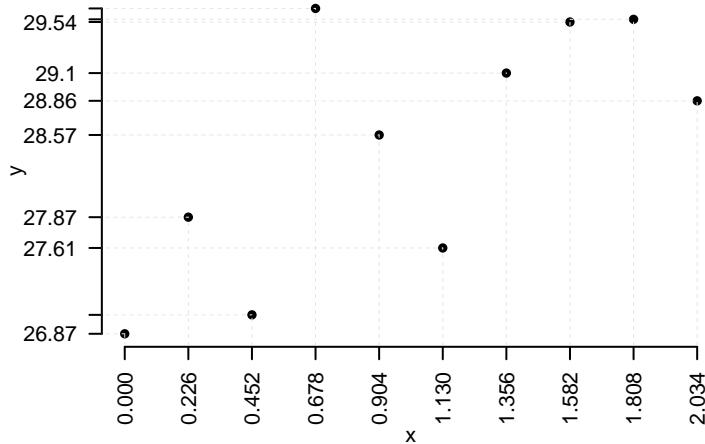
Il problema è che dobbiamo stimare 3 coppie di parametri  $\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2$  e  $\mu_3, \sigma_3^2$  **senza** tenere conto della natura metrica della  $x$ .

L'idea è di sostituire a  $\mu_1, \mu_2$  e  $\mu_3$  una funzione in  $x$ ,  $\mu(x)$  e stimarla coi dati  $\hat{\mu}(x)$ , per ottenere qualcosa del tipo

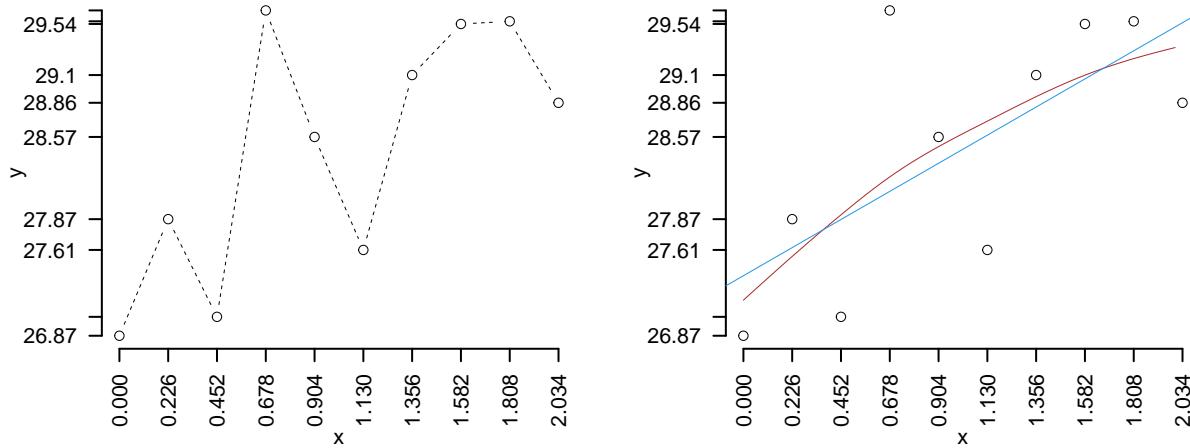


**Esempio 17.1.4. problema 3:** Dobbiamo studiare una nuova varietà di riso, ma il budget è inferiore. osserviamo 10 ettari

$X = \text{Fertilizzante}$	0.00	0.226	0.452	0.678	0.904	1.13	1.356	1.582	1.808	2.034
$Y = \text{Raccolto}$	26.87	27.869	27.035	29.651	28.571	27.61	29.099	29.536	29.558	28.863



La previsione sembra più difficile, la suggestione di prima non sembra funzionare, dobbiamo modellare il luogo delle medie  $\mu$  con una funzione  $\mu(x)$  e stimarla coi dati  $\hat{\mu}(x)$ .



## 17.2 Il modello di regressione

Vogliamo modellare la linea delle medie. Ci aspetteremmo una linea che passi tra i punti che per ogni  $x$  dato, il valore atteso di  $Y$  condizionato a quella  $x$ . Cioè abbiamo bisogno di un modello per la media di  $Y$  per un dato  $X$

$$E(Y_i|X = x_i) = \mu(x_i)$$

E si legge che  $Y$ , in media, condizionato ad  $X = x$  vale  $\mu(x)$ , dove  $\mu$  è una funzione da scegliere. L'idea di base è che

$$y_i = \mu(x_i) + \varepsilon_i$$

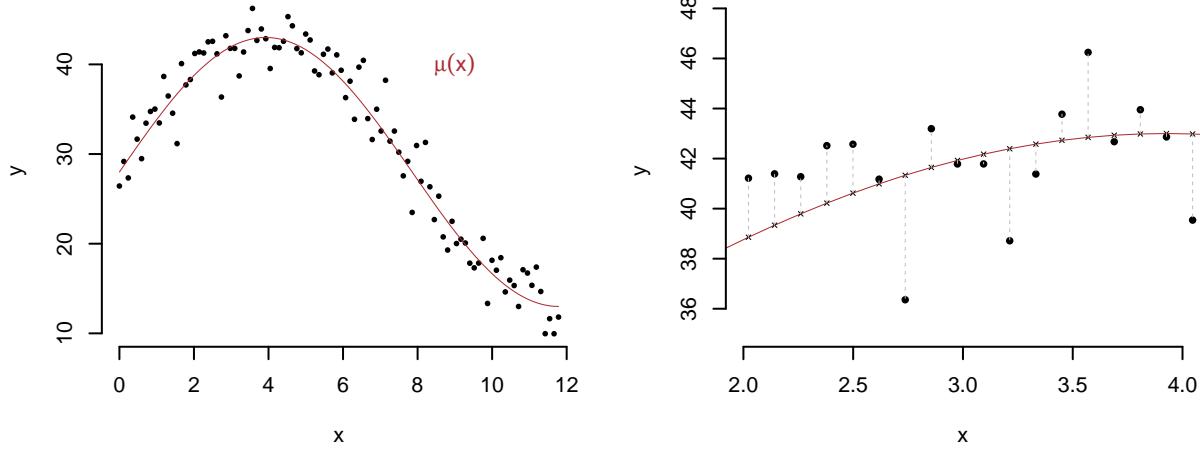
la  $y$  osservata in corrispondenza della  $x$  è pari ad  $\mu(x)$  a meno di un errore casuale. Dove si assume che l'errore abbia media zero

$$E(\varepsilon_i) = 0$$

e varianza costante

$$V(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2, \forall i$$

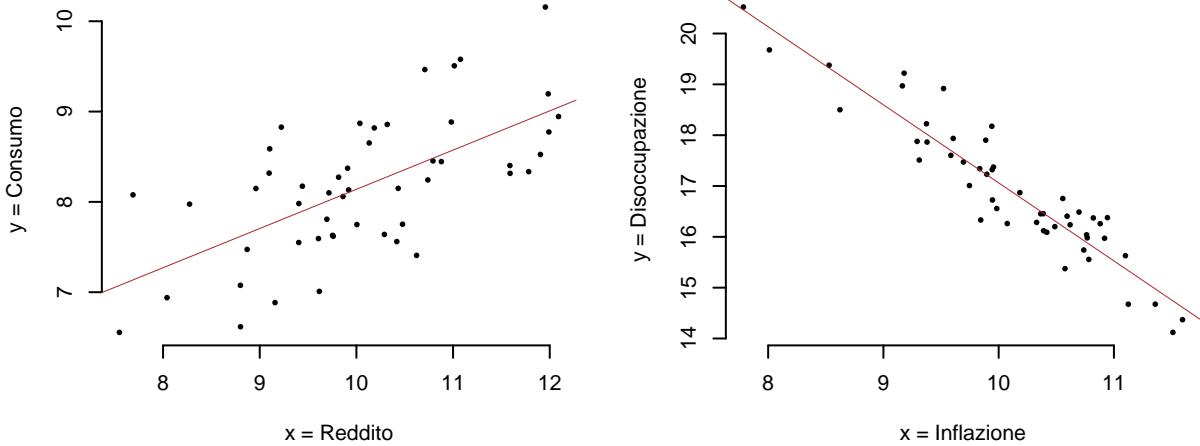
Qui di seguito un paio di esempi grafici



### 17.3 La Regressione Lineare

Tra le tante  $\mu(x)$  limitiamo l'attenzione alle funzioni lineari

$$y_i = \mu(x_i) + \varepsilon_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$



#### 17.3.1 Il modello di regressione lineare semplice

Il modello di regressione (lineare semplice) è

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad E(\varepsilon_i) = 0, \quad V(\varepsilon_i) = \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

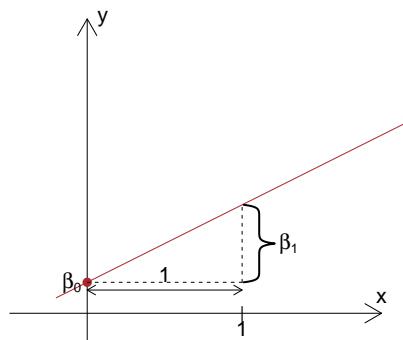
**Nota**

Le variabili sono chiamate:

- $y$  dipendente, endogena, risposta, ecc.
- $x$  indipendente, esogena, stimolo, ecc.
- $\varepsilon$  è chiamato, residuo, o errore

I parametri di popolazione sono 3:  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\sigma_\varepsilon^2$

- $\beta_0$  è l'intercetta della retta.  $\beta_0$  rappresenta la media di  $y$  quando  $x = 0$ , non sempre ha significato fenomenico
- $\beta_1$  è il coefficiente angolare.  $\beta_1$  rappresenta quanto la media di  $y$  aumenta all'aumentare unitario della  $x$ .
- $\sigma_\varepsilon^2$  è la varianza dell'errore  $\varepsilon$ .  $\sigma_\varepsilon^2$  rappresenta la variabilità dei punti intorno alla retta.



### 17.3.2 La Storia del Metodo

Nel 1886, Francis Galton pubblicò un articolo su *Nature* intitolato *Regression towards mediocrity in hereditary stature*. In quell'occasione, rese noti i dati raccolti su centinaia di coppie padre-figlio, relativi alla statura (convertita poi in centimetri). Galton ipotizzò inizialmente un modello molto semplice: l'altezza del figlio  $y_i$  doveva corrispondere a quella del padre  $x_i$ , salvo errori casuali:

$$y_i = x_i + \varepsilon_i$$

In questo modello, l'errore medio sarebbe nullo, e la retta teorica che descrive la relazione padre-figlio sarebbe la bisettrice del primo quadrante. Tuttavia, una volta osservati i dati empirici, l'evidenza fu diversa.

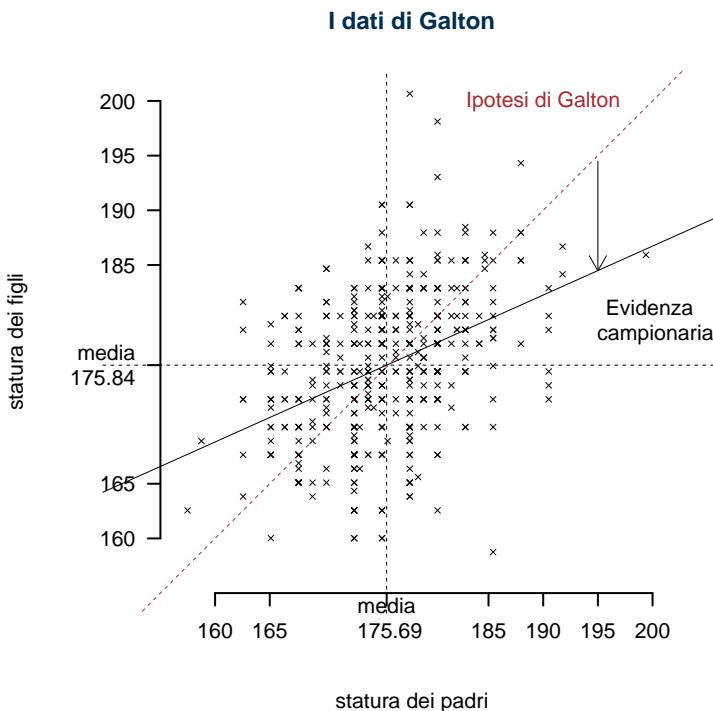
Nel campione considerato, la relazione stimata tra statura del padre e del figlio risultò essere:

$$y_i = 97.1776 + 0.4477 \cdot x_i + \varepsilon_i$$

dove l'intercetta 97.1776 è positiva e il coefficiente angolare 0.4477 è **inferiore a 1**. Questo significa che:

- i figli di padri molto alti tendono a essere sì più alti della media ma più bassi dei loro padri,
- mentre i figli di padri molto bassi tendono a essere sì più bassi della media ma più alti dei loro padri.

Il fenomeno fu battezzato da Galton stesso con il nome di **regressione verso la media**, e in seguito divenne uno dei concetti fondamentali della statistica.



### 17.3.3 Gli assunti del modello di regressione

0. Dati  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ ,  $n$  coppie di punti, si assume che

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

1. Il valore atteso dell'errore è nullo

$$E(\varepsilon_i) = 0$$

2. Omoschedasticità

$$V(\varepsilon_i) = \sigma^2, \quad \text{costante } \forall i$$

3. Indipendenza dei residui

$$\varepsilon_i \text{ è indipendente da } \varepsilon_j \quad \forall i \neq j$$

4. Indipendenza tra i residui e la  $X$ 

$$X_i \text{ è indipendente da } \varepsilon_i \quad \forall i$$
5. *Esogeneità* della  $X$ : la distribuzione su  $X$  non è oggetto di inferenza

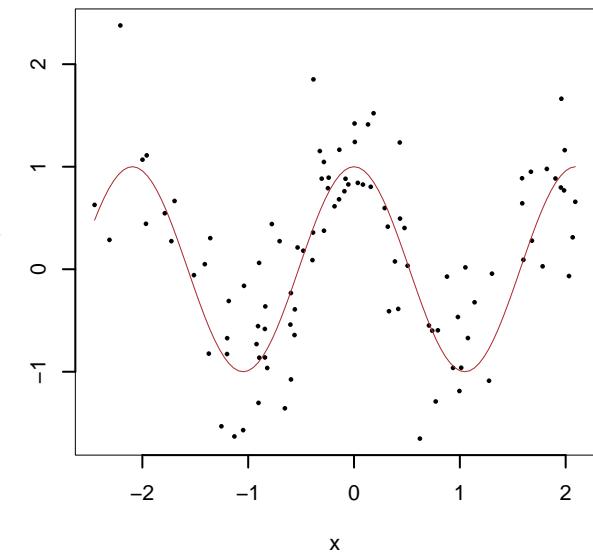
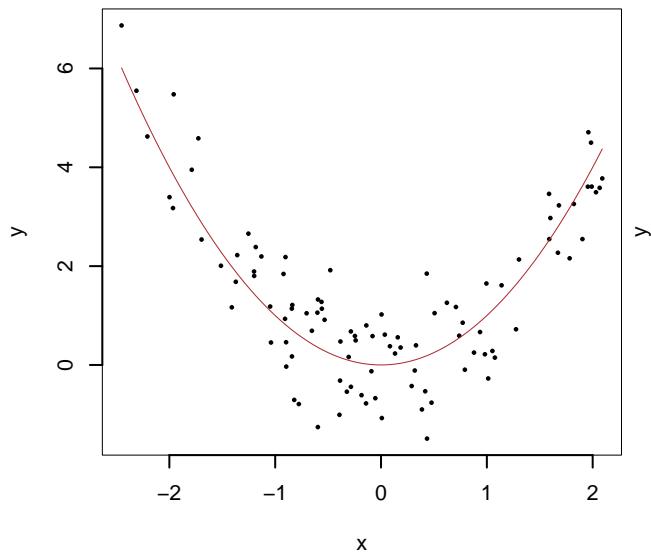
6. Normalità dei residui

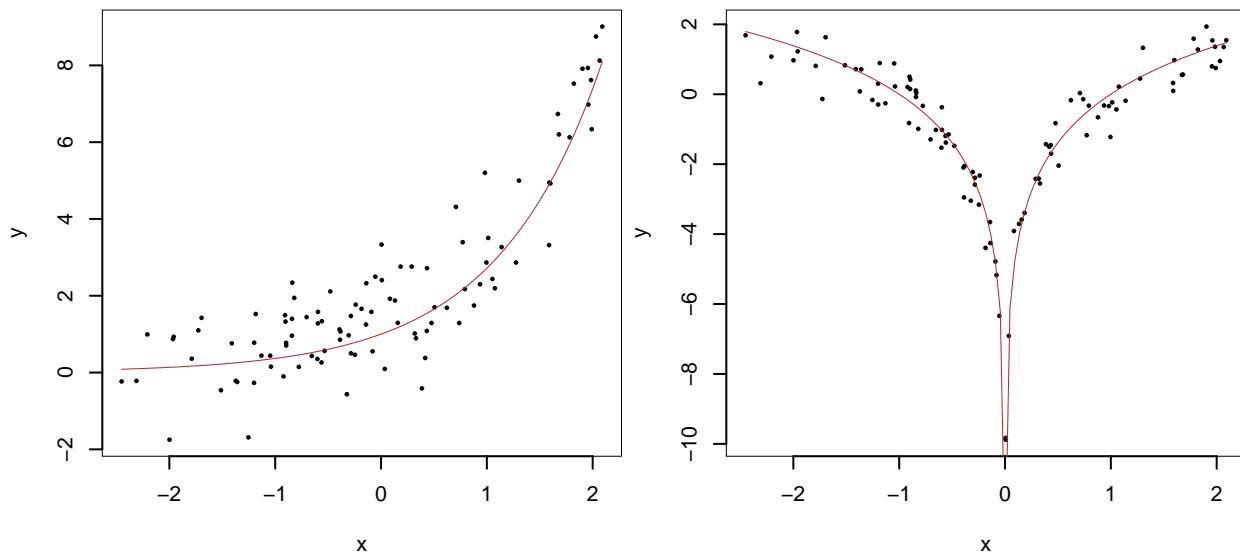
$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

**Assunto 0** Dati  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ ,  $n$  coppie di punti, si assume che

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

Situazioni in cui l'assunto 0 è violato



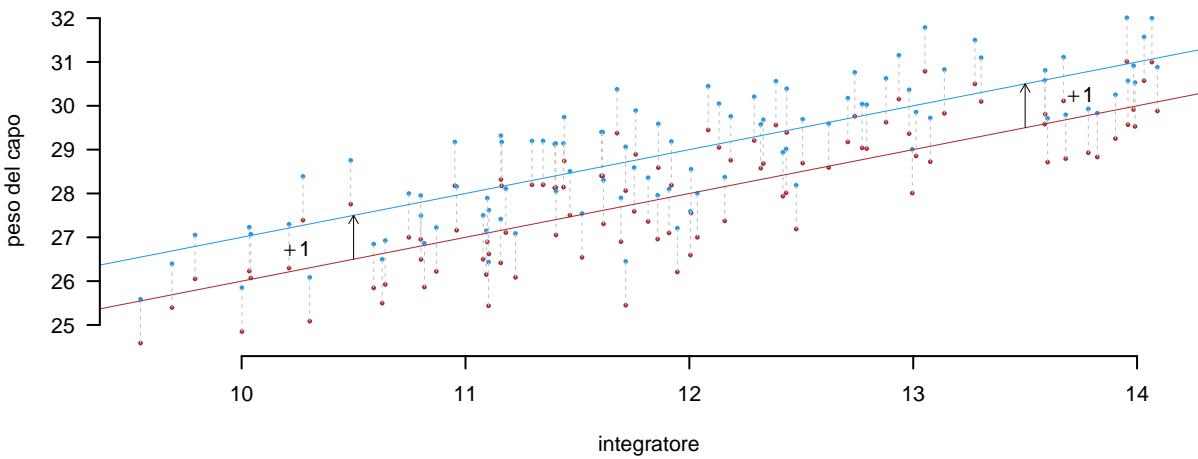


**Assunto 1, il valore atteso dell'errore è nullo**

$$E(\varepsilon_i) = 0$$

Inverificabile, se per esempio

$$E(\varepsilon_i) = +1, \quad \forall i, \quad E(Y_i|x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i + E(\varepsilon_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i + 1$$

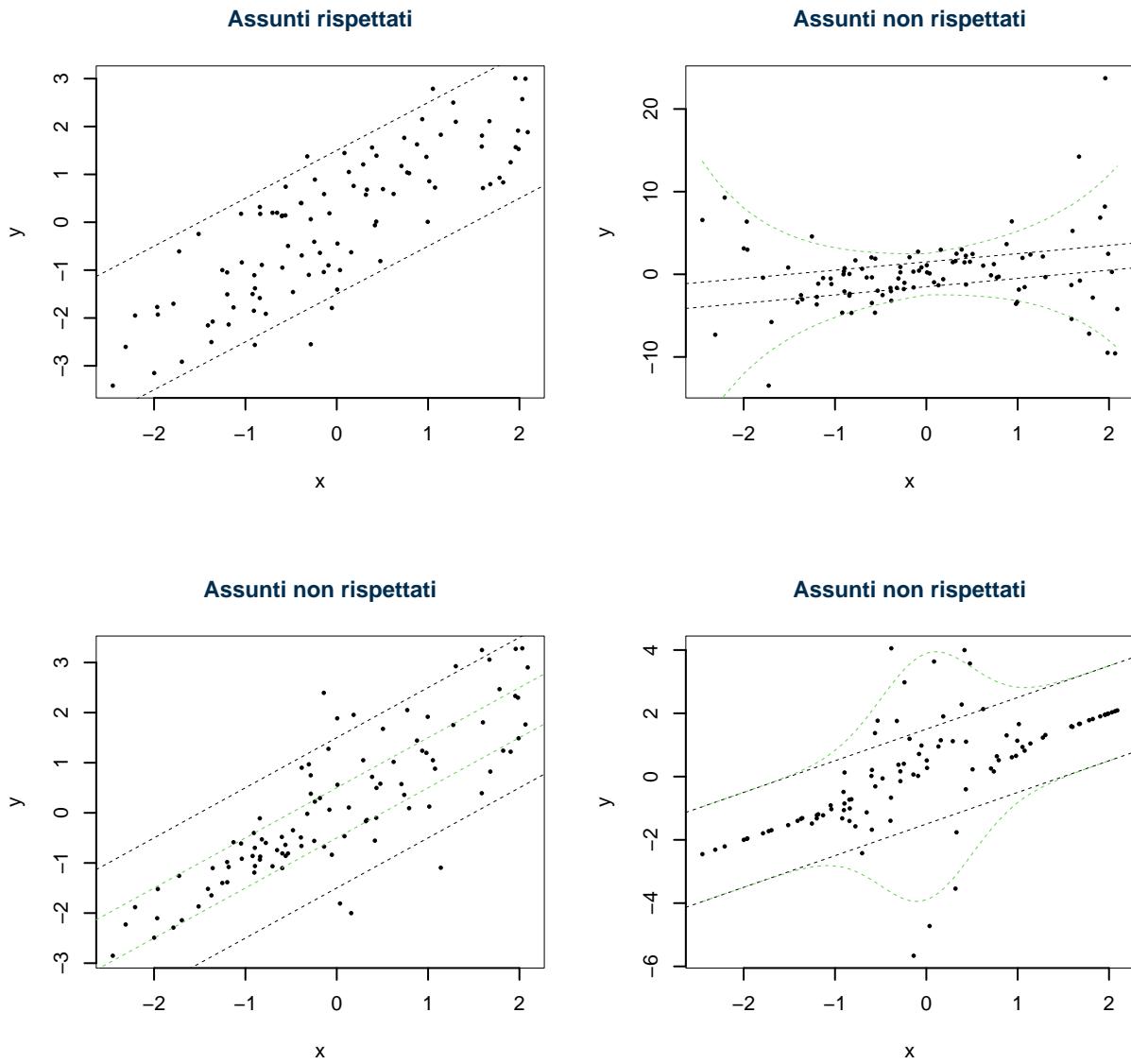


**Assunti 3. e 6. Omoschedasticità e Indipendenza tra i residui e la  $X$**

$$V(\varepsilon_i) = \sigma^2, \quad \text{costante } \forall i$$

$$X_i \text{ è indipendente da } \varepsilon_i \quad \forall i$$

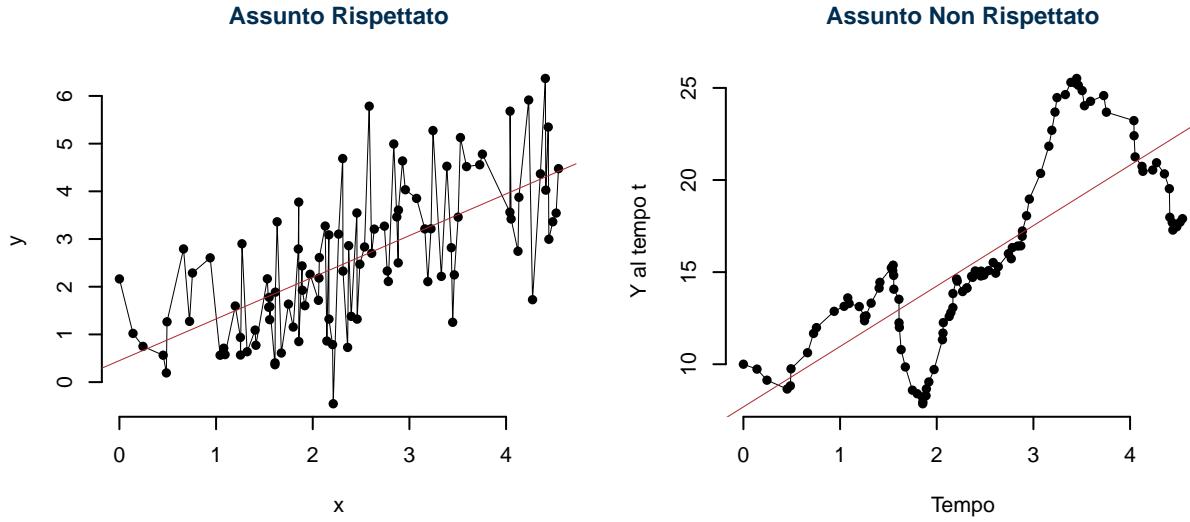
La varianza non cambia con le osservazioni



#### 4. Indipendenza dei residui

$$\varepsilon_i \text{ è indipendente da } \varepsilon_j \quad \forall i \neq j$$

L'assunto viene tipicamente violato nelle serie temporali



**5. Esogeneità della  $X$ : la distribuzione su  $X$  non è oggetto di inferenza.** In contesto di sperimentazione la  $X$  viene fissata dal ricercatore. In un contesto di dati sul campo la  $X$  non può essere fissata, ma viene usata *come se fosse* fissata. L'obiettivo di ricerca rimane la  $Y$  e la relazione tra  $X$  ed  $Y$ , **non** la distribuzione di  $X$ .

**6. Normalità dei residui** Gli errori sono normalmente distribuiti

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

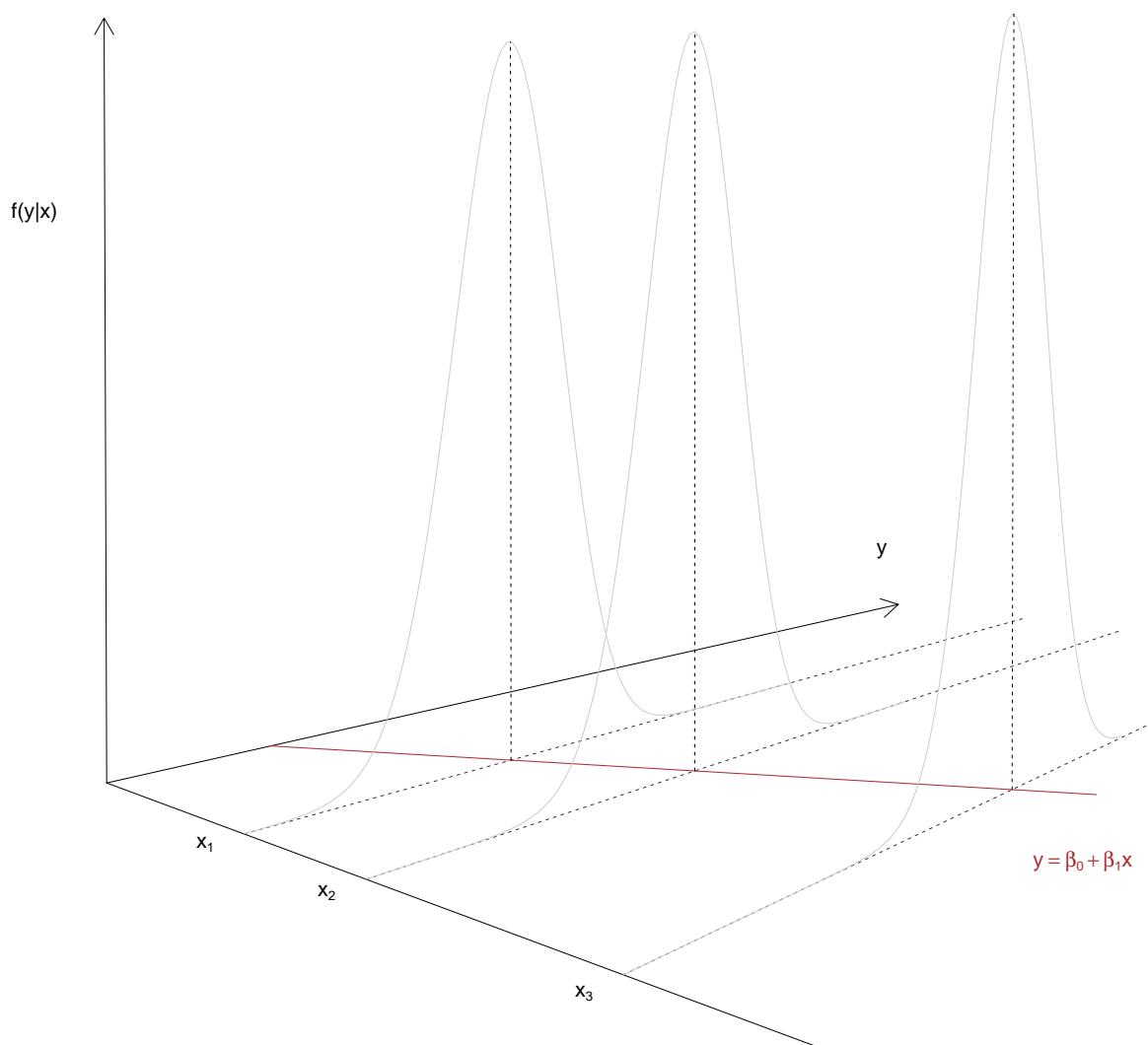
Essendo

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

allora, dalle proprietà delle normali

$$Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma_\varepsilon^2)$$

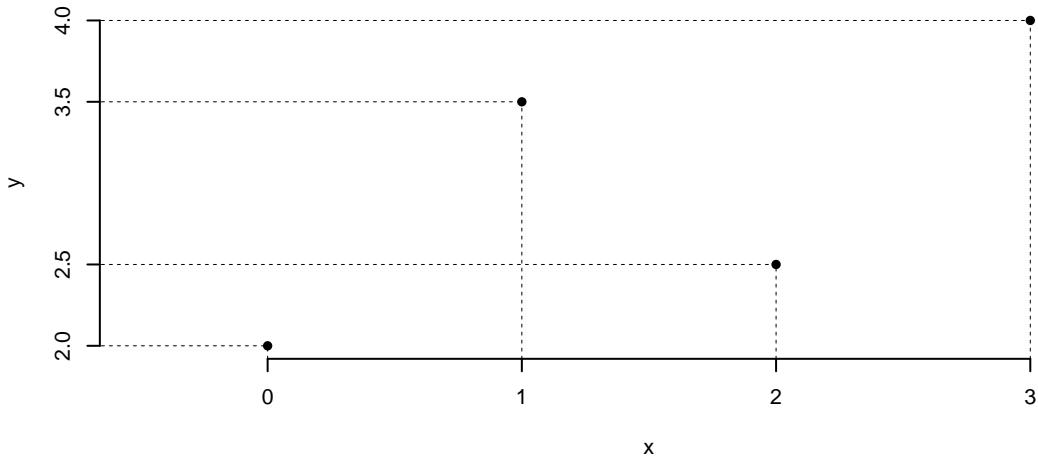
$Y_i$  è normale con media  $\beta_0 + \beta_1 x_i$  e varianza  $\sigma_\varepsilon^2$



### 17.3.4 Il metodo dei minimi quadrati

È un metodo di stima per  $\beta_0$  e  $\beta_1$ , si può dimostrare che, in virtù dell'assunto 6. (la normalità dei residui) il metodo dei minimi quadrati produce le stime di massima verosimiglianza. Svilupperemo la teoria attraverso un esempio su 4 punti.

$i$	$x_i$	$y_i$
1	0	2.0
2	1	3.5
3	2	2.5
4	3	4.0



### 17.3.5 La distanza di una retta dai punti (il metodo dei minimi quadrati)

Si tratta di cercare la retta che rende minima la somma dei quadrati delle distanze della retta misurate nella scala di misura della  $y$ . Per ogni retta candidata  $(\beta_0^*, \beta_1^*)$ , costruiamo la previsione

$$\hat{y}_i^* = \beta_0^* + \beta_1^* x_i$$

e quindi i residui

$$\hat{\varepsilon}_i^* = y_i - \hat{y}_i^*$$

Il criterio dei **minimi quadrati** è

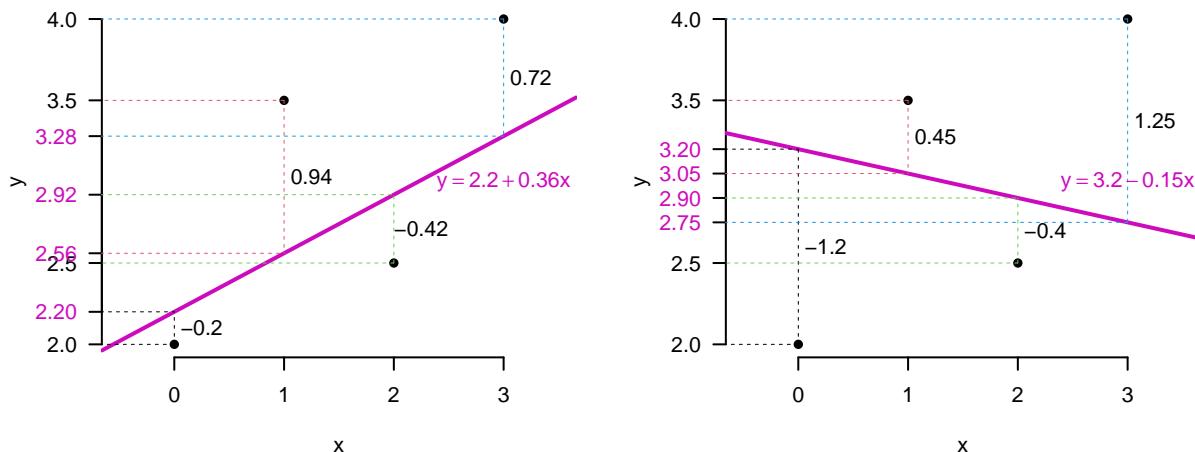
$$G(\beta_0^*, \beta_1^*) = \sum_{i=1}^n (\hat{\varepsilon}_i^*)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i^*)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_0^* + \beta_1^* x_i))^2$$

La retta dei minimi quadrati è quella coppia di  $\hat{\beta}_0$  e  $\hat{\beta}_1$  tali che

$$G(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) < G(\beta_0^*, \beta_1^*), \quad \forall (\beta_0^*, \beta_1^*) \neq (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$$

Se, per esempio, scegliessimo  $\beta_0^* = 2.2$ ,  $\beta_1^* = 0.36$ , otterremmo

$i$	$x_i$	$y_i$	$\hat{y}_i^* = \beta_0^* + \beta_1^* x_i$	$\hat{\varepsilon}_i^* = y_i - \hat{y}_i^*$	$(\hat{\varepsilon}_i^*)^2$
1	0	2.0	2.20	-0.20	0.0400
2	1	3.5	2.56	0.94	0.8836
3	2	2.5	2.92	-0.42	0.1764
4	3	4.0	3.28	0.72	0.5184



$i$	$x_i$	$y_i$	$\hat{y}_i^* = \beta_0^* + \beta_1^* x_i$	$\hat{\varepsilon}_i^* = y_i - \hat{y}_i^*$	$(\hat{\varepsilon}_i^*)^2$
1	0	2.0	3.20	-1.20	1.4400
2	1	3.5	3.05	0.45	0.2025
3	2	2.5	2.90	-0.40	0.1600
4	3	4.0	2.75	1.25	1.5625

$$G(2.2, 0.36) = 3.365$$

Se invece scegliessimo  $\beta_0^* = 3.2$ ,  $\beta_1^* = -1.5$ , otterremmo

$$G(3.2, -1.15) = 3.365$$

Siccome

$$G(2.2, 0.36) = 1.6184 < G(3.2, -1.15) = 3.365$$

allora diremo che la retta  $\beta_0^* = 2.2$ ,  $\beta_1^* = 0.36$  è più vicina, nel senso dei minimi quadrati, della retta  $\beta_0^* = 3.2$ ,  $\beta_1^* = -1.5$ .

### 17.3.6 Soluzioni dei minimi quadrati

La retta dei minimi quadrati è quella coppia di  $\hat{\beta}_0$  e  $\hat{\beta}_1$  tali che

$$G(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) < G(\beta_0, \beta_1), \quad \forall (\beta_0, \beta_1) \neq (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$$

ovvero

$$(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \underset{(\beta_0, \beta_1) \in \mathbb{R}^2}{\operatorname{argmin}} G(\beta_0, \beta_1)$$

**Proprietà 17.3.1** (Stimatori dei Minimi Quadrati). *Gli stimatori dei minimi quadrati  $\hat{\beta}_0$  e  $\hat{\beta}_1$  sono*

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\hat{\sigma}_x^2} \\ \hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}\end{aligned}$$

dove

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

e

$$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}G(\beta_0, \beta_1) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2 \\ \frac{\partial G(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_0} &= -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)) \\ &= -\frac{2}{n} \left( \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n \beta_0 - \sum_{i=1}^n \beta_1 x_i \right) \\ &= -\frac{2}{n} (n\bar{y} - n\beta_0 - n\beta_1 \bar{x}) \\ &= -2(\bar{y} - \beta_0 - \beta_1 \bar{x}) \\ \frac{\partial G(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_1} &= -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)) \\ &= -\frac{2}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \left( \sum_{i=1}^n \beta_0 x_i \right) - \left( \sum_{i=1}^n \beta_1 x_i^2 \right) \\ &= -2 \left( \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \beta_0 \bar{x} - \beta_1 \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \right)\end{aligned}$$

E otteniamo il **sistema di equazioni normali**

$$\begin{cases} \frac{\partial G(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_0} = 0 \\ \frac{\partial G(\beta_0, \beta_1)}{\partial \beta_1} = 0 \end{cases}$$

Dividendo per 2 e cambiando di segno, si ha

$$\begin{cases} (\bar{y} - \beta_0 - \beta_1 \bar{x}) = 0 \\ \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \beta_0 \bar{x} - \beta_1 \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$$

E sostituiamo

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - (\bar{y} - \beta_1 \bar{x}) \bar{x} - \beta_1 \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) &= 0 \\ \beta_1 \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 \right) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y} \\ \hat{\beta}_1 &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2} \end{aligned}$$

Siccome

$$\begin{aligned} \text{cov}(x, y) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i - y_i \bar{x} - x_i \bar{y} + \bar{x} \bar{y}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\bar{x}}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \frac{\bar{y}}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x} \bar{y} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y} - \bar{x} \bar{y} + \bar{x} \bar{y} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y} \end{aligned}$$

Concludendo la prova. □

## 17.4 La covarianza

**Definizione 17.4.1.** La Covarianza  $\text{cov}(x, y)$  tra due variabili  $x$  e  $y$  è una misura della loro covariazione

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

La covarianza è la *media degli scarti incrociati dalla media*. Come per la varianza esiste una formula semplificata:

**Proprietà 17.4.1.** La covarianza si può riscrivere come

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \text{cov}(x, y) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i - x_i \bar{y} - \bar{x} y_i + \bar{x} \bar{y}) \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \bar{y} - \sum_{i=1}^n \bar{x} y_i + \sum_{i=1}^n \bar{x} \bar{y} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} \sum_{i=1}^n y_i + \bar{x} \bar{y} \sum_{i=1}^n 1 \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{y} \bar{x} - n \bar{x} \bar{y} + n \bar{x} \bar{y} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y} \end{aligned}$$

□

### **i** Nota

La covarianza è la *media dei prodotti degli scarti dalla media* può essere riletta come la *media dei prodotti meno il prodotto delle medie*.

#### 17.4.1 Calcolo della covarianza

Nel caso in esame

$$\bar{x} = \frac{1}{4}(0 + 1 + 2 + 3) = \frac{6}{4} = 1.5$$

$$\bar{y} = \frac{1}{4}(2 + 3.5 + 2.5 + 4) = \frac{12}{4} = 3$$

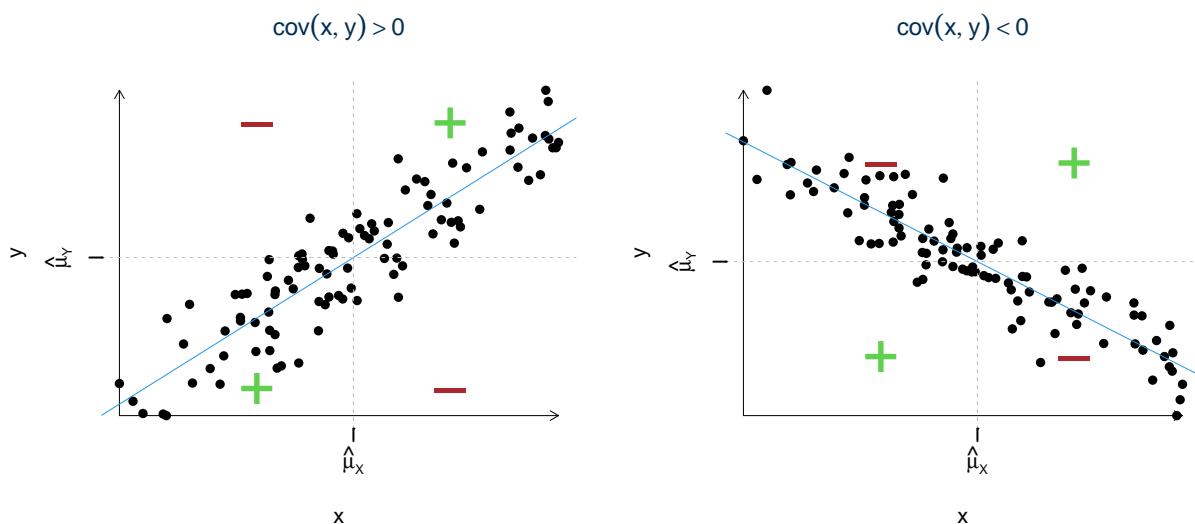
Per la covarianza:

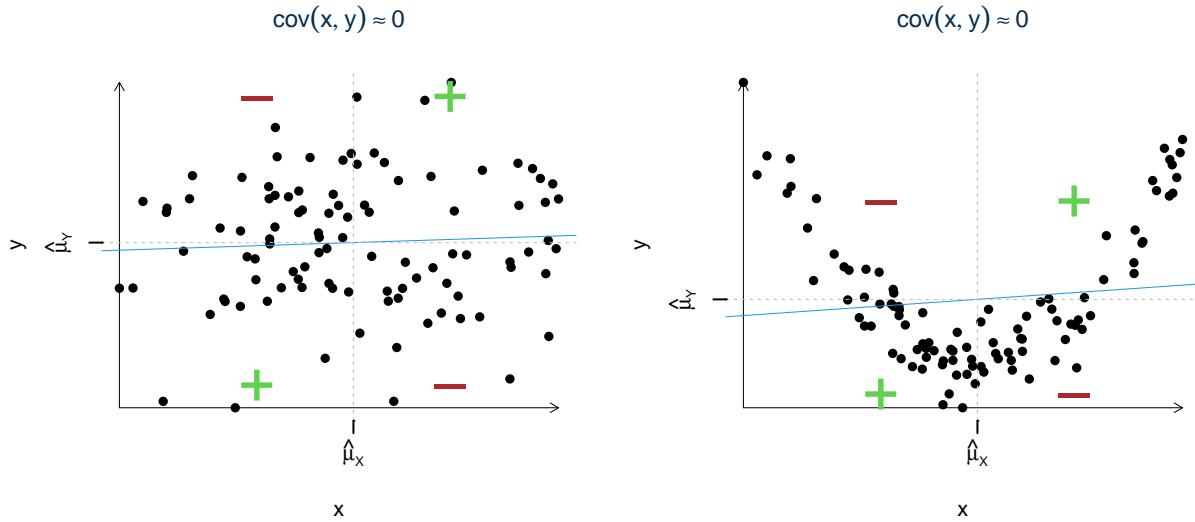
$$\begin{aligned}
 \text{cov}(x, y) &= \frac{1}{4}((0 - 1.5)(2 - 3) + (1 - 1.5)(3.5 - 3) + (2 - 1.5)(2.5 - 3) + (3 - 1.5)(4 - 3)) \\
 &= \frac{1}{4}(0 \times 2 + 1 \times 3.5 + 2 \times 2.5 + 3 \times 4) - 1.5 \times 3 \\
 &= \frac{1}{4}(20.5) - 4.5 \\
 &= 0.625
 \end{aligned}$$

### 17.4.2 Interpretazione della Covarianza

La covarianza non è direttamente leggibile perché ha un'unità di misura mista, prodotto della unità di misura della  $x$  e quella della  $y$ .

È interessante il segno della covarianza perché indica la pendenza della retta se la covarianza è positiva c'è **concordanza dei segni**, ad  $x$  maggiori del loro baricentro ( $(x_i - \bar{x}) > 0$ ) corrispondono, *in media*,  $y$  maggiori del loro baricentro ( $y_i - \bar{y} > 0$ ). Mentre ad  $x$  minori del loro baricentro ( $(x_i - \bar{x}) < 0$ ) corrispondono, *in media*,  $y$  minori del loro baricentro ( $y_i - \bar{y} < 0$ ). Se invece la covarianza è negativa c'è **discordanza dei segni**, cioè ad  $x$  maggiori del loro baricentro ( $(x_i - \bar{x}) > 0$ ) corrispondono, *in media*,  $y$  minori del loro baricentro ( $y_i - \bar{y} < 0$ ). Mentre ad  $x$  minori del loro baricentro ( $(x_i - \bar{x}) < 0$ ) corrispondono, *in media*,  $y$  maggiori del loro baricentro ( $y_i - \bar{y} > 0$ ).





### 17.4.3 Altre proprietà della covarianza

Simmetria

$$\text{cov}(x, y) = \text{cov}(y, x)$$

la dimostrazione è immediata

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) = \text{cov}(y, x)$$

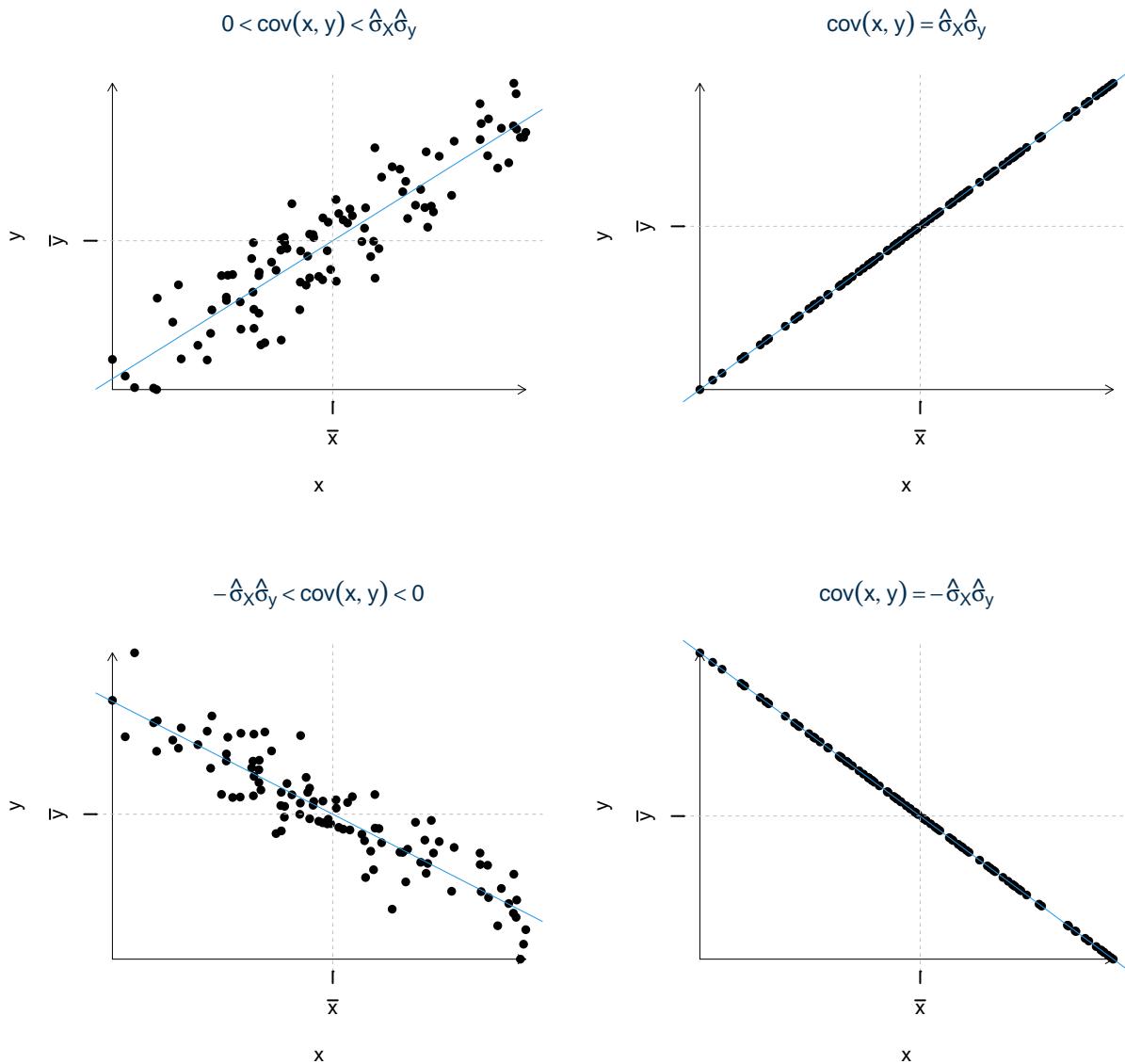
Caso particolare

$$\text{cov}(x, x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \hat{\sigma}_x^2$$

la covarianza di una variabile con se stessa è la varianza. La covarianza estende il concetto di varianza quando le variabili sono due.

### 17.4.4 Campo di variazione della covarianza

$$-\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y \leq \text{cov}(x, y) \leq +\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y$$



Quindi stimiamo di  $\sigma_X$  e  $\sigma_Y$

Calcolo di  $\hat{\sigma}_X^2$

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_X^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \hat{\mu}_X^2 \\
 &= \frac{1}{4} (0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2) - 1.5^2 \\
 &= 1.25 \\
 \hat{\sigma}_X &= 1.118
 \end{aligned}$$

Calcolo di  $\hat{\sigma}_Y^2$

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_Y^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \hat{\mu}_Y^2 \\
 &= \frac{1}{4} (2^2 + 3.5^2 + 2.5^2 + 4^2) - 3^2 \\
 &= 0.625 \\
 \hat{\sigma}_Y &= 0.7906
 \end{aligned}$$

#### 17.4.5 Calcolo in colonna

##### Nota

Molto più comodamente in colonna

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i \cdot y_i$
1	0.0	2.0	0.0	4.000	0.000
2	1.0	3.5	1.0	12.250	3.500
3	2.0	2.5	4.0	6.250	5.000
4	3.0	4.0	9.0	16.000	12.000
<b>Totale</b>	<b>6.0</b>	<b>12.0</b>	<b>14.0</b>	<b>38.500</b>	<b>20.500</b>
Totale/n	1.5	3.0	3.5	9.625	5.125

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = 3.5 - 1.5^2 = 1.25$$

$$\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{y}^2 = 9.625 - 3^2 = 0.625$$

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y} = 5.125 - 1.5 \cdot 3 = 0.625$$

#### 17.4.6 Calcolo di $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$

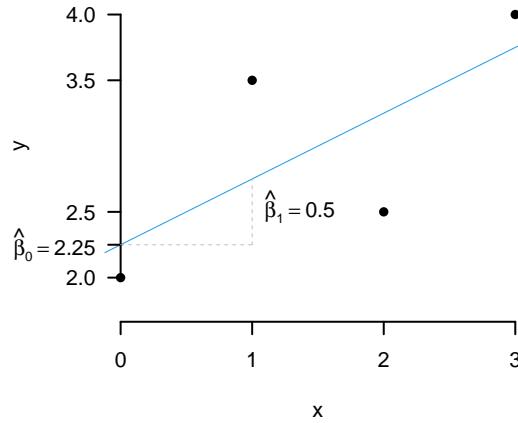
La stima del coefficiente angolare è

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\text{cov}(x, y)}{\hat{\sigma}_X^2} = \frac{0.625}{1.25} = 0.5$$

La stima dell'intercetta è

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 3 - 0.5 \cdot 1.5 = 2.25$$

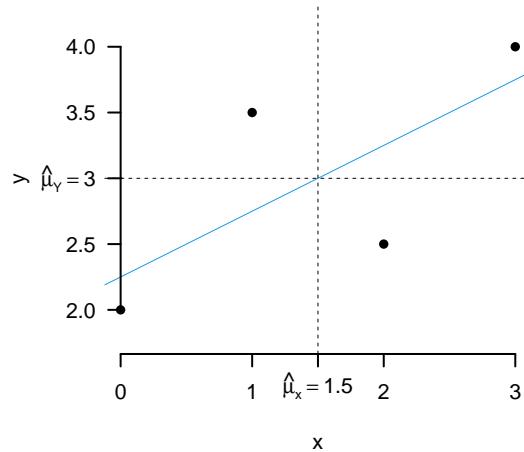
La retta stimata



## 17.5 Proprietà della retta dei minimi quadrati

La retta dei minimi quadrati passa per il baricentro di  $(x, y)$  che è  $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x} &= (\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}) + \hat{\beta}_1 \bar{x} \\ &= \bar{y}\end{aligned}$$



Le previsioni, sulle  $x$  osservate

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$

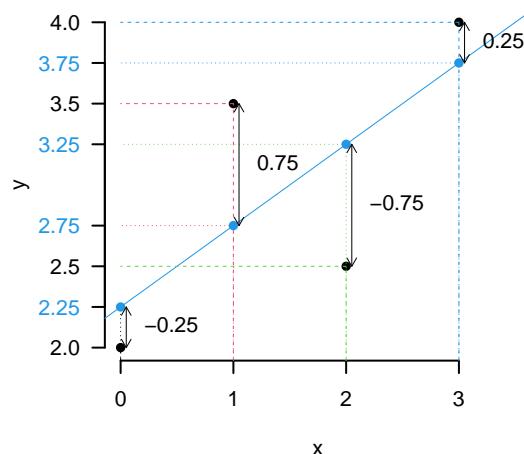
Le stime degli errori

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$$

Valgono le seguenti proprietà:

$y_i$ ,	le $y$ osservate
$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ ,	le $y$ stimate
$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$ ,	gli errori stimati
$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ ,	la media degli $y$
$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{y}_i$ ,	la media degli $\hat{y}$ coincide con quella degli $y$
$0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i$ ,	la media degli scarti dalla retta è zero
$\bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x}$ ,	la retta passa per il baricentro della nube

### 17.5.1 Calcolo di $\hat{y}_i$ e $\hat{\varepsilon}_i$



$i$	$x_i$	$y_i$	$\hat{y}_i = 2.25 + 0.5x_i$	$\hat{\varepsilon}_i$
1	0.0	2.0	2.25	-0.25
2	1.0	3.5	2.75	0.75
3	2.0	2.5	3.25	-0.75
4	3.0	4.0	3.75	0.25
<b>Totale</b>	<b>6.0</b>	<b>12.0</b>	<b>12.00</b>	<b>0.00</b>
Totale/n	1.5	3.0	3.00	0.00

## 17.6 Il coefficiente di Correlazione

Quanto si adatta bene la retta ai punti?

$$\begin{aligned} -\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y &\leq \text{cov}(x, y) \leq +\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y \\ -\frac{\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y}{\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y} &\leq \frac{\text{cov}(x, y)}{\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y} \leq +\frac{\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y}{\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y} \\ -1 &\leq r \leq +1 \end{aligned}$$

**Definizione 17.6.1.** Il coefficiente  $r$

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y}$$

è chiamato *coefficiente di correlazione*.

Nel nostro esempio

$$r = \frac{0.625}{1.118 \cdot 0.7906} = 0.7071$$

$r$  misura l'*associazione lineare* ovvero CRESCE in valore assoluto quando i punti SI ADDENSANO intorno alla retta.

### 17.6.1 Proprietà di $r$

- $-1 \leq r \leq 1$ . Il segno indica la direzione della relazione;
  - $r > 0$ , al crescere di  $X$ , *in media*, cresce  $Y$ ;
  - $r < 0$ , al crescere di  $X$ , *in media*, decresce  $Y$ ;
  - $r = 1$ , associazione perfetta diretta;
  - $r = -1$ , associazione perfetta indiretta.
- $r$  è un numero puro, ovvero è privo di unità di misura
- è simmetrico:  $r_{XY} = r_{YX} = r$
- è invariante per cambiamenti di scala: Se  $W = a + bY$ , allora

$$r_{XW} = \text{sign}(b)r_{XY}$$

dove

$$\text{sign}(b) = \begin{cases} +1, & \text{se } b > 0 \\ -1, & \text{se } b < 0 \end{cases}$$

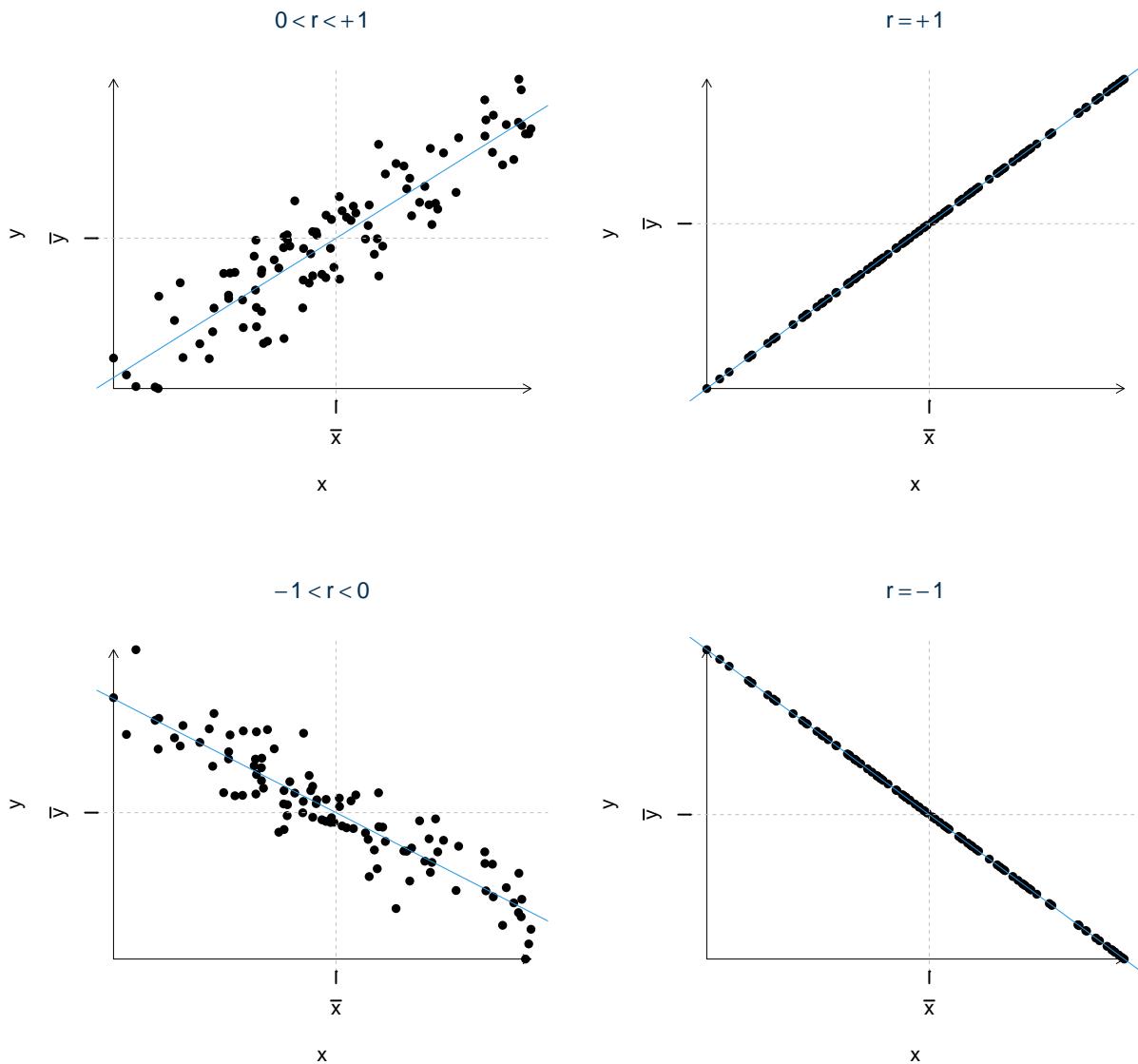
5.  $r$  misura l'associazione lineare:

- $r$  misura come i punti si addensano intorno alla retta.
- $f(x)$  **non lineare**  $r$  è parzialmente inutile
- il valore di  $r$ , da solo, non è in grado di descrivere tutte le possibili relazioni che si possono realizzare tra due variabili.

6.  $r$  è più elevato se i dati sono aggregati in medie o percentuali

1. La prima proprietà ci dice che  $r$  non può mai essere minore di  $-1$  e mai maggiore di  $+1$  per costruzione

$$-1 \leq r \leq 1$$



2. La seconda proprietà ci dice che  $r$  non dipende dalla scala di misura delle variabili  $X$  e  $Y$ . Mentre la covarianza ha un'unità di misura spuria, prodotto dell'unità di misura della  $x$  ( $u_X$ ) e della  $y$  ( $u_Y$ ),  $r$  non ha unità di misura perché è un rapporto tra la covarianza che porta l'unità di misura della  $X$  moltiplicata quella della  $Y$  e le standard deviation delle stesse.

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(x, y) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i \cdot u_X - \bar{x} \cdot u_X)(y_i \cdot u_Y - \bar{y} \cdot u_Y) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})u_X(y_i - \bar{y})u_Y \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})u_X \cdot u_Y \\
 &= \text{cov}(x, y)u_X \cdot u_Y
 \end{aligned}$$

Le standard deviation sono espresse nell'unità di misura delle variabili

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_Y &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i \cdot u_Y - \bar{y} \cdot u_Y)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((y_i - \bar{y})u_Y)^2} \\
 &= \left( \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \right) u_Y \\
 &= \hat{\sigma}_Y u_Y \\
 \hat{\sigma}_X &= \hat{\sigma}_X u_X
 \end{aligned}$$

E quindi  $r$

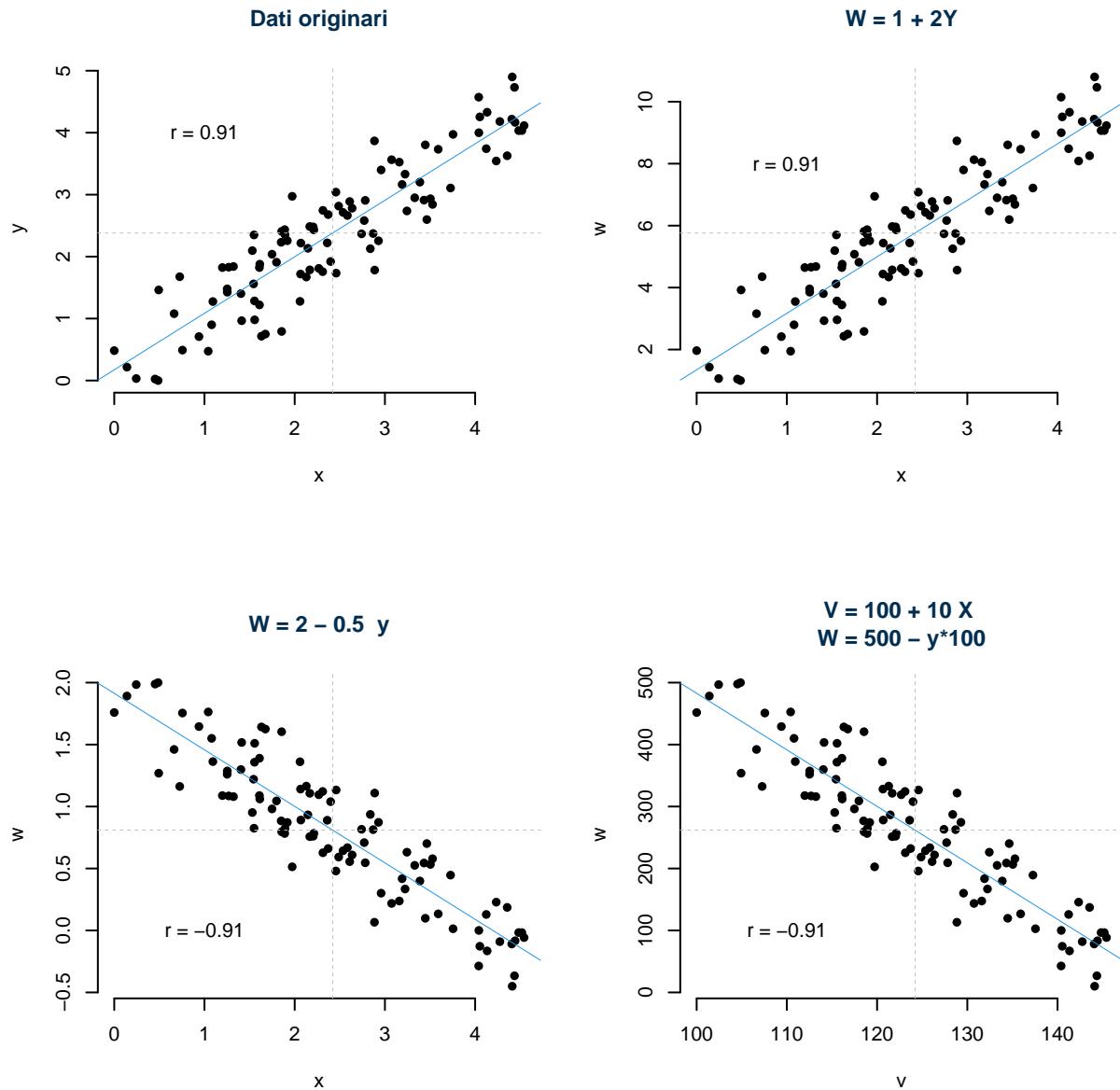
$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y} = \frac{\text{cov}(x, y)u_X \cdot u_Y}{\hat{\sigma}_X \cdot u_X \hat{\sigma}_Y \cdot u_Y} = \frac{\text{cov}(x, y)u_X \cdot u_Y}{\hat{\sigma}_X \cdot u_X \hat{\sigma}_Y \cdot u_Y}$$

3. La terza proprietà deriva direttamente dalla simmetria della covarianza:

$$r_{XY} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y} = \frac{\text{cov}(y, x)}{\hat{\sigma}_Y \hat{\sigma}_X} = r_{YX}$$

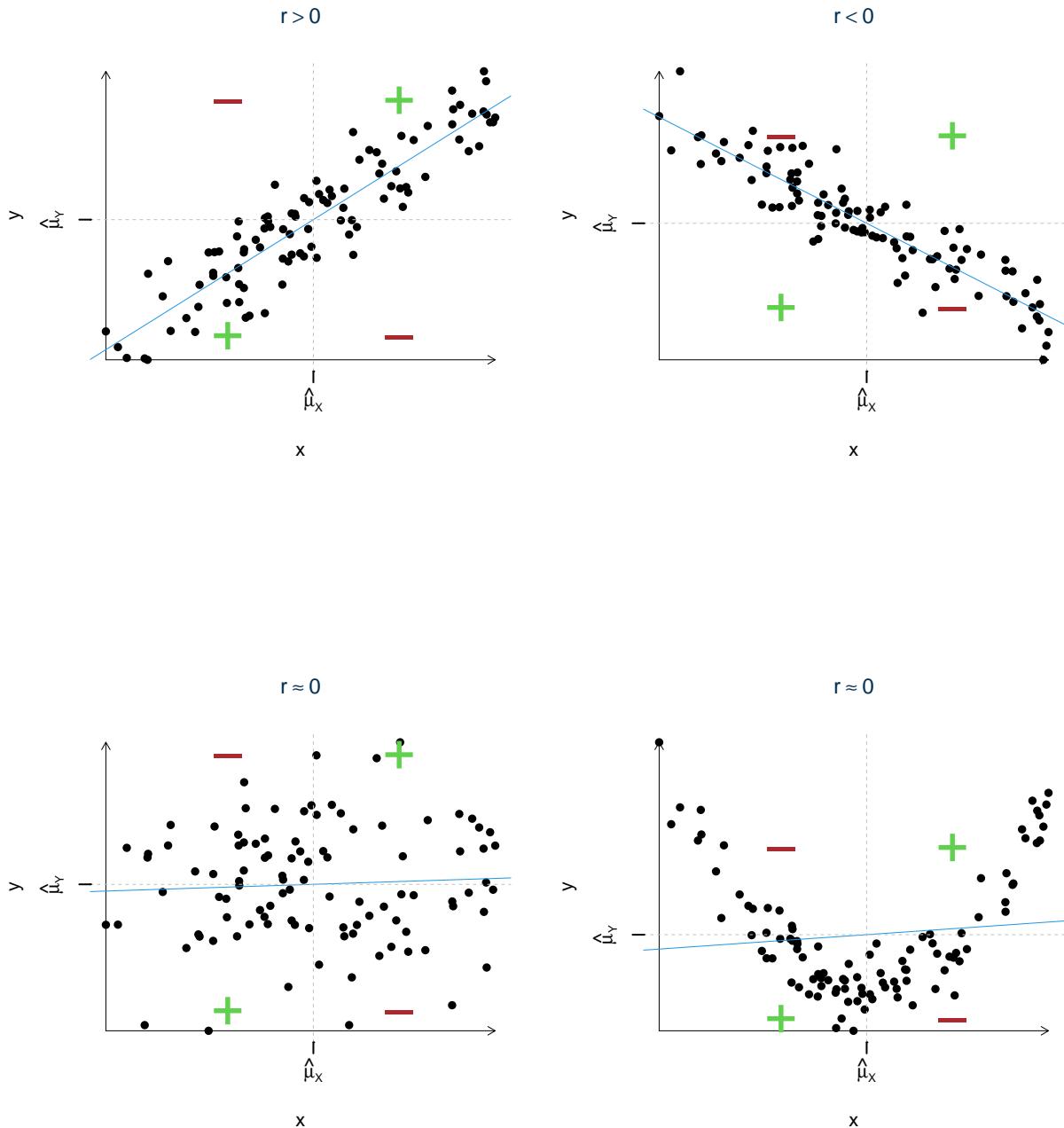
4. La quarta proprietà ci dice che, essendo un numero puro,  $r$ , non dipende dalle unità di misura di  $X$  ed  $Y$  e quindi cambiarla non comporta alterazioni su  $r$ .

se  $W = a + bY$ , allora  $r_{X,W} = \text{sign}(b)r_{XY}$ , dove la funzione  $\text{sign}(b) = \begin{cases} +1, & \text{se } b > 0 \\ -1, & \text{se } b < 0 \end{cases}$

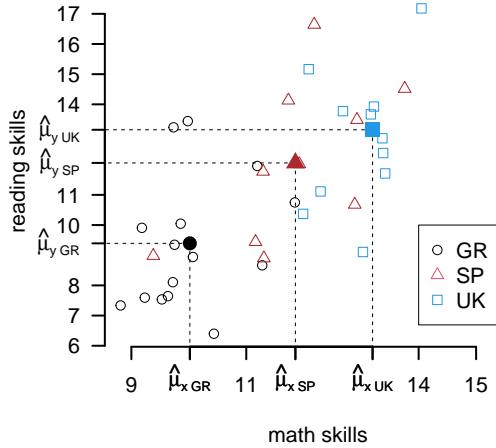


5. La quinta proprietà dice che  $r$  misura l'associazione lineare, ovvero Il coefficiente di correlazione  $r$  è una misura della distanza dei punti da una retta.

- $r$  misura come i punti si addensano intorno alla retta.
- $f(x)$  **non lineare**  $r$  è parzialmente inutile
- il valore di  $r$ , da solo, non è in grado di descrivere tutte le possibili relazioni che si possono realizzare tra due variabili.



6. Infine  $r$  è più elevato se i dati sono aggregati in medie o percentuali. Infatti se aggreghiamo, come nell'esempio qui sotto, i dati di tre paesi nelle loro medie, diminuiamo la variabilità.



L'indice  $r$  calcolato su tutti i dati è

$$r = 0.7056$$

L'indice  $r$  calcolato sulle tre medie è

$$r_{\text{Medie}} = 0.9893$$

## 17.7 Scomposizione della varianza

La scomposizione della varianza ci offre un quadro teorico per comprendere come la variabilità iniziale della variabile di interesse  $Y$  sia scomponibile in due pezzi: la variabilità spiegata dal modello e quella residua (casuale).

Ricordiamo che:

$$\begin{aligned} y_i &\text{ dati} & \hat{y}_i &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i, & \hat{\varepsilon}_i &= y_i - \hat{y}_i \\ \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, & \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{y}_i & 0 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i \end{aligned}$$

**Definizione 17.7.1** (Varianza Totale, Varianza Spiegata e Varianza Residua). La varianza di  $y$  (senza osservare  $x$ ) è

$$\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{TSS}{n}, \quad TSS \text{ Total Sum of Squares}$$

La varianza di  $\hat{y}$  è

$$\hat{\sigma}_{\hat{Y}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{ESS}{n}, \quad ESS \text{ Explained Sum of Squares}$$

La varianza di  $\hat{\varepsilon}$  è

$$\hat{\sigma}_{\hat{\varepsilon}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{\varepsilon}_i - 0)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2}{n} = \frac{RSS}{n}, \quad RSS \text{ Residual Sum of Squares}$$

**Proprietà 17.7.1.** Vale la seguente relazione

$$TSS = ESS + RSS$$

La variabilità totale di  $y$  (quella osservata senza  $x$ ) è scomponibile nella somma di due parti

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{variabilità di } y \\ \text{intorno alla sua media} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{variabilità della retta} \\ \text{intorno alla media} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{variabilità delle } y \\ \text{intorno alla retta} \end{array} \right\}$$

Dividendo ogni membro per  $TSS$ , si ottiene

$$\begin{aligned} TSS &= ESS + RSS \\ \frac{TSS}{TSS} &= \frac{ESS}{TSS} + \frac{RSS}{TSS} \\ 1 &= \frac{ESS}{TSS} + \frac{RSS}{TSS} \\ \frac{RSS}{TSS} &= 1 - \frac{ESS}{TSS} \\ \frac{RSS}{TSS} &= 1 - r^2, \quad r^2 = \frac{ESS}{TSS} \end{aligned}$$

## 17.8 Il coefficiente di determinazione lineare $R^2$

È un indicatore sintetico che indica la quota di varianza spiegata dal modello. Nel caso della regressione lineare semplice

**Definizione 17.8.1** (Indice di Determinazione Lineare). Si definisce

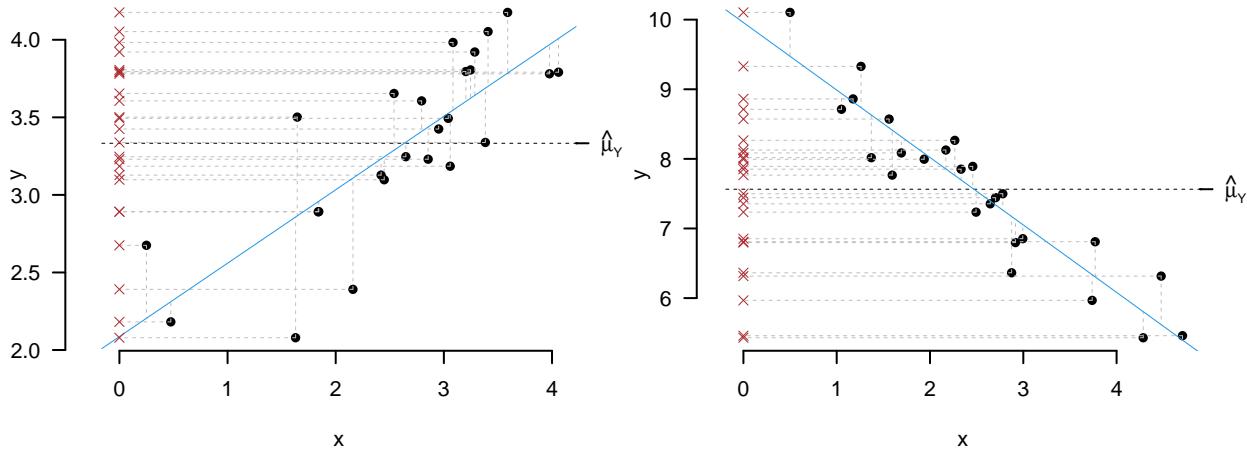
$$R^2 = \left( \frac{ESS}{TSS} \right) = r^2 = \left( \frac{\text{cov}(x, y)}{\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y} \right)^2$$

l'indice di determinazione lineare ed è, nel contesto della regressione lineare semplice, il quadrato dell'indice di correlazione

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

Se  $R^2 = 1$ , allora  $r = -1$  oppure  $r = +1$ , associazione lineare perfetta, 100% della variabilità spiegata, se  $R^2 = 0$ , allora  $r = 0$  associazione lineare nulla, 0% della variabilità spiegata, se  $R^2 > 0.75$ , allora considereremo l'associazione lineare *soddisfacente*.

La variabilità di delle  $y$  intorno ad  $\bar{y}$  (la dispersione delle  $x$  rosse intorno alla media) viene spiegata in parte dalla retta e resta una variabilità residua intorno alla retta (le distanze verticali) come mostrato in figura 17.1



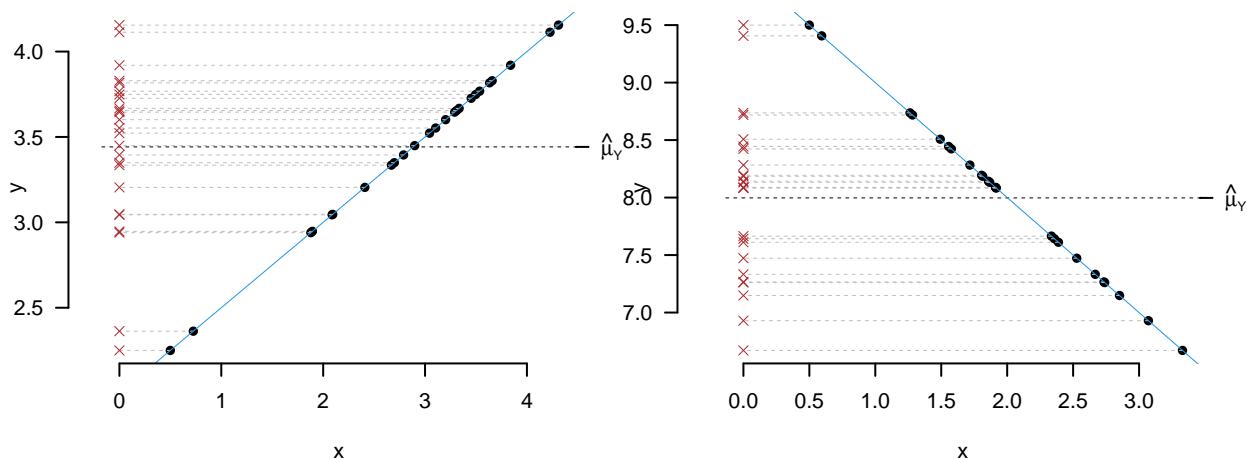
**Figura 17.1:** La variabilità della  $y$  si legge sull'asse  $y$  della del modello lungo la retta.

### 17.8.1 Interpretazione di $r^2$

La variabilità di  $y$  viene scomposta in due, la componente spiegata dalla retta e della residua. Caso limite uno: la retta spiega tutta la variabilità di  $y$ :

$$TSS = ESS \Rightarrow RSS = 0 \Rightarrow r^2 = 1$$

i punti sono allineati su una retta

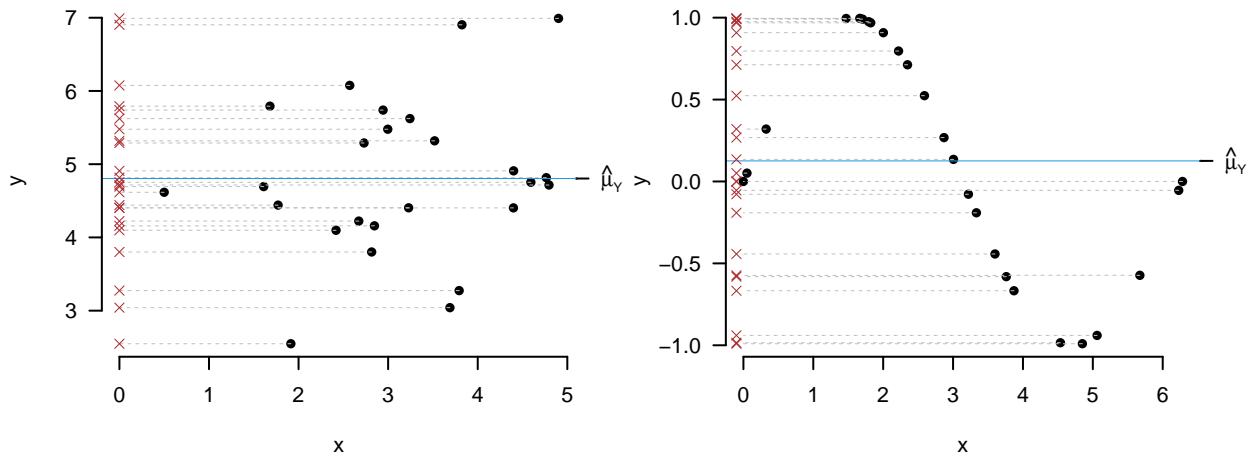


Se la retta è in grado di assorbire tutta la variabilità di  $y$  significa che tutti i punti sono allineati sul di essa.

Caso limite due: la retta **non** spiega nulla della variabilità di  $y$

$$TSS = RSS \Rightarrow ESS = 0 \Rightarrow r^2 = 0$$

la retta è orizzontale e coincide con  $\hat{\mu}_Y$



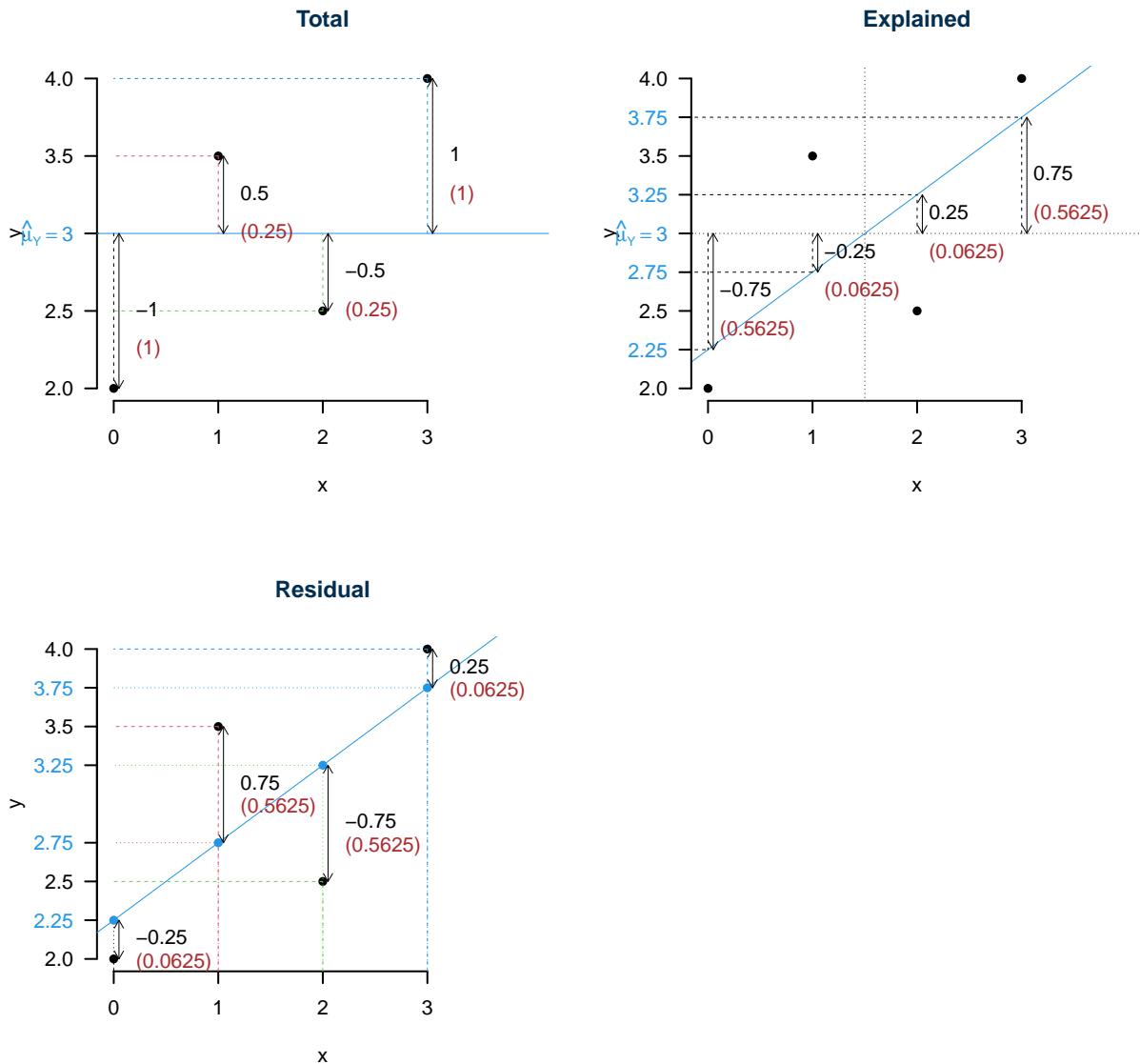
Se la retta è parallela all'asse dell  $x$  non spiega nulla della variabilità di  $y$ , ma non è detto che non esista relazione tra  $x$  ed  $y$ .

### 17.8.2 Scomposizione della varianza sui dati di esempio

Ricordandoci che  $\hat{\beta}_0 = 2.25$  e  $\hat{\beta}_1 = 0.5$  e che

$i$	$x_i$	$y_i$	$\hat{y}_i = 2.25 + 0.5x_i$	$\hat{\varepsilon}_i$
1	0.0	2.0	2.25	-0.25
2	1.0	3.5	2.75	0.75
3	2.0	2.5	3.25	-0.75
4	3.0	4.0	3.75	0.25
<b>Totale</b>	<b>6.0</b>	<b>12.0</b>	<b>12.00</b>	<b>0.00</b>
Totale/n	1.5	3.0	3.00	0.00

Ottendiamo



$i$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$\hat{\varepsilon}_i^2$
1	1.00	0.5625	0.0625
2	0.25	0.0625	0.5625
3	0.25	0.0625	0.5625
4	1.00	0.5625	0.0625
<b>Totale</b>	<b>2.50</b>	<b>1.2500</b>	<b>1.2500</b>

$$\begin{aligned}
 TSS &= ESS + RSS \\
 2.5 &= 1.25 + 1.25
 \end{aligned}$$

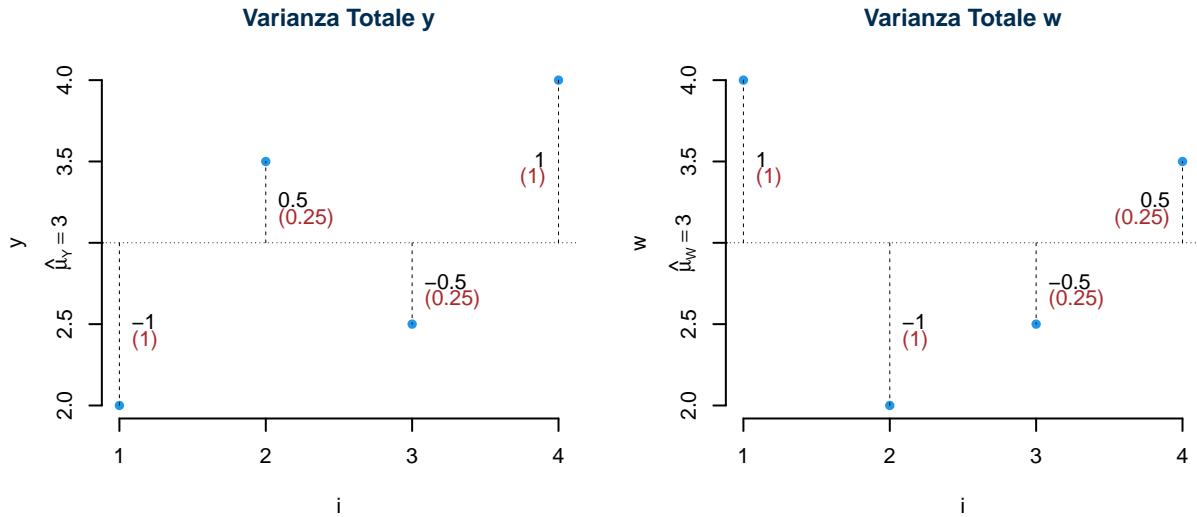
$$\begin{aligned}
 \frac{RSS}{TSS} &= 1 - r^2 \\
 \frac{1.25}{2.5} &= 1 - 0.7071^2 \\
 0.5 &= 1 - 0.5
 \end{aligned}$$

Ovvero la retta di regressione di  $y$  dato  $x$  spiega il 50% della variabilità totale della  $y$ .

**Osservazione.** Se volessi studiare la relazione tra  $X$  e  $W$  nella tabella qui sotto:

$i$	$x_i$	$y_i$	$w_i$
1	0	2.0	4.0
2	1	3.5	2.0
3	2	2.5	2.5
4	3	4.0	3.5
<b>Totale</b>	<b>6</b>	<b>12.0</b>	<b>12.0</b>

Osservo dapprima Le variabili  $y$  e  $w$  hanno la stessa media e la stessa varianza, infatti  $\sum_i y_i = \sum_i w_i = 12$  e  $\sum_i y_i^2 = \sum_i w_i^2 = 38.5$ . Se osservati rispetto ai soli valori, in ipotesi IID, sono fenomeni indistinguibili.



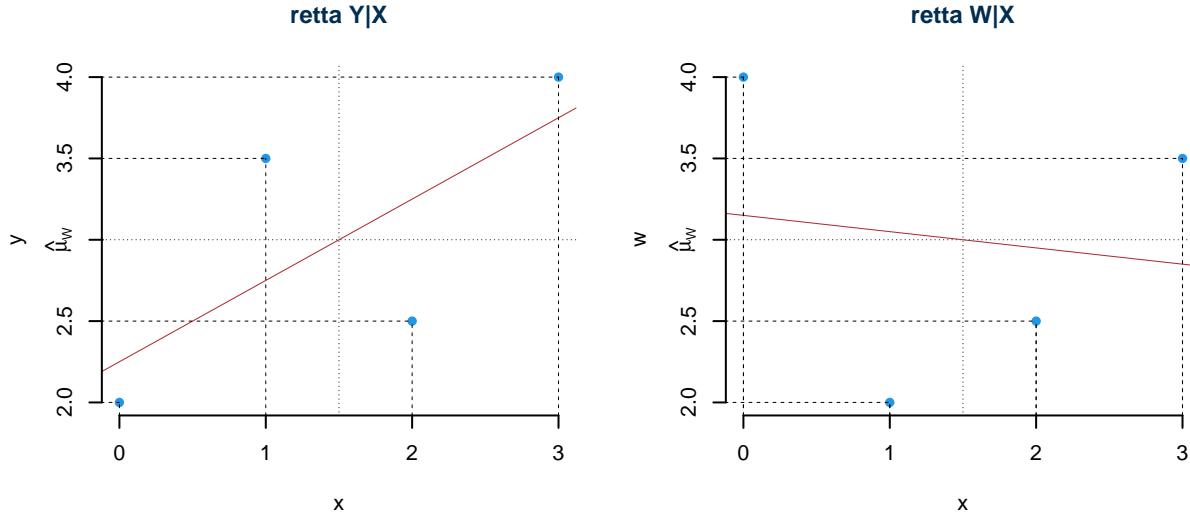
La varianza di  $y$  è dunque

$$\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{n} \sum_i (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum_i y_i^2 - \bar{y}^2 = 9.625 - (3)^2 = 0.625$$

e quella di  $w$

$$\hat{\sigma}_W^2 = \frac{1}{n} \sum_i (w_i - \bar{w})^2 = \frac{1}{n} \sum_i w_i^2 - \bar{w}^2 = 9.625 - (3)^2 = 0.625.$$

Ma la variabile  $X$  non spiega nello stesso modo  $Y$  e  $W$ . Infatti se osserviamo la relazione tra  $x$  ed  $Y$  e la relazione tra  $x$  e  $w$  ci accorgiamo che i fenomeni sono diversi.



- La retta  $y|x$  assorbe il 50% della variabilità di  $y$
- La retta  $w|x$  assorbe il 2% della variabilità di  $w$

## 17.9 Stima di $\sigma_\varepsilon^2$

Il parametro  $\sigma_\varepsilon^2$  rappresenta la variabilità dei punti intorno alla retta. La stima di  $\sigma_\varepsilon^2$  deriva dalla scomposizione della varianza

$$\begin{aligned} \frac{RSS}{TSS} &= 1 - r^2 \\ RSS &= TSS(1 - r^2) \\ \frac{RSS}{n} &= \frac{TSS}{n}(1 - r^2) \\ \hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= \hat{\sigma}_Y^2(1 - r^2) \end{aligned}$$

In modo analogo alla stima di  $\sigma^2$  in un modello normale,  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$  **non** è stima corretta di  $\sigma_\varepsilon^2$  e si dimostra che

$$E(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) = \frac{n-2}{n} \sigma_\varepsilon^2$$

si quindi corregge con:

$$S_\varepsilon^2 = \frac{n}{n-2} \hat{\sigma}_\varepsilon^2$$

## 17.10 Statistiche Sufficienti del Modello di Reegressione

Se l'ipotesi di normalità dei residui viene ritenuta valida si può dimostrare che le stime di massima verosimiglianza per  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\sigma_\varepsilon^2$  coincidono con quelle dei minimi quadrati  $\hat{\beta}_0$ ,  $\hat{\beta}_1$  e  $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ . Tutta l'informazione sul modello di

regressione lineare semplice è contenuta nelle seguenti statistiche

$$\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n y_i, \sum_{i=1}^n x_i^2, \sum_{i=1}^n y_i^2, \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i \cdot y_i$
1	0.0	2.0	0.0	4.000	0.000
2	1.0	3.5	1.0	12.250	3.500
3	2.0	2.5	4.0	6.250	5.000
4	3.0	4.0	9.0	16.000	12.000
<b>Totale</b>	<b>6.0</b>	<b>12.0</b>	<b>14.0</b>	<b>38.500</b>	<b>20.500</b>
Totale/n	1.5	3.0	3.5	9.625	5.125

Ricapitolando nel nostro esempio:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 1.5 & \hat{\sigma}_X^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = 1.25 \\ \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 3 & \hat{\sigma}_Y^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{y}^2 = 0.625 \\ \text{cov}(x, y) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y} = 0.625 & r &= \frac{\text{cov}(x, y)}{\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y} = 0.7071 \\ \hat{\beta}_1 &= \frac{\text{cov}(x, y)}{\hat{\sigma}_X^2} = 0.5 & \hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 2.25. \\ \hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= \hat{\sigma}_Y^2 (1 - r^2) = 0.3125 & S_\varepsilon^2 &= \frac{n}{n-2} \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 0.625 \\ \hat{\sigma}_\varepsilon &= \hat{\sigma}_Y \sqrt{1 - r^2} = 0.559 & S_\varepsilon &= \sqrt{\frac{n}{n-2}} \hat{\sigma}_\varepsilon = 0.7906 \end{aligned}$$



# Inferenza e Diagnostica sul Modello di Regressione Lineare

18

## 18.1 Teorema di Gauss-Markov

**Teorema 18.1.1** (Gauss-Markov). *Sotto gli assunti dallo 0 al 5, gli stimatori dei minimi quadrati sono corretti*

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1, \quad E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

La loro varianza è:

$$\begin{aligned} V(\hat{\beta}_1) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n\hat{\sigma}_X^2} \\ V(\hat{\beta}_0) &= \sigma_\varepsilon^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n\hat{\sigma}_X^2} \right) \\ \text{cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) &= -\sigma_\varepsilon^2 \frac{\bar{x}}{n\hat{\sigma}_X^2} = -\bar{x}V(\hat{\beta}_1) \end{aligned}$$

Gli stimatori  $\hat{\beta}_0$  e  $\hat{\beta}_1$  di  $\beta_0$  e  $\beta_1$  sono BLUE (Best Linear Unbiased Estimators).

## 18.2 La previsione $\hat{Y}$

Definiamo la previsione di  $Y$  per un valore  $x$  qualunque

$$\hat{Y}_{(X=x)} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

Se  $X = x_i$  allora

$$\hat{Y}_{(X=x_i)} = \hat{Y}_i$$

La previsione è corretta

$$E(\hat{Y}_{(X=x)}) = E(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x) = E(\hat{\beta}_0) + E(\hat{\beta}_1)x = \beta_0 + \beta_1 x$$

La varianza

$$V(\hat{Y}_{(X=x)}) = \sigma_\varepsilon^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{n\hat{\sigma}_X^2} \right)$$

## 18.3 Standard Errors e Stima degli SE

Gli Errori Standard (ES) delle stime sono le radici quadrate delle varianze degli stimatori

$$SE(\hat{\beta}_0) = \sqrt{\hat{\beta}_0}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\sigma_{\varepsilon}^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n\hat{\sigma}_X^2} \right)} \\
SE(\hat{\beta}_1) &= \sqrt{V(\hat{\beta}_1)} \\
&= \sqrt{\frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{n\hat{\sigma}_X^2}} \\
SE(\hat{Y}_{(X=x)}) &= \sqrt{V(\hat{Y}_{(X=x)})} \\
&= \sqrt{\sigma_{\varepsilon}^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{n\hat{\sigma}_X^2} \right)}
\end{aligned}$$

Ricordando che

$$S_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{n}{n-2}} \hat{\sigma}_Y \sqrt{1-r^2}$$

Otteniamo le stime campionarie per gli Standard Errors

$$\begin{aligned}
\widehat{SE}(\hat{\beta}_0) &= \sqrt{S_{\varepsilon}^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n\hat{\sigma}_X^2} \right)} \\
\widehat{SE}(\hat{\beta}_1) &= \sqrt{\frac{S_{\varepsilon}^2}{n\hat{\sigma}_X^2}} \\
\widehat{SE}(\hat{Y}_{(X=x)}) &= \sqrt{S_{\varepsilon}^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{n\hat{\sigma}_X^2} \right)}
\end{aligned}$$

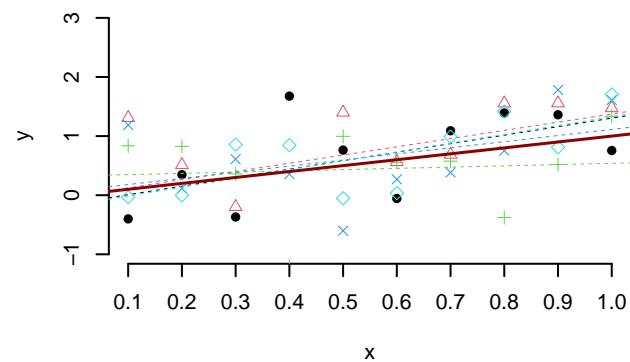
## 18.4 Inferenza su $\beta_0$ e $\beta_1$ e su $\hat{Y}$

Se l'assunto 6. (normalità dei residui) è rispettato, allora

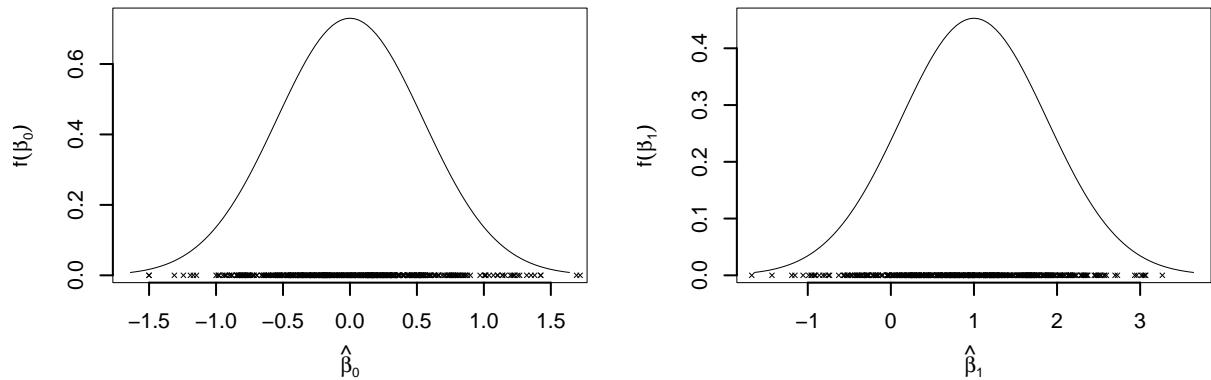
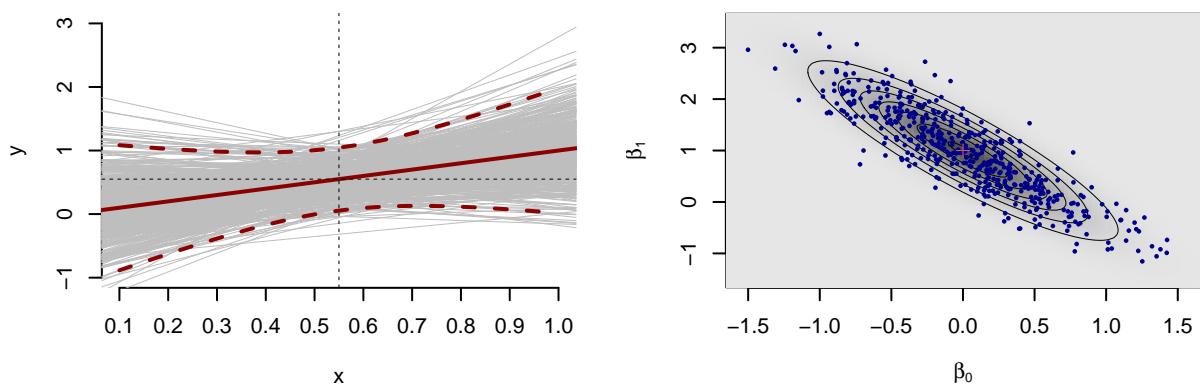
$$\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, V(\hat{\beta}_1)), \hat{\beta}_0 \sim N(\beta_0, V(\hat{\beta}_0)), \hat{Y}_{(X=x)} \sim N(\beta_0 + \beta_1 x, V(\hat{Y}_{(X=x)}))$$

Fisso  $n = 10, x_1 = 0.1, x_2 = 0.2, \dots, x_{10} = 1.0, \beta_0 = 0, \beta_1 = 1$  e  $\sigma_{\varepsilon}^2 = 0.64$ . Simulo 5 volte  $n = 10$  punti da

$$Y_i = 0 + 1 \cdot x_i + \varepsilon_i, \varepsilon_i \sim N(0, 0.64)$$



E ripeto le simulazioni ripetute 500 volte:



La varianza di  $\hat{Y}$  è l'*errore di previsione*

$$V(\hat{Y}_{(X=x)}) = \sigma_{\varepsilon}^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{n\hat{\sigma}_X^2} \right)$$

### 18.4.1 Interpolazione e Estrapolazione

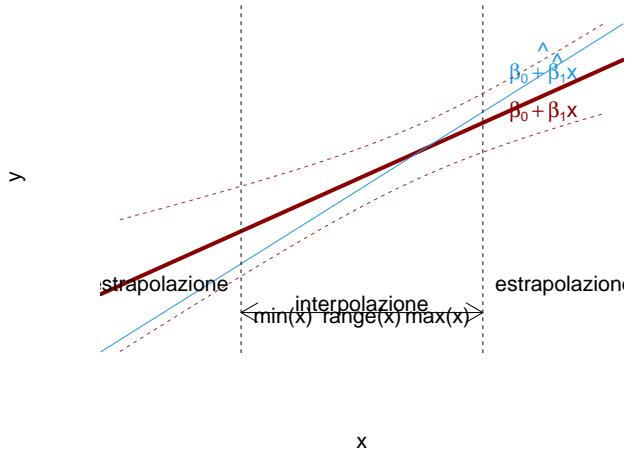
Parliamo di *interpolazione* dei punti se  $\hat{Y}_{(X=x)}$  è calcolato per

$$\min\{x_i\} \leq x \leq \max\{x_i\}$$

Parliamo di *estrapolazione* dei punti se  $\hat{Y}_{(X=x)}$  è calcolato per

$$x < \min\{x_i\} \text{ oppure } x > \max\{x_i\}$$

Voglio le previsioni per  $x > 1$



### 18.4.2 Intervalli di Confidenza per $\beta_0$ , $\beta_1$ e $\hat{Y}$

Si dimostra che

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\widehat{SE}(\hat{\beta}_0)} &\sim t_{n-2} \\ \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\widehat{SE}(\hat{\beta}_1)} &\sim t_{n-2} \\ \frac{\hat{Y}_{(X=x)} - (\beta_0 + \beta_1 x)}{\widehat{SE}(\hat{Y}_{(X=x)})} &\sim t_{n-2} \end{aligned}$$

E dunque gli IdC al livello  $(1 - \alpha)$  sono dati da

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_0 &\pm t_{n-2;\alpha/2} \widehat{SE}(\hat{\beta}_0) \\ \hat{\beta}_1 &\pm t_{n-2;\alpha/2} \widehat{SE}(\hat{\beta}_1) \\ \hat{Y}_{(X=x)} &\pm t_{n-2;\alpha/2} \widehat{SE}(\hat{Y}_{(X=x)})\end{aligned}$$

### 18.4.3 Test per $\beta_0$ , e $\beta_1$

Consideriamo i due seguenti sistemi di ipotesi

$$\begin{cases} H_0 : \beta_0 = \beta_{0,H_0} \\ H_1 : \text{da scegliere } \neq, > \text{ o } < \end{cases} \quad \begin{cases} H_0 : \beta_1 = \beta_{1,H_0} \\ H_1 : \text{da scegliere } \neq, > \text{ o } < \end{cases}$$

Sapendo che

$$\widehat{SE}(\hat{\beta}_0) = \sqrt{S_\varepsilon^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n\hat{\sigma}_X^2} \right)} \quad \widehat{SE}(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\frac{S_\varepsilon^2}{n\hat{\sigma}_X^2}}$$

Sotto  $H_0$

$$\begin{aligned}\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_{0,H_0}}{\widehat{SE}(\hat{\beta}_0)} &\sim t_{n-2} \\ \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,H_0}}{\widehat{SE}(\hat{\beta}_1)} &\sim t_{n-2}\end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}t_{0,\text{obs}} &= \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_{0,H_0}}{\widehat{SE}(\hat{\beta}_0)} \\ t_{1,\text{obs}} &= \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,H_0}}{\widehat{SE}(\hat{\beta}_1)}\end{aligned}$$

Che andranno lette nella direzione di  $H_1$  con le solite regole

### 18.4.4 Esempio sui 4 punti

Tipicamente quando si fa un modello di regressione per prima cosa si testa la significatività dei coefficienti:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_0 = 0 \\ H_1 : \beta_0 \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_0 : \beta_1 = 0 \\ H_1 : \beta_1 \neq 0 \end{cases}$$

Calcolo gli standard errors stimati

$$\begin{aligned}
 V(\hat{\beta}_1) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n\hat{\sigma}_X^2} & \widehat{SE}(\hat{\beta}_1) &= \sqrt{\frac{S_\varepsilon^2}{n\hat{\sigma}_X^2}} \\
 & & &= \sqrt{\frac{0.625}{4 \times 1.25}} \\
 & & &= 0.3536 \\
 V(\hat{\beta}_0) &= \sigma_\varepsilon^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n\hat{\sigma}_X^2} \right) & \widehat{SE}(\hat{\beta}_0) &= \sqrt{S_\varepsilon^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n\hat{\sigma}_X^2} \right)} \\
 & & &= \sqrt{0.625 \left( \frac{1}{4} + \frac{1.5^2}{4 \times 1.25} \right)} \\
 & & &= 0.6614
 \end{aligned}$$

#### 18.4.5 Calcolo dei valori osservati e dei valori critici

otteniamo

$$\begin{aligned}
 t_{0,\text{obs}} &= \frac{\hat{\beta}_0 - 0}{\widehat{SE}(\hat{\beta}_0)} = 3.4017 \\
 t_{1,\text{obs}} &= \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\widehat{SE}(\hat{\beta}_1)} = 1.4142
 \end{aligned}$$

dalle tavole ricaviamo -  $t_{n-2;0.025} = 4.3027$  -  $t_{n-2;0.005} = 9.9248$

e osserviamo che, per il coefficiente  $\beta_0$ :

- $|t_{0,\text{obs}}| = |3.4017| < 4.3027 = t_{n-2;0.025}$  e quindi non rifiuto  $H_0$  al livello di significatività  $\alpha = 0.05$ .
- $|t_{0,\text{obs}}| = |3.4017| < 9.9248 = t_{n-2;0.005}$  e quindi non rifiuto  $H_0$  al livello di significatività  $\alpha = 0.01$ .

per il coefficiente  $\beta_1$

- $|t_{1,\text{obs}}| = |1.4142| < 4.3027 = t_{n-2;0.025}$  e quindi non rifiuto  $H_0$  al livello di significatività  $\alpha = 0.05$ .
- $|t_{1,\text{obs}}| = |1.4142| < 9.9248 = t_{n-2;0.005}$  e quindi non rifiuto  $H_0$  al livello di significatività  $\alpha = 0.01$ .

#### 18.4.6 Se $n = 10$

Si supponga che a parità di statistiche  $\bar{x}, \bar{y}, \hat{\sigma}_X, \hat{\sigma}_Y$ , e  $\text{cov}(X, Y)$ , ma per  $n = 10$ , si ottiene:

Calcolo gli standard errors stimati

$$\begin{aligned}
 V(\hat{\beta}_1) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n\sigma_X^2} & \widehat{SE}(\hat{\beta}_1) &= \sqrt{\frac{S_\varepsilon^2}{n\hat{\sigma}_X^2}} \\
 & & &= \sqrt{\frac{0.3906}{10 \times 1.25}} \\
 & & &= 0.1768 \\
 V(\hat{\beta}_0) &= \sigma_\varepsilon^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n\sigma_X^2} \right) & \widehat{SE}(\hat{\beta}_0) &= \sqrt{S_\varepsilon^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n\sigma_X^2} \right)} \\
 & & &= \sqrt{0.3906 \left( \frac{1}{10} + \frac{1.5^2}{10 \times 1.25} \right)} \\
 & & &= 0.3307
 \end{aligned}$$

Calcolo dei valori osservati e dei valori critici e ottengo

$$\begin{aligned}
 t_{0,\text{obs}} &= \frac{\hat{\beta}_0 - 0}{\widehat{SE}(\hat{\beta}_0)} = 6.8034 \\
 t_{1,\text{obs}} &= \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\widehat{SE}(\hat{\beta}_1)} = 2.8284
 \end{aligned}$$

dalle tavole ricaviamo  $t_{n-2;0.025} = 2.306$  e  $t_{n-2;0.005} = 3.3554$

e osserviamo che, per il coefficiente  $\beta_0$ :

- $|t_{0,\text{obs}}| = |6.8034| > 2.306 = t_{n-2;0.025}$  e quindi rifiuto  $H_0$  al livello di significatività  $\alpha = 0.05$ .
- $|t_{0,\text{obs}}| = |6.8034| > 3.3554 = t_{n-2;0.005}$  e quindi rifiuto  $H_0$  al livello di significatività  $\alpha = 0.01$ .

per il coefficiente  $\beta_1$

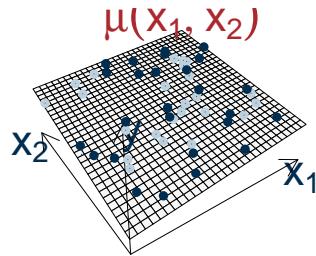
- $|t_{1,\text{obs}}| = |2.8284| > 2.306 = t_{n-2;0.025}$  e quindi rifiuto  $H_0$  al livello di significatività  $\alpha = 0.05$ .
- $|t_{1,\text{obs}}| = |2.8284| < 3.3554 = t_{n-2;0.005}$  e quindi non rifiuto  $H_0$  al livello di significatività  $\alpha = 0.01$ .

## 18.5 Il modello di regressione lineare multiplo

Si tratta di un'estensione del modello semplice ma con più variabili indipendenti

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

La nube dei punti non può più essere rappresentata per  $k > 2$  e le soluzioni dei minimi quadrati tanto meno. Il coefficiente di determinazione lineare  $R^2$  soffre di grossi limiti all'aumentare del numero di  $k$ . Per valutare quanto bene il modello si adatta ai dati si devo compiere analisi statistiche ulteriori.



**Figura 18.1:** Nube in 3D, i punti tali per cui  $\hat{y}_i > y_i$  sono colorati in blu scuro, quelli per cui  $\hat{y}_i < y_i$ , sono colorati in azzurro chiaro

## 18.6 Analisi dei Residui

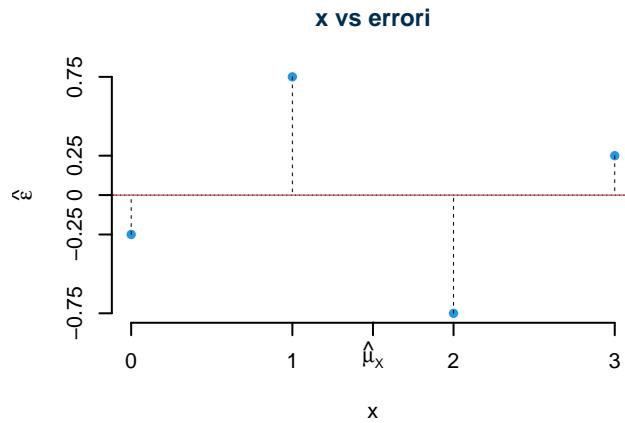
Il modello lineare poggia sugli assunti che abbiamo elencato. La violazione degli assunti invalida le procedure inferenziali. La **analisi dei residui** è una serie di procedure diagnostiche per controllare che gli assunti siano rispettati. Le procedure consistono nel produrre statistiche e grafici sui residui osservati  $\hat{\varepsilon}_i$ .

### 18.6.1 Diagramma dei residui e retta dei residui

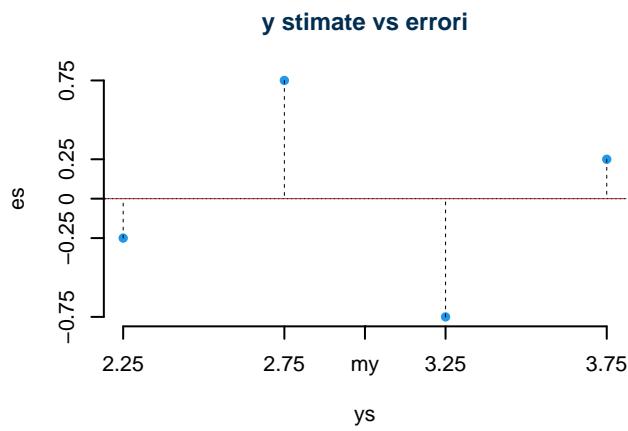
Un modo comune per visualizzare i residui consiste nel mettere in ordinata le  $x_i$  e in ascissa i  $\hat{\varepsilon}_i$ . Per costruzione

$$\text{cov}(x, \hat{\varepsilon}) = 0$$

e dunque la **retta dei residui**, che è la retta di regressione tra  $x$  e  $\hat{\varepsilon}$  è parallela all'asse delle  $x$  e coincide con esso. Esempio sui 4 punti

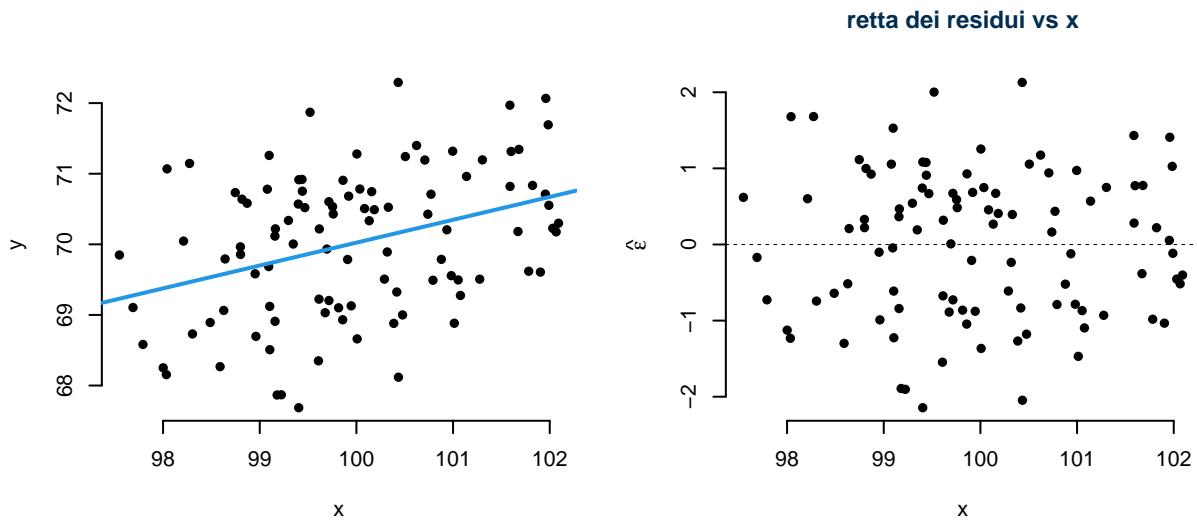


essendo  $\hat{y}_i$  combinazioni lineari degli  $x_i$  se mettiamo gli  $\hat{y}_i$  in ordinata e gli  $\varepsilon_i$  in ascissa otteniamo lo stesso grafico

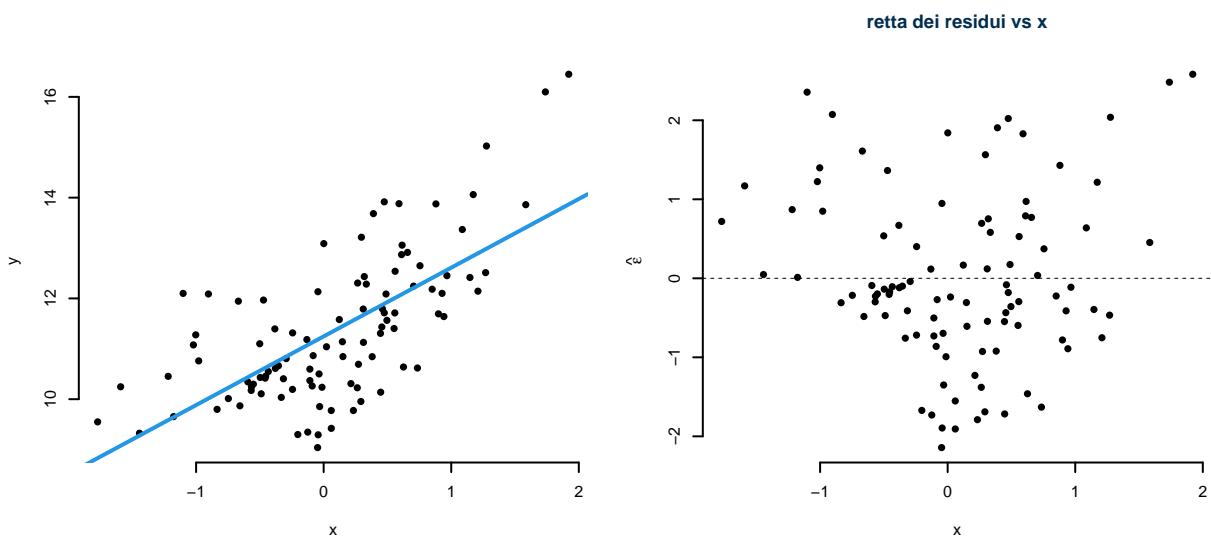


### 18.6.2 Lettura del Diagramma dei residui

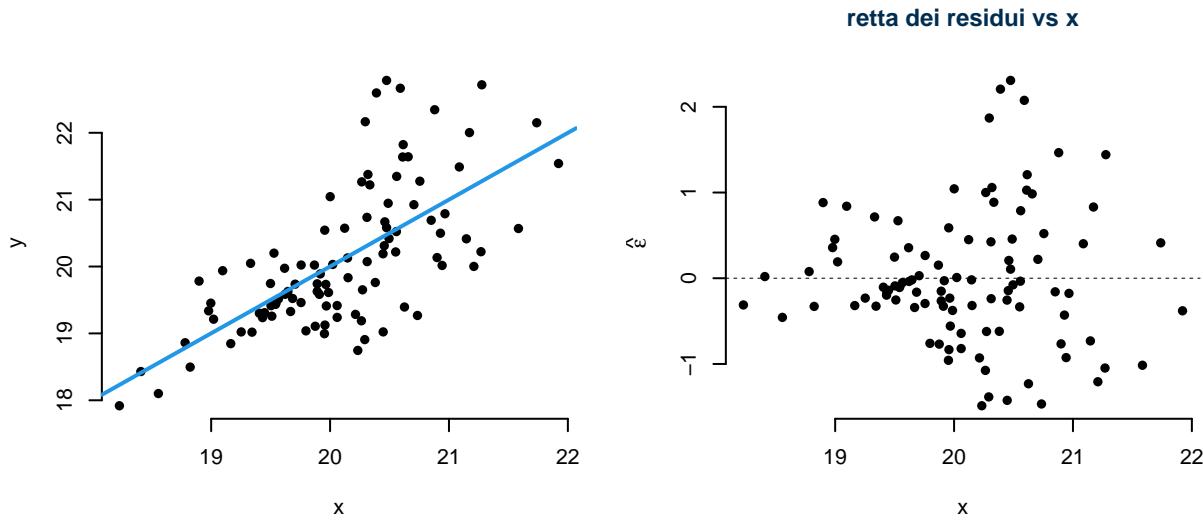
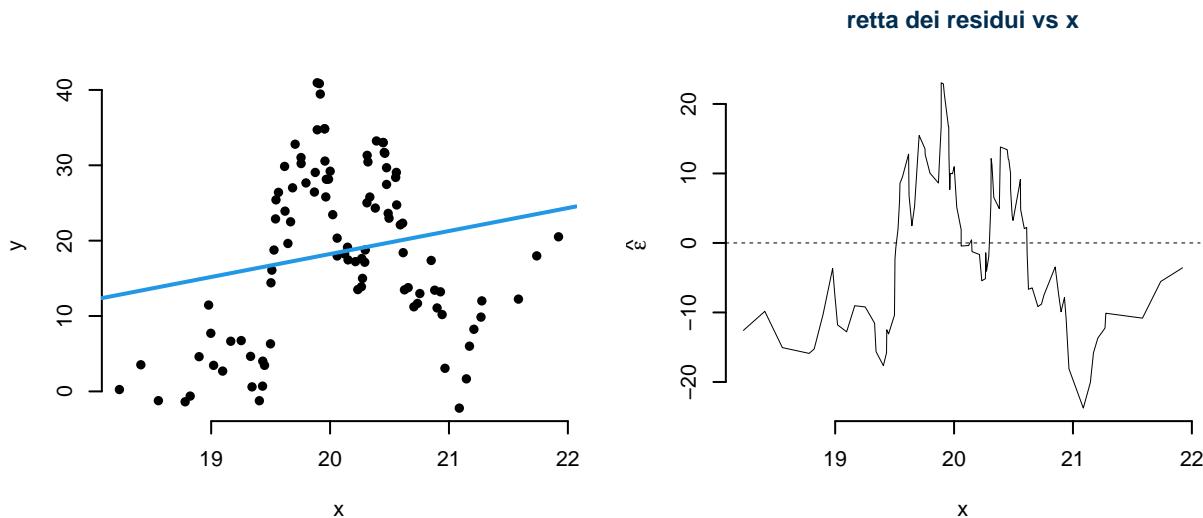
Se tutte le assunzioni sono rispettate i residui devono essere distribuiti in modo uniforme intorno alla retta dei residui



Violazione dell'assunto 0 (i punti provengono da una relazione lineare)

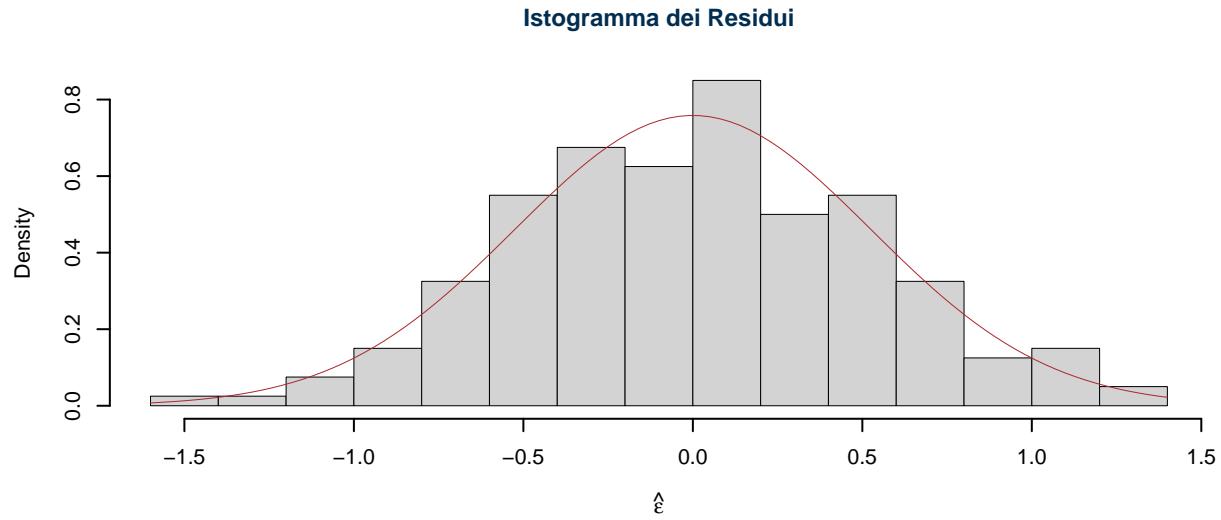


Violazione degli assunti 2. e 4. (omoschedasticità e indipendenza tra  $x$  e  $\varepsilon$ )

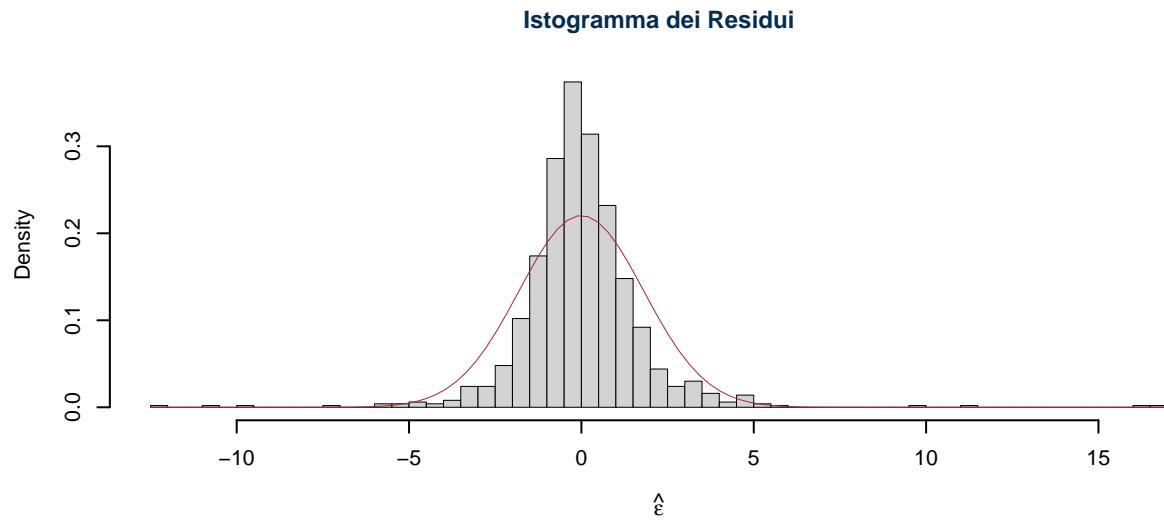
Violazione dell'assunto 3. (indipendenza gli  $\varepsilon$ )

Violazioni dell'assunto 6. (normalità dei residui)

Per diagnosticare se i residui provengono da una normale ci sono diverse tecniche. Per esempio l'istogramma dei residui: si costruisce l'istogramma di frequenza e lo si compara con la normale. Se gli assunti sono rispettati ci aspetteremmo una situazione del genere



Esempio di assunto **non** rispettato



### 18.6.3 Normal QQ plot

Si tratta di un grafico che mette sull'asse delle x i *quantile* (percentili in inglese) teorici della normale e in ordinata i *quantile* osservati dei residui sul campione.

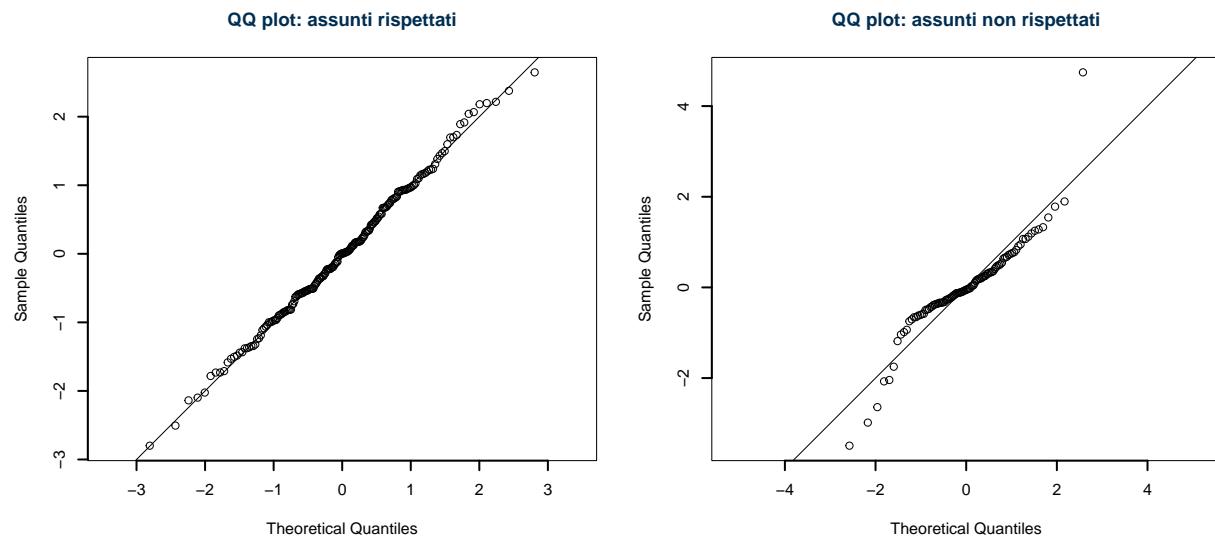
Si crea una tabella dei percentili degli  $\hat{\varepsilon}_{(1)}$

errori ordinati	ordine del percentile	percentile teorico
$\hat{\varepsilon}_{(1)}$	$1/n$	$z_{1/n}$
$\hat{\varepsilon}_{(2)}$	$2/n$	$z_{2/n}$
...	...	...

dove  $z_{i/n}$  è il percentile di un  $Z \sim N(0, 1)$ :

$$z_{i/n} : P(Z \leq z_{i/n}) = i/n$$

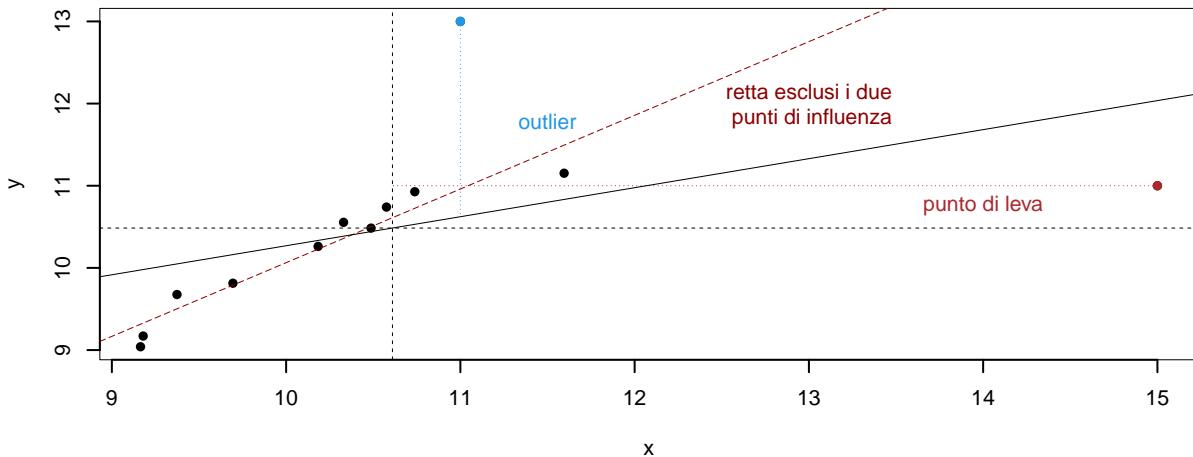
Se le  $z_{i/n}$  e le  $\hat{\varepsilon}_i$  giacciono su una retta, allora gli errori si possono assumere normali, tanto più i punti si allontanano tanto più l'ipotesi è violata.



## 18.7 Punti di leva, Outliers e punti influenti

Ci sono tre tipi di dati anomali, in particolare

- Outlier: osservazione con residuo anomale (sulle  $y$ )
- Leverage: (punto di leva), valore anomalo (sulle  $x$ )
- Influence Points: (punti influenti) osservazioni con comportamento anomalo che influenzano notevolmente i risultati



### 18.7.1 Punti di leva

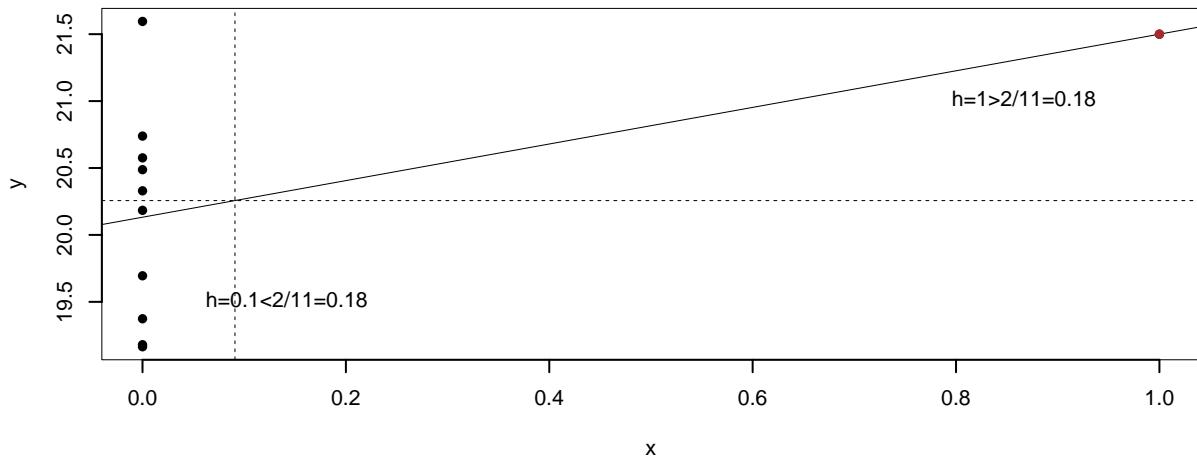
Possiamo misurare la distanza di ogni singola  $x_i$  dalla propria media  $\bar{x}$  con la seguente misura chiamata *leva*

$$h_i = \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n\hat{\sigma}_X^2}$$

Valori di  $x$  con indice di leva alto sono *lontani* dal centro. In particolare se

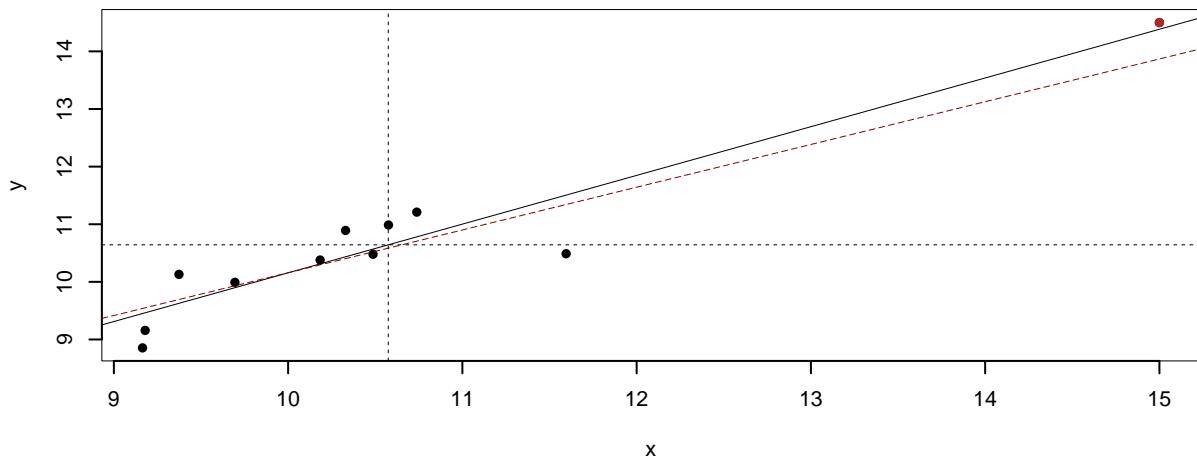
$$h_i > \frac{2}{n}$$

allora  $x_i$  è un *punto di leva*. I Punti di leva possono avere effetto sul calcolo dei coefficienti di regressione. I punti a alta leva (con  $h_i > 2/n$ ) sono nei valori estremi della variabile esplicativa e sono potenzialmente influenti, nel senso che possono influenzare in misura rilevante la pendenza della RdR. Infatti, i punti di leva possono portare a risultati forzanti per esempio



$x_i$	0.00	0.00	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.0
$y_i$	19.37	20.18	19.16	21.6	20.33	19.18	20.49	20.74	20.58	19.69	21.5
$h_i$	0.10	0.10	0.10	0.1	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	1.0

Ma non sempre un punto a leva alta è un punto influente



$x_i$	9.37	10.18	9.16	11.60	10.33	9.18	10.49	10.74	10.58	9.69	15.00
$y_i$	10.13	10.38	8.85	10.49	10.89	9.16	10.48	11.21	10.99	9.99	14.50
$h_i$	0.14	0.10	0.16	0.13	0.09	0.16	0.09	0.09	0.09	0.12	0.82

### 18.7.2 I residui Studentizzati

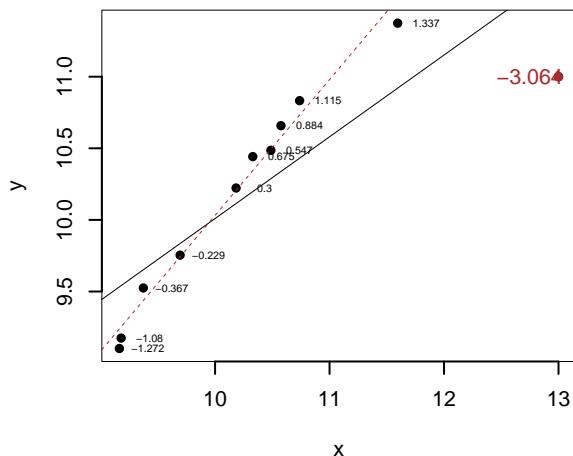
La studentizzazione è una specie di standardizzazione nella quale si tiene conto anche dei valori di leva. I residui studentizzati sono dati da:

$$\tilde{\varepsilon}_i = \frac{\hat{\varepsilon}_i}{S_{\varepsilon} \sqrt{1 - h_i}} \sim t_{n-2}$$

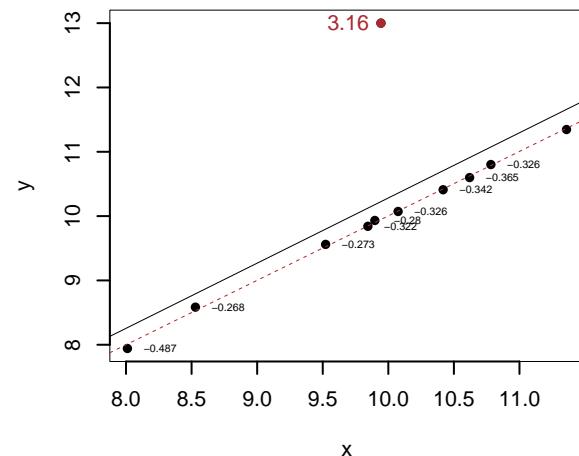
Si preferiscono i residui studentizzati perché incorporano le leve e sono più confrontabili. La distribuzione è  $t$  con  $n - 2$  gradi di libertà, se per qualche  $i$ ,  $|\tilde{\varepsilon}_i| > t_{\alpha/2; n-2}$  allora siamo in presenza di punti anomali che diventano **punti influenti** per il calcolo di  $\hat{\beta}_0$  e  $\hat{\beta}_1$ .

#### Esempi

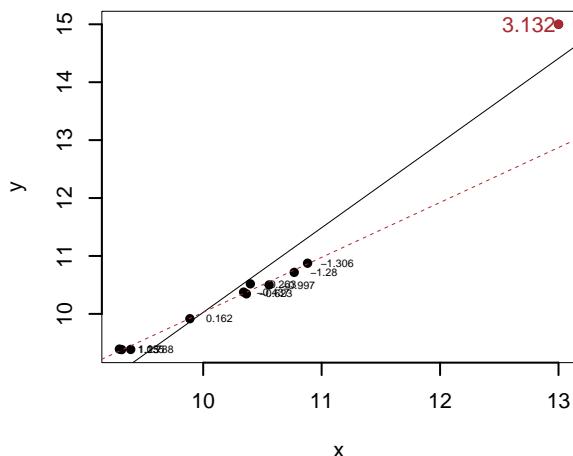
Dato anomale per x ma non per y



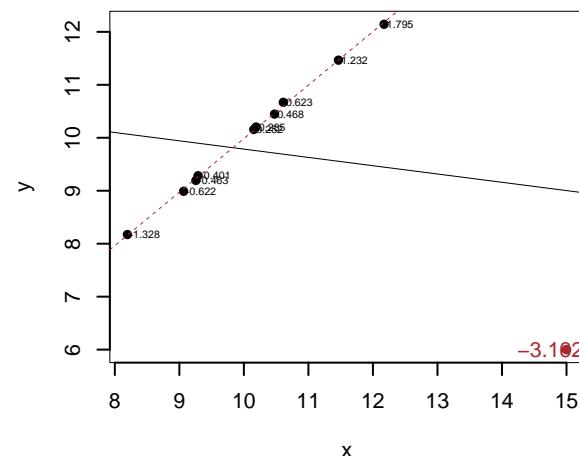
Dato anomale per y ma non per x



Dato anomale per x e per y, in direzione della covarianza

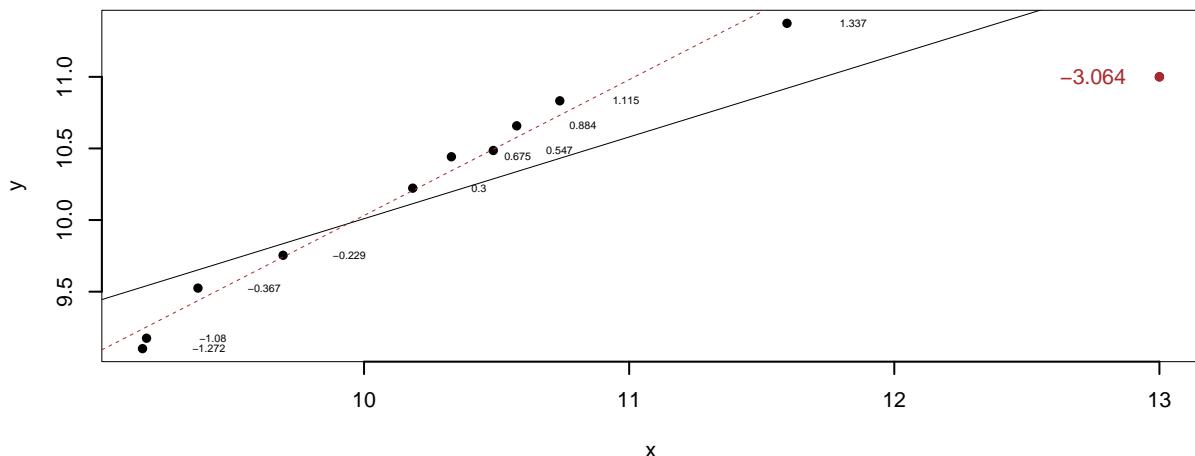


Dato anomale per x e per y, in direzione contraria della covarianza



**Esempio numerico**

$x_i$	9.37	10.18	9.16	11.60	10.33	9.18	10.49	10.74	10.58	9.69	<b>13.00</b>
$y_i$	9.52	10.22	9.10	11.37	10.44	9.18	10.49	10.83	10.66	9.75	<b>11.00</b>
$h_i$	0.17	0.09	0.21	0.20	0.09	0.20	0.09	0.10	0.09	0.13	<b>0.62</b>
$\tilde{\varepsilon}_i$	-0.37	0.30	-1.27	1.34	0.68	-1.08	0.55	1.11	0.88	-0.23	<b>-3.06</b>

**Dato anomale per x ma non per y**

## 18.8 Relazione tra $Y|X$ e $X|Y$

Fin'ora abbiamo considerato il modello

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 + \varepsilon_i$$

Supponiamo di invertire il ruolo della  $x$  con la  $y$

$$x_i = \alpha_0 + \alpha_1 y_i + \delta_i$$

Le stime dei minimi quadrati sono analoghe

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{\text{cov}(x, y)}{\hat{\sigma}_X^2} & \hat{\alpha}_1 &= \frac{\text{cov}(x, y)}{\hat{\sigma}_Y^2} \\ \hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} & \hat{\alpha}_0 &= \bar{x} - \hat{\alpha}_1 \bar{y}\end{aligned}$$

In generale

$$\hat{\beta}_0 \neq \hat{\alpha}_0, \quad \hat{\beta}_1 \neq \hat{\alpha}_1$$

In particolare

$$\hat{\beta}_1 = \hat{\alpha}_1, \text{ se e solo se } \hat{\sigma}_X^2 = \hat{\sigma}_Y^2$$

Mentre

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\alpha}_0, \text{ se e solo se } \hat{\beta}_1 = \hat{\alpha}_1, \text{ e se } \bar{y} = \bar{x}$$

### 18.8.1 Relazione tra gli $\alpha$ i $\beta$ ed $r$

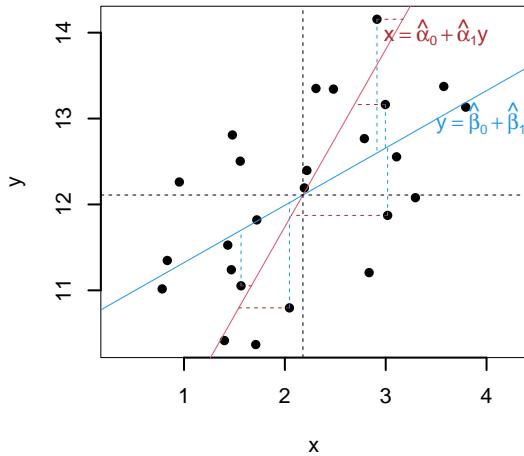
Essendo:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{\text{cov}(x, y)}{\hat{\sigma}_X^2} \\ \hat{\beta}_1 &= \frac{\hat{\sigma}_Y}{\hat{\sigma}_X} \frac{\text{cov}(x, y)}{\hat{\sigma}_X^2} \\ \hat{\beta}_1 &= \frac{\hat{\sigma}_Y}{\hat{\sigma}_X} \frac{\text{cov}(x, y)}{\hat{\sigma}_Y \hat{\sigma}_X} \\ \hat{\beta}_1 &= \frac{\hat{\sigma}_Y}{\hat{\sigma}_X} r\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1 &= \frac{\text{cov}(x, y)}{\hat{\sigma}_Y^2} \\ \hat{\alpha}_1 &= \frac{\hat{\sigma}_X}{\hat{\sigma}_Y} r\end{aligned}$$

**Graficamente**

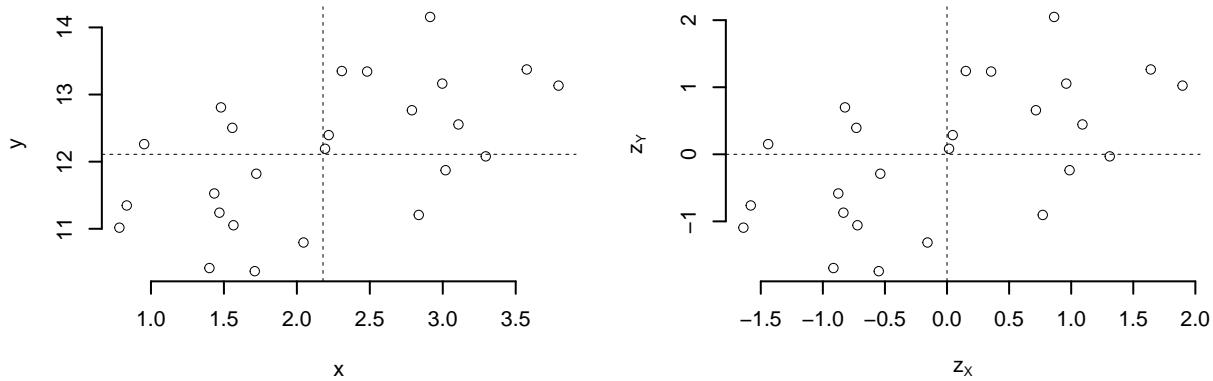


### 18.8.2 Regressione sulle variabili standardizzate

Se standardizziamo sia  $x$  che  $y$ , otteniamo

$$z_{Xi} = \frac{x_i - \bar{x}}{\hat{\sigma}_X} \quad z_{Yi} = \frac{y_i - \bar{y}}{\hat{\sigma}_Y}$$

Abbiamo eliminato l'unità di misura sia da  $x$  che da  $y$  e centrato la nube dei dati



I dati standardizzati hanno media zero e varianza 1

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{Xi} &= 0 & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{Xi}^2 &= 1 \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{Yi} &= 0 & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{Yi}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Dalle proprietà del coefficiente di correlazione

$$r_{Z_X, Z_Y} = r_{X, Y} = r$$

E dunque

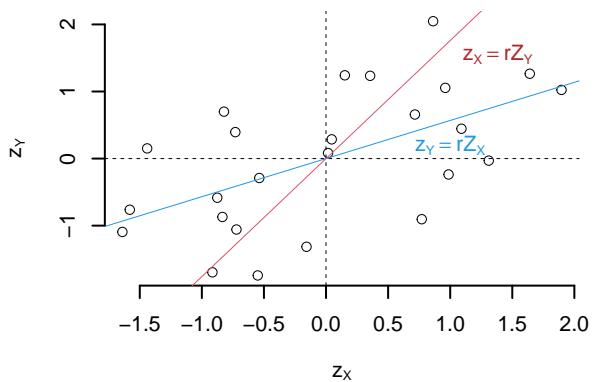
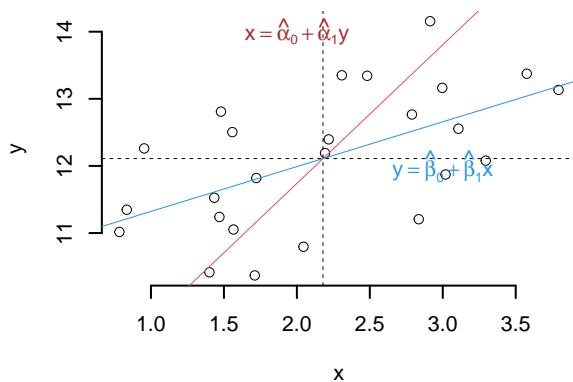
$$\begin{aligned} r &= \frac{\text{cov}(z_X, z_Y)}{\hat{\sigma}_{Z_X} \hat{\sigma}_{Z_Y}} \\ &= \frac{\text{cov}(z_X, z_Y)}{1 \times 1} \\ &= \text{cov}(z_X, z_Y) \end{aligned}$$

Si considerino i due modelli

$$z_{Yi} = \beta_{0Z} + \beta_{1Z} \cdot z_{Xi} + \varepsilon_{Zi}, \quad z_{Xi} = \alpha_{0Z} + \alpha_{1Z} \cdot z_{Yi} + \delta_{Zi}$$

Allora

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{1Z} &= \frac{\text{cov}(z_X, z_Y)}{\hat{\sigma}_{Z_X}^2} & \hat{\alpha}_{1Z} &= \frac{\text{cov}(z_X, z_Y)}{\hat{\sigma}_{Z_Y}^2} \\ &= \frac{r}{1^2} = r & &= \frac{r}{1^2} = r \\ \hat{\beta}_{0Z} &= \bar{z}_Y - \hat{\beta}_{1Z} \bar{z}_X & \hat{\alpha}_{0Z} &= \bar{z}_X - \hat{\alpha}_{1Z} \bar{z}_Y \\ &= 0 + r \cdot 0 = 0 & &= 0 + r \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

**Graficamente**

## 19.1 Test di Significatività pura

I test che abbiamo visto fin'ora prevedono l'ipotesi su un parametro  $\theta$ . Ovvero tutti i test che abbiamo visto fin'ora sono del tipo

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

I test di significatività pura rispondono a domande diverse, come per esempio testare se due variabili, alla luce dei dati, sono o non sono indipendenti o se la distribuzione osservata di una variabile è compatibile con un modello probabilistico. In un test di significatività pura solo l'ipotesi  $H_0$  viene elicitata, mentre l'ipotesi  $H_1$  non ha molto senso. Il test del  $\chi^2$  consente di risolvere diversi test di significatività pura

## 19.2 Associazione tra due variabili

Abbiamo visto nel modello di regressione le statistiche che misurano *l'associazione lineare* tra due variabili quantitative. Abbiamo osservato che l'associazione lineare **non** l'unico tipo di associazione osservabile tra  $x$  ed  $y$ . Il modello di regressione lineare funziona solo se  $x$  e  $y$  sono quantitative. Come misurare l'associazione tra  $x$  e  $y$  se sono entrambe categoriali?

### 19.2.1 Le tavole di contingenza

Sono tabelle che consentono di vedere le *frequenze congiunte* delle osservazioni a coppie

**Esempio 19.2.1.** 100 individui dalla città  $A$ , 100 dalla città  $B$  e 100 dalla città  $C$ . Abbiamo misurato  $X =$  Genere ( $M, F$ ),  $Y =$  abbonamento allo stadio (Sì, No). In tutte e tre le città abbiamo osservato 50  $M$  e 50  $F$ , e abbiamo osservato 50 abbonati e 50 non abbonati.

		Città A		Tot
		Abbonato	Non Abbonato	
$M$	50	0	50	50
	0	50	50	
Tot	50	50	100	

		Città B		Tot
		Abbonato	Non Abbonato	
$M$	35	15	50	50
	15	35	50	
Tot	50	50	100	

		Città C		Tot
		Abbonato	Non Abbonato	
$M$	25	25	50	50
	25	25	50	
Tot	50	50	100	

Nella città  $A$  solo i maschi hanno l'abbonamento allo stadio **perfetta** associazione tra Genere e Abbonamento. Nella città  $B$  molti maschi hanno l'abbonamento allo stadio ma non solo c'è associazione tra Genere e Abbonamento. Nella città  $C$  non c'è distinzione tra genere e passione per il pallone **Non** c'è associazione tra Genere e Abbonamento.

Ma, come vedremo nel prossimo esempio, non è sempre facile individuare dove non c'è associazione.

**Esempio 19.2.2 (Popolazione finita, estrazioni SR (Efficienza)).** 100 individui dalla città  $A$ , 100 dalla città  $B$  e 100 dalla città  $C$ . Abbiamo misurato  $X =$  Genere ( $M, F$ ),  $Y =$  abbonamento allo stadio (Sì, No). In tutte e tre le città abbiamo osservato 60  $M$  e 40  $F$ , e abbiamo osservato 60 abbonati e

40 non abbonati.

Città A			Città B			Città C		
	Abbonato	Non Abbonato		Abbonato	Non Abbonato		Abbonato	Non Abbonato
M	60	0	60	40	20	60	36	24
F	0	40	40	20	20	50	24	16
Tot	60	40	100	60	40	100	60	40

Nella città  $A$  solo i maschi hanno l'abbonamento allo stadio **perfetta** associazione tra Genere e Abbonamento. Nella città  $B$  molti maschi hanno l'abbonamento allo stadio ma non solo, c'è associazione tra Genere e Abbonamento. Nella città  $C$  non c'è distinzione tra genere e passione per il pallone **non** c'è associazione tra Genere e Abbonamento ma non è evidente da vedere.

### 19.2.2 Un passo indietro: il concetto di indipendenza

Se  $X$  e  $Y$  sono due VC **INDIPENDENTI** allora

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Se per esempio

$$S_X = \{0, 1\}, \quad S_Y = \{0, 1\}$$

e

$$P(X = 1) = \pi_X \quad P(Y = 1) = \pi_Y$$

Sotto regime di indipendenza

	$Y = 0$	$Y = 1$	
$X = 0$	$\pi_{11} = P(X = 0 \cap Y = 0) = (1 - \pi_X)(1 - \pi_Y)$	$\pi_{12} = P(X = 0 \cap Y = 1) = (1 - \pi_X)\pi_Y$	$1 - \pi_X$
$X = 1$	$\pi_{21} = P(X = 1 \cap Y = 0) = \pi_X(1 - \pi_Y)$	$\pi_{22} = P(X = 1 \cap Y = 1) = \pi_X\pi_Y$	$\pi_X$
	$1 - \pi_Y$	$\pi_Y$	1

Sia  $X$  la VC che registra testa nel lancio di una moneta perfetta e  $Y$  una VC che registra la faccia numero 6 dal lancio di un dado perfetto

e

$$P(X = 1) = \frac{1}{2} \quad P(Y = 1) = \frac{1}{6}$$

Sotto regime di indipendenza

	$Y = 0$	$Y = 1$	
$X = 0$	0.4167	0.0833	$\frac{1}{2}$
$X = 1$	0.4167	0.0833	$\frac{1}{2}$
	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

L'indipendenza è imposta dal meccanismo di generazione di casualità Ovvero, se io lancio 100 volte il dado e la moneta mi aspetto, in media di osservare 41.7 volte  $X = 0$  e  $Y = 0$ , 41.7 volte  $X = 1$  e  $Y = 0$ , 8.3 volte  $X = 0$  e  $Y = 1$  e 8.3 volte  $X = 1$  e  $Y = 1$ . Se dopo 100 lanci le frequenze osservate sono molto diverse dalle frequenze teoriche in regime di indipendenza, potrei dubitare dell'ipotesi di indipendenza

### 19.2.3 Estensione a più di due modalità

Se abbiamo due VC categoriali  $X$  e  $Y$  con supporto

$$S_X = \{x_1, \dots, x_I\} \quad S_Y = \{y_1, \dots, y_J\}$$

definiamo le **probabilità congiunte**

$$\pi_{ij} = \text{la probabilità che } X = x_i \text{ e } Y = y_j$$

La distribuzione di probabilità doppia è

	$y_1$	$y_2$	...	$y_j$	...	$y_J$	
$x_1$	$\pi_{11}$	$\pi_{12}$	...	$\pi_{1j}$	...	$\pi_{1J}$	$\pi_{1\bullet}$
$x_2$	$\pi_{21}$	$\pi_{22}$	...	$\pi_{2j}$	...	$\pi_{2J}$	$\pi_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	..	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$x_i$	$\pi_{i1}$	$\pi_{i2}$	...	$\pi_{ij}$	...	$\pi_{iJ}$	$\pi_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	..	$\vdots$	$\vdots$
$x_I$	$\pi_{I1}$	$\pi_{I2}$	...	$\pi_{Ij}$	...	$\pi_{IJ}$	$\pi_{I\bullet}$
	$\pi_{\bullet 1}$	$\pi_{\bullet 2}$	...	$\pi_{\bullet j}$	...	$\pi_{\bullet J}$	1

Le **probabilità marginali** sono

$$\pi_{i\bullet} = \pi_{i1} + \dots + \pi_{iJ}, \quad \pi_{\bullet j} = \pi_{1j} + \dots + \pi_{Ij}$$

### 19.2.4 Esempio

Nella città  $A$  ci sono 27 individui occupati con la licenza media, 45 individui occupati con la licenza superiore, 18 individui occupati laureati, 18 individui disoccupati con la licenza media, 30 individui disoccupati con la licenza superiore e 12 laureati

	$M$	$S$	$L$	
<i>Occupato</i>	27	45	18	90
<i>Disoccupato</i>	18	30	12	60
	45	75	30	150

Qual è la probabilità di estrarre un soggetto che abbia un dato titolo di studio e una data condizione occupazionale?

	$M$	$S$	$L$	
<i>Occupato</i>	$\pi_{11} = \frac{27}{150} = 0.18$	$\pi_{12} = \frac{45}{150} = 0.3$	$\pi_{13} = \frac{18}{150} = 0.12$	$\pi_{1\bullet} = \frac{90}{150} = 0.6$
<i>Disoccupato</i>	$\pi_{21} = \frac{18}{150} = 0.12$	$\pi_{22} = \frac{30}{150} = 0.2$	$\pi_{23} = \frac{12}{150} = 0.08$	$\pi_{2\bullet} = \frac{60}{150} = 0.4$
	$\pi_{\bullet 1} = \frac{45}{150} = 0.3$	$\pi_{\bullet 2} = \frac{75}{150} = 0.5$	$\pi_{\bullet 3} = \frac{30}{150} = 0.2$	$\frac{150}{150} = 1.0$

Titolo di studio e occupazione sono **indipendenti**?

Sì, in quanto

$$\pi_{ij} = \pi_{i\bullet} \pi_{\bullet j}, \quad \forall i, j$$

Ad esempio

$$\pi_{11} = 0.18 = 0.6 \times 0.3 = \pi_{1\bullet} \pi_{\bullet 1}$$

Ad esempio

$$\pi_{23} = 0.08 = 0.4 \times 0.2 = \pi_{2\bullet} \pi_{\bullet 3}$$

Nella città  $B$  osserviamo

	$M$	$S$	$L$	
<i>Occupato</i>	0	60	30	90
<i>Disoccupato</i>	45	15	0	60
	45	75	30	150

Qual è la probabilità di estrarre un oggetto che abbia un dato titolo di studio e una data condizione occupazionale?

	$M$	$S$	$L$	
<i>Occupato</i>	$\pi_{11} = \frac{0}{150} = 0$	$\pi_{12} = \frac{60}{150} = 0.4$	$\pi_{13} = \frac{30}{150} = 0.2$	$\pi_{1\bullet} = \frac{90}{150} = 0.6$
<i>Disoccupato</i>	$\pi_{21} = \frac{45}{150} = 0.3$	$\pi_{22} = \frac{15}{150} = 0.1$	$\pi_{23} = \frac{0}{150} = 0$	$\pi_{2\bullet} = \frac{60}{150} = 0.4$
	$\pi_{\bullet 1} = \frac{45}{150} = 0.3$	$\pi_{\bullet 2} = \frac{75}{150} = 0.5$	$\pi_{\bullet 3} = \frac{30}{150} = 0.2$	$\frac{150}{150} = 1.0$

Titolo di studio e occupazione sono **indipendenti**?

No, in quanto

$$\pi_{ij} \neq \pi_{i\bullet} \pi_{\bullet j}$$

Ad esempio

$$\pi_{11} = 0 \neq 0.6 \times 0.3 = \pi_{1\bullet} \pi_{\bullet 1}$$

Ad esempio

$$\pi_{23} = 0 \neq 0.4 \times 0.2 = \pi_{2\bullet} \pi_{\bullet 3}$$

### 19.2.5 Dalla popolazione al campione

Abbiamo usato le due città come se fossero l'intera popolazione. Non sempre possiamo valutare l'intera popolazione. Spesso abbiamo l'osservazione di  $n$  coppie di VC categoriali estratte dalla popolazione di riferimento. Da una popolazione dove  $X$  ed  $Y$  sono indipendenti, ci aspettiamo che  $n$  loro realizzazioni fotografino l'indipendenza che c'è in popolazione.

### 19.2.6 Notazione formale per le tavole di contingenza

Se abbiamo due variabili categoriali  $X$  e  $Y$  con supporto

$$S_X = \{x_1, \dots, x_k\} \quad S_Y = \{y_1, \dots, y_J\}$$

definiamo le **frequenze assolute congiunte**

$n_{ij} =$  il numero di volte che  $X = x_i$  e  $Y = y_j$

La tabella di contingenza si presenta

	$y_1$	$y_2$	...	$y_j$	...	$y_J$	
$x_1$	$n_{11}$	$n_{12}$	...	$n_{1j}$	...	$n_{1J}$	$n_{1\bullet}$
$x_2$	$n_{21}$	$n_{22}$	...	$n_{2j}$	...	$n_{2J}$	$n_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	..	$\vdots$	..	$\vdots$	$\vdots$
$x_i$	$n_{i1}$	$n_{i2}$	...	$n_{ij}$	...	$n_{iJ}$	$n_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	..	$\vdots$	..	$\vdots$	$\vdots$
$x_I$	$n_{I1}$	$n_{I2}$	...	$n_{Ij}$	...	$n_{IJ}$	$n_{I\bullet}$
	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	...	$n_{\bullet j}$	...	$n_{\bullet J}$	$n$

Le **frequenze assolute marginali** sono

$$n_{i\bullet} = n_{i1} + \dots + n_{iJ}$$

$$n_{\bullet j} = n_{1j} + \dots + n_{Ij}$$

Definiamo le **frequenze relative congiunte**

$$\hat{\pi}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$$

	$y_1$	$y_2$	...	$y_j$	...	$y_J$	
$x_1$	$\hat{\pi}_{11} = \frac{n_{11}}{n}$	$\hat{\pi}_{12} = \frac{n_{12}}{n}$	...	$\hat{\pi}_{1j} = \frac{n_{1j}}{n}$	...	$\hat{\pi}_{1J} = \frac{n_{1J}}{n}$	$\hat{\pi}_{1\bullet} = \frac{n_{1\bullet}}{n}$
$x_2$	$\hat{\pi}_{21} = \frac{n_{21}}{n}$	$\hat{\pi}_{22} = \frac{n_{22}}{n}$	...	$\hat{\pi}_{2j} = \frac{n_{2j}}{n}$	...	$\hat{\pi}_{2J} = \frac{n_{2J}}{n}$	$\hat{\pi}_{2\bullet} = \frac{n_{2\bullet}}{n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	..	$\vdots$	..	$\vdots$	$\vdots$
$x_i$	$\hat{\pi}_{i1} = \frac{n_{i1}}{n}$	$\hat{\pi}_{i2} = \frac{n_{i2}}{n}$	...	$\hat{\pi}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$	...	$\hat{\pi}_{iJ} = \frac{n_{iJ}}{n}$	$\hat{\pi}_{i\bullet} = \frac{n_{i\bullet}}{n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	..	$\vdots$	..	$\vdots$	$\vdots$
$x_I$	$\hat{\pi}_{I1} = \frac{n_{I1}}{n}$	$\hat{\pi}_{I2} = \frac{n_{I2}}{n}$	...	$\hat{\pi}_{Ij} = \frac{n_{Ij}}{n}$	...	$\hat{\pi}_{IJ} = \frac{n_{IJ}}{n}$	$\hat{\pi}_{I\bullet} = \frac{n_{I\bullet}}{n}$
	$\hat{\pi}_{\bullet 1} = \frac{n_{\bullet 1}}{n}$	$\hat{\pi}_{\bullet 2} = \frac{n_{\bullet 2}}{n}$	...	$\hat{\pi}_{\bullet j} = \frac{n_{\bullet j}}{n}$	...	$\hat{\pi}_{\bullet J} = \frac{n_{\bullet J}}{n}$	1

Le **frequenze relative marginali** sono

$$\hat{\pi}_{i\bullet} = \hat{\pi}_{i1} + \dots + \hat{\pi}_{iJ}$$

$$\hat{\pi}_{\bullet j} = \hat{\pi}_{1j} + \dots + \hat{\pi}_{Ij}$$

### 19.2.7 Le frequenze sono stime dei $\pi$

$$\hat{\pi}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}, \quad \hat{\pi}_{i\bullet} = \frac{n_{i\bullet}}{n}, \quad \hat{\pi}_{\bullet j} = \frac{n_{\bullet j}}{n}$$

$\hat{\pi}_{ij}$  è stima di  $\pi_{ij}$ ,  $\forall i, j$

$\hat{\pi}_{i\bullet}$  è stima di  $\pi_{i\bullet}$ ,  $\forall i$

$\hat{\pi}_{\bullet j}$  è stima di  $\pi_{\bullet j}$ ,  $\forall j$

Se in popolazione  $x$  ed  $y$  sono indipendenti, allora

$$\pi_{ij} = \pi_{i\bullet} \pi_{\bullet j}$$

E quindi, mi aspetterei

$$\hat{\pi}_{ij} \approx \hat{\pi}_{i\bullet} \hat{\pi}_{\bullet j}$$

Ovvvero

$$\begin{aligned} n\hat{\pi}_{ij} &\approx n\hat{\pi}_{i\bullet}\hat{\pi}_{\bullet j} \\ n_{ij} &\approx n \frac{n_{i\bullet}}{n} \frac{n_{\bullet j}}{n} \\ &\approx \frac{n_{i\bullet}n_{\bullet j}}{n} \\ &\approx n_{ij}^* \end{aligned}$$

$n_{ij}^*$  è la frequenza assoluta attesa in caso di indipendenza. La domanda è: quanto si discostano le frequenze assolute osservate  $n_{ij}$  dalle frequenze attese  $n_{ij}^*$ ?

### 19.2.8 Esempio (continua)

Ripartiamo dall'esempio di partenza, immaginando che nelle tre città quei 100 individui siano un campione

Città A			Città B			Città C					
	Abbonato	Non Abbonato		Abbonato	Non Abbonato		Abbonato	Non Abbonato			
M	60	0	60	M	40	20	60	M	36	24	60
F	0	40	40	F	20	20	50	F	24	16	40
Tot	60	40	100	Tot	60	40	100	Tot	60	40	100

Costruiamo le  $n_{ij}^*$

Freq. th			
	Abbonato	Non Abbonato	Tot
M	$\frac{60 \cdot 60}{100} = 36$	$\frac{60 \cdot 40}{100} = 24$	60
F	$\frac{40 \cdot 60}{100} = 24$	$\frac{40 \cdot 40}{100} = 16$	40
Tot	60	40	100

Nella città  $C$  le frequenze osservate coincidono con quelle attese, **non** c'è associazione tra genere e abbonamento allo stadio. Quanto si discostano le città  $A$  e  $B$  dalla situazione di indipendenza?

### 19.3 L'indice $\chi^2$

Il  $\chi^2_{\text{obs}}$ , che abbiamo già incontrato, è utilizzato qui per nominare un misura di distanza

$$\chi^2_{\text{obs}} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{(n_{ij} - n_{ij}^*)^2}{n_{ij}^*}$$

Città A			Città B			Città C					
	Abbonato	Non Abbonato		Abbonato	Non Abbonato		Abbonato	Non Abbonato			
M	$\frac{(60-36)^2}{36} = 36$	$\frac{(0-24)^2}{24} = 24$	40	M	$\frac{(40-36)^2}{36} = 0,4444$	$\frac{(20-24)^2}{24} = 0,6667$	1.1111	M	$\frac{(36-36)^2}{36} = 0$	$\frac{(24-24)^2}{24} = 0$	0
F	$\frac{(0-24)^2}{24} = 24$	$\frac{(40-16)^2}{16} = 36$	60	F	$\frac{(20-24)^2}{24} = 0,6667$	$\frac{(16-16)^2}{16} = 0$	1.6667	F	$\frac{(24-24)^2}{24} = 0$	$\frac{(16-16)^2}{16} = 0$	0
Tot	40	60	100	Tot	1.1111	1.6667	1.6667	$\chi^2_{\text{obs},A} = 100$	$\chi^2_{\text{obs},B} = 2.7778$	$\chi^2_{\text{obs},C} = 0$	

Ovviamente per la città  $C$ :

		Città C		Tot
		Abbonato	Non Abbonato	
$M$	$\frac{(36-36)^2}{36} = 0$	$\frac{(24-24)^2}{24} = 0$	0	
	$\frac{(24-24)^2}{24} = 0$	$\frac{(16-16)^2}{16} = 0$	0	
Tot	0	0	$\chi_{\text{obs},C}^2 = 0$	

Nella città  $A$  c'è una evidente associazione tra genere e abbonamento. Nella città  $C$  c'è evidente indipendenza tra genere e abbonamento. Nella città  $B$  lo scostamento dalla situazione di indipendenza, è dovuto al caso oppure effettivamente nella città  $B$  c'è associazione?

## 19.4 Test per l'ipotesi di indipendenza

Chiedersi se  $x$  e  $y$  sono indipendenti significa fare un test in cui è facile scrivere  $H_0$  ma è **superfluo scrivere  $H_1$** . Se  $H_0$  prescrive l'indipendenza, allora

$$H_0 : \pi_{ij} = \pi_{i\bullet} \pi_{\bullet j}, \forall i, j$$

$H_1$  non la scriviamo perché non può altro che essere la negazione di  $H_0$ . Questi sono *Test di significatività pura*.

### 19.4.1 La statistica test $\chi^2$

Se  $H_0$  prescrive l'indipendenza, allora

$$H_0 : \pi_{ij} = \pi_{i\bullet} \pi_{\bullet j}, \forall i, j$$

Si dimostra che, sotto  $H_0$ , prima di osservare i dati, l'indicatore  $\chi^2$  vista come VC è:

$$\chi_{VC}^2 \sim \chi_{gdl}^2$$

I gradi di libertà sono

$$gdl = (I - 1) \times (J - 1)$$

Si fissa  $\alpha$  e si cerca

$$\chi_{gdl; \alpha}^2 : P(\chi_{gdl}^2 > \chi_{gdl; \alpha}^2) = \alpha$$

Esempio  $\alpha = 0.05$ , nell'esempio genere/abbonamento i  $gdl$  sono

$$gdl = (2 - 1) \times (2 - 1) = 1$$

$$\chi_{1;0.05}^2 = 3.8415$$

$$\chi_{\text{obs};A}^2 = 100 > 3.8415; \quad \chi_{\text{obs};B}^2 = 2.7778 < 3.8415; \quad \chi_{\text{obs};C}^2 = 0 < 3.8415$$

Rifiuto  $H_0$

non Rifiuto  $H_0$

non Rifiuto  $H_0$

### 19.4.2 Esempio

In una città sono stati estratti 20 individui occupati con la licenza media, 50 individui occupati con la licenza superiore, 20 individui occupati laureati, 20 individui disoccupati con la licenza media, 25 individui disoccupati con la licenza superiore e 10 laureati

	M	S	L	
Occupato	20	50	20	90
Disoccupato	25	25	10	60
	45	75	30	150

Vogliamo testare

$$H_0 : \pi_{ij} = \pi_{i\bullet} \pi_{\bullet j}$$

Per vari livelli di  $\alpha$  Costruiamo i valori attesi sotto  $H_0$

$$n_{ij}^* = \frac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{n}$$

e quindi

Osservati	M	S	L		Teorici	M	S	L	
Occupato	20	50	20	90	Occupato	27	45	18	90
Disoccupato	25	25	10	60	Disoccupato	18	30	12	60
	45	75	30	150		45	75	30	150

Costruiamo le distanze

$$\frac{(n_{ij} - n_{ij}^*)^2}{n_{ij}^*}$$

e quindi

	M	S	L	
Occupato	1.8148	0.5556	0.2222	2.5926
Disoccupato	2.7222	0.8333	0.3333	3.8889
	4.537	1.3889	0.5556	6.4815

$$gdl = (2 - 1) \times (3 - 1) = 2$$

Dalle tavole

$$\chi^2_{2;0.05} = 5.9915, \quad \chi^2_{2;0.01} = 9.2103$$

E osserviamo che  $\chi^2_{\text{obs}} = 6.4815 > \chi^2_{2;0.05} = 5.9915$  e quindi rifiuto  $H_0$  al 5% e che  $\chi^2_{\text{obs}} = 6.4815 < \chi^2_{2;0.01} = 9.2103$  e quindi non rifiuto  $H_0$  al 1%.

### 19.4.3 I gradi di libertà

**Esempio 19.4.1** (Tabella  $2 \times 2$ ). Supponiamo di voler riempire la tabella di contingenza coi totali fissati

	Abbonato	Non Abbonato	
M	$n_{11}$	$n_{12}$	60
F	$n_{21}$	$n_{22}$	40
	60	40	100

abbiamo  $gdl = (2 - 1) \times (2 - 1) = 1$ . Ho molte scelte per il valore  $n_{11}$ , per esempio

$$n_{11} = 35$$

ho usato il mio unico grado di libertà, tutti gli altri  $n_{ij}$  sono vincolati

	Abbonato	Non Abbonato	
M	35	25	60
F	25	15	40
	60	40	100

**Esempio 19.4.2** (Tabella  $2 \times 3$ ). Se la tabella è

	M	S	L	
Occupato	$n_{11}$	$n_{12}$	$n_{13}$	90
Disoccupato	$n_{21}$	$n_{22}$	$n_{23}$	60
	45	75	30	150

abbiamo  $gdl = (2 - 1) \times (3 - 1) = 2$

Ho molte scelte per il valore  $n_{11}$ , per esempio

$$n_{11} = 30$$

ho usato il primo grado di libertà,  $n_{21} = 15$  è obbligato

	M	S	L	
Occupato	30	$n_{12}$	$n_{13}$	90
Disoccupato	15	$n_{22}$	$n_{23}$	60
	45	75	30	150

Fisso arbitrariamente  $n_{12}$ , per esempio

$$n_{12} = 40$$

e ho usato il secondo grado di libertà, tutti gli altri valori sono vincolati

	M	S	L	
Occupato	30	40	20	90
Disoccupato	15	35	10	60
	45	75	30	150

## 19.5 Misure di Conformità

Spesso, abbiamo assunto che  $X \sim \mathcal{L}(\theta)$ , senza questionare la scelta di  $\mathcal{L}$ . Ad esempio quando assumiamo  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ , sappiamo fare inferenza su  $\lambda$ , ma tutti i risultati sono validi se l'assunzione di partenza è valida. Oppure quando assumiamo  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , sappiamo fare inferenza su  $\mu, \sigma^2$ , ma tutti i risultati sono validi se l'assunzione di partenza è valida.

IL  $\chi^2$  misura la *conformità* dei dati al modello scelto. Supponiamo, le  $X_i, i = 1, \dots, n$  VC categoriale con supporto

$$S_X = \{x_1, \dots, x_K\}$$

La  $\mathcal{L}(\pi_1, \dots, \pi_K)$  tale che

$$P(X_i = x_j) = \pi_j, \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, K$$

Se estraggo un campione da IID da  $\mathcal{L}(\pi_1, \dots, \pi_K)$ , ovvero estraggo  $n$  volte  $X$  IID ottengo:

modalità	freq. assoluta	freq. relativa
$x_1$	$n_2$	$\hat{\pi}_1 = n_1/n$
$x_2$	$n_2$	$\hat{\pi}_2 = n_2/n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_K$	$n_K$	$\hat{\pi}_K = n_K/n$

Le  $\hat{\pi}_j$  sono stime delle  $\pi_j$ . Se  $\mathcal{L}(\pi_1, \dots, \pi_K)$  è vera mi aspetto

$$\hat{\pi}_j \approx \pi_j$$

Ovvero

$$\begin{aligned} n \cdot \hat{\pi}_j &\approx n \cdot \pi_j \\ n_j &\approx n_j^* \end{aligned}$$

Dove le  $n_j^*$  sono le frequenze attese

**Esempio 19.5.1.** Lanciamo un dado 100 volte e otteniamo

1	2	3	4	5	6	tot.	
$n_j$	16	15	18	20	14	17	100
$\hat{\pi}_j$	0.16	0.15	0.18	0.20	0.14	0.17	1.00

Se  $X$  è un dado perfetto, allora

$$P(X_i = j) = \frac{1}{6}, \quad j = 1, \dots, 6$$

Da un dado perfetto mi aspetterei, in media

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_j &\approx \frac{1}{6} & n \cdot \hat{\pi}_j &\approx n \cdot \frac{1}{6} \\ &= 0.1667 & n_j &\approx 100 \frac{1}{6} \\ & & &\approx 16.67\end{aligned}$$

E quindi

	1	2	3	4	5	6	tot.
$n_j$	16	15	18	20	14	17	100
$\hat{\pi}_j$	0.16	0.15	0.18	0.20	0.14	0.17	1.00
$\hat{\pi}_j^*$	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	1.0000
$n_j^*$	16.667	16.667	16.667	16.667	16.667	16.667	100

**Esempio 19.5.2.** Faccio lanciare il dado a un'altra persona e osservo su 100 lanci

	1	2	3	4	5	6	tot.
$n_j$	1	2	2	5	40	50	100
$\hat{\pi}_j$	0.01	0.02	0.02	0.05	0.40	0.50	1.00
$\hat{\pi}_j^*$	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	1.0000
$n_j^*$	16.667	16.667	16.667	16.667	16.667	16.667	100

Che è molto diversa da quella di prima

	1	2	3	4	5	6	tot.
$n_j$	16	15	18	20	14	17	100
$\hat{\pi}_j$	0.16	0.15	0.18	0.20	0.14	0.17	1.00
$\hat{\pi}_j^*$	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	1.0000
$n_j^*$	16.667	16.667	16.667	16.667	16.667	16.667	100

## 19.6 Il $\chi^2$ come misura di conformità

Misuriamo la distanza tra le frequenze attese con quelle osservate con la misura del chi-quadro

$$\chi^2_{\text{obs}} = \sum_{j=1}^K \frac{(n_{ij} - n_{ij}^*)^2}{n_{ij}^*}$$

Nel primo caso

	1	2	3	4	5	6	tot.
$n_j$	16	15	18	20	14	17	100
$n_j^*$	16.667	16.667	16.667	16.667	16.667	16.667	100
$\frac{(n_j - n_j^*)^2}{n_j^*}$	0.027	0.167	0.107	0.667	0.427	0.007	1.402

$$\chi_{\text{obs}}^2 = 1.402$$

Nel secondo caso

	1	2	3	4	5	6	tot.
$n_j$	1	2	2	5	40	50	100
$n_j^*$	16.667	16.667	16.667	16.667	16.667	16.667	100
$\frac{(n_j - n_j^*)^2}{n_j^*}$	14.727	12.907	12.907	8.167	32.667	66.667	148.042

$$\chi_{\text{obs}}^2 = 148.042$$

Ci chiediamo se il modello che stiamo usando sia supportato dai dati

$$H_0 : X \sim \mathcal{L}$$

Se  $X$  è discreta

$$H_0 : \pi_j = \pi_{j0}, \forall j$$

Sotto  $H_0$ , prima di osservare i dati, l'indice di conformità  $\chi_{VC}^2$ , visto come VC è distribuito come

$$\chi_{VC}^2 \sim \chi_{K-1}^2$$

Osservo i dati e calcolo

$$\chi_{\text{obs}}^2 = \sum_{j=1}^K \frac{(n_{ij} - n_{ij}^*)^2}{n_{ij}^*}$$

Scelgo  $\alpha$ , trovo  $\chi_{K-1;\alpha}^2$  sulle tavole del chi-quadro e lo confronto con  $\chi_{\text{obs}}^2$

- se  $\chi_{\text{obs}}^2 > \chi_{K-1;\alpha}^2$  **rifiuto**  $H_0$  al lds  $\alpha$
- se  $\chi_{\text{obs}}^2 < \chi_{K-1;\alpha}^2$  **non rifiuto**  $H_0$  al lds  $\alpha$

### 19.6.1 Esempio: Scostamento da una uniforme

Lanciamo un dado 60 volte

	1	2	3	4	5	6	tot.
$n_j$	5	14	6	17	13	5	60
$n_j^*$	10	10	10	10	10	10	60
$\frac{(n_j - n_j^*)^2}{n_j^*}$	2.5	1.6	1.6	4.9	0.9	2.5	14.0

$$H_0 : \pi_j = \frac{1}{6}, j = 1, \dots, 6$$

$$\chi^2_{\text{obs}} = 14$$

Se  $\alpha = 0.05$ ,  $\chi^2_{6-1;0.05} = 11.0705$ , allora  $\chi^2_{\text{obs}} = 14 > 11.0705 = \chi^2_{6-1;0.05}$  **rifiuto**  $H_0$  al 5% Se  $\alpha = 0.01$ ,  $\chi^2_{6-1;0.01} = 15.0863$ , allora  $\chi^2_{\text{obs}} = 14 < 15.0863 = \chi^2_{6-1;0.01}$  **non rifiuto**  $H_0$  al 1%

### 19.6.2 Esempio: Scostamento da una popolazione

L'hotel  $A$  ha a servizio 50 addetti: 15 addetti alle pulizie, 9 receptionist, 24 personale di sala e 2 cuochi. L'hotel fa parte di una catena alberghiera. Al controllo di gestione del personale il gruppo registra che nei loro hotel il 30% sono addetti alle pulizie, il 30% sono receptionist, il 30% personale di sala e il 10% cuochi. L'hotel  $A$  ha una gestione del personale conforme a quella del gruppo, al 1ds del 5%?

$$H_0 : \pi_{jA} = \pi_{jG}$$

Costruiamo le tabelle

	A	R	S	C	tot.
$n_j$	15	9	24	2	50
$\pi_j^*$	0.3	0.3	0.3	0.1	1.0
$n_j^* = n\pi_j^*$	15	15	15	5	50
$\frac{(n_j - n_j^*)^2}{n_j^*}$	0.0	2.4	5.4	1.8	9.6

Se  $\alpha = 0.05$ ,  $\chi^2_{4-1;0.05} = 7.8147$ , allora  $\chi^2_{\text{obs}} = 9.6 > 7.8147 = \chi^2_{4-1;0.05}$  **rifiuto**  $H_0$  al 5%

### 19.6.3 Esempio: scostamento da una Poisson

Si sono registrati i clienti in coda presso la cassa di un negozio in 200 occasioni scelte a caso in vari momenti del giorno per un mese e si sono ottenuti i risultati riportati in tabella.

Clienti in coda	0	1	2	>2
volte	70	85	30	15

Si presume che i clienti in coda presso la cassa del negozio sia una Poisson(1). Verificare, al livello di significatività del 5%, se i dati osservati sono coerenti con l'ipotesi.

$$H_0 : X \sim \text{Pois}(1)$$

Sotto  $H_0$

$$\pi_j^* = P(X_i = x_j) = \frac{\lambda}{x_j!} e^{-\lambda},$$

$$\begin{aligned}
 \pi_1^* &= P(X_i = 0) &= \frac{1}{0!} e^{-1} = 0.3679 \\
 \pi_2^* &= P(X_i = 1) &= \frac{1}{1!} e^{-1} = 0.3679 \\
 \pi_3^* &= P(X_i = 2) &= \frac{1}{2!} e^{-1} = 0.1839 \\
 \pi_4^* &= P(X_i > 2) &= 1 - (\pi_1^* + \pi_2^* + \pi_3^*) = 0.0803
 \end{aligned}$$

Le frequenze attese

$$n_j^* = n\pi_j^*$$

Clienti in coda	0	1	2	>2	Tot
volte	70	85	30	15	200
$\pi_j^*$	0.3679	0.3679	0.1839	0.0803	1.0000
$n_j^* = n\pi_j^*$	73.58	73.58	36.79	16.06	200.00
$\frac{(n_j - n_j^*)^2}{n_j^*}$	0.1738	1.7738	1.2525	0.0700	3.2701

$$\alpha = 0.05, \text{ quindi } \chi^2_{4-1;0.05} = 7.8147$$

allora  $\chi^2_{\text{obs}} = 3.2701 < 7.8147 = \chi^2_{4-1;0.05}$  **non rifiuto**  $H_0$  al 5%.

---

# Parte IV

# Appendice

---



# Glossario della notazione

A

## A.1 Statistica descrittiva

Simbolo	Significato
$x_1, \dots, x_n$	Dati nell'ordine di osservazione
$x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$	Dati ordinati, dal più piccolo al più grande
$n$	Aampiezza del collettivo
$\bar{x}$	Media aritmetica dei dati
$x_p$	$p \times 100\%$ percentile
$\sigma, \sigma^2$	Deviazione standard e varianza dei dati
$S_X = \{x_1, \dots, x_K\}$	Insieme delle modalità di $X$
$K$	Numero di modalità della $X$
$f_j$	Frequenza relativa della modalità/intervallo $j$
$n_j$	Frequenza assoluta della modalità/intervallo $j$
$F_j$	Frequenza cumulata relativa
$h_j$	Densità di frequenza relativa
$[x_j, x_{j+1})$	Intervallo di classe (per variabili continue)

## A.2 Calcolo delle probabilità

Simbolo	Significato
$A, B, \dots$	Eventi
$\Omega$	Evento certo
$\emptyset$	Evento impossibile
$P(A)$	Probabilità dell'evento $A$
$X, Y, W, \dots$	Variabili casuali (discrete o continue)
$x, y, w, \dots$	Valori possibili delle variabili casuali
$P(X = x)$	Probabilità che la v.c. $X$ assuma valore $x$
$f(x)$	Probabilità/Densità di probabilità della VC $X$
$F(x)$	Funzione di ripartizione della VC $X$
$E(X)$	Valore atteso della della VC $X$
$V(X)$	Varianza della della VC $X$
$\mu$	Parametro della media $E(X)$ di $X$ , in particolare se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
$\sigma^2, \sigma$	Parametri di varianza e deviazione standard, in particolare se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
$\pi, \lambda$	Parametri di modelli (es. $\pi$ per Bernoulli, $\lambda$ per Poisson)

### A.3 Inferenza statistica

Simbolo	Significato
$\theta$	Parametro da stimare
$\Theta$	Spazio dei parametri
$X \sim \mathcal{L}(\theta), \theta \in \Theta$	Modello probabilistico
<i>IID</i>	Indipendenti ed Identicamente Distribuite
$\mathcal{S}$	Spazio dei campioni
$\hat{\theta}$	Stimatore di un parametro $\theta$
$\hat{\mu}$	Media campionaria come v.c. (media di $X_1, \dots, X_n$ )
$\hat{\sigma}^2$	Varianza campionaria come v.c.
$\hat{\pi}$	Proporzione campionaria
$MSE(\hat{\theta})$	Mean Squared Error, errore quadratico medio di $\hat{\theta}$ .
$SE(\hat{\theta})$	Standard Error, errore standard di $\hat{\theta}$
$H_0, H_1$	Ipotesi nulla e alternativa
$T$	Statistica test
$\alpha$	Livello di significatività prefissato
$IdC$	Intervallo di confidenza
$p_{\text{value}}$	Probabilità, sotto $H_0$ , di osservare dati ancora più a favore di $H_1$

### A.4 Simboli Matematici

Simbolo	Significato
$\mathbb{N}$	Numeri naturali $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	Numeri interi $\{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$
$\mathbb{Z}^+$	Numeri interi positivi $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{R}$	Numeri reali $-\infty < x < +\infty$
$\mathbb{R}^+$	Numeri reali positivi $0 \leq x < +\infty$
$\mathbb{R}^2$	Piano cartesiano: insieme delle coppie ordinate di numeri reali $(x_1, x_2)$ , $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^n$	Insieme delle $n$ -uple ordinate di numeri reali $(x_1, \dots, x_n)$ , $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$
$\binom{n}{k}$	Coefficiente binomiale $n$ su $k$
$\text{sign}(x)$	segno di $x$ , $+1$ se $x > 0$ e $-1$ se $x < 0$ e $0$ se $x = 0$
$\lfloor x \rfloor$	è la parte intera di $x$ , es $\lfloor 3.7 \rfloor = 3$
$\lceil x \rceil$	è la parte intera superiore di $x$ , es $\lceil 3.2 \rceil = 4$

## B.1 Statistica Descrittiva

Un Variabile Statistica può essere:

- **Qualitativa**, la variabile è espressa attraverso etichette qualitative
  - *Qualitative sconnesse*: le caratteristiche che la VS può assumere hanno un ordinamento soggettivo;
    - \* genere,
    - \* stato civile,
    - \* settore di occupazione,
    - \* generi musicali.
  - *Qualitative ordinate*: le caratteristiche che la VS può assumere hanno un ordinamento oggettivo
    - \* titolo di studio,
    - \* preferenze,
    - \* giudizi.
- **Quantitativa**, la variabile è espressa attraverso una scala numerica.
  - *Quantitative Discrete*: le caratteristiche che la VS può assumere sono in numero finito al più numerabile → corrispondenza con i numeri interi;
    - \* numero di incidenti,
    - \* voto di laurea.
  - *Quantitative Continue*: le caratteristiche che la VS può assumere sono in numero infinito non numerabile.
    - \* misure di lunghezza, capienza e peso,
    - \* temperature,
    - \* reddito.

---

**Definizione** (Frequenze Relative) Si definiscono le  $f_j = n_j/n$  le **frequenze relative**: la proporzione di individui che presentano la modalità  $j$ .

---

**Definizione** (Frequenze Percentuali) Si definiscono le  $f_{\%j} = f_j \times 100$  le **frequenze percentuali**: la percentuale di individui che presentano la modalità  $j$ .

---

**Proposizione** Le proprietà della frequenze assolute( $n_j$ ) sono:

- $0 \leq n_j \leq n, \forall j = 1, \dots, K$ ,
  - $\sum_{j=1}^K n_j = n$ .
- 

**Proposizione** Le proprietà della frequenze relative ( $f_j$ ) sono:

- $0 \leq f_j \leq 1, \forall j = 1, \dots, K,$
- $\sum_{j=1}^K f_j = 1.$

**Proposizione** Le proprietà della frequenze percentuali ( $f_{\%,j}$ ) sono:

- $0 \leq f_{\%,j} \leq 100, \forall j = 1, \dots, K,$
- $\sum_{j=1}^K f_{\%,j} = 100.$

**Definizione** (Distribuzione di Frequenza) Una **distribuzione di frequenza** è una tabella a cui vengono associate le modalità e le frequenze

**Definizione** (Frequenze Cumulate) Si definisce frequenza cumulata  $F_j$  la somma di tutte le  $f$  fino a  $j$ ,

$$F_j = f_1 + f_2 + \dots + f_j$$

**Definizione** (Densità di frequenza) Si definisce la *densità di frequenza* della classe  $j$  il rapporto tra la frequenza e l'ampiezza della classe.

$$h_j = \text{Const.} \times \frac{f_j}{b_j}$$

dove  $\text{Const.}$  è una costante numerica e  $b_j = x_{j+1} - x_j$ .

### In sintesi

Estremo inf	Estremo sup	freq. ass.	freq. relativa	freq. cum.	ampiezza	densità
$[x_1,$	$x_2)$	$n_1$	$f_1 = \frac{n_1}{n}$	$F_1 = f_1$	$b_1 = x_2 - x_1$	$h_1 = 100 \times \frac{f_1}{b_1}$
$[x_2,$	$x_3)$	$n_2$	$f_2 = \frac{n_2}{n}$	$F_2 = F_1 + f_2$	$b_2 = x_3 - x_2$	$h_2 = 100 \times \frac{f_2}{b_2}$
...	...	...	...	...	...	...
$[x_j,$	$x_{j+1})$	$n_j$	$f_j = \frac{n_j}{n}$	$F_j = F_{j-1} + f_j$	$b_j = x_{j+1} - x_j$	$h_j = 100 \times \frac{f_j}{b_j}$
...	...	...	...	...	...	...
$[x_K,$	$x_{K+1})$	$n_K$	$f_K = \frac{n_K}{n}$	$F_K = F_{K-1} + f_K$	$b_K = x_{K+1} - x_K$	$f_K = 100 \times \frac{f_K}{b_K}$

**Definizione** (Media Aritmetica) Consideriamo la serie dei dati  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ , si definisce la media aritmetica:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

**Definizione** (Media Aritmetica per Dati Raccolti in Classi)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^K x_j n_j$$

---

**Proposizione** (della media aritmetica) Le principale proprietà della media aritmetica sono:

0. Internalità:  $x_{\min} = x_{(1)} \leq \bar{x} \leq x_{(n)} = x_{\max}$

1. Invarianza della somma:

$$n\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i$$

2. Somma degli scarti dalla media nulla:  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$

3. Minimizza la somma degli scarti al quadrato:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 < \sum_{i=1}^n (x_i - d)^2 \quad \forall d \neq \bar{x}$$

4. Invarianza per trasformazioni lineari: se  $y_i = a + bx_i$  allora  $\bar{y} = a + b\bar{x}$

5. Associatività. Sia una popolazione,  $\mathcal{P}$ , formata da  $K$  gruppi con medie e numerosità:  $(\bar{x}_1; n_1), (\bar{x}_2; n_2), \dots, (\bar{x}_K; n_K)$ . Allora, la media totale  $\bar{x}_T$  di  $\mathcal{P}$  è data da

$$\bar{x}_T = \frac{\text{Tot}\{\mathcal{P}_1\} + \dots + \text{Tot}\{\mathcal{P}_K\}}{n_1 + \dots + n_K} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + \dots + n_K \bar{x}_K}{n_1 + \dots + n_K}$$


---

**Definizione** (Varianza) Si definisce la varianza la quantità:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$


---

**Proposizione** (Formula Calcolatoria della Varianza)

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$$


---

**Proposizione** (Varianza per Dati in Distribuzione di Frequenza)

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k (x_j - \bar{x})^2 n_j$$


---

**Proposizione** (Formula Calcolatoria per la Varianza per Dati in Distribuzione di Frequenza)

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k x_j^2 n_j - \bar{x}^2$$

---

**Proposizione** (della varianza  $\sigma^2$ ) Le principale proprietà della varianza sono:

1.  $\sigma^2 \geq 0$ .
  2.  $\sigma^2 = 0$ , se e solo se  $X$  è costante.
  3. Se  $y_i = a + bx_i$  allora  $\sigma_Y^2 = b^2\sigma_X^2$ .
- 

**Proposizione** (della deviazione standard  $\sigma$ ) Le principale proprietà della deviazione standard sono:

1.  $\sigma \geq 0$ .
  2.  $\sigma = 0$ , se e solo se  $X$  è costante.
  3. Se  $y_i = a + bx_i$  allora  $\sigma_Y = |b|\sigma_X$
- 

**Definizione** (Mediana) Si definisce la **mediana** calcolata su  $n$  ( $x_1, \dots, x_n$ ) dati:

1. se  $n$  è dispari

$$x_{0.5} = x_{(\frac{n+1}{2})}$$

2. se  $n$  è pari

$$x_{0.5} = \frac{1}{2} (x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)})$$

dove  $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$  indica la serie dei dati riordinati.

Se i dati sono raccolti in classi

$$x_{0.5} = x_{\inf;m} + \frac{0.5 - F_{m-1}}{f_m} \cdot (x_{\sup;m} - x_{\inf;m}),$$

**Proposizione** (della Mediana) La mediana di una distribuzione,  $x_{0.5}$ , è quel valore della per  $X$  il quale si ha  $F(x_{0.5}) = 0.5$ . Le proprietà della mediana ( $x_{0.5}$ ) sono:

1.  $x_{\min} \leq x_{0.5} \leq x_{\max}$ ,
  2.  $\sum_{j=1}^n |x_j - x_{0.5}|$  è un minimo.
  3. Relazione Media-Mediana:
    - Distribuzione simmetrica  $\rightarrow x_{0.5} = \bar{x}$
    - Distribuzione con coda lunga a destra  $\rightarrow x_{0.5} < \bar{x}$
    - Distribuzione con coda lunga a sinistra  $\rightarrow x_{0.5} > \bar{x}$
- 

Il  $p$ -esimo  $0 \leq p \leq 1$  percentile di una serie di dati  $(x_1, \dots, x_n)$  è

$$x_p = x_{(\lceil p \times n \rceil)}$$

dove  $\lceil x \rceil$  è l'operatore che estrae la parte intera di un numero decimale e la porta all'intero successivo più vicino, ad esempio  $\lceil 3 \rceil = 3$ , mentre  $\lceil 3.001 \rceil = \lceil 3.21 \rceil = \lceil 3.94 \rceil = 4$ .

Se i dati sono raccolti in classi:

$$x_p = x_{\inf;j_p} + \frac{p - F_{j_p-1}}{f_{j_p}} \cdot (x_{\sup;j_p} - x_{\inf;j_p})$$


---

Si definisce la **moda**,  $x_{Mo}$  la modalità cui compete frequenza maggiore.

Se i dati sono raccolti in classi, non c'è un valore modale ma una classe modale ed è la **classe cui compete densità maggiore**.

---

Se la VS  $X$  ha una sola classe modale, allora valgono le seguenti relazioni:

- Se la distribuzione presenta un'asimmetria negativa (coda lunga a sx) allora

$$\bar{x} \leq x_{0.5} \leq x_{mo}$$

- Se la distribuzione è simmetrica allora

$$x_{mo} \approx x_{0.5} \approx \bar{x}$$

- Se la distribuzione presenta un'asimmetria positiva (coda lunga a dx) allora

$$x_{mo} \leq x_{0.5} \leq \bar{x}$$


---

## B.2 Probabilità

**Definizione** (Unione tra Eventi) Siano  $A$  e  $B$  due eventi, l'espressione

$$A \cup B$$

è vera se **almeno uno dei due** è vero.

---

**Definizione** (Intersezione tra Eventi) Siano  $A$  e  $B$  due eventi, l'espressione

$$A \cap B \quad \text{è vera se è vero } A \text{ e è vero } B.$$


---

**Definizione** (Evento Complementare) Sia  $A$  un evento, si definisce  $\bar{A}$  l'evento complementare di  $A$

---

**Definizione** (Evento Certo) Sia  $A$  un evento, si definisce l'evento certo  $\Omega$  l'evento:

$$\Omega = A \cup \bar{A}$$

---

**Definizione** (Evento Impossibile) Sia  $A$  un evento, si definisce l'evento certo  $\emptyset$  l'evento:

$$\emptyset = A \cap \bar{A}$$


---

**Definizione** (Approccio Classico (Laplace)) la probabilità è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, posto che gli eventi siano tutti equiprobabili.

$$P(A) = \frac{\#(\text{casi favorevoli ad } A)}{\#(\text{casi totali})}$$


---

**Definizione** (Approccio Frequentista) **Postulato empirico del caso.**

In un gruppo di prove ripetute più volte *nelle stesse condizioni*, ciascuno degli eventi possibili si presenta con una frequenza relativa che tende alla probabilità all'aumentare del numero di prove; ossia

$$P(A) = \frac{n_A}{n} + \epsilon_n \quad \text{dove } \epsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$


---

La probabilità  $P$  è una funzione che trasforma ogni evento  $A$  di  $\mathcal{A}$  in un numero reale

$$P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Tale che

- i.  $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$
  - ii.  $P(\Omega) = 1$
  - iii.  $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cap B = \emptyset, P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- 

**Proposizione** (Proprietà Principali di  $P$ ) Tra le tante enunciamo le più immediate ed utili:

1.  $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{A}$
  2.  $P(\emptyset) = 0$
  3.  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
  4.  $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \bar{B})$
  5.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
-

**Definizione** (Eventi Incompatibili)  $A$  e  $B$  si dicono **incompatibili** se e solo se

$$A \cap B = \emptyset$$

in figura 5.2 una rappresentazione grafica.

**Definizione** (Probabilità Condizionata) Si definisce probabilità di  $A$  condizionata a  $B$  (probabilità di  $A$  dato  $B$ ) la quantità

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Definizione** (Indipendenza tra Eventi) Due eventi  $A$  e  $B$  si dicono **indipendenti** se e solo se

$$\begin{aligned} P(A|B) &= P(A) \\ P(B|A) &= P(B) \end{aligned}$$

**Teorema** (Probabilità Totali versione a coppie) Siano  $A$  e  $B$  due eventi diversi dal vuoto, allora

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

**Teorema** (Probabilità Totali versione Generale) Siano  $\{A_1, \dots, A_n\}$  e  $\{B_1, \dots, B_m\}$  due partizioni di  $\Omega$ , ovvero  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $\forall i \neq j$  e  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$  e  $B_i \cap B_j = \emptyset$ ,  $\forall i \neq j$  e  $\Omega = \bigcup_{i=1}^m B_i$  Allora

$$P(B_j) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B_j|A_i), \quad j = 1, \dots, m$$

**Teorema** (Teorema di Bayes versione a coppie.) Si considerino due eventi  $A$  e  $B$  di cui sono note  $P(A)$ ,  $P(B|A)$  e  $P(B|\bar{A})$ , allora

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

**Teorema** (Teorema di Bayes versione Generale) Siano  $\{A_1, \dots, A_n\}$  e  $\{B_1, \dots, B_m\}$  due partizioni di  $\Omega$ , di cui sono note  $P(A_i)$ ,  $\forall i$  e  $P(B_j|A_i)$ ,  $\forall i, j$ , allora

$$P(A_i|B_j) = \frac{P(A_i)P(B_j|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}$$

**In sintesi**

$0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{A}$	la probabilità è compresa tra 0 e 1.
$P(\Omega) = 1$	la prob. dell'evento certo è 1,
$P(\emptyset) = 0$	la prob. dell'insieme vuoto è zero.
$P(A) = 1 - P(\bar{A})$	regola del complementare
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	regola della somma (de Morgan)
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	<b>se e solo se A e B sono incompatibili:</b> terzo assioma di Kolmogorov
$P(A \cap B) = P(A)P(B A) = P(B)P(A B)$	regola del prodotto (chain rule)
$P(A \cap B) = P(A)P(B)$	se e solo se A e B sono indipendenti
$P(B) = P(A)P(B A) + P(\bar{A})P(B \bar{A})$	Teorema delle probabilità totali

**B.2.1 Variabili Casuali**

**Definizione** (Supporto) Sia  $X$  una VC, si definisce  $S_X$  il supporto di  $X$ , l'insieme di tutti i possibili valori che  $X$  è suscettibile di assumere.

**Definizione** (Funzione di Probabilità) Sia  $X$  una VC con supporto  $S_X$ , si definisce  $f$  la funzione di probabilità: è la probabilità che la VC  $X$  assuma esattamente il valore  $x$

$$f(x) = P(X = x), x \in S_X$$

**Proposizione** (Funzione di probabilità) Sia  $X$  una VC con supporto  $S_X$  e funzione di probabilità  $f$ , allora

- $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in S_X$
- $\sum_{x \in S_X} f(x) = 1$ .

**Definizione** (Funzione di Ripartizione di una VC)

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x^* \leq x} f(x^*)$$

**Proposizione** (Funzione di Ripartizione) La funzione di ripartizione  $F$  di una VC  $X$  è, per definizione:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$F$  gode delle seguenti proprietà:

1. Non decrescente, ossia  $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
  2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ .
  3. Continua a destra, ossia  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$ .
  4.  $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ .
- 

**Definizione** (Percentile di una VC) Sia  $X$  una VC con supporto  $S_X$  e con Fuzione di Ripartizione  $F$ , si definisce il  $p$ -esimo percentile di  $X$ , il vaolre  $x_p$ , tale che:

$$x_p : F(x_p) = p$$


---

**Definizione** (Valore Atteso di una VC discreta) Si definisce  $E(X)$  il valore atteso della VC  $X$  con supporto  $S_X$  e funzione di probabilita  $f$ :

$$E(X) = \sum_{x \in S_x} x f(x)$$


---

**Definizione** (Varianza di una VC discreta) Si definisce  $V(X)$  la varianza della VC  $X$  con supporto  $S_X$  e funzione di probabilita  $f$ :

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - E(X))^2) \\ &= \sum_{x \in S_x} (x - E(X))^2 f(x), \quad \text{oppure equivalentemente} \\ &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= \sum_{x \in S_X} x^2 f(x) - E^2(X). \end{aligned}$$


---

**Definizione** (Standard Deviation di una VC discreta) Si definisce  $SD(X)$  la Standard Deviation della VC  $X$  con supporto  $S_X$  e funzione di probabilita  $f$ , la radice della sua varianza

$$SD(X) = \sqrt{V(X)}$$


---

**Proposizione** (Proprietà del Valore Atteso di una VC) Le proprietà del valore atteso,  $E(X)$  sono:

1.  $x_{\min} \leq E(X) \leq x_{\max}, \quad x_{\min}, x_{\max} \in S_X$ ,
  2.  $E(X - E(X)) = 0$ ,
  3.  $E((X - E(X))^2) < E(X - d)^2 \quad \forall d \neq E(X)$ ,
  4.  $E(a + bX) = a + b E(X)$ .
  5.  $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$
-

**Proposizione** (Proprietà della Varianza di una VC) Le proprietà della Varianza,  $V(X)$  sono:

1.  $V(X) \geq 0$ ,
2.  $V(X) = 0$  se e solo se  $P(X = x) = 1$
- 3.

$$V(a + bX) = b^2V(X)$$

4. Se  $X$  e  $Y$  sono **indipendenti**, allora

$$V(aX + bY) = V(aX - bY) = a^2V(X) + b^2V(Y), \forall a, b \in \mathbb{R}$$


---

**Proposizione** (Proprietà della SD di una VC) Le proprietà della Standard Deviation di  $X$ ,  $SD(X)$  sono:

1.  $SD(X) \geq 0$ ,
2.  $SD(X) = 0$  se e solo se  $P(X = x) = 1$
- 3.

$$SD(a + bX) = |b|V(X)$$

4. Se  $X$  e  $Y$  sono **indipendenti**, allora

$$SD(aX + bY) = SD(aX - bY) = \sqrt{a^2V(X) + b^2V(Y)}, \forall a, b \in \mathbb{R}$$


---

### In sintesi

$$S_X$$

il supporto della VC  $X$ :

l'insieme di tutti i possibili valori che la VC può assumere.

Se  $X$  è una VD discreta il suo supporto ha:

un numero finito,

o al più numerabile di elementi.

$f$  è la funzione di probabilità,

indica la probabilità che la VC  $X$  assuma esattamente il valore  $x$ .

linearità

$$S_X = \{x_1, \dots, x_k\}$$

$$S_X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

$$f(x) = P(X = x), x \in S_X$$

$$E(a + bX) = a + bE(X)$$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

$$V(X) = E \left( (X - E(X))^2 \right)$$

Varianza della VC  $X$

$$= \sum_{x \in S_X} x^2 f(x) - E^2(X)$$

$$V(a + bX) = b^2V(X)$$

$$SD(X) = \sqrt{V(X)}$$

Standard Deviation della VC  $X$

$$SD(a + bX) = |b|SD(X)$$

Indipendenza tra VC

$$P(X \in A \cap Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B) \quad \forall A \subset S_X, \forall B \subset S_Y$$

$$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y) \quad \forall x \in S_X, \forall y \in S_Y$$

$$V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) \quad \text{se e solo se } X \text{ e } Y \text{ sono indipendenti}$$

$$SD(aX + bY) = \sqrt{a^2V(X) + b^2V(Y)} \quad \text{se e solo se } X \text{ e } Y \text{ sono indipendenti.}$$

n.b. la SD di una somma non

si può esprimere con la somma delle SD.

### B.2.2 Teorema del Limite Centrale

**Teorema** (TLC per la Somma) Siano  $X_1, \dots, X_n, n$  Variabili Casuali (VC) Indipendenti e Identicamente Distribuite (IID), tali che  $E(X_i) = \mu, V(X_i) = \sigma^2, \forall i = 1, \dots, n$ . Posto

$$S_n = X_1 + \dots + X_n,$$

allora

$$S_n \xrightarrow{a} N(n\mu, n\sigma^2)$$

**Teorema** (TLC per la Media) Siano  $X_1, \dots, X_n, n$  Variabili Casuali (VC) Indipendenti e Identicamente Distribuite (IID), tali che  $E(X_i) = \mu, V(X_i) = \sigma^2, \forall i = 1, \dots, n$ . Posto

$$\bar{X} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n},$$

allora

$$\bar{X} \xrightarrow{a} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

**Teorema** (TLC per la Proporzione) Siano  $X_1, \dots, X_n, n$  Variabili Casuali (VC) Indipendenti e Identicamente Distribuite (IID), tali che  $X_i \sim \text{Ber}(\pi), \forall i = 1, \dots, n$ . Posto

$$\hat{\pi} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n},$$

allora

$$\hat{\pi} \xrightarrow{a} N\left(\pi, \frac{\pi(1-\pi)}{n}\right)$$

### B.2.3 Statistiche Campionarie

**Definizione** Una **statistica campionaria**,  $S$ , è una funzione dei dati  $X_1, \dots, X_n$

$$S(X_1, \dots, X_n) = s \in \mathbb{R}$$

---

**Definizione** Siano  $Z_1, \dots, Z_n$ ,  $n$  VC, IID,  $Z_i \sim N(0, 1)$ , posto,

$$Y = Z_1^2 + \dots + Z_n^2, \quad \text{allora} \quad Y \sim \chi_n^2$$

La distribuzione della somma dei quadrati di  $n$  normali standard è distribuita come un chi-quadro con  $n$  *gradi di libertà*

---

La VC  $\chi_n^2$  ha come supporto tutta la retta reale positiva:

$$S_Y = \{y > 0\} = \mathbb{R}^+$$

Lo spazio dei parametri non ha interesse statistico

$$n \in \mathbb{Z}^+$$

- per  $n = 1$  ha una forma iperbolica;
  - per  $n > 2$  è a forma campanulare con un'asimmetria positiva (coda lunga a dx);
  - in virtù del TLC se  $n$  diverge allora  $Y \xrightarrow{d} N(n, 2n)$ .

$$E(Y) = n, \quad V(Y) = 2n$$


---

**Definizione** Siano  $Z \sim N(0, 1)$  e  $Y \sim \chi_n^2$ ,  $Z$  e  $Y$  indipendenti, posto,

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/n}} \quad \text{allora} \quad T \sim t_n$$

Il rapporto tra una normale standard e la radice di un chi-quadro diviso per i suoi gradi di libertà è distribuito come una  $t$ -Student con  $n$  *gradi di libertà*

---

La VC  $t_n$  ha come supporto tutta la retta reale:

$$S_T = \mathbb{R}$$

Lo spazio dei parametri non ha interesse statistico

$$n \in \mathbb{Z}^+$$

Funzione di probabilista o densità.

- è a forma campanulare
- è simmetrica rispetto a zero
- all'aumentare di  $n$  le code si abbassano
- Se  $n \rightarrow \infty$ , allora  $t_n \rightarrow N(0, 1)$

---


$$E(Y) = 0, \quad V(Y) = \frac{n}{n-2}$$


---

## B.3 Inferenza

### B.3.1 Teoria della stima

**Definizione** Uno **stimatore** puntuale (point estimator) è una statistica  $\hat{\theta}$  che trasforma il campione  $X_1, \dots, X_n$  in un punto dello spazio dei parametri:

$$\hat{\theta} : \mathcal{S} \rightarrow \Theta$$


---

**Definizione** (Correttezza di uno stimatore) Siano  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n$  VC, IID, replicazioni della stessa  $X \sim \mathcal{L}(\theta)$ , sia  $\hat{\theta}$  uno stimatore per  $\theta$ . Lo stimatore  $\hat{\theta}$  si dice **corretto** se

$$E(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)) = E(\hat{\theta}) = \theta$$


---

**Definizione** (Mean Squared Error di uno stimatore) Si definisce **Errore Quadratico Medio** (*Mean Squared Error*) la quantità

$$MSE(\hat{\theta}) = E((\hat{\theta} - \theta)^2) = V(\hat{\theta}) + B^2(\hat{\theta})$$

dove

$$B(\hat{\theta}) = |E(\hat{\theta}) - \theta|$$


---

**Definizione** (Efficienza di uno stimatore) Siano  $\hat{\theta}_1$  e  $\hat{\theta}_2$  due stimatori per  $\theta$ , si dice che  $\hat{\theta}_1$  è **più efficiente** di  $\hat{\theta}_2$  se e solo se

$$MSE(\hat{\theta}_1) < MSE(\hat{\theta}_2)$$

**Definizione** (Correttezza Asintotica) Lo stimatore  $\hat{\theta}$  si dice **asintoticamente corretto** se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)) = E(\hat{\theta}) = \theta$$


---

**Definizione** (Correttezza Asintotica) Lo stimatore  $\hat{\theta}$  si dice **consistente** (in media quadratica) se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} MSE(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} MSE(\hat{\theta}) = 0$$

Essendo

$$MSE(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + B^2(\hat{\theta})$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} MSE(\hat{\theta}) = 0, \text{ se e solo se } \lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\theta}) = 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} B^2(\hat{\theta}) = 0$$


---

La *standard deviation* (SD)  $\sigma$ , rappresenta la dispersione degli individui dalla media, è un indicatore di *variabilità della popolazione*, per esempio in una popolazione finita di  $N$  individui:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2},$$

la *deviazione standard*  $\sigma$  è la radice della varianza della popolazione  $\sigma^2$ .

Lo *standard error*  $SE(\hat{\theta})$  di uno stimatore  $\hat{\theta}$  per  $\theta$  è un indicatore della *variabilità* dello stimatore nello *spazio dei parametri*

$$SE(\hat{\theta}) = \sqrt{V(\hat{\theta})}$$

Lo *standard error*  $SE(\hat{\theta})$  di uno stimatore  $\hat{\theta}$  per  $\theta$  è la radice della varianza della VC  $\hat{\theta}$ .

La *standard deviation stimata*  $\hat{\sigma}$ , rappresenta la dispersione degli individui *del campione* dalla media *del campione*, è un indicatore di *variabilità del campione*:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2}$$

La *deviazione standard stimata*  $\hat{\sigma}$  è la radice della varianza del campione  $\hat{\sigma}^2$ .

**Definizione** (Funzione di Verosimiglianza) Siano  $x_1, \dots, x_n$   $n$  osservazioni di  $X \sim \mathcal{L}(\theta)$ ,  $\theta \in \Theta$ , si definisce la verosimiglianza  $L$  di  $\theta$  la funzione:

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = L(\theta) \propto P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n; \theta)$$

**Definizione** (Log Verosimiglianza) Si definisce la log-verosimiglianza  $\ell$ :

$$\begin{aligned} \ell(\theta) &= \log L(\theta) \\ &= \log \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \\ &= \sum_{i=1}^n \log f(x_i; \theta) \end{aligned}$$

**Definizione** (Stimatore du Massima Verosimiglianza) Lo stimatore di *massima verosimiglianza* per  $\theta$  è

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmax}} L(\theta) \\ &= \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmax}} \ell(\theta) \end{aligned}$$

$$\hat{\theta} : L(\hat{\theta}) > L(\theta), \forall \theta \neq \hat{\theta}, \quad \ell(\hat{\theta}) > \ell(\theta), \forall \theta \neq \hat{\theta}$$

---

Siano  $X_1, \dots, X_n$   $n$  VC IID, tali che  $X_i \sim \text{Ber}(\pi)$  lo stimatore di massima verosimiglianza per  $\pi$  è

$$\hat{\pi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$\hat{\pi}$  è corretto per  $\pi$ , infatti

$$E(\hat{\pi}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{\pi + \dots + \pi}{n} = \frac{n}{n}\pi = \pi$$

E quindi

$$MSE(\hat{\pi}) = V(\hat{\pi}) = \frac{\pi(1-\pi)}{n}$$

che è ancora funzione di  $\pi$ .

Lo stimatore  $\hat{\pi}$  per  $\pi$  è *consistente*, infatti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} MSE(\hat{\pi}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi(1-\pi)}{n} = 0$$

$\hat{\pi}$  è *corretto* e *consistente* per  $\pi$ .

$$SE(\hat{\pi}) = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

L'errore di stima si stima sostituendo a  $\pi$  la sua stima  $\hat{\pi}$

$$\widehat{SE}(\hat{\pi}) = \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}$$


---

Siano  $X_1, \dots, X_n$   $n$  VC IID, tali che  $X_i \sim \text{Pois}(\lambda)$  lo stimatore di massima verosimiglianza per  $\lambda$  è

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Correttezza:

$$E(\hat{\lambda}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda = \lambda$$

Mean Squared Error:

$$MSE(\hat{\lambda}) = V(\hat{\lambda}) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{n}{n^2} \lambda = \frac{\lambda}{n}$$

Consistenza:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} MSE(\hat{\lambda}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{n} = 0$$

Standard Error

$$SE(\hat{\lambda}) = \sqrt{\frac{\lambda}{n}}$$

Standard Error stimato

$$\widehat{SE(\hat{\lambda})} = \sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}}$$


---

La verosimiglianza per  $(\mu, \sigma^2)$  è

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu, \sigma^2)$$

### Proposizione

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \hat{\mu}^2 \end{aligned}$$

Correttezza per  $\mu$ :

$$E(\hat{\mu}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \mu$$

Mean Squared Error per  $\mu$ :

$$MSE(\hat{\mu}) = V(\hat{\mu}) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{n}{n^2} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Consistenza per  $\mu$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} MSE(\hat{\mu}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$$

E lo Standard Error:

$$SE(\hat{\mu}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

Correttezza per  $\hat{\sigma}^2$ :

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

$\hat{\sigma}^2$  non è stimatore corretto per  $\sigma^2$ .

Correzione di  $\hat{\sigma}^2$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2$$

Standard Error

$$SE(\hat{\mu}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

Standard Error stimato.

$$\widehat{SE}(\hat{\mu}) = \sqrt{\frac{S^2}{n}} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n-1}}$$


---

**Proprietà** degli stimatori di massima verosimiglianza.

Siano  $X_1, \dots, X_n$   $n$  VC IID, replicazioni di  $X \sim \mathcal{L}(\theta)$  e sia  $\hat{\theta}$  lo stimatore di massima verosimiglianza per  $\theta$ , allora

1.  $\hat{\theta}$  non è sempre stimatore corretto ma è sempre corretto asintoticamente:

$$E(\hat{\theta}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta$$

2.  $\hat{\theta}$  non è sempre stimatore a *massima efficienza* ma lo è sempre asintoticamente:

$$V(\hat{\theta}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I^{-1}(\theta)$$

dove  $I(\theta)$  è l'informazione di Fisher.

3.  $\hat{\theta}$  è asintoticamente distribuito normalmente

$$\hat{\theta} \underset{a}{\sim} N(\theta, I^{-1}(\theta))$$

4. Lo stimatore di massima verosimiglianza è invariante alle trasformazioni monotone invertibili  $g$ :

$$\text{se } \psi = g(\theta), \text{ allora } \hat{\psi} = g(\hat{\theta})$$


---

**Definizione** (Intervallo di confidenza) Un **intervallo di confidenza** per  $\theta$  al livello  $(1 - \alpha) \times 100\%$  è una coppia di statistiche  $L_1$  e  $L_2$  tali che

$$P(L_1 < \theta < L_2) = 1 - \alpha$$


---

**Proposizione** (Intervallo di Confidenza per  $\mu$  ( $\sigma^2$  nota)) Si definisce L'IdC al livello  $(1 - \alpha) \times 100\%$  per  $\mu$  con  $\sigma^2$  nota, l'intervallo

$$IdC : \left[ \hat{\mu} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$


---

**Proposizione** (Intervallo di Confidenza per  $\mu$  ( $\sigma^2$  incognita)) Si definisce L'IdC al livello  $(1 - \alpha) \times 100\%$  per  $\mu$  con  $\sigma^2$  incognita, l'intervallo

$$IdC : \left[ \hat{\mu} - t_{n-1; \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + t_{n-1; \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$


---

**Proposizione** (Intervallo di Confidenza per  $\pi$ ) Si definisce L'IdC al livello  $(1 - \alpha) \times 100\%$  per  $\pi$  l'intervallo

$$\left[ \hat{\pi} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1 - \hat{\pi})}{n}}, \hat{\pi} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1 - \hat{\pi})}{n}} \right]$$


---

### B.3.2 Teoria dei Test

**Definizione** (Errori di primo e secondo tipo) Si definiscono

- **L'errore di primo tipo** è l'errore che si commette scegliendo  $H_1$  quando è vera  $H_0$ .
  - **L'errore di secondo tipo** è l'errore che si commette scegliendo  $H_0$  quando è vera  $H_1$ .
- 

#### Tavola della verità

		Decisione	
		decido $H_0$	decido $H_1$
stato di natura	$H_0$	Corretta	Errore I tipo
	$H_1$	Errore II tipo	Corretta

---

**Definizione** (Probabilità degli Errori di primo e secondo tipo)

$$\alpha = P(\text{Errore I tipo}) = P(\text{Decidere } H_1; H_0) = P(X_1, \dots, X_n \in \mathcal{S}_1; H_0)$$

$$\beta = P(\text{Errore II tipo}) = P(\text{Decidere } H_0; H_1) = P(X_1, \dots, X_n \in \mathcal{S}_0; H_1)$$

$\alpha$  è il livello di **significatività** del test,  $\alpha$  è la probabilità di scegliere  $H_1$  quando invece è vera  $H_0$ .  $\beta$  è la probabilità di scegliere  $H_0$  quando invece è vera  $H_1$ .

---

**Definizione** (Potenza di un Test)

$$1 - \beta = P(\text{Decidere } H_1; H_1) = P(X_1, \dots, X_n \in \mathcal{S}_1; H_1)$$

$1 - \beta$  è la **potenza del test**,  $1 - \beta$  è la probabilità di scegliere  $H_1$  quando  $H_1$  è vera.

**Definizione** (Significatività osservata  $p_{\text{value}}$ ) Si definisce la significatività osservata di un test la probabilità di incontrare un campione ancora più in favore di  $H_1$  di quello di cui disponiamo

$$p_{\text{value}} = \begin{cases} P(T > t_{\text{obs}}; H_0) & \text{Se } H_1 \text{ unilaterale destra} \\ P(T < t_{\text{obs}}; H_0) & \text{Se } H_1 \text{ unilaterale sinistra} \\ 2P(T > |t_{\text{obs}}|; H_0) & \text{Se } H_1 \text{ unilaterale bilaterale} \end{cases}$$

**Test per  $\mu$  e  $\pi$**

$H_0 : \mu = \mu_0$	$\sigma^2$	Dist.	Statistica Test	Zona Rifiuto	$p_{\text{value}}$
$H_1 : \mu > \mu_0$	Noto	$Z$	$z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$z_{\text{obs}} > z_\alpha$	$p_{\text{value}} = P(Z > z_{\text{obs}})$
$H_1 : \mu < \mu_0$	Noto	$Z$	$z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$z_{\text{obs}} < -z_\alpha$	$p_{\text{value}} = P(Z < z_{\text{obs}})$
$H_1 : \mu \neq \mu_0$	Noto	$Z$	$z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$ z_{\text{obs}}  >  z_{\alpha/2} $	$p_{\text{value}} = 2P(Z >  z_{\text{obs}} )$
$H_1 : \mu > \mu_0$	Incognito	$t_{n-1}$	$z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t_{\text{obs}} > t_{n-1; \alpha}$	$p_{\text{value}} = P(T > t_{\text{obs}})$
$H_1 : \mu < \mu_0$	Incognito	$t_{n-1}$	$z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t_{\text{obs}} < -t_{n-1; \alpha}$	$p_{\text{value}} = P(T < t_{\text{obs}})$
$H_1 : \mu \neq \mu_0$	Incognito	$t_{n-1}$	$z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$ t_{\text{obs}}  >  t_{n-1; \alpha/2} $	$p_{\text{value}} = 2P(T >  t_{\text{obs}} )$
$H_0 : \pi = \pi_0$		Dist.	Statistica Test	Zona Rifiuto	$p_{\text{value}}$
$H_1 : \pi > \pi_0$		$Z$	$z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\pi} - \pi_0}{\sqrt{\pi(1-\pi)/\sqrt{n}}}$	$z_{\text{obs}} > z_\alpha$	$p_{\text{value}} = P(Z > z_{\text{obs}})$
$H_1 : \pi < \pi_0$		$Z$	$z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\pi} - \pi_0}{\sqrt{\pi(1-\pi)/\sqrt{n}}}$	$z_{\text{obs}} < -z_\alpha$	$p_{\text{value}} = P(Z < z_{\text{obs}})$
$H_1 : \pi \neq \pi_0$		$Z$	$z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\pi} - \pi_0}{\sqrt{\pi(1-\pi)/\sqrt{n}}}$	$ z_{\text{obs}}  >  z_{\alpha/2} $	$p_{\text{value}} = 2P(Z >  z_{\text{obs}} )$

Test  $t$ , 2 Campioni

Test  $t$ , 2 Campioni

Proporzione, 2 Campioni

Omogeneità	Eterogeneità
$t_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_A} + \frac{S_p^2}{n_B}}}$ $S_p^2 = \frac{n_A \hat{\sigma}_A^2 + n_B \hat{\sigma}_B^2}{n_A + n_B - 2}$	$t_{\text{obs}} = \frac{\hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}}$ $z_{\text{obs}} = \frac{\hat{\pi}_A - \hat{\pi}_B}{\sqrt{\frac{\hat{\pi}_C(1-\hat{\pi}_C)}{n_A} + \frac{\hat{\pi}_C(1-\hat{\pi}_C)}{n_B}}}$ $\hat{\pi}_C = \frac{\#\{\text{successi A}\} + \#\{\text{successi B}\}}{n_A + n_B}$ $= \frac{n_A \hat{\pi}_A + n_B \hat{\pi}_B}{n_A + n_B}$

### B.3.3 Regressione

Assunti del modello di regressione lineare

0. Dati  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ ,  $n$  coppie di punti, si assume che

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

1. Il valore atteso dell'errore è nullo

$$E(\varepsilon_i) = 0$$

2. Omoschedasticità

$$V(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2, \quad \text{costante } \forall i$$

3. Indipendenza dei residui

$\varepsilon_i$  è indipendente da  $\varepsilon_j \quad \forall i \neq j$

4. Indipendenza tra i residui e la  $X$

$X_i$  è indipendente da  $\varepsilon_i \quad \forall i$

5. *Esogeneità* della  $X$ : la distribuzione su  $X$  non è oggetto di inferenza

6. Normalità dei residui

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

**Proposizione** (Stimatori dei Minimi Quadrati) Gli stimatori dei minimi quadrati  $\hat{\beta}_0$  e  $\hat{\beta}_1$  sono

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\hat{\sigma}_x^2} \\ \hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \end{aligned}$$

dove

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

e

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

**Definizione** La Covarianza  $\text{cov}(x, y)$  tra due variabili  $x$  e  $y$  è una misura della loro *covariazione*

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

**Proposizione**

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}$$

**Proprietà** dei minimi quadrati

$y_i$ ,	le $y$ osservate
$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ ,	le $y$ stimate
$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$ ,	gli errori stimati
$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ ,	la media degli $y$
$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{y}_i$ ,	la media degli $\hat{y}$ coincide con quella degli $y$
$0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i$ ,	la media degli scarti dalla retta è zero

**Definizione** Il coefficiente  $r$

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y}$$

è chiamato *coefficiente di correlazione*.

**Proprietà** di  $r$

1.  $-1 \leq r \leq 1$ . Il segno indica la direzione della relazione;
  - $r > 0$ , al crescere di  $X$ , *in media*, cresce  $Y$ ;
  - $r < 0$ , al crescere di  $X$ , *in media*, decresce  $Y$ ;
  - $r = 1$ , associazione perfetta diretta;
  - $r = -1$ , associazione perfetta indiretta.
2.  $r$  è un numero puro, ovvero è privo di unità di misura
3. è simmetrico:  $r_{XY} = r_{YX} = r$
4. è invariante per cambiamenti di scala: Se  $W = a + bY$ , allora

$$r_{XW} = \text{sign}(b)r_{XY}$$

dove

$$\text{sign}(b) = \begin{cases} +1, & \text{se } b > 0 \\ -1, & \text{se } b < 0 \end{cases}$$

5.  $r$  misura l'associazione lineare:

- $r$  misura come i punti si addensano intorno alla retta.
- $f(x)$  **non lineare**  $r$  è parzialmente inutile
- il valore di  $r$ , da solo, non è in grado di descrivere tutte le possibili relazioni che si possono realizzare tra due variabili.

6.  $r$  è più elevato se i dati sono aggregati in medie o percentuali

**Proposizione** Vale la seguente relazione

$$TSS = ESS + RSS$$


---

Scomposizione della varianza

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{varianza di } y \\ \text{intorno alla sua media} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{varianza della retta} \\ \text{intorno alla media} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{varianza delle } y \\ \text{intorno alla retta} \end{array} \right\}$$


---

**Definizione** (Indice di Determinazione Lineare) Si definisce

$$R^2 = \left( \frac{ESS}{TSS} \right) = r^2 = \left( \frac{\text{cov}(x, y)}{\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y} \right)^2$$

l'indice di determinazione lineare ed è, nel contesto della regressione lineare semplice, il quadrato dell'indice di correlazione

$$0 \leq R^2 \leq 1$$


---

**Teorema** (Gauss-Markov) Sotto gli assunti dallo 0 al 5, gli stimatori dei minimi quadrati sono corretti

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1, \quad E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$$

La loro varianza è:

$$\begin{aligned} V(\hat{\beta}_1) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n\hat{\sigma}_X^2} \\ V(\hat{\beta}_0) &= \sigma_\varepsilon^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n\hat{\sigma}_X^2} \right) \\ \text{cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) &= -\sigma_\varepsilon^2 \frac{\bar{x}}{n\hat{\sigma}_X^2} = -\bar{x}V(\hat{\beta}_1) \end{aligned}$$

Gli stimatori  $\hat{\beta}_0$  e  $\hat{\beta}_1$  di  $\beta_0$  e  $\beta_1$  sono *BLUE* (*Best Linear Unbiased Estimators*).

---

$$\widehat{SE}(\hat{\beta}_0) = \sqrt{S_\varepsilon^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n\hat{\sigma}_X^2} \right)}$$

$$\begin{aligned}\widehat{SE(\hat{\beta}_1)} &= \sqrt{\frac{S_\varepsilon^2}{n\hat{\sigma}_X^2}} \\ \widehat{SE(\hat{Y}_{X=x})} &= \sqrt{S_\varepsilon^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{n\hat{\sigma}_X^2} \right)}\end{aligned}$$

$$\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, V(\hat{\beta}_1)), \quad \hat{\beta}_0 \sim N(\beta_0, V(\hat{\beta}_0)), \quad \hat{Y}_{(X=x)} \sim N(\beta_0 + \beta_1 x, V(\hat{Y}_{(X=x)}))$$

Parliamo di *interpolazione* dei punti se  $\hat{Y}_{(X=x)}$  è calcolato per

$$\min\{x_i\} \leq x \leq \max\{x_i\}$$

Parliamo di *estrapolazione* dei punti se  $\hat{Y}_{(X=x)}$  è calcolato per

$$x < \min\{x_i\} \text{ oppure } x > \max\{x_i\}$$

Sotto  $H_0$

$$\begin{aligned}\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_{0,H_0}}{\widehat{SE(\hat{\beta}_0)}} &\sim t_{n-2} \\ \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,H_0}}{\widehat{SE(\hat{\beta}_1)}} &\sim t_{n-2}\end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}t_{0,\text{obs}} &= \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_{0,H_0}}{\widehat{SE(\hat{\beta}_0)}} \\ t_{1,\text{obs}} &= \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,H_0}}{\widehat{SE(\hat{\beta}_1)}}\end{aligned}$$

Che andranno lette nella direzione di  $H_1$  con le solite regole



# Richiami sugli Operatori Sommatoria e Produttoria

C

## C.1 Operatore Sommatoria

È una forma simbolica per rappresentare somme di un numero qualunque di addendi. Si consideri un insieme di numeri indicizzati con  $i$

$$\{a_1, \dots, a_n\}$$

Si definisce la *Sommatoria per i che va da 1 fino ad n*

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$i$  ed  $n$  sono chiamati *quantificatori*.

*Esempio*

Si consideri l'insieme

$$S = \{a_1 = 30, a_2 = 15, a_3 = 21\}$$

allora la *Sommatoria per i che va da 1 fino ad 3*

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 30 + 15 + 21 = 66$$

Si consideri l'insieme

$$S = \{x_1 = 3.1, x_2 = 4.1, x_3 = 1.4, x_4 = 3.3, x_5 = 2.9\}$$

allora la *Sommatoria per a che varia in S*

$$\sum_{i=3}^5 x_i = x_3 + x_4 + x_5 = 1.4 + 3.3 + 2.9 = 7.6$$

Un modo alternativo per indicare i quantificatori è il seguente. Sia  $S$  un insieme di numeri

$$S = \{a_1, \dots, a_n\}$$

Si definisce la *Sommatoria di tutti gli a in S*

$$\sum_{a \in S} a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Si consideri l'insieme

$$S = \{y_1 = 3.0, y_2 = 1.5, y_3 = 2.1\}$$

allora la *Sommatoria per a che varia in S*

$$\sum_{a \in S} a = 3.0 + 1.5 + 2.1 = 6.6$$

**Proprietà della Sommatoria**

1. Se  $k$  è una costante, allora

$$\sum_{i=1}^n kx_i = k \sum_{i=1}^n x_i$$

Infatti

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n kx_i &= k \cdot x_1 + k \cdot x_n \\ &= k(x_1 + \dots + x_n) \\ &= k \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

Si consideri l'insieme

$$S = \{x_1 = 3.1, x_2 = 4.1, x_3 = 1.4, x_4 = 3.3, x_5 = 2.9\},$$

Posto  $k = 3.6$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n kx_i &= 3.6 \times 3.1 + 3.6 \times 4.1 + 3.6 \times 1.4 + 3.6 \times 3.3 + 3.6 \times 2.9 \\ &= 3.6 \times (3.1 + 4.1 + 1.4 + 3.3 + 2.9) \\ &= 53.28 \end{aligned}$$

2. Se consideriamo due insiemi di numeri  $\{a_1, \dots, a_n\}$  e  $\{b_1, \dots, b_n\}$ , allora

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

Posto  $S_X = \{x_1 = 3.1, x_2 = 4.1, x_3 = 1.4\}$ ,  $S_Y = \{y_1 = 1.9, y_2 = 6.3, y_3 = 5.1\}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n kx_i &= 3.6 \times 3.1 + 3.6 \times 4.1 + 3.6 \times 1.4 + 3.6 \times 3.3 + 3.6 \times 2.9 \\ &= (3.1 + 4.1 + 1.4) + (1.9 + 6.3 + 5.1) \\ &= 21.9 \end{aligned}$$

3. Se  $k$  è una costante, allora

$$\sum_{i=1}^n k = k + k + \dots + k = n \cdot k$$

Posto  $k = 3.6$  e  $n = 4$ , allora

$$\sum_{i=1}^n k = \sum_{i=1}^4 3.6$$

$$\begin{aligned}
 &= 3.6 + 3.6 + 3.6 + 3.6 \\
 &= 4 \times 3.6 \\
 &= 14.4
 \end{aligned}$$

4. Se  $k$  e  $c$  sono due costanti, allora

$$\sum_{i=1}^n (c + ka_i) = n \cdot c + k \sum_{i=1}^n a_i$$

Posto  $S_X = \{x_1 = 3.1, x_2 = 4.1, x_3 = 1.4\}$ ,  $k = 3.6$  e  $c = 0.5$ , allora

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n c + kx_i &= \sum_{i=1}^3 0.5 + 3.6 \times x_i \\
 &= 0.5 + 3.6 \times 3.1 + 0.5 + 3.6 \times 4.1 + 0.5 + 3.6 \times 1.4 \\
 &= 4 \times 0.5 + 3.6 \times (3.1 + 4.1 + 1.4) \\
 &= 32.46
 \end{aligned}$$

**Attenzione!**

$$\sum_{i=1}^n (a_i \cdot b_i) \neq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n b_i \right)$$

Posto  $S_X = \{x_1 = 3.1, x_2 = 4.1, x_3 = 1.4\}$ ,  $S_Y = \{y_1 = 1.9, y_2 = 6.3, y_3 = 5.1\}$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n x_i &= 8.6 \\
 \sum_{i=1}^n y_i &= 13.3 \\
 \sum_{i=1}^n x_i y_i &= (3.1 \times 1.9) + (4.1 \times 6.3) + (1.4 \times 5.1) \\
 &= 38.86 \\
 &\neq 8.6 \times 13.3 = 114.38
 \end{aligned}$$

## C.2 Operatore Produttoria

Siano  $a_1, \dots, a_n, n$  numeri,  $a_i \in \mathbb{R}$ : L'operatore sommatoria somma gli elementi

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

, allo stesso modo, l'operatore *produttoria* opera il prodotto dei dati

**Definizione C.2.1** (Produttoria). L'operatore produttoria moltiplica gli elementi

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

Esempio:  $a_1 = 1.1, a_2 = 0.9, a_3 = 1.3$

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1.1 + 0.9 + 1.3 = 3.3$$

$$\prod_{i=1}^n a_i = 1.1 \times 0.9 \times 1.3 = 1.287$$

Il **calcolo combinatorio** ha come scopo principale il **conteggio del numero di modi in cui possono verificarsi determinati eventi**, senza doverli enumerare uno per uno. Questo permette di risolvere problemi legati alla disposizione, alla scelta e alla distribuzione di oggetti in modo efficiente e rigoroso.

Un modello efficace per affrontare queste situazioni è quello delle  **$n$  scatole numerate** e delle  **$k$  palline**, che permette di classificare i problemi combinatori in base a due aspetti fondamentali:

1. Le **palline** possono essere numerate (distinguibili) o non numerate (indistinguibili).
2. Il **numero di scatole rispetto alle palline** determina se tutte possono essere sistematiche senza vincoli o se vi è un limite.

A partire da questa impostazione, si sviluppano le formule fondamentali della combinatoria, che trovano applicazioni in statistica, probabilità e molte altre discipline.

Quando ogni scatola può contenere al massimo una pallina, si individuano quattro casi principali, ciascuno con una specifica formula combinatoria.

## D.1 Scelte indipendenti con ripetizione: $k^n$

Si consideri il caso in cui abbiamo  $k$  palline numerate e **ogni pallina può essere collocata indipendentemente in una qualsiasi delle  $n$  scatole disponibili**, senza restrizioni sul numero di volte in cui una scatola può essere scelta.

Il numero totale di distribuzioni è dato da:

$$n^k$$

che rappresenta il numero di **sequenze ordinate** di  $n$  elementi scelti tra  $k$  possibilità.

**Esempio D.1.1 (Valigetta).** Un sistema di sicurezza utilizza un codice a tre cifre, in cui ciascun numero può variare da 1 a 9. Il codice è quindi una sequenza ordinata di tre elementi, scelti tra 9 possibilità:

$$9^3 = 729$$

Esistono 729 possibili codici di apertura.

## D.2 $n = k$ Palline numerate: permutazioni

Quando il numero di palline è uguale al numero di scatole e ogni pallina è distinguibile, il problema diventa quello di **ordinare  $n$  elementi distinti**. Il numero di modi in cui ciò è possibile è dato dal **fattoriale**.

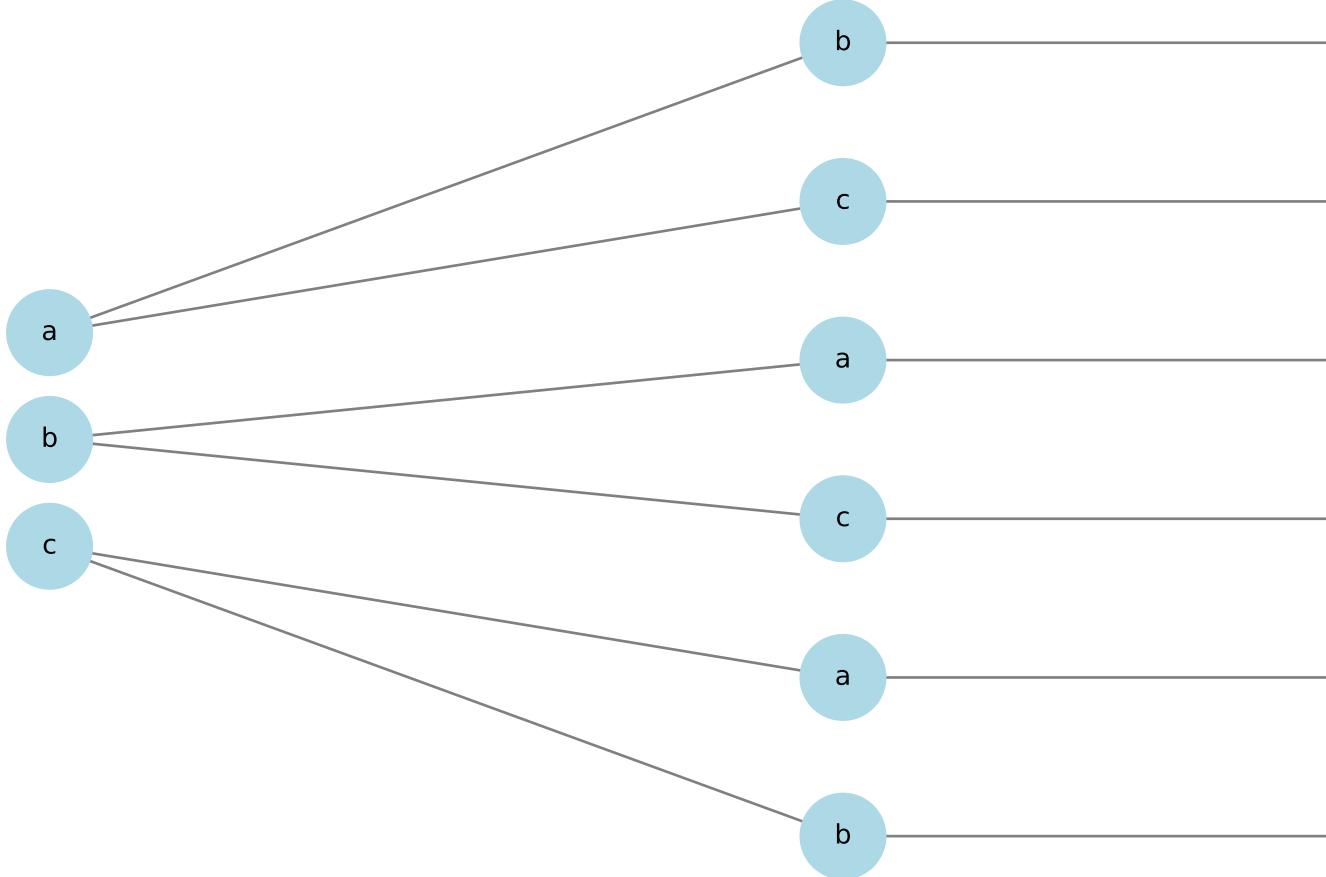
Sia  $n \in \mathbb{N}$  un numero naturale, si definisce  $n$  fattoriale, il numero

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots3 \cdot 2 \cdot 1$$

conta in quanti modo posso rimescolare  $n$  oggetti.

**Nota.** Per definizione  $0! = 1$

In figura 3!.



**Esempio D.2.1.**  $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ ,  $10! = 10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 1 = 3628800$

**Esempio D.2.2 (Mazzo di Carte).** Consideriamo un mazzo di 52 carte tutte distinte. Il numero di modi in cui il mazzo può essere mescolato corrisponde a tutte le possibili permutazioni delle 52 carte:

$$52! = 80658175170944942408940349866698506766127860028660283290685487972352$$

che è un numero estremamente grande, pari a circa  $8.0658 \times 10^{67}$ . Questo valore evidenzia come, ogni volta che un mazzo di carte viene mescolato, sia altamente improbabile che l'ordine ottenuto sia mai stato realizzato prima.

### D.3 $n > k$ Palline numerate: disposizioni senza ripetizione

Se  $n$  è maggiore di  $k$  e le palline sono numerate, il problema diventa quello di scegliere  $k$  elementi distinti da un insieme di  $n$  e disporli in un ordine specifico. In questo caso, la formula è:

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

che rappresenta il numero di **sequenze ordinate** di  $k$  elementi scelti da un insieme di  $n$  elementi distinti.

**Esempio D.3.1.** Se si estrae una mano di 5 carte da un mazzo di 52 e si considera l'ordine di estrazione, il numero di possibili sequenze è:

$$\frac{52!}{(52-5)!} = \frac{52!}{47!}$$

che fornisce 311 875 200 possibili sequenze.

## D.4 $n > k$ Palline non numerate: coefficienti binomiale

Se  $n > k$  e le palline sono **non numerate**, il problema si riduce alla **scelta di  $k$  scatole tra  $n$  disponibili**, senza considerare l'ordine. Questo corrisponde al numero di **combinazioni** di  $k$  elementi scelti tra  $n$ , dato dal coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Esempio D.4.1** (Sei al super enalotto). Nel Superenalotto, si scelgono 6 numeri tra 90, senza che l'ordine abbia rilevanza. Il numero totale di combinazioni possibili è:

$$\binom{90}{6} = \frac{90!}{6!(90-6)!} = \frac{90!}{6!84!}$$

che fornisce 622 614 630 possibilità. Questo spiega l'estrema difficoltà di vincere il jackpot.

## D.5 Il coefficiente binomiale

Il coefficiente binomiale  $\binom{n}{k}$  conta in quanti modi posso disporre  $k$  oggetti indistinguibili in  $n \geq k$  posti:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Proprietà utili

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k}, & \text{Per esempio:} \\ \binom{5}{3} &= \binom{5}{2} = 10, \\ \binom{n}{0} &= \binom{n}{n} = 1 \\ \binom{n}{1} &= \binom{n}{n-1} = n \end{aligned}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

In matematica  $\binom{n}{k}$  è il  $k$ -esimo elemento della  $n$ -esima riga del *triangolo di Tartaglia*.

0	1	2	3	4	5	6	7
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21	7

## E.1 Richiami sui logaritmi

Si definisce  $\log x$  il logaritmo naturale di  $x > 0$  -  $\lim_{x \rightarrow 0} \log x = -\infty$  -  $\log e = 1$ , dove  $e$  è il numero di Nepero 2.7183...

Una delle utilità dei logaritmi è di trasformare il logaritmo del prodotto in somma dei logaritmi dei fattori.

### Proprietà 1

$$\log a \cdot b = \log a + \log b$$

ed esprime la potenza come coefficiente moltiplicativo:

### Proprietà 2

$$\log a^b = b \log a$$

Consideriamo il prodotto di logaritmi:

$$\begin{aligned} \log \prod_{i=1}^n a_i &= \log a_1 \cdot \dots \cdot a_n \\ &= \log a_1 + \dots + \log a_n \\ &= \sum_{i=1}^n \log a_i \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \log \prod_{i=1}^n a_i^{b_i} &= \log a_1^{b_1} \cdot \dots \cdot a_n^{b_n} \\ &= b_1 \log a_1 + \dots + a_n \log a_n \\ &= \sum_{i=1}^n b_i \log a_i \end{aligned}$$

## E.2 Richiami di Analisi

### E.2.1 Note sulla cardinalità degli insiemi

In matematica la cardinalità di un insieme indica il numero dei suoi elementi.

L'insieme  $E = \{a, b, c\}$  ha *cardinalità finita*

$$\text{card}(E) = \#E = 3$$

L'insieme dei numeri  $S = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$  ha cardinalità finita:

$$\#S = n + 1$$

L'insieme dei numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

ha **cardinalità infinita numerabile**

$$\#\mathbb{N} = \aleph_0, \quad \text{infinito numerabile}$$

L'insieme dei reali

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}, \quad \text{i numeri reali sono dati dall'unione dei razionali } \mathbb{Q} \text{ e degli irrazionali } \mathbb{I}$$

ha **cardinalità infinita più che numerabile**

$$\#\mathbb{R} = \aleph_1, \quad \text{infinito più che numerabile}$$

## E.2.2 Funzioni Reali e loro derivate

Solitamente in analisi matematica si studia una generica funzione  $f$ , dove la variabile è  $x$ . La maggior parte degli esercizi riguardano

$$f(x), x \in \text{Dominio di } f$$

In particolare, se  $f(x) = \log x, x > 0$  sappiamo che

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Nella teoria della verosimiglianza lasceremo la lettera  $f$  assegnata alle funzioni di probabilità (nel caso discreto) e le funzioni di densità (nel caso continuo) e useremo lettere differenti per indicare la funzione. Allo stesso modo le etichette  $x$  restano per individuare i dati e le variabili sono i parametri del modello.

Quindi scriveremo, per esempio,

$$\ell(\theta) = \log \theta, \quad \theta \in \Theta$$

e leggeremo:  $\ell$  è funzione di  $\theta$  e se dobbiamo derivare la funzione lo facciamo rispetto a  $\theta$ :

$$\ell'(\theta) = \frac{1}{\theta}$$

Ricordiamo qualche semplice regola di derivazione:

Se  $\ell(\theta) = g(h(\theta))$

$$\ell'(\theta) = g'(h(\theta))h'(\theta)$$

Se  $\ell(\theta) = \log h(\theta)$

$$\ell'(\theta) = \frac{h'(\theta)}{h(\theta)}$$

0.65 FALSE

# Com'è Realizzato il Libro



Per scrivere queste pagine mi sono avvalso di diverse tecnologie che grazie all'ambiente integrato R-Studio (cita) è possibile combinare insieme con uno sforzo relativamente basso. Tra i tanti software coinvolti ricordo

- R [1]
- R Markdown [2], [3], [4]

R è l'ambiente di calcolo col quale ho svolto tutti i calcoli e realizzato le figure. R Markdown è un software che consente di mescolare pezzi di codici HTML, pezzi di codici  $\text{\LaTeX}$  e pezzi di codice R. In sostanza lo stesso documento contiene:

- il contenuto del testo;
- i codici per produrre i calcoli e i grafici;
- i codici che consentono la formattazione del testo

per esempio il codice

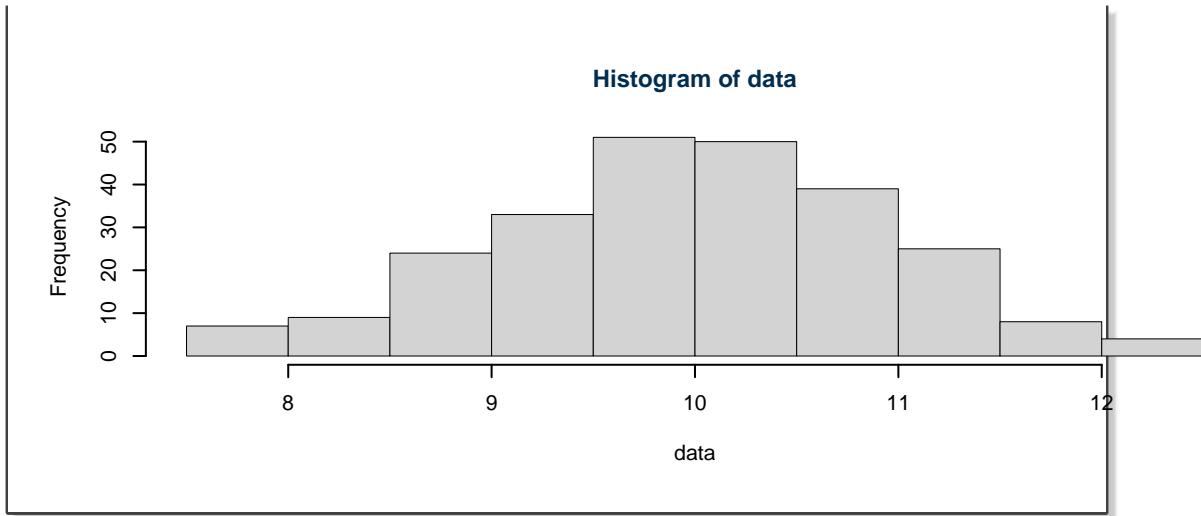
```
```{r, echo=FALSE}
# Questo è un blocco di codice in R
# fisso alcuni parametri ed eseguo alcuni conti
n <- 250 # fisso n = 250
data <- rnorm(n,10,1) # genero n dati da una normale di media 10 e sd 1
mx <- mean(data) # chiamo mx la media dei dati
vx <- var(data) # chiamo vx la varianza dei dati
````
```

Abbiamo analizzato  $n = r n$  individui, abbiamo osservato una media pari a  $\bar{x} = r mx$  e una varianza pari a  $\sigma^2 = r vx$

```
```{r, echo=FALSE}
# qui produco un grafico
hist(data)
```
```

produrrà il seguente risultato

Abbiamo analizzato  $n = 250$  individui, abbiamo osservato una media pari a  $\bar{x} = 9.982$  e una varianza pari a  $\sigma^2 = 0.9465$ .



Quindi cioè che viene prodotto all'interno dei blocchi di R (chiamati R chunks), è utilizzabile nel testo richiamando `r nome\_comando` il testo finale restituirà il risultato di nome\_comando.

Le espressioni scritte tra \$ sono pezzi di codice L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X che è un potentissimo software di video scrittura, particolarmente adatto per scrivere formule matematiche. Per esempio il codice

```
$$
\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i
$$
```

produce

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

L'obiettivo delle seguenti pagine è documentare la realizzazione del libro e non quello di approfondire passo, passo i software utilizzati. Farò solo una breve presentazione per stimolare i lettori più curiosi a cercare documentazioni più approfondite dei principali ambienti che ho utilizzato.

## F.1 R: A Language and Environment for Statistical Computing

L'ambiente open source R è una collezione software per analizzare, manipolare e rappresentare dati. È sviluppato per tantissimi sistemi operativi tra cui Windows, Linux, Mac OS e tanti altri. Per maggiori informazioni su download e installazione rimando al sito. [\[https://www.R-project.org/\]\[https://www.R-project.org/\]](https://www.R-project.org/) nel quale si trovano diversi documenti di introduzione al software non solo inglese:

- <https://cran.r-project.org/manuals.html>
- <https://cran.r-project.org/other-docs.html>

R è un interprete interattivo, l'utente scrive un comando e una volta premuto invio R restituisce il risultato.

### F.1.1 R come calcolatrice

R è anzitutto una calcolatrice

```

1+1 # uno più uno
## [1] 2

3-4 # tre meno quattro
## [1] -1

4*3 # quattro per tre
## [1] 12

4/3 # 4 diviso 3
## [1] 1.3333

5^2 # cinque elevato alla due
## [1] 25

log(2) # logaritmo naturale di due
## [1] 0.69315

exp(1) # e alla uno, il numero di Nepero
## [1] 2.7183

pi # pi greco, la costante trigonometrica
## [1] 3.1416

1/0 # 1 diviso zero restituisce infinito
## [1] Inf

```

## F.1.2 Operatori Speciali

Alcuni caratteri speciali sono

- NA Not Available è dedicato ai dati mancanti
- Inf infinito
- NULL non presente, nullo
- TRUE o T vero
- FALSE o F falso

```

NA+1      # sommare uno al dato mancante dà come risultato un dato mancante
## [1] NA

Inf+1     # infinito più uno è sempre infinito
## [1] Inf

NULL+1    # sommare al nulla uno non restituisce nulla
## numeric(0)

```

```
TRUE + 1 # vero + 1 fa due
```

```
## [1] 2
FALSE + 1 # falso + 1 fa uno
```

```
## [1] 1
```

- a==b a è uguale a b?
- a!=b a è diverso a b?
- a>b a è maggiore di b?

```
3 == 4 # 3 è uguale a 4?
```

```
## [1] FALSE
3 != 4 # 3 è diverso da 4?
```

```
## [1] TRUE
3 > 4 # 3 è maggiore di 4?
```

```
## [1] FALSE
```

Gli operatori & e | svolgono il ruolo di and e or.

```
cond1 <- TRUE
cond2 <- FALSE

cond1 & cond2 # vera se sono vere entrambe
```

```
## [1] FALSE
cond1 | cond2 # vera se almeno una delle due è vera
```

```
## [1] TRUE
```

### F.1.3 Vettori e matrici

Con il comando c è possibile concatenare dei valori per creare un vettore, mentre si possono assegnare etichette agli oggetti con l'operatore <-

```
x <- c(2,1,9)
x
```

```
## [1] 2 1 9
y <- c(2.3,1.4,2.8)
y

## [1] 2.3 1.4 2.8
x+y # somma elemento per elemento

## [1] 4.3 2.4 11.8
```

Alcune funzioni speciali aiutano a velocizzare la creazione di vettori, per esempio `1:10` produce i numeri che vanno da uno a dieci.

```
1:10
```

```
## [1] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
```

Alternativamente la funzione `seq` produce una sequenza di numeri dal minimo al massimo secondo alcuni criteri

```
s1 <- seq(0,1,by=.1)      # sequenza da 0 ad 1 di passo 0.1
s2 <- seq(0,1,length=6)   # sequenza da 0 ad 1 di 6 numeri
s1
```

```
## [1] 0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
```

```
s2
```

```
## [1] 0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0
```

La lunghezza di un vettore si ricava col comando `length`

```
length(s2)
```

```
## [1] 6
```

Per estrarre elementi da un vettore usiamo le parentesi quadre: `s2[2]` restituisce il secondo elemento di `s2` mentre `s2[1:4]` restituisce i primi 4 elementi e `s2[c(3,2,5)]` il terzo, il secondo e il quinto

```
s2[2]
```

```
## [1] 0.2
```

```
s2[1:4]
```

```
## [1] 0.0 0.2 0.4 0.6
```

```
s2[c(3,2,5)]
```

```
## [1] 0.4 0.2 0.8
```

```
x <- c(1.1, -3.4, 4.2, 5.1, -4.4, -3.9, 2.5)
x > 0 # sequenza di TRUE e FALSE
```

```
## [1] TRUE FALSE TRUE TRUE FALSE FALSE TRUE
```

```
which(x > 0) # in quale posizione sono gli x maggiori di zero?
```

```
## [1] 1 3 4 7
```

```
x[x > 0] # gli x, ma solo quelli maggiori di zero
```

```
## [1] 1.1 4.2 5.1 2.5
```

```
x[!(x > 0)] # gli x, ma solo quelli che NON sono maggiori di zero
```

```
## [1] -3.4 -4.4 -3.9
```

È possibile costruire matrici con la funzione `matrix`

```
mat1 <- matrix(c(1,2,3,4),nrow = 2) # legge in colonna
mat1

##      [,1] [,2]
## [1,]    1    3
## [2,]    2    4

mat2 <- matrix(c(1,2,3,4),nrow = 2,byrow = T) # legge per riga
mat2

##      [,1] [,2]
## [1,]    1    2
## [2,]    3    4

mat1 + mat2 # restituisce la somma elemento per elemento
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    2    5
## [2,]    5    8
```

Le funzioni `cbind` ed `rbind` consentono di unire una nuova colonna o una nuova riga ad una matrice o vettore.

```
x1 <- 1:3
x2 <- 2:4
cbind(x1,x2)

##      x1 x2
## [1,]  1  2
## [2,]  2  3
## [3,]  3  4

rbind(x1,x2)

##      [,1] [,2] [,3]
## x1      1    2    3
## x2      2    3    4
```

Per indicizzare una matrice useremo sempre le parentesi quadre ma con 2 indici

```
mat <- matrix(1:20,nrow = 5)
mat
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1    6   11   16
## [2,]    2    7   12   17
## [3,]    3    8   13   18
## [4,]    4    9   14   19
## [5,]    5   10   15   20
```

```
mat[1,1]
```

```
## [1] 1
```

```
mat[2:3,3:4]
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    12   17
## [2,]    13   18
```

I vettori e le matrici non sono solo numeriche ma possono anche contenere caratteri, ovviamente le operazioni aritmetiche non sono più consentite

```
mat <- matrix(c("testo 1","testo 2","testo 3","testo 4"),nrow = 2)
mat
```

```
##      [,1]      [,2]
## [1,] "testo 1" "testo 3"
## [2,] "testo 2" "testo 4"
```

#### F.1.4 Liste e dataframe

Una lista è una collezione di diversi oggetti di R

```
mat1 <- matrix(c(1,2,3,4),nrow = 2) # legge in colonna
mat <- matrix(c("testo 1","testo 2","testo 3","testo 4"),nrow = 2)
b <- c(NA,NA,NA)

lista <- list(mat1,mat,b)
lista
```

```
## [[1]]
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    3
## [2,]    2    4
##
## [[2]]
##      [,1]      [,2]
## [1,] "testo 1" "testo 3"
## [2,] "testo 2" "testo 4"
##
## [[3]]
## [1] NA NA NA
```

Una particolare tipo di lista è il `data.frame` che consente di creare una matrice dei dati composta da colonne di diversa natura

```
sesto <- c("M","M","M","F","F")
eta   <- c(32.2,45.6,65.3,34.1,43.2)
dati <- data.frame(sesto,eta)
dati
```

```
##   sesso eta
## 1     M 32.2
## 2     M 45.6
## 3     M 65.3
## 4     F 34.1
## 5     F 43.2
```

il simbolo del \$ aiuta a selezionare le colonne di interesse

```
dati$sesso
```

```
## [1] "M" "M" "M" "F" "F"
```

```
dati$eta
```

```
## [1] 32.2 45.6 65.3 34.1 43.2
```

### F.1.5 Classi e Oggetti

R è un linguaggio funzionale, ogni elemento è un oggetto che ha un classe e metodi. Per esempio

```
x <- 3
class(x)
```

```
## [1] "numeric"
```

```
x <- matrix(1:4,nrow = 2)
class(x)
```

```
## [1] "matrix" "array"
```

```
x <- list(1:3,c("a","b"))
class(x)
```

```
## [1] "list"
```



### Attenzione

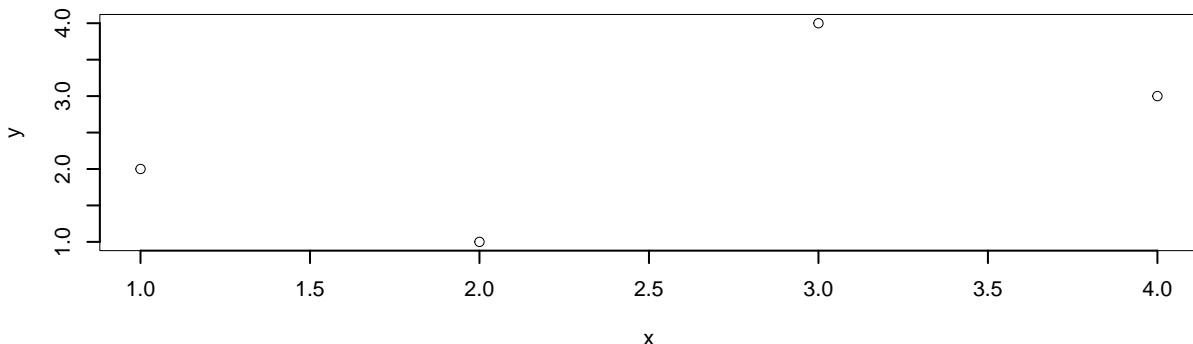
Alcuni oggetti possono assomigliarsi ma essere diversi ad esempio

```
x1 <- 1:3
## [1] 3
x2 <- 2:4
mat <- cbind(x1,x2)
dat <- data.frame(x1,x2)
mat
##      x1 x2
## [1,] 1  2
## [2,] 1  3
## [3,] 1  4
dat
##      x1 x2
## 1  1  2
## 2  1  3
## 3  1  4
class(mat)
## [1] "matrix" "array"
class(dat)
## [1] "data.frame"
```

## F.1.6 I grafici

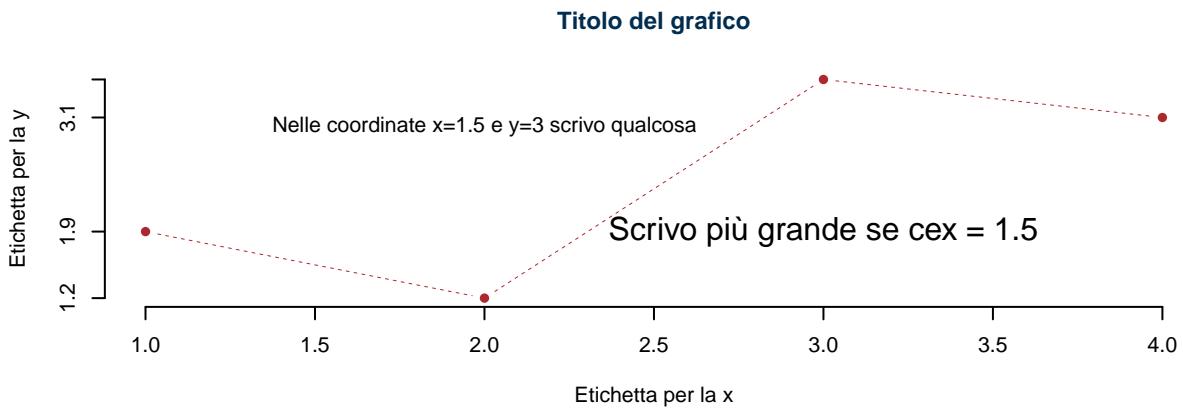
La libreria grafica di R è particolarmente ricca. La funzione di base per realizzare un grafico è la funzione `plot(x, y)`. La funzione, di default, disegna i punti di coordinate x e y.

```
x <- c(1,2,3,4)
y <- c(2,1,4,3)
plot(x,y)
```



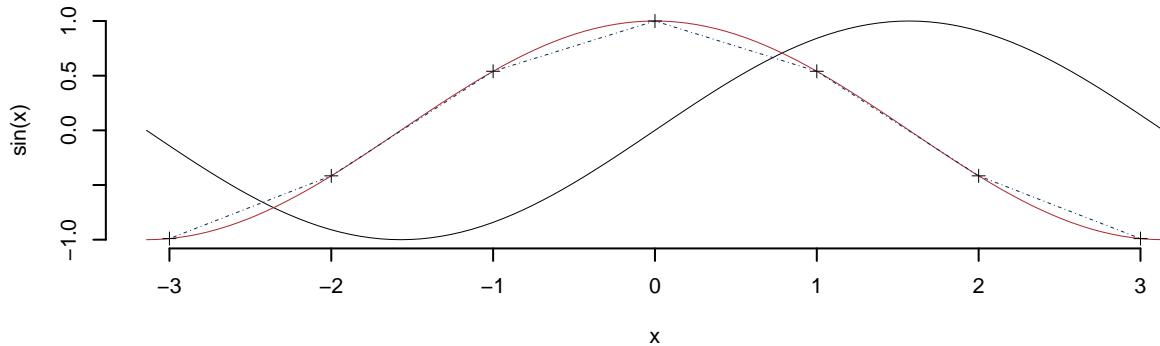
La funzione `plot` è molto flessibile e può essere arricchita con molte opzioni

```
x <- c(1,2,3,4)
y <- c(1.9,1.2,3.5,3.1)
plot(x,y,
      axes=F,      # non disegnare gli assi lo farò dopo
      pch = 16,    # codice 16, per il pallino chiuso
      col = ared, #colore rosso per i pallini
      xlab="Etichetta per la x",
      ylab="Etichetta per la y",
      type = "b", # linea e punto
      lty =2,      # stile di tratteggiatura
      main = "Titolo del grafico"
      )
# Un volta creato il grafico di base possiamo aggiungere
axis(1) # asse delle x
axis(2,at = y) # asse delle y sui punti osservati
text(2,3,"Nelle coordinate x=1.5 e y=3 scrivo qualcosa")
text(3,1.9,"Scrivo più grande se cex = 1.5",cex=1.5)
```



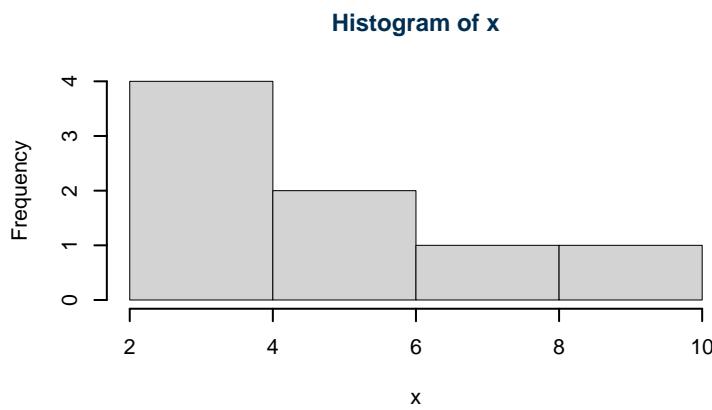
Con le funzioni `points` e `lines` è possibile aggiungere al grafico esistente punti e linee, rispettivamente. Mentre per disegnare funzioni la funzione `curves` aiuta molto

```
curve(sin(x),from = -pi,to = pi,axes=F) # disegna sin(x) tra - pi e + pi
curve(cos(x),col=ared,add=T)           # aggiunge il grafico di cos(x) in rosso
points((-3):3,cos((-3):3),pch=3)
lines((-3):3,cos((-3):3),col=iblue,lty=4)
axis(1)
axis(2)
```

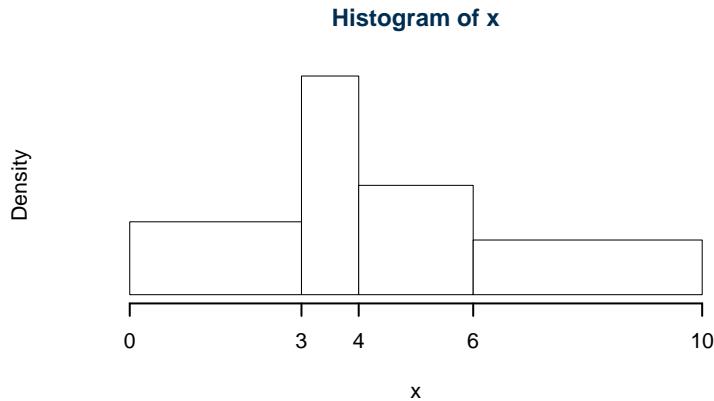


Un'altra funzione di interesse è `hist` che produce istogrammi di densità

```
x <- c(2.3, 2.5, 3.5, 3.6, 4.6, 5.9, 6.9, 9.8)
hist(x)
```

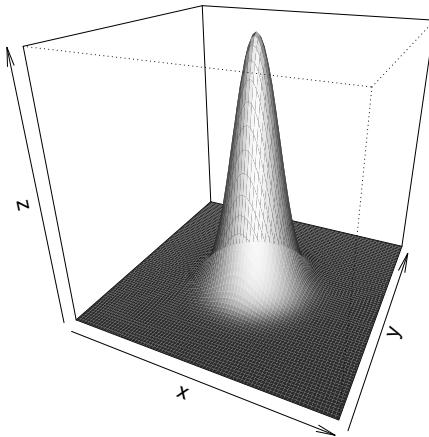


```
hist(x, breaks = c(0, 3, 4, 6, 10), probability = T, axes=F, col="white")
axis(1, at = c(0, 3, 4, 6, 10))
```



Per rappresentare dati in 3D la funzione `persp` disegna superfici in 3 dimensioni

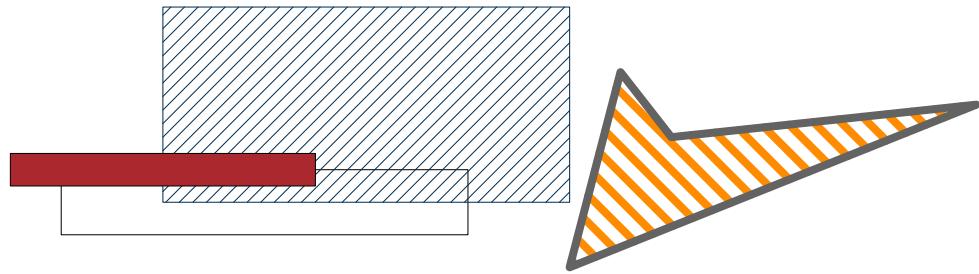
```
x <- seq(-4,4,by=.1)
y <- seq(-4,4,by=.1)
z <- outer(x,y,function(x,y)exp(-x^2-y^2))
persp(x,y,z,theta = 25,phi = 25,ltheta = 25,border = NA,shade = 2.5)
```



Altre funzioni grafiche interessanti sono `rect` e `polyogn` che aggiungo ai grafici rettangoli e poligoni, rispettivamente

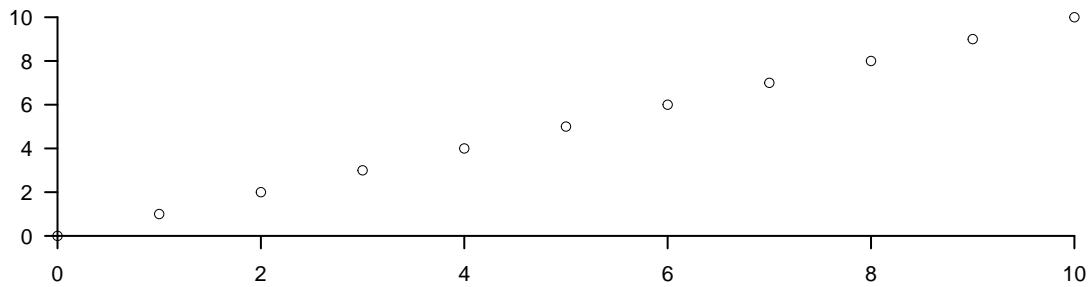
```
plot(c(0,10),c(0,10),xlab = "", ylab="",axes=F,type="n") # inizia un grafico vuoto
rect(xleft = 1,ybottom = 2,xright = 5,ytop = 4)
rect(xleft = 2,ybottom = 3,xright = 6,ytop = 9,density = 20,col=iblue)
rect(xleft = .5,ybottom = 3.5,xright = 3.5,ytop = 4.5,col=ared)
```

```
polygon(x = c(6,6.5,7,10),y = c(1,7,5,6),density = 10,
        col="darkorange",angle = -45,border = "gray39",lwd=4)
```

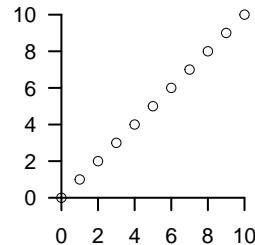


Le proporzioni tra x ed y si possono forzare con l'opzione asp

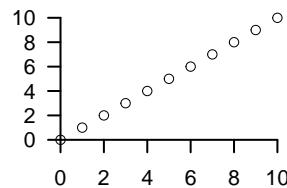
```
plot(0:10,0:10,xlab = "", ylab="",axes=F) # asp non specificato
axis(1,pos = 0)
axis(2,pos = 0,las=2)
```



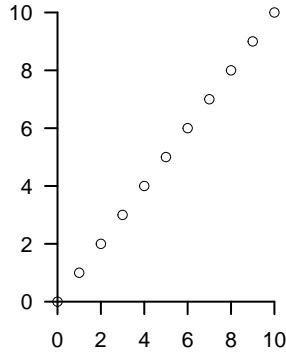
```
plot(0:10,0:10,xlab = "", ylab="",axes=F,asp=1) # asp=1
axis(1,pos = 0,at = seq(0,10,by=2))
axis(2,pos = 0,las=2)
```



```
plot(0:10,0:10,xlab = "", ylab="",axes=F,asp=9/16) # asp=9/16
axis(1,pos = 0)
axis(2,pos = 0,las=2)
```



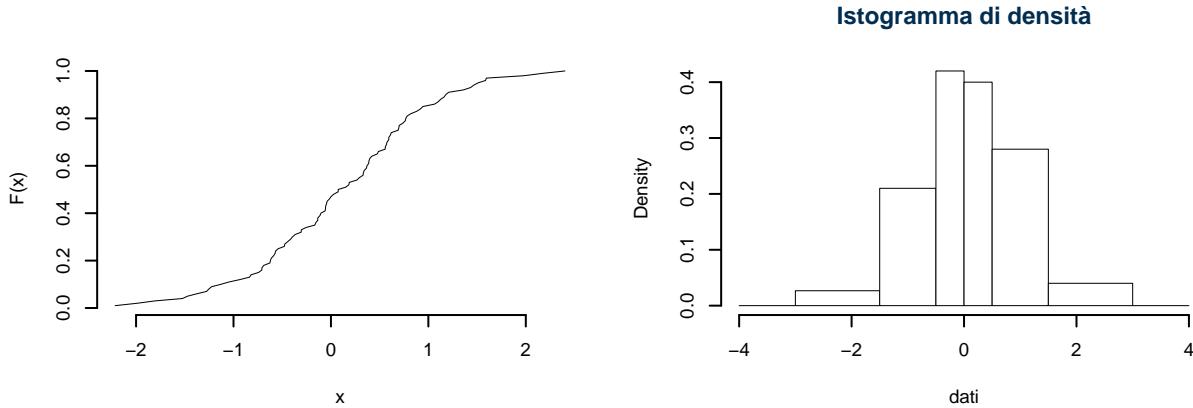
```
plot(0:10,0:10,xlab = "", ylab="",axes=F,asp=4/3) # asp=4/3
axis(1,pos = 0)
axis(2,pos = 0,las=2,at = seq(0,10,by=2))
```



I parametri del grafico si possono settare attraverso `par`

```
set.seed(1)
par(mfrow=c(1,2),cex=0.6) # 1 riga e 2 colonne
dati <- rnorm(100) # 100 dati dalla normale
plot(
  sort(dati),(1:100)/100,xlab = "x", ylab="F(x)",axes=F,type="l"
) # FdR empirica
axis(1)
axis(2)

hist(
  dati,c(-4,-3,-1.5,-.5,0,.5,1.5,3,4),main="Istogramma di densità",col="white"
) # istogramma dei dati
```



### F.1.7 Le Funzioni in R

Essendo R un linguaggio funzionale ogni funzione (che è essa stessa un oggetto) si alimenta di uno o più oggetti di determinate classi e restituisce uno o più oggetti di una determina classe. Per esempio abbiamo visto come la funzione `matrix` abbia come input un vettore e come output una matrice.

```
x <- 1:10
class(x)
```

```
## [1] "integer"
y <- matrix(x,nrow = 2)
class(y)
```

```
## [1] "matrix" "array"
```

Le funzioni di R hanno argomenti con etichette, se gli argomenti rispettano l'ordine delle etichette non c'è bisogno di chiamarli altrimenti vanno etichettati anche loro. Per esempio la funzione `matrix` si aspetta almeno due argomenti `i dati data` e il numero di righe `nrow` o il numero di colonne `ncol`

```
matrix(data,nrow,ncol,byrow = F)

x <- 1:10
matrix(x, 2) # è identico a

##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
## [1,]     1     3     5     7     9
## [2,]     2     4     6     8    10

matrix(nrow = 2, data = x) # ma è diverso da

##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
## [1,]     1     3     5     7     9
## [2,]     2     4     6     8    10

matrix(data = x, ncol = 2) #

##      [,1] [,2]
## [1,]     1     6
```

```

## [2,]    2    7
## [3,]    3    8
## [4,]    4    9
## [5,]    5   10
matrix(2, x)          # produce un risultato senza senso

##      [,1]
## [1,]    2

```

### F.1.7.1 Le funzioni statistiche

Tra le funzioni di base ricordiamo `mean(x)` la media del vettore `x` `var(x)` la varianza **corretta**, `sd(x)` la SD **corretta** , `median(x)` la mediana e `quantile(x,p)` il percentile di ordine  $p$ . Per esempio

```

x <- c(2.3,4.5,6.7,2.1,3.8,2.5,6.9,9.8)
mean(x)    # media

## [1] 4.825
var(x)      # varianza corretta

## [1] 7.5621
sd(x)       # sd corretta

## [1] 2.7499
quantile(x,c(.25,.50,.75)) # i percentili per p=.25,.50,.75 => i quartili

## 25% 50% 75%
## 2.45 4.15 6.75

```

Per trattare le variabili doppie nella regressione ci sono strumenti appositi, le funzioni `cov(x,y)` e `cor(x,y)` calcolano la correlazione e la covarianza tra i vettori `x` ed `y`

```

x <- c(2.3,4.5,6.7,2.1,3.8,2.5,6.9,9.8)
y <- c(2.4,2.1,5.6,7.2,6.5,7.1,4.3,9.7)
cov(x,y)    # covarianza

## [1] 2.5925
cor(x,y)    # r

## [1] 0.36535
cor(x,y)^2 # r quadro

## [1] 0.13348

```

La funzione `lsfit` (Least Squared Fit => Stima dei Minimi Quadrati) consente di calcolare  $\hat{\beta}_0$  e  $\hat{\beta}_1$  rapidamente

```

x <- c(1,2,3,4)
y <- c(1.9,1.2,3.5,3.1)
modello <- lsfit(x,y)
modello$coefficients # coefficienti beta 0 e beta 1

```

```

## Intercept      X
##      0.95      0.59
modello$residuals # i residui osservati gli epsilon i

## [1]  0.36 -0.93  0.78 -0.21

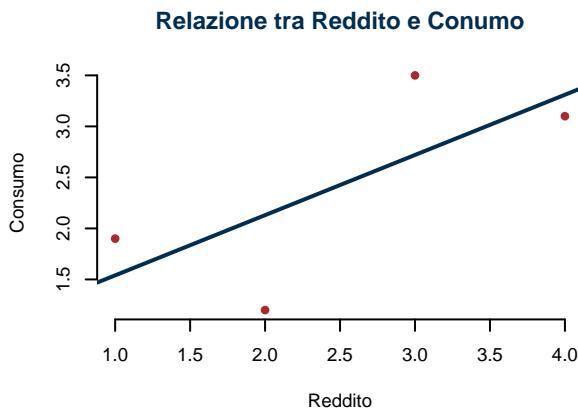
plot(x,y,
      axes=F,      # non disegnare gli assi lo farò dopo
      pch = 16,    # codice 16, per il pallino chiuso
      col = ared, #colore rosso per i pallini
      xlab="Reddito",
      ylab="Consumo",
      lty =2,      # stile di tratteggiatura
      main = "Relazione tra Reddito e Consumo"
      )

# Un volta creato il grafico di base possiamo aggiungere
axis(1) # asse delle x
axis(2) # asse delle y

# e aggiungere una retta di coefficienti beta 0 e beta 1

abline(modello$coefficients,lwd=2,col=iblue)

```



### F.1.7.2 Le VC di maggiore interessa

In R sono tabulate tutte le distribuzioni di maggiore interesse, comprese, la binomiale, la Poisson, la Normale, la t di studente e il chi quadro, insieme a moltissime altre. La sintassi è relativamente semplice il prefisso d indica la funzione di densità o di probabilità il prefisso p indica la funzione di ripartizione, il prefisso q indica l'inverso della funzione di ripartizione e il prefisso r genera numeri casuali da quella distribuzione. Per esempio se  $X \sim \text{Binom}(n = 5; \pi = 0.3)$

```
dbinom(x = 3,size = 5,prob = 0.3) # è la probabilità che X=3
```

```
[1] 0.1323
```

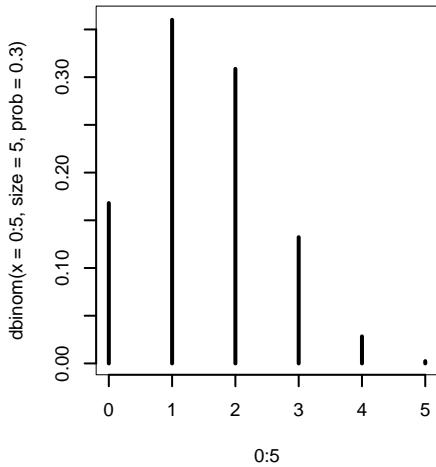
```
dbinom(x = 0:5,size = 5,prob = 0.3) # tutte le probabilità per X=0, 1, ..., 5
```

```
[1] 0.16807 0.36015 0.30870 0.13230 0.02835 0.00243
plot(0:5,dbinom(x = 0:5,size = 5,prob = 0.3),type="h",lwd=2) # grafico
pbinom(q = 3,size = 5,prob = 0.3) # è la probabilità che X >= 3
```

```
[1] 0.96922
qbinom(p = 0.75,size = 5,prob = 0.3) # 75-esimo percentile di X
```

```
[1] 2
rbinom(n = 10,size = 5,prob = 0.3) # simula 10 estrazioni da X
```

```
[1] 1 1 1 1 1 1 2 0 1 2
```



Per esempio se  $X \sim \text{Pois}(\lambda = 4.3)$

```
dpois(x = 3,lambda = 4.3) # è la probabilità che X=3
```

```
[1] 0.1798
```

```
dpois(x = 0:10,lambda = 4.3) # le probabilità per X=0, 1, ..., 10
```

```
[1] 0.0135686 0.0583448 0.1254413 0.1797992 0.1932842 0.1662244 0.1191275 [8] 0.0731783 0.0393333 0.0187926 0.0080808
plot(0:10,dpois(x = 0:10,lambda = 4.3),type="h",lwd=2) # grafico
ppois(q = 3,lambda = 4.3) # è la probabilità che X >= 3
```

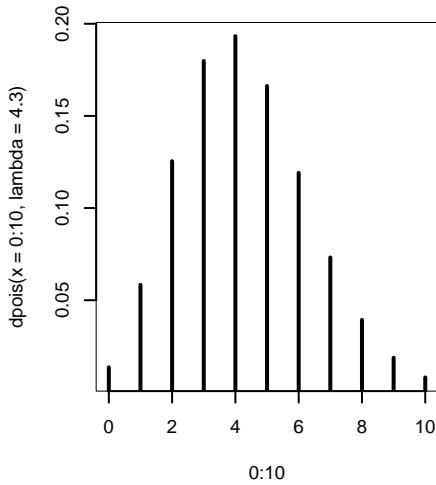
```
[1] 0.37715
```

```
qpois(p = .75,lambda = 4.3) # 75-esimo percentile di X
```

```
[1] 6
```

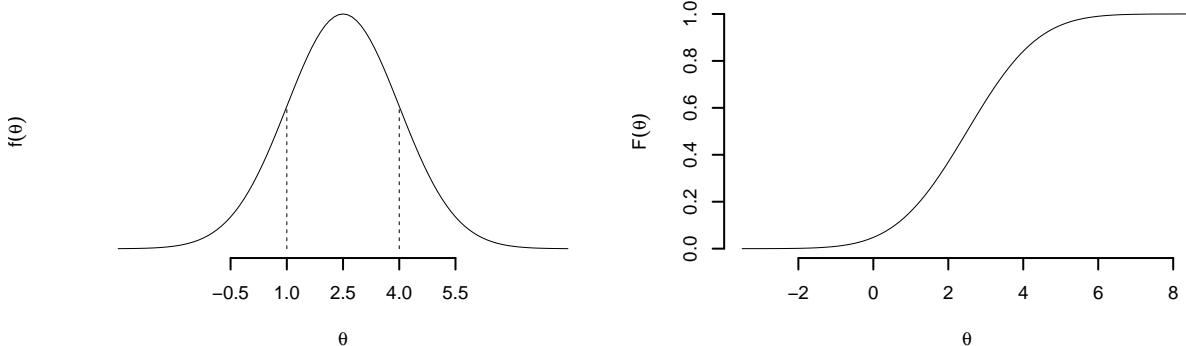
```
rpois(n = 10,lambda = 4.3) # simula 10 estrazioni da X
```

```
[1] 8 2 6 8 6 3 5 8 8 3
```



Per esempio se  $X \sim N(\mu = 2.5, \sigma^2 = (1.5)^2)$

```
par(mfrow=c(1,2) ,cex=0.6) # metto una figura accanto all'altra
curve(dnorm(x,mean = 2.5, sd = 1.5),
       from = 2.5-4*1.5,
       to = 2.5+4*1.5,
       axes=F,
       ylab = expression(f(theta)),
       xlab = expression(theta))
axis(1,c(2.5-2*1.5,2.5-1.5,2.5,2.5+1.5,2.5+2*1.5))
segments(x0 = c(2.5-1.5,2.5+1.5),
         y0 = 0,
         x1 = c(2.5-1.5,2.5+1.5),
         y1 = dnorm(c(2.5-1.5,2.5+1.5),2.5,1.5),
         lty = 2)
curve(pnorm(x,mean = 2.5, sd = 1.5),
       from = 2.5-4*1.5,
       to = 2.5+4*1.5,
       axes=F,
       ylab = expression(F(theta)),
       xlab = expression(theta))
axis(1)
axis(2)
```



```

pnorm(3,mean = 2.5,sd = 1.5)      # P(X<3)

## [1] 0.63056

1 - pnorm(3,mean = 2.5,sd = 1.5) # P(X>3)

## [1] 0.36944

pnorm(3,mean = 2.5,sd = 1.5)-pnorm(0.5,mean = 2.5,sd = 1.5) # P(0.5 < X < 3)

## [1] 0.53935

rnorm(25,2.5,1.5) # 25 estrazioni da X

## [1] 1.54640 1.80753 4.64842 1.52396 2.18893 1.91079 2.02001 2.08133 3.24128
## [10] 2.23400 1.74106 4.51456 2.17813 2.23067 2.34971 3.56900 2.38965 2.44355
## [19] 1.47751 2.01359 2.59024 1.61666 3.29724 0.22241 2.95984

```

### F.1.7.3 Funzioni tra stringhe

Una stringa è un vettore di testo, non numerico, la funzione `paste` consente di incollare testi.

```

vettore_testo1 <- c("mela","pera","pesca","banana")
vettore_testo2 <- c("rossa","verde","gialla","gialla")
paste(vettore_testo1,vettore_testo2,sep=" è ")

## [1] "mela è rossa"      "pera è verde"      "pesca è gialla"    "banana è gialla"
paste("la",paste(vettore_testo1,vettore_testo2,sep=" è "),collapse = " e ")

## [1] "la mela è rossa e la pera è verde e la pesca è gialla e la banana è gialla"
x <- round(rnorm(5,10,1),2)
x

## [1] 8.46 9.70 9.47 9.35 9.94
paste("La somma degli x è",paste(x,collapse = " + ")," = ", sum(x))

## [1] "La somma degli x è 8.46 + 9.7 + 9.47 + 9.35 + 9.94 = 46.92"

```

La funzione cat stampa su schermo o su file e consente l'utilizzo di alcuni caratteri speciali

```
cat(vettore_testo1,vettore_testo2)
```

```
## mela pera pesca banana rossa verde gialla gialla
```

```
cat(vettore_testo1, "\t", vettore_testo2)
```

```
## mela pera pesca banana      rossa verde gialla gialla
```

```
cat(vettore_testo1, "\n", vettore_testo2)
```

```
## mela pera pesca banana
```

```
##  rossa verde gialla gialla
```

#### F.1.7.4 Cicli e Condizioni

I cicli si possono fare con for ma come vedremo si possono aggirare in molti modi

```
for (i in 1:5){  
  cat(i, "; ")  
}
```

```
## 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ;
```

Mentre le condizioni si risolvono con if else

```
a <- 12  
if (a>10) {  
  cat("Hai vinto! \n")  
} else {cat("Hai perso! \n")}
```

```
## Hai vinto!
```

```
a <- 5  
if (a>10) {  
  cat("Hai vinto! \n")  
} else {cat("Hai perso! \n")}
```

```
## Hai perso!
```

anche la funzione ifelse è di aiuto

```
cond <- TRUE  
ifelse(cond, "VERO", "FALSO")
```

```
## [1] "VERO"
```

```
cond <- FALSE  
ifelse(cond, "VERO", "FALSO")
```

```
## [1] "FALSO"
```

### F.1.7.5 Funzioni per Ovviare ai Cicli

R è un interprete e i cicli rallentano molto il funzionamento dei programmi alcune funzioni speciali quali `apply`, `tapply`, `lapply` e `sapply` applicano a diversi tipi di oggetti una funzione. `apply` applica una funzione alle righe o alle colonne di una matrice

```
mat <- matrix(rnorm(12), nrow = 3)
mat

##      [,1]     [,2]     [,3]     [,4]
## [1,] -1.9144 -0.46353 2.087167 -1.64061
## [2,]  1.1766 -1.11592 0.017396 0.45019
## [3,] -1.6650 -0.75082 -1.286301 -0.01856

apply(X = mat, MARGIN = 1, FUN = "sum") # applica a mat per righe la somma
## [1] -1.93133 0.52825 -3.72065

apply(X = mat, MARGIN = 2, FUN = "mean") # applica a mat per colonne la media
## [1] -0.80092 -0.77676  0.27275 -0.40299
```

`tapply` applica una funzione solo su elementi che rispettano una condizione

```
sesto <- c("M", "M", "M", "F", "F")
eta <- c(32.2, 45.6, 65.3, 34.1, 43.2)
tapply(eta, sesso, median) # applica la mediana al gruppo M e al gruppo F

##      F      M
## 38.65 45.60
```

Le funzioni `lapply` e `sapply` (versione semplificata delle prima) applicano una funzione ad una lista o agli elementi di un vettore

```
gruppo1 <- rnorm(5, 9.4, 1.1) # gruppo1 5 estrazioni da una N( 9.4, 1.1^2)
gruppo2 <- rnorm(9, 12.2, 1.2) # gruppo2 9 estrazioni da una N(12.2, 1.2^2)
gruppo3 <- rnorm(7, 11.7, 0.9) # gruppo3 7 estrazioni da una N(11.7, 0.9^2)
campione <- list(gruppo1, gruppo2, gruppo3)
# applica media e varianza ad ogni gruppo:
lapply(campione, FUN = function(x)c(mean(x), var(x)))
```

```
## [[1]]
## [1] 8.7818 1.1357
##
## [[2]]
## [1] 12.6776 2.1178
##
## [[3]]
## [1] 11.8613 1.0098

sapply(campione, FUN = function(x)c(mean(x), var(x))) # come sopra ma in matrice

##      [,1]     [,2]     [,3]
## [1,] 8.7818 12.6776 11.8613
## [2,] 1.1357  2.1178  1.0098
```

### F.1.7.6 Funzioni personalizzate

Le funzioni si possono creare con la funzione `function`

```
funz1 <- function(x) x^2 # funz1 usa x come input e x^2 come output
funz1(3)
```

```
## [1] 9
```

```
funz2 <- function(x,y) { # funz2 usa x e y come input
  risultato <- ifelse(x>y,x+y,"x deve essere maggiore di y!")
  return(risultato)
}
```

```
funz2(2,3)
```

```
## [1] "x deve essere maggiore di y!"
```

```
funz2(3,1)
```

```
## [1] 4
```

Possiamo per esempio creare la funzione che crei la varianza del campione e la SD non corretta

```
var_pop <- function(x) {
  vpop <- mean(x^2)-mean(x)^2 # media dei quadrati meno il quadrato della media
  return(vpop)
}
n <- 10
x <- rnorm(n,mean = 10,sd = 1)
var(x)      # varianza corretta
```

```
## [1] 0.88378
```

```
var_pop(x) # varianza NON corretta
```

```
## [1] 0.7954
```

```
n/(n-1)*var_pop(x) # correzione
```

```
## [1] 0.88378
```

```
sd_pop <- function(x) sqrt(var_pop(x)) # rad. quad. della varianza
sd_pop(x)
```

```
## [1] 0.89185
```

Possiamo anche creare una funzione che calcola un intervallo di confidenza al livello  $1 - \alpha$ , per un  $\alpha$  qualunque

```
## intervallo di confidenza per mu, sigma nota
```

```
idc_mu <- function(mu_obs,sigma,alpha=0.05){
  z_alpha <- qnorm(1-alpha/2) # fisso z_alpha
  SE      <- sigma/sqrt(n) # SE per mu = sigma diviso radice di n

  cat("L'intervallo di confidenza al ",(1-alpha)*100,"% è dato da \n",
      "[",mu_obs," - ",z_alpha," x ",SE," ; ",mu_obs," + ",z_alpha," x ",SE,"] \n",
```

```

" [",mu_obs-z_alpha*SE, " ; ",mu_obs+z_alpha*SE,"] " ,
sep="")}

alpha  <- 0.01      # fisso alpha
mu_obs <- 23.3      # fisso la media del campione
sigma   <- 2.13      # fisso il sigma di popolazione
n       <- 34        # fisso n

idc_mu(mu_obs = mu_obs, sigma = sigma, alpha = alpha)

## L'intervallo di confidenza al 99% è dato da
## [23.3 - 2.5758 x 0.36529 ; 23.3 + 2.5758 x 0.36529]
## [22.359 ; 24.241]

```

[1] R Core Team (2022). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.

[2] JJ Allaire and Yihui Xie and Jonathan McPherson and Javier Luraschi and Kevin Ushey and Aron Atkins and Hadley Wickham and Joe Cheng and Winston Chang and Richard Iannone (2022). rmarkdown: Dynamic Documents for R. R package version 2.14. URL <https://rmarkdown.rstudio.com>.

[3] Yihui Xie and J.J. Allaire and Garrett Grolemund (2018). R Markdown: The Definitive Guide. Chapman and Hall/CRC. ISBN 9781138359338. URL <https://bookdown.org/yihui/rmarkdown>.

[4] Yihui Xie and Christophe Dervieux and Emily Riederer (2020). R Markdown Cookbook. Chapman and Hall/CRC. ISBN 9780367563837. URL <https://bookdown.org/yihui/rmarkdown-cookbook>.



# Funzioni usate nel libro

G

Presento le funzioni che sono state create da me e inserite nel pacchetto `pat.book` per risolvere vari problemi di automazione, dalla creazione dei data set alla soluzione di alcuni problemi.

## G.1 Installazione del pacchetto

Il pacchetto si installa da [github](https://github.com/ix-pat/stat/)

```
devtools::install_github("https://github.com/ix-pat/stat/", build_vignettes = T)
```

Le funzioni restituiscono pezzi di codice markdown come da esempio

```
stat_(1:4)
```

```
\begin{eqnarray*}
\mu &=& \frac{1}{4}(1 + 2 + 3 + 4) = 2.5 \\
\sigma^2 &=& \frac{1}{4}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) - (2.5)^2 = 1.25
\end{eqnarray*}
```

## G.2 Statistica descrittiva

### G.2.1 Media e Varianza

```
media_(1:4) # media dei dati 1,2,3,4
```

$$\mu = \frac{1}{4}(1 + 2 + 3 + 4) = 2.5$$

```
var_(1:4) # varianza dei dati 1,2,3,4
```

$$\sigma^2 = \frac{1}{4}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) - (2.5)^2 = 1.25$$

```
stat_(1:4) # media e varianza insieme (new)
```

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{4}(1 + 2 + 3 + 4) = 2.5 \\ \sigma^2 &= \frac{1}{4}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) - (2.5)^2 = 1.25 \end{aligned}$$

```
stat_(1:4, p = c(2, 4, 5, 1)) # vettore dei pesi p
```

$$\begin{aligned} \mu &= 1 \cdot 0.1667 + 2 \cdot 0.3333 + 3 \cdot 0.4167 + 4 \cdot 0.0833 = 2.417 \\ \sigma^2 &= (1^2 \cdot 0.1667 + 2^2 \cdot 0.3333 + 3^2 \cdot 0.4167 + 4^2 \cdot 0.0833) - (29)^2 = 0.7431 \end{aligned}$$

```
stat_(rep(1:4,times=c(2,4,5,1)),semp = T) # in frazione
```

$$\begin{aligned}
 \mu &= E(X_i) = \sum_{x \in S_X} x P(X = x) \\
 &= 1 \frac{2}{12} + 2 \frac{4}{12} + 3 \frac{5}{12} + 4 \frac{1}{12} \\
 &= 2.417 \\
 \sigma^2 &= V(X_i) = \sum_{x \in S_X} x^2 P(X = x) - \mu^2 \\
 &= \left( 1^2 \frac{2}{12} + 2^2 \frac{4}{12} + 3^2 \frac{5}{12} + 4^2 \frac{1}{12} \right) - (2.417)^2 \\
 &= 0.7431
 \end{aligned}$$

## G.2.2 Istogramma

```
#####
#####
## Funzioni per generare i dati dell'esercizio 1
##
## genera_dati(brk,hhh=NULL,n,nnn=NULL,rand = T)
##
## brk      intervalli (breaks)
## hhh      aspetto presunto
## n        numero totale individui
## nnn      alternativo ad hhh, frequenza da riportare ad n
## rand     i numeri sono casuali?
##
## tabl(x,...)           shortcut personalizzato a kable
##
## x        oggetto da stampare in tabella
##
## ls2e(stat_base(samp,brk))  crea diversi oggetti
## dat2    tabella con intestazioni semplici
## dat3    tabella con intestazioni da stampa
## H.int(x) densità percentuale
## F.int(x) Funzione di ripartizione
## Q.int(p) Inversa della FdR
## x        vettore di valori
## p        vettore di frequenze
## histp(axes=T,...) istogramma
## h.int(x1,x2,...) evidenzia istogramma
## x1      limite inferiore
## x2      limite superiore

set.seed(2)                      # per ottenere sempre la stessa simulazione
n <- 60                           # ampiezza campionaria
```

```

brk  <- c(0,1.5,3,5,7.5,15)      # intervalli (breaks)
hhh  <- c( 2,11,10, 2,1)        # aspetto presunto istogramma

nomex <- "Nome della X"          # nome della X
samp <- genera_dati(
  brk = brk, hhh = hhh, n = n)    # genera i dati dall'istogramma

ls2e(stat_base(samp,brk))        # crea il data set e la tabella dat3

tabl(dat3)

```

| $[x_j, x_{j+1})$ | $n_j$ | $f_j$ | $b_j$  | $h_j$ | $F_j$  | $\bar{x}_j$ | $\bar{x}_j^2$ | $\bar{x}_j n_j$ | $\bar{x}_j^2 n_j$ | $f_j\%$  |
|------------------|-------|-------|--------|-------|--------|-------------|---------------|-----------------|-------------------|----------|
| 0.0              | 1.5   | 3     | 0.0500 | 1.5   | 3.333  | 0.0500      | 0.75          | 0.5625          | 2.25              | 1.688    |
| 1.5              | 3.0   | 19    | 0.3167 | 1.5   | 21.111 | 0.3667      | 2.25          | 5.0625          | 42.75             | 96.188   |
| 3.0              | 5.0   | 23    | 0.3833 | 2.0   | 19.167 | 0.7500      | 4.00          | 16.0000         | 92.00             | 368.000  |
| 5.0              | 7.5   | 6     | 0.1000 | 2.5   | 4.000  | 0.8500      | 6.25          | 39.0625         | 37.50             | 234.375  |
| 7.5              | 15.0  | 9     | 0.1500 | 7.5   | 2.000  | 1.0000      | 11.25         | 126.5625        | 101.25            | 1139.062 |
|                  |       | 60    | 1.0000 | 15.0  |        |             |               | 275.75          | 1839.312          | 100.00   |

```

H.int(2:3)                      # Calcolo della Densità percentuale

```

[1] 21.11 19.17

```

F.int(2:3)                      # Calcolo della Ripartizione

```

[1] 0.1556 0.3667

```

Q.int((0:4)/4)                  # Inverse della Ripartizione

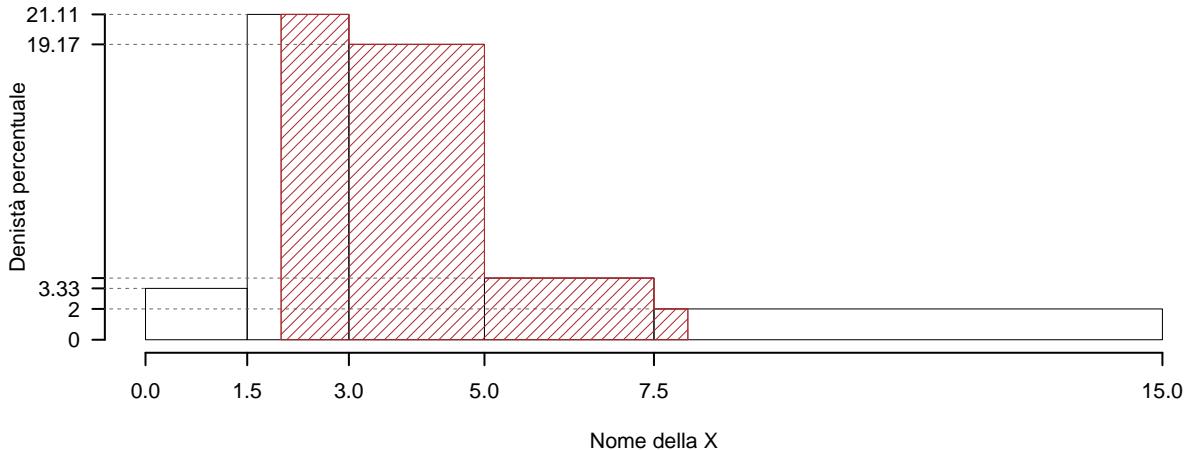
```

[1] 0.000 2.447 3.696 5.000 15.000

```

histp(axes=T)                  # Istogramma
h.int(2:8,col=ared,            # Aree selezionate
      density = 25)

```



```
percentile(p = 0.45)      # Calcolo percentile
```

$$\begin{aligned}
 p &= 0.45, \text{ essendo } F_3 = 0.75 > 0.45 \Rightarrow j_{0.45} = 3 \\
 x_{0.45} &= x_{\inf;3} + \frac{0.45 - F_2}{f_3} \cdot b_3 \\
 &= 3 + \frac{0.45 - 0.3667}{0.3833} \cdot 2 \\
 &= 3.435
 \end{aligned}$$

```
F_print(2,"<") # calcolo della prop inferiore a 2
```

$$\begin{aligned}
 \%(X < 2) &= f_1 \times 100 + (2 - 1.5) \times h_2 \\
 &= (0.05) \times 100 + (0.5) \times 21.11 \\
 &= 0.1556 \times (100) \\
 \#(X < 2) &\approx 9
 \end{aligned}$$

```
F_print(2,>) # calcolo della prop superiore a 2
```

$$\begin{aligned}
 \%(X > 2) &= (3 - 2) \times h_2 + f_3 \times 100 + f_4 \times 100 + f_5 \times 100 \\
 &= (1) \times 21.11 + (0.3833) \times 100 + (0.1) \times 100 + (0.15) \times 100 \\
 &= 0.8444 \times (100) \\
 \#(X > 2) &\approx 51
 \end{aligned}$$

```
F_print(8,>"")
```

$$\begin{aligned}\%(X > 8) &= (15 - 8) \times h_1 \\ &= 7 \times 2 \\ &= 0.14 \times (100) \\ \#(X > 8) &\approx 8\end{aligned}$$

```
F_print(x = 2,verso = "",x2 = 8) # intervallo 2-8
```

$$\begin{aligned}\%(2 < X < 8) &= (3 - 2) \times h_2 + f_3 \times 100 + f_4 \times 100 + (8 - 7.5) \times h_5 \\ &= (1) \times 21.1111 + (0.3833) \times 100 + (0.1) \times 100 + (0.5) \times 2 \\ &= 0.7044 \times (100) \\ \#(2 < X < 8) &\approx 42\end{aligned}$$

## G.3 Probabilità

### G.3.1 Tavole della somma

```
# Somma di due dadi
c1 <- 6
c2 <- 6
re1 <- (two_way(S_1 = 1:c1,S_2 = 1:c2,
                  num1 = rep(1,times=c1),num2 = rep(1,times=c2),
                  size = "\\\footnotesize"))
```

|        | 1; | 1/6  | 2; | 1/6  | 3; | 1/6  | 4;  | 1/6  | 5;  | 1/6  | 6;  | 1/6  |
|--------|----|------|----|------|----|------|-----|------|-----|------|-----|------|
| 1; 1/6 | 2; | 1/36 | 3; | 1/36 | 4; | 1/36 | 5;  | 1/36 | 6;  | 1/36 | 7;  | 1/36 |
| 2; 1/6 | 3; | 1/36 | 4; | 1/36 | 5; | 1/36 | 6;  | 1/36 | 7;  | 1/36 | 8;  | 1/36 |
| 3; 1/6 | 4; | 1/36 | 5; | 1/36 | 6; | 1/36 | 7;  | 1/36 | 8;  | 1/36 | 9;  | 1/36 |
| 4; 1/6 | 5; | 1/36 | 6; | 1/36 | 7; | 1/36 | 8;  | 1/36 | 9;  | 1/36 | 10; | 1/36 |
| 5; 1/6 | 6; | 1/36 | 7; | 1/36 | 8; | 1/36 | 9;  | 1/36 | 10; | 1/36 | 11; | 1/36 |
| 6; 1/6 | 7; | 1/36 | 8; | 1/36 | 9; | 1/36 | 10; | 1/36 | 11; | 1/36 | 12; | 1/36 |

E ricaviamo la distribuzione di, X

| X    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| P(X) | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

Calcoliamo valore atteso e varianza

$$\begin{aligned}\mu &= E(X_i) = \sum_{x \in S_X} x P(X = x) \\ &= 2 \frac{1}{36} + 3 \frac{2}{36} + 4 \frac{3}{36} + 5 \frac{4}{36} + 6 \frac{5}{36} + 7 \frac{6}{36} + 8 \frac{5}{36} + 9 \frac{4}{36} + 10 \frac{3}{36} + 11 \frac{2}{36} + 12 \frac{1}{36}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 7 \\
\sigma^2 &= V(X_i) = \sum_{x \in S_X} x^2 P(X = x) - \mu^2 \\
&= \left( 2^2 \frac{1}{36} + 3^2 \frac{2}{36} + 4^2 \frac{3}{36} + 5^2 \frac{4}{36} + 6^2 \frac{5}{36} + 7^2 \frac{6}{36} + 8^2 \frac{5}{36} + 9^2 \frac{4}{36} + 10^2 \frac{3}{36} + 11^2 \frac{2}{36} + 12^2 \frac{1}{36} \right) - (7)^2 \\
&= 5.833
\end{aligned}$$

```
# Differenza di due dadi
res<-two_way(S_1 = 1:c1,S_2 = 1:c2,size = "\footnotesize",
               num1 = numeric(c1)+1,num2 = numeric(c2)+1,op = `-`)
```

|        | 1; | 1/6  | 2;  | 1/6  | 3;  | 1/6  | 4;  | 1/6  | 5;  | 1/6  | 6;  | 1/6  |
|--------|----|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|------|
| 1; 1/6 | 0; | 1/36 | -1; | 1/36 | -2; | 1/36 | -3; | 1/36 | -4; | 1/36 | -5; | 1/36 |
| 2; 1/6 | 1; | 1/36 | 0;  | 1/36 | -1; | 1/36 | -2; | 1/36 | -3; | 1/36 | -4; | 1/36 |
| 3; 1/6 | 2; | 1/36 | 1;  | 1/36 | 0;  | 1/36 | -1; | 1/36 | -2; | 1/36 | -3; | 1/36 |
| 4; 1/6 | 3; | 1/36 | 2;  | 1/36 | 1;  | 1/36 | 0;  | 1/36 | -1; | 1/36 | -2; | 1/36 |
| 5; 1/6 | 4; | 1/36 | 3;  | 1/36 | 2;  | 1/36 | 1;  | 1/36 | 0;  | 1/36 | -1; | 1/36 |
| 6; 1/6 | 5; | 1/36 | 4;  | 1/36 | 3;  | 1/36 | 2;  | 1/36 | 1;  | 1/36 | 0;  | 1/36 |

E ricaviamo la distribuzione di, X

| X    | -5   | -4   | -3   | -2   | -1   | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| P(X) | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

Calcoliamo valore atteso e varianza

$$\begin{aligned}
\mu &= E(X_i) = \sum_{x \in S_X} x P(X = x) \\
&= (-5) \frac{1}{36} + (-4) \frac{2}{36} + (-3) \frac{3}{36} + (-2) \frac{4}{36} + (-1) \frac{5}{36} + 0 \frac{6}{36} + 1 \frac{5}{36} + 2 \frac{4}{36} + 3 \frac{3}{36} + 4 \frac{2}{36} + 5 \frac{1}{36} \\
&= 0 \\
\sigma^2 &= V(X_i) = \sum_{x \in S_X} x^2 P(X = x) - \mu^2 \\
&= \left( (-5)^2 \frac{1}{36} + (-4)^2 \frac{2}{36} + (-3)^2 \frac{3}{36} + (-2)^2 \frac{4}{36} + (-1)^2 \frac{5}{36} + 0^2 \frac{6}{36} + 1^2 \frac{5}{36} + 2^2 \frac{4}{36} + 3^2 \frac{3}{36} + 4^2 \frac{2}{36} + 5^2 \frac{1}{36} \right) - (0)^2 \\
&= 5.833
\end{aligned}$$

```
res[[1]]
```

```
[1] -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
```

```
names(res)
```

```
[1] ``S_3" ``num3" ``den3" ``urn"
```

### G.3.2 Binomiale

```
bin_dis(x1 = 2, n = 5, pp = 0.34)
```

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 2) &= \binom{5}{0} 0.34^0 (1 - 0.34)^{5-0} + \binom{5}{1} 0.34^1 (1 - 0.34)^{5-1} + \binom{5}{2} 0.34^2 (1 - 0.34)^{5-2} \\
 &= 0.1252 + 0.3226 + 0.3323 \\
 &= 0.7801
 \end{aligned}$$

```
bin_dis(x1 = 4, n = 5, pp = 0.34, verso = "\geq")
```

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 4) &= \binom{5}{4} 0.34^4 (1 - 0.34)^{5-4} + \binom{5}{5} 0.34^5 (1 - 0.34)^{5-5} \\
 &= 0.0441 + 0.0045 \\
 &= 0.0486
 \end{aligned}$$

```
bin_dis(x1 = 2, n = 5, pp = 0.34, comp = T)
```

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 2) &= 1 - P(X > 2) \\
 &= 1 - \left( \binom{5}{3} 0.34^3 (1 - 0.34)^{5-3} + \binom{5}{4} 0.34^4 (1 - 0.34)^{5-4} + \binom{5}{5} 0.34^5 (1 - 0.34)^{5-5} \right) \\
 &= 1 - (0.1712 + 0.0441 + 0.0045) \\
 &= 1 - 0.2198 \\
 &= 0.7802
 \end{aligned}$$

```
bin_dis(x1 = 2, n = 5, pp = 0.34, sing = T)
```

$$\begin{aligned}
 P(X = 2) &= \binom{5}{2} 0.34^2 (1 - 0.34)^{5-2} \\
 &= 10 \times 0.34^2 (1 - 0.34)^3 \\
 &= 0.3323
 \end{aligned}$$

### G.3.3 Poisson

```
pois_dis(x1 = 2, ll = 1.5)
```

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 2) &= \frac{1.5^0}{0!} e^{-1.5} + \frac{1.5^1}{1!} e^{-1.5} + \frac{1.5^2}{2!} e^{-1.5} \\
 &= 0.2231 + 0.3347 + 0.251 \\
 &= 0.8088
 \end{aligned}$$

```
pois_dis(x1 = 2, ll = 1.5, verso = "\geq")
```

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\
 &= 1 - \left( \frac{1.5^0}{0!} e^{-1.5} + \frac{1.5^1}{1!} e^{-1.5} \right) \\
 &= 1 - (0.2231 + 0.3347) \\
 &= 1 - 0.5578 \\
 &= 0.4422
 \end{aligned}$$

```
pois_dis(x1 = 2, ll = 1.5, sing = T)
```

$$\begin{aligned}
 P(X = 2) &= \frac{1.5^2}{2!} e^{-1.5} \\
 &= 1.125 \times 0.2231 \\
 &= 0.251
 \end{aligned}$$

#### G.3.4 Normale

```
norm_int(x1 = 1, verso = "<", mm = 3, ss = 2.2, vnam = "\theta",
          mu = "\mu_\theta", sigma = "\sigma_\theta")
```

$$\begin{aligned}
 P(\theta < 1) &= P\left(\frac{\theta - \mu_\theta}{\sigma_\theta} < \frac{1 - 3}{\sqrt{2.2}}\right) \\
 &= P(Z < -1.35) \\
 &= 1 - \Phi(1.35) \\
 &= 0.0885
 \end{aligned}$$

```
norm_int(x1 = 4, verso = "<", mm = 3, ss = 2.2, vnam = "X",
          mu = "\psi", sigma = "\tau")
```

$$\begin{aligned}
 P(X < 4) &= P\left(\frac{X - \psi}{\tau} < \frac{4 - 3}{\sqrt{2.2}}\right) \\
 &= P(Z < 0.67) \\
 &= \Phi(0.67) \\
 &= 0.7486
 \end{aligned}$$

```
norm_int(x1 = 1,verso = ">",mm = 3,ss = 2.2,vnam = "Y",
          mu = "\mu_Y",sigma = "\sigma_Y")
```

$$\begin{aligned}
 P(Y > 1) &= P\left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} > \frac{1 - 3}{\sqrt{2.2}}\right) \\
 &= P(Z > -1.35) \\
 &= 1 - P(Z < -1.35) \\
 &= 1 - (1 - \Phi(1.35)) \\
 &= 0.9115
 \end{aligned}$$

```
norm_int(x1 = 4,verso = ">",mm = 3,ss = 2.2,)
```

$$\begin{aligned}
 P(X > 4) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{4 - 3}{\sqrt{2.2}}\right) \\
 &= P(Z > 0.67) \\
 &= 1 - P(Z < 0.67) \\
 &= 1 - \Phi(0.67) \\
 &= 0.2514
 \end{aligned}$$

```
norm_int(x1 = 1,verso = ">",mm = -3,ss = 2.2)
```

$$\begin{aligned}
 P(X > 1) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{1 - (-3)}{\sqrt{2.2}}\right) \\
 &= P(Z > 2.7) \\
 &= 1 - P(Z < 2.7) \\
 &= 1 - \Phi(2.7) \\
 &= 0.0035
 \end{aligned}$$

```
norm_int(x1 = 1,x2=2,mm = 3,ss = 2.2,verso = NULL)
```

$$\begin{aligned}
P(1 < X \leq 2) &= P\left(\frac{1-3}{\sqrt{2.2}} < \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{2-3}{\sqrt{2.2}}\right) \\
&= P(-1.35 < Z \leq -0.67) \\
&= \Phi(-0.67) - \Phi(-1.35) \\
&= (1 - \Phi(0.67)) - (1 - \Phi(1.35)) \\
&= (1 - 0.7486) - (1 - 0.9115) \\
&= 0.1629
\end{aligned}$$

```
norm_int(x1 = 1,x2=2,mm = -3,ss = 2.2,verso = NULL)
```

$$\begin{aligned}
P(1 < X \leq 2) &= P\left(\frac{1-(-3)}{\sqrt{2.2}} < \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{2-(-3)}{\sqrt{2.2}}\right) \\
&= P(2.7 < Z \leq 3.37) \\
&= \Phi(3.37) - \Phi(2.7) \\
&= 0.9996 - 0.9965 \\
&= 0.0031
\end{aligned}$$

```
norm_int(x1 = -1,x2=2,mm = -3,ss = 2.2,verso = NULL)
```

$$\begin{aligned}
P(-1 < X \leq 2) &= P\left(\frac{-1-(-3)}{\sqrt{2.2}} < \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{2-(-3)}{\sqrt{2.2}}\right) \\
&= P(1.35 < Z \leq 3.37) \\
&= \Phi(3.37) - \Phi(1.35) \\
&= 0.9996 - 0.9115 \\
&= 0.0881
\end{aligned}$$

### G.3.5 TLC

```
tlc(tipo = "somma",x1 = 90,x2 = 110,verso = NULL,mu = 1,s2 = 1,n = 100)
```

#### Teorema del Limite Centrale (somma VC qualunque)

Siano  $X_1, \dots, X_n, n = 100$  VC IID, tc  $E(X_i) = \mu = 1$  e  $V(X_i) = \sigma^2 = 1, \forall i$ , posto:

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

allora:

$$\begin{aligned} S_n &\underset{a}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2) \\ &\sim N(100 \cdot 1, 100 \cdot 1) \\ &\sim N(100, 100) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(90 < S_n \leq 110) &= P\left(\frac{90 - 100}{\sqrt{100}} < \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq \frac{110 - 100}{\sqrt{100}}\right) \\ &= P(-1 < Z \leq 1) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) \\ &= 0.8413 - (1 - 0.8413) \\ &= 0.6826 \end{aligned}$$

```
tlc(tipo = "media", x1 = 9, x2 = 11, verso = NULL, mu = 10, s2 = 1, n = 100)
```

#### Teorema del Limite Centrale (media VC qualunque)

Siano  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n = 100$  VC IID, tc  $E(X_i) = \mu = 10$  e  $V(X_i) = \sigma^2 = 1$ ,  $\forall i$ , posto:

$$\bar{X} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

allora:

$$\begin{aligned} \bar{X} &\underset{a}{\sim} N(\mu, \sigma^2/n) \\ &\sim N\left(10, \frac{1}{100}\right) \\ &\sim N(10, 0.01) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(9 < \bar{X} \leq 11) &= P\left(\frac{9 - 10}{\sqrt{0.01}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq \frac{11 - 10}{\sqrt{0.01}}\right) \\ &= P(-10 < Z \leq 10) \\ &= \Phi(10) - \Phi(-10) \\ &= \Phi(10) - (1 - \Phi(10)) \\ &= 1 - (1 - 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

```
tlc(tipo = "prop", x1 = .1, verso = ">", mu = .2, n = 50)
```

**Teorema del Limite Centrale (proporzione)**

Siano  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n = 50$  VC IID, tc  $X_i \sim \text{Ber}(\pi = 0.2)$ ,  $\forall i$ , posto:

$$\hat{\pi} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

allora:

$$\begin{aligned}\hat{\pi} &\underset{a}{\sim} N(\pi, \pi(1-\pi)/n) \\ &\sim N\left(0.2, \frac{0.2 \cdot (1-0.2)}{50}\right) \\ &\sim N(0.2, 0.0032)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\hat{\pi} > 0.1) &= P\left(\frac{\hat{\pi} - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)/n}} > \frac{0.1 - 0.2}{\sqrt{0.0032}}\right) \\ &= P(Z > -1.77) \\ &= 1 - P(Z < -1.77) \\ &= 1 - (1 - \Phi(1.77)) \\ &= 0.9616\end{aligned}$$

**G.4 Inferenza****G.4.1 Intervalli di Confidenza**

```
idc(xm = 10, sd = 1.1, alpha = .05, n = 15, dist_ = "z")
```

$1 - \alpha = 0.95$  e quindi  $\alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025$

$$\begin{aligned}Idc : \quad \hat{\mu} &\pm z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &10 \pm 1.96 \times \frac{1.1}{\sqrt{15}} \\ &10 \pm 1.96 \times 0.284 \\ &[9.443, 10.56]\end{aligned}$$

```
idc(xm = 10, sd = 1.1, alpha = .05, n = 15, dist_ = "t")
```

$1 - \alpha = 0.95$  e quindi  $\alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025$

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{15}{14}} \cdot 1.1 = 1.1386$$

$$Idc : \quad \hat{\mu} \pm t_{n-1; \alpha/2} \times \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$10 \pm 2.145 \times \frac{1.1386}{\sqrt{15}}$$

$$10 \pm 2.145 \times 0.294$$

$$[9.369, 10.63]$$

```
idc(xm = 10, alpha = .05, n = 15, dist_ = "z")
```

$1 - \alpha = 0.95$  e quindi  $\alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025$

$$\hat{\pi} = \frac{S_n}{n} = \frac{10}{15} = 0.6667$$

$$Idc : \quad \hat{\pi} \pm z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1 - \hat{\pi})}{n}}$$

$$0.6667 \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{0.6667(1 - 0.6667)}{15}}$$

$$0.6667 \pm 1.96 \times 0.1217$$

$$[0.4281, 0.9052]$$

```
idc(xm = 7.4, sd = sqrt(7.4), alpha = .05, n = 75, dist_ = "z", mus = "\lambda",
     ss = "\sqrt{\lambda}")
```

$1 - \alpha = 0.95$  e quindi  $\alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025$

$$Idc : \quad \lambda \pm z_{\alpha/2} \times \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{n}}$$

$$7.4 \pm 1.96 \times \frac{2.72029410174709}{\sqrt{75}}$$

$$7.4 \pm 1.96 \times 0.3141$$

$$[6.784, 8.016]$$

## G.4.2 Test

```
ztest_mu(muh = 0, s = 1, 10, mu0 = 1, h1 = "\neq", alpha = 0.05)
```

**Test  $Z$  per una media, variazna nota**

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 1 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 = 1 \end{cases}$$

**B** SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST,  $Z$

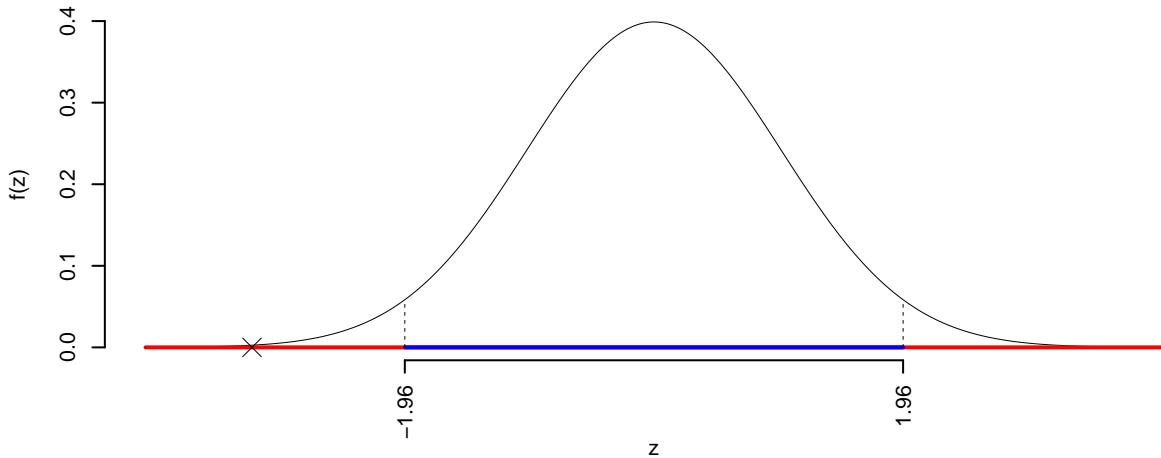
$\sigma^2$  di  $P$  è nota:  $\Rightarrow$  z-Test.

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} &\sim N(0, 1) \\ z_{\text{obs}} &= \frac{(0 - 1)}{1/\sqrt{10}} = -3.162. \end{aligned}$$

**C** CONCLUSIONE

La significatività è  $\alpha = 0.05$ , dalle tavole osserviamo  $z_{0.025} = 1.96$ .

Essendo  $|z_{\text{obs}}| = 3.1623 > z_{0.025} = 1.96$  allora **rifiuto**  $H_0$  al 5%.



Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(|Z| > |-3.16|) = 2P(Z > 3.16) = 0.001565$$

$$0.001 < p_{\text{value}} = 0.001565 \leq 0.01$$

```
ztest_mu(mu = 0, s = 1, 10, mu0 = 1, h1 = "\neq")
```

Test  $Z$  per una media, variazna nota

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 1 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 = 1 \end{cases}$$

B SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST,  $Z$

$\sigma^2$  di  $P$  è nota:  $\Rightarrow$  z-Test.

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} &\sim N(0, 1) \\ z_{\text{obs}} &= \frac{(0 - 1)}{1/\sqrt{10}} = -3.162. \end{aligned}$$

C CONCLUSIONE

Siccome  $H_1$  è bilaterale, considereremo  $\alpha/2$ , anziché  $\alpha$

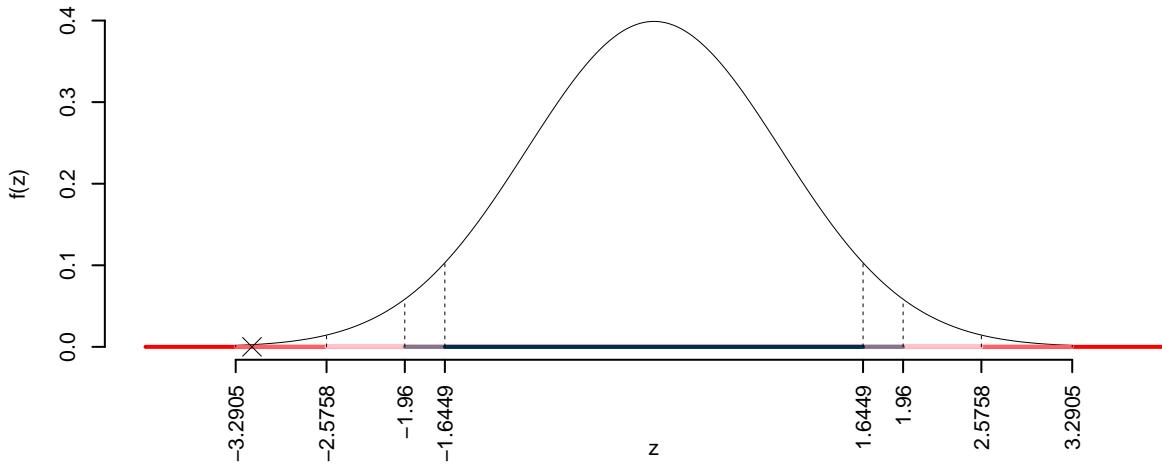
$\alpha = 0.1, 0.05, 0.01, 0.001$  e quindi  $\alpha/2 = 0.05, 0.025, 0.005, 0.0005$

I valori critici sono

$$z_{0.05} = 1.6449; z_{0.025} = 1.96; z_{0.005} = 2.5758; z_{0.0005} = 3.2905$$

Siccome  $2.5758 < |z_{\text{obs}}| = 3.1623 < 3.2905$ , quindi **rifiuto**  $H_0$  all'1%,

$0.001 < p_{\text{value}} < 0.01$ , molto significativo \*\*.



Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(|Z| > |-3.16|) = 2P(Z > 3.16) = 0.001565$$

$$0.001 < p_{\text{value}} = 0.001565 \leq 0.01$$

```
ztest_mu(mu = 0, s = 1,10, mu0 = 1, h1 = "\neq", pv_only = T)
```

### Test $Z$ per una media, variazna nota

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 1 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 = 1 \end{cases}$$

B SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST,  $Z$

$\sigma^2$  di  $P$  è nota:  $\Rightarrow$  z-Test.

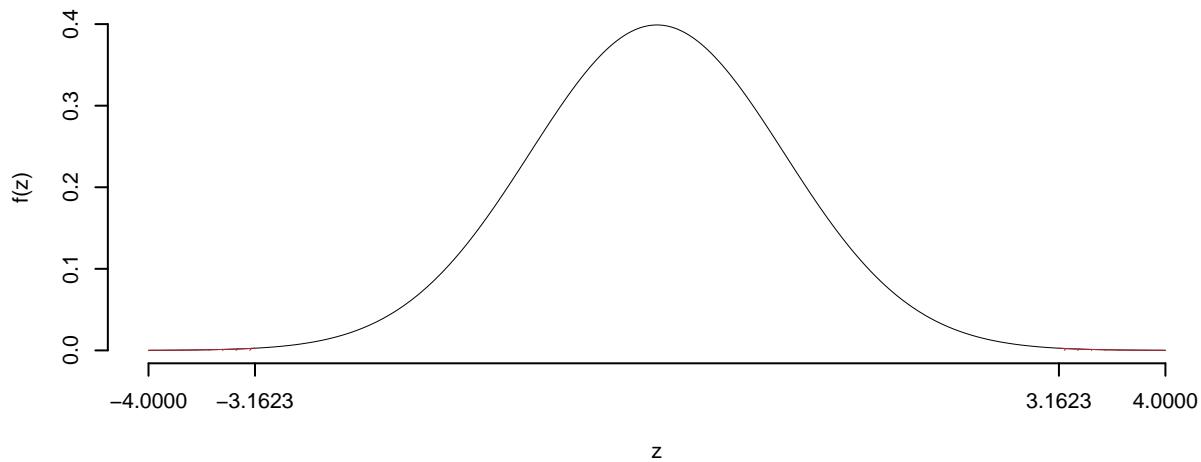
$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} &\sim N(0, 1) \\ z_{\text{obs}} &= \frac{(0 - 1)}{1/\sqrt{10}} = -3.162. \end{aligned}$$

C CONCLUSIONE

Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(|Z| > |-3.16|) = 2P(Z > 3.16) = 0.001565$$

$$0.001 < p_{\text{value}} = 0.001565 \leq 0.01$$



**Rifiuto  $H_0$  all'1%,**

$0.001 < p_{\text{value}} < 0.01$ , molto significativo \*\*.

```
ttest_mu(mu0 = 0, sh = 1, n = 10, mu0 = 1, h1 = "<", alpha = 0.01)
```

**Test  $t$  per una media, varianza incognita**

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 1 \\ H_1 : \mu < \mu_0 = 1 \end{cases}$$

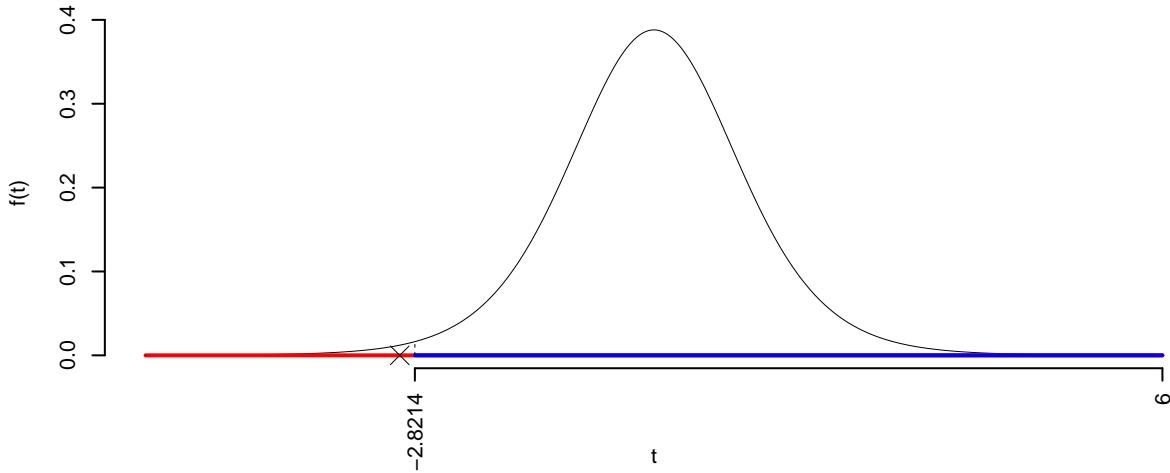
$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{10}{10-1}} \times 1 = 1.054$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} &\sim t_{n-1} \\ t_{\text{obs}} &= \frac{(0-1)}{1.054/\sqrt{10}} = -3. \end{aligned}$$

C CONCLUSIONE

La significatività è  $\alpha = 0.01$ , dalle tavole osserviamo  $t_{10-1;0.01} = -2.8214$ .

Essendo  $t_{\text{obs}} = -3 < t_{10-1;0.01} = -2.8214$  allora **rifiuto**  $H_0$  al 1%.



Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(T_{10-1} < -3) = 0.007478$$

Attenzione il calcolo del  $p_{\text{value}}$  con la  $T$  è puramente illustrativo e non può essere riprodotto senza una calcolatrice statistica adeguata.

$$0.001 < p_{\text{value}} = 0.007478 \leq 0.01$$

```
ttest_mu(mu = 0, sh = 1, n = 10, mu0 = 1, h1 = "<")
```

**Test  $t$  per una media, varianza incognita**

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 1 \\ H_1 : \mu < \mu_0 = 1 \end{cases}$$

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{10}{10-1}} \times 1 = 1.054$$

$$\frac{\hat{\mu} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

$$t_{\text{obs}} = \frac{(0 - 1)}{1.054/\sqrt{10}} = -3.$$

C CONCLUSIONE

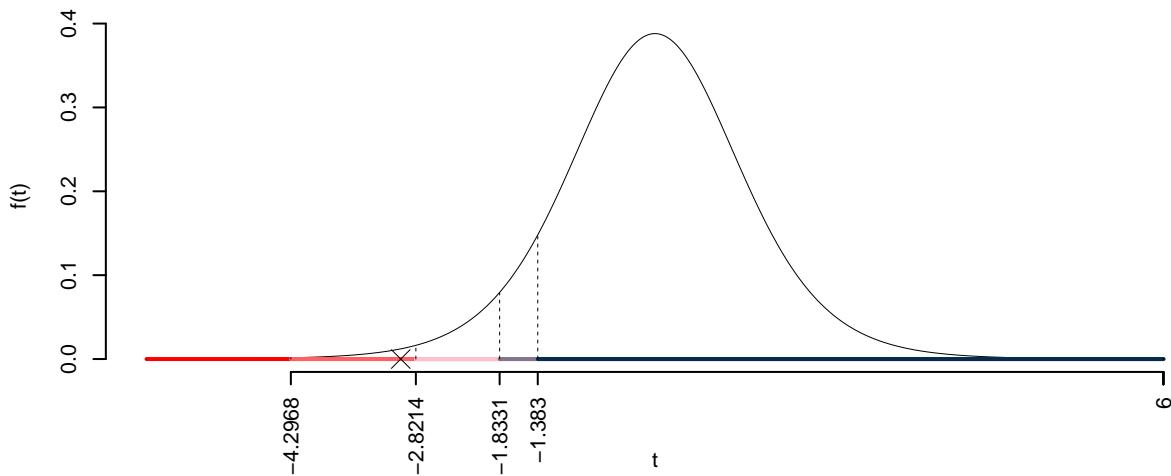
Consideriamo  $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01, 0.001$

I valori critici sono

$$t_{10-1;0.001} = -4.2968; t_{10-1;0.01} = -2.8214; t_{10-1;0.05} = -1.8331; t_{10-1;0.1} = -1.383$$

Siccome  $-4.2968 < t_{\text{obs}} = -3 < -2.8214$ , quindi **rifiuto**  $H_0$  all'1%,

$0.001 < p_{\text{value}} < 0.01$ , *molto significativo* \*\*.



Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(T_{10-1} < -3) = 0.007478$$

Attenzione il calcolo del  $p_{\text{value}}$  con la  $T$  è puramente illustrativo e non può essere riprodotto senza una calcolatrice statistica adeguata.

$$0.001 < p_{\text{value}} = 0.007478 \leq 0.01$$

```
ttest_mu(mu0 = 0, sh = 1, n = 10, mu0 = 1, h1 = "<", pv_only = T, um="cm")
```

**Test  $t$  per una media, varianza incognita**

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 1\text{cm} \\ H_1 : \mu < \mu_0 = 1\text{cm} \end{cases}$$

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{10}{10-1}} \times 1 = 1.054$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} &\sim t_{n-1} \\ t_{\text{obs}} &= \frac{(0-1)}{1.054/\sqrt{10}} = -3. \end{aligned}$$

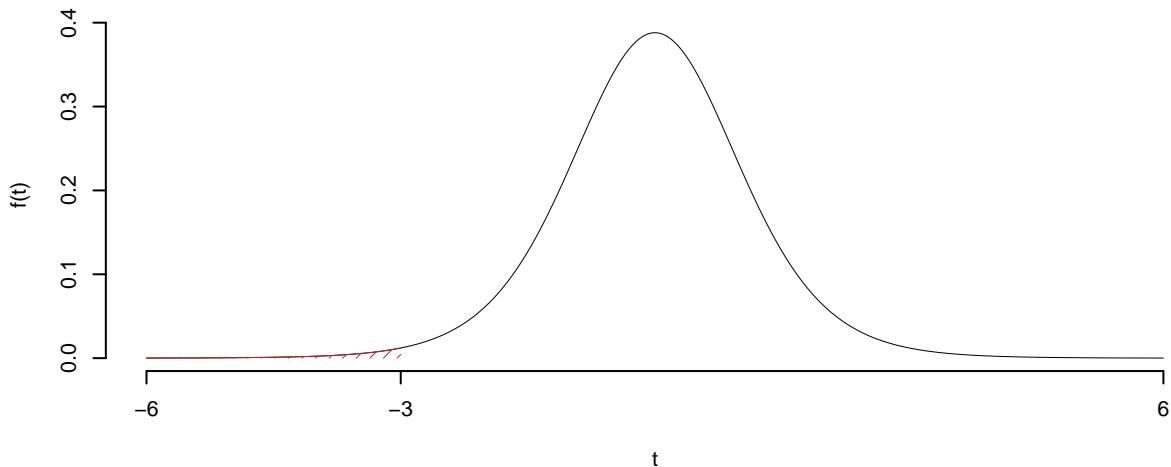
C CONCLUSIONE

Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(T_{10-1} < -3) = 0.007478$$

Attenzione il calcolo del  $p_{\text{value}}$  con la  $T$  è puramente illustrativo e non può essere riprodotto senza una calcolatrice statistica adeguata.

$$0.001 < p_{\text{value}} = 0.007478 \leq 0.01$$



**Rifiuto**  $H_0$  all'1%,

$0.001 < p_{\text{value}} < 0.01$ , molto significativo \*\*.

```
ztest_pi(sn = 60, n = 100, p0 = .5, h1 = ">", alpha = 0.05)
```

### Test $Z$ per una proporzione

La stima

$$\hat{\pi} = \frac{60}{100} = 0.6$$

#### A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \pi = \pi_0 = 0.5 \\ H_1 : \pi > \pi_0 = 0.5 \end{cases}$$

#### B SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST, $Z$ Test Binomiale per $n$ grande: $\Rightarrow$ z-Test.

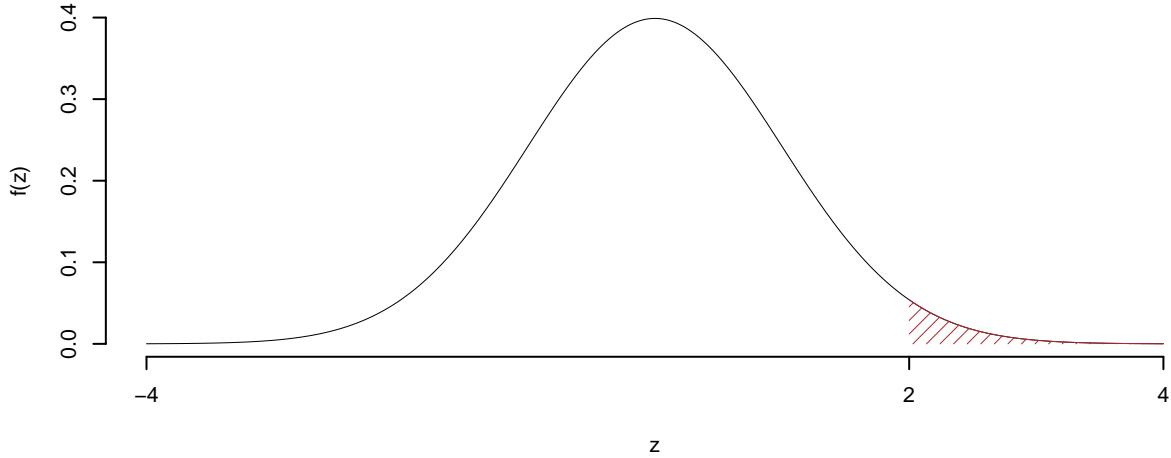
$$\begin{aligned} \frac{\hat{\pi} - \pi_0}{\sqrt{\pi_0(1 - \pi_0)/n}} &\sim N(0, 1) \\ z_{\text{obs}} &= \frac{(0.6 - 0.5)}{\sqrt{0.5(1 - 0.5)/100}} = 2. \end{aligned}$$

#### C CONCLUSIONE

Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(Z > 2) = 0.022750$$

$$0.01 < p_{\text{value}} = 0.022750 \leq 0.05$$



Indecisione sul rifiuto di  $H_0$  al 10%,

$0.05 < p_{\text{value}} < 0.1$ , marginalmente significativo  $\square$ .

```
test_2c(mu1 = 11, mu2 = 12, s1h = 1.1, s2h = 1.2, n1 = 10, n2 = 12,
        h1 = "\\\nneq", et = T)
```

### Test $t$ per due medie, (eterogeneità)

$\boxed{\text{A}}$  FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B \\ H_1 : \mu_A \neq \mu_B \end{cases}$$

$\boxed{\text{B}}$  SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST,  $T$

$$S_A^2 = \frac{n_A}{n_A - 1} \hat{\sigma}_A^2 = \frac{10}{10 - 1} 1.1^2 = 1.344 \quad S_B^2 = \frac{n_B}{n_B - 1} \hat{\sigma}_B^2 = \frac{12}{12 - 1} 1.2^2 = 1.571$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}} &\sim t_{n_A + n_B - 2} \\ t_{\text{obs}} &= \frac{(11 - 12)}{\sqrt{\frac{1.344}{10} + \frac{1.571}{12}}} = -1.941. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{C}}$  CONCLUSIONE

Siccome  $H_1$  è bilaterale, considereremo  $\alpha/2$ , anziché  $\alpha$

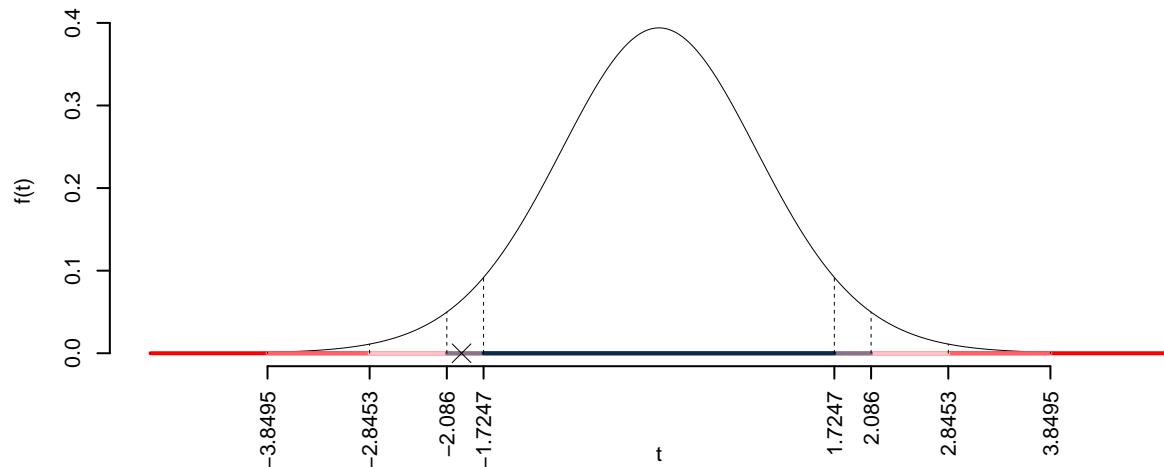
$$\alpha = 0.1, 0.05, 0.01, 0.001 \text{ e quindi } \alpha/2 = 0.05, 0.025, 0.005, 0.0005$$

I valori critici sono

$$t_{22-2;0.05} = 1.7247; t_{22-2;0.025} = 2.086; t_{22-2;0.005} = 2.8453; t_{22-2;0.0005} = 3.8495$$

Siccome  $1.7247 < |t_{\text{obs}}| = 1.9413 < 2.086$ , indecisione sul rifiuto di  $H_0$  al 10%,

$0.05 < p_{\text{value}} < 0.1$ , marginalmente significativo  $\square$ .



Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(|T_{22-2}| > |-1.94|) = 2P(T_{22-2} > 1.94) = 0.066448$$

Attenzione il calcolo del  $p_{\text{value}}$  con la  $T$  è puramente illustrativo e non può essere riprodotto senza una calcolatrice statistica adeguata.

$$0.05 < p_{\text{value}} = 0.066448 \leq 0.1$$

```
test_2c(mu1 = 11, mu2 = 12, s1h = 1.1, s2h = 1.2, n1 = 10, n2 = 12,
h1 = "\nneq", alpha = .05, et = F)
```

**Test  $T$  per due medie, (omogeneità)**

$\square$  A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B \\ H_1 : \mu_A \neq \mu_B \end{cases}$$

**[B] SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST,  $T$**

L'ipotesi è di omogeneità e quindi calcoliamo:

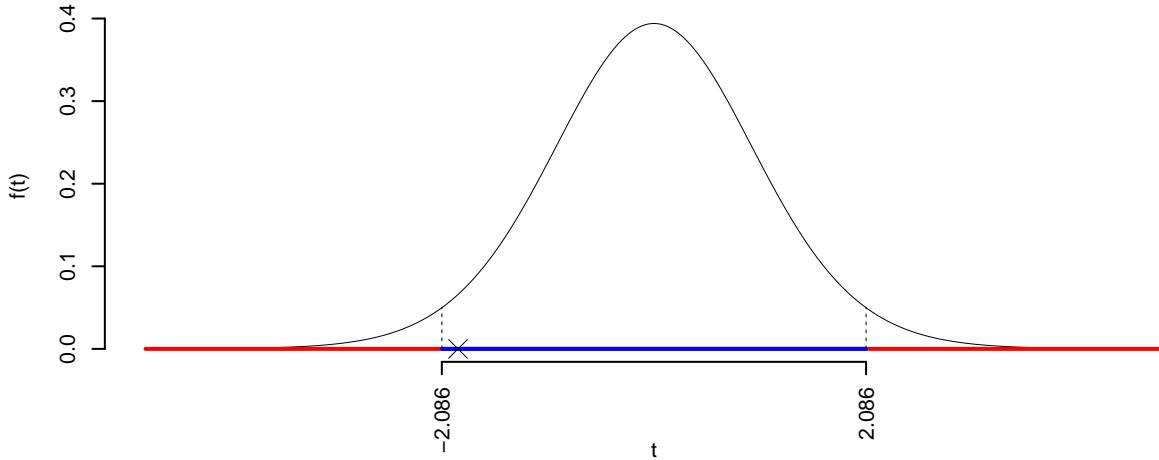
$$S_p^2 = \frac{n_A \hat{\sigma}_A^2 + n_B \hat{\sigma}_B^2}{n_A + n_B - 2} = \frac{10 \cdot 1.1^2 + 12 \cdot 1.2^2}{10 + 12 - 2} = 1.469$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_A} + \frac{S_p^2}{n_B}}} &\sim t_{n_A + n_B - 2} \\ t_{\text{obs}} &= \frac{(11 - 12)}{\sqrt{\frac{1.469}{10} + \frac{1.469}{12}}} = -1.927. \end{aligned}$$

**[C] CONCLUSIONE**

La significatività è  $\alpha = 0.05$ , dalle tavole osserviamo  $t_{22-2;0.025} = 2.086$ .

Essendo  $|t_{\text{obs}}| = 1.9269 < t_{22-2;0.025} = 2.086$  allora **non** rifiuto  $H_0$  al 5%.



Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(|T_{22-2}| > |-1.93|) = 2P(T_{22-2} > 1.93) = 0.068315$$

Attenzione il calcolo del  $p_{\text{value}}$  con la  $T$  è puramente illustrativo e non può essere riprodotto senza una calcolatrice statistica adeguata.

$$0.05 < p_{\text{value}} = 0.068315 \leq 0.1$$

```
test_2c(mu1 = 11, mu2 = 12, s1h = F, s2h = NULL, n1 = 50, n2 = 60,
h1 = "\nneq", alpha = .05, et = T)
```

### Test $Z$ per due proporzioni

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \pi_A = \pi_B \\ H_1 : \pi_A \neq \pi_B \end{cases}$$

B SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST,  $Z$

$$\hat{\pi}_A = \frac{s_A}{n_A} = \frac{11}{50} = 0.22 \quad \hat{\pi}_B = \frac{s_B}{n_B} = \frac{12}{60} = 0.2$$

Calcoliamo la proporzione comune sotto  $H_0$

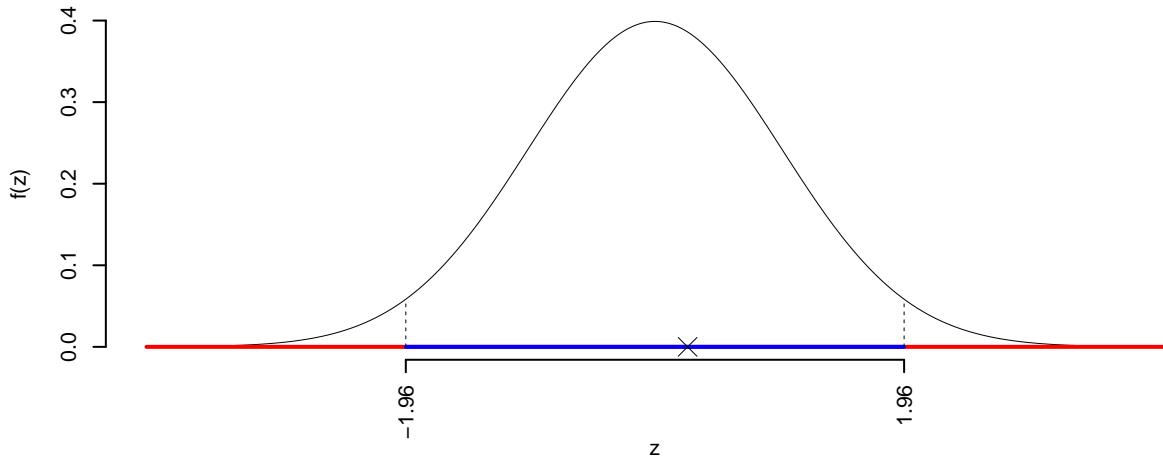
$$\pi_C = \frac{s_A + s_B}{n_A + n_B} = \frac{23}{110} = 0.2091$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\pi}_A - \hat{\pi}_B}{\sqrt{\frac{\pi_C(1-\pi_C)}{n_A} + \frac{\pi_C(1-\pi_C)}{n_B}}} &\sim N(0, 1) \\ z_{\text{obs}} &= \frac{(0.22 - 0.2)}{\sqrt{\frac{0.2091(1-0.2091)}{50} + \frac{0.2091(1-0.2091)}{60}}} = 0.2568. \end{aligned}$$

C CONCLUSIONE

La significatività è  $\alpha = 0.05$ , dalle tavole osserviamo  $z_{0.025} = 1.96$ .

Essendo  $|z_{\text{obs}}| = 0.2568 < z_{0.025} = 1.96$  allora **non** rifiuto  $H_0$  al 5%.



Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(|Z| > |0.26|) = 2P(Z > 0.26) = 0.797302$$

$$0.1 < p_{\text{value}} = 0.797302 \leq 1$$

```
ttest_2c_et(mu1 = 11, mu2 = 12, s1h = 1.1, s2h = 1.2, n1 = 10, n2 = 12,
h1 = "\neq", alpha = .05)
```

### Test $t$ per due medie, (eterogeneità)

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu_A = \mu_B \\ H_1 : \mu_A \neq \mu_B \end{cases}$$

B SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST,  $T$

$$S_1^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} \hat{\sigma}_1^2 = \frac{10}{10 - 1} 1.1^2 = 1.344 \quad S_2^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1} \hat{\sigma}_2^2 = \frac{12}{12 - 1} 1.2^2 = 1.571$$

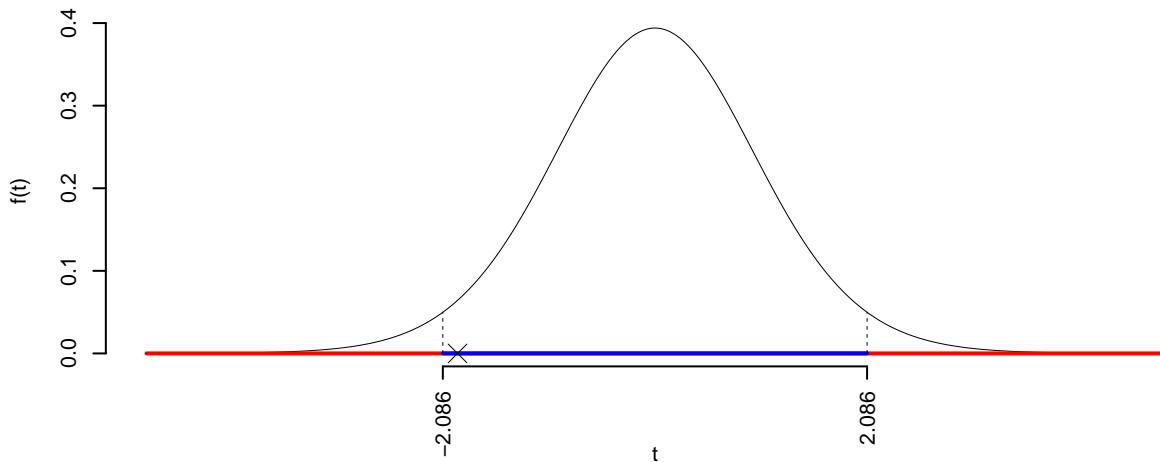
$$\frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2}$$

$$t_{\text{obs}} = \frac{(11 - 12)}{\sqrt{\frac{1.344}{10} + \frac{1.571}{12}}} = -1.941.$$

C CONCLUSIONE

La significatività è  $\alpha = 0.05$ , dalle tavole osserviamo  $t_{22-2;0.025} = 2.086$ .

Essendo  $|t_{\text{obs}}| = 1.9413 < t_{22-2;0.025} = 2.086$  allora **non** rifiuto  $H_0$  al 5%.



Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(|T_{22-2}| > |-1.94|) = 2P(T_{22-2} > 1.94) = 0.066448$$

Attenzione il calcolo del  $p_{\text{value}}$  con la  $T$  è puramente illustrativo e non può essere riprodotto senza una calcolatrice statistica adeguata.

$$0.05 < p_{\text{value}} = 0.066448 \leq 0.1$$

```
ttest_2c_om(mu1 = 11, mu2 = 12, s1h = 1.1, s2h = 1.2, n1 = 10, n2 = 12,
h1 = "\neq", rbow = T)
```

**Test  $T$  per due medie, (omogeneità)**

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

B SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST,  $T$

L'ipotesi è di omogeneità e quindi calcoliamo:

$$S_p^2 = \frac{n_1 \hat{\sigma}_1^2 + n_2 \hat{\sigma}_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{10 \cdot 1.1^2 + 12 \cdot 1.2^2}{10 + 12 - 2} = 1.469$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}} &\sim t_{n_1 + n_2 - 2} \\ t_{\text{obs}} &= \frac{(11 - 12)}{\sqrt{\frac{1.469}{10} + \frac{1.469}{12}}} = -1.927. \end{aligned}$$

### C CONCLUSIONE

Siccome  $H_1$  è bilaterale, considereremo  $\alpha/2$ , anziché  $\alpha$

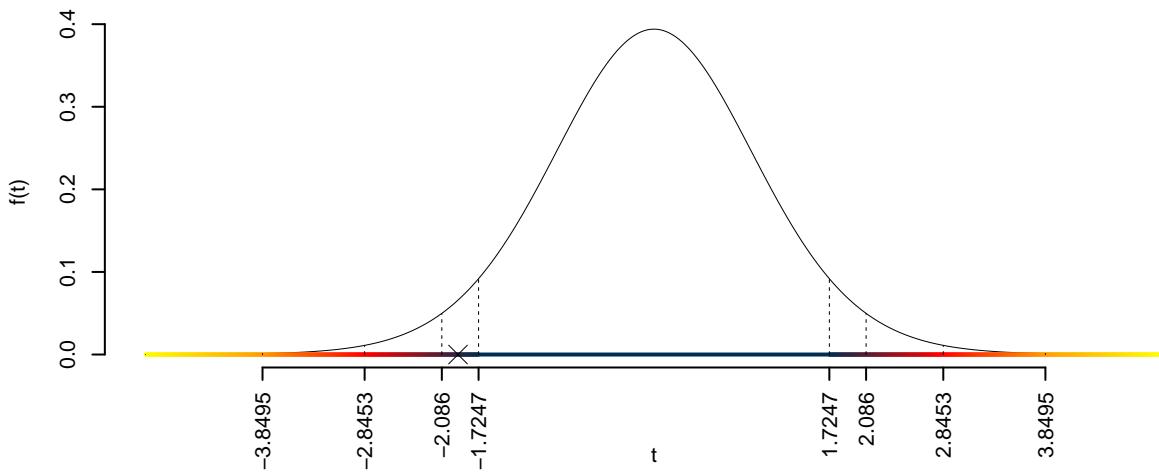
$\alpha = 0.1, 0.05, 0.01, 0.001$  e quindi  $\alpha/2 = 0.05, 0.025, 0.005, 0.0005$

I valori critici sono

$t_{22-2;0.05} = 1.7247$ ;  $t_{22-2;0.025} = 2.086$ ;  $t_{22-2;0.005} = 2.8453$ ;  $t_{22-2;0.0005} = 3.8495$

Siccome  $1.7247 < |t_{\text{obs}}| = 1.9269 < 2.086$ , indecisione sul rifiuto di  $H_0$  al 10%,

$0.05 < p_{\text{value}} < 0.1$ , *marginalmente significativo*  $\square$ .



Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(|T_{22-2}| > |-1.93|) = 2P(T_{22-2} > 1.93) = 0.068315$$

Attenzione il calcolo del  $p_{\text{value}}$  con la  $T$  è puramente illustrativo e non può essere riprodotto senza una calcolatrice statistica adeguata.

$$0.05 < p_{\text{value}} = 0.068315 \leq 0.1$$

```
ztest_2c_pi(s1 = 120,s2 = 130,n1 = 250,n2 = 260,h1 = "<",alpha = .01)
```

### Test $Z$ per due proporzioni

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \pi_1 = \pi_2 \\ H_1 : \pi_1 < \pi_2 \end{cases}$$

B SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST,  $Z$

$$\hat{\pi}_1 = \frac{s_1}{n_1} = \frac{120}{250} = 0.48 \quad \hat{\pi}_2 = \frac{s_2}{n_2} = \frac{130}{260} = 0.5$$

Calcoliamo la proporzione comune sotto  $H_0$

$$\pi_C = \frac{s_1 + s_2}{n_1 + n_2} = \frac{250}{510} = 0.4902$$

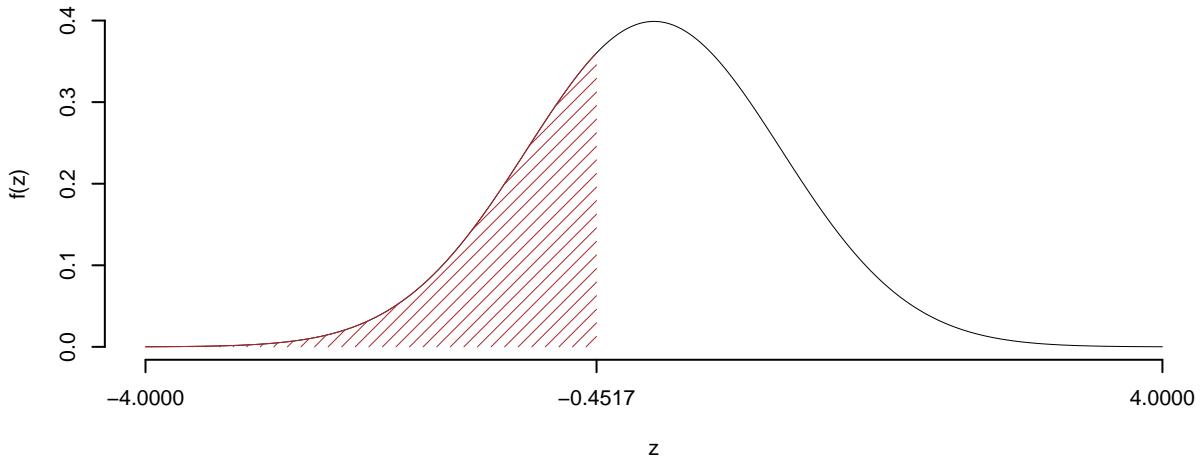
$$\begin{aligned} \frac{\hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_2}{\sqrt{\frac{\pi_C(1-\pi_C)}{n_1} + \frac{\pi_C(1-\pi_C)}{n_2}}} &\sim N(0, 1) \\ z_{\text{obs}} &= \frac{(0.48 - 0.5)}{\sqrt{\frac{0.4902(1-0.4902)}{250} + \frac{0.4902(1-0.4902)}{260}}} = -0.4517. \end{aligned}$$

C CONCLUSIONE

Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(Z < -0.45) = 0.325756$$

$$0.1 < p_{\text{value}} = 0.325756 \leq 1$$



Non rifiuto  $H_0$  a **nessun** livello di significatività,

$p_{value} > 0.1$ , non significativo

### G.4.3      Regressione

```
set.seed(12)                      # ripete le stesse generazioni casuali
n <- 100                           # fisso n
x <- rnorm(n, 10)                  # genero x
y <- x+rnorm(n, 0, 1)              # genero y
ls2e(regr(x = x, y = y))          # produco le statistiche di base

calcolo_beta()
```

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{100} 996.8831 = 9.969$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{100} 997.8525 = 9.979$$

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{100} 10012 - 9.9688^2 = 0.7409$$

$$\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{y}^2 = \frac{1}{100} 10133 - 9.9785^2 = 1.756$$

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y} = \frac{1}{100} 10023 - 9.9688 \cdot 9.9785 = 0.7546$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}_1 &= \frac{\text{cov}(X, Y)}{\hat{\sigma}_X^2} \\
 &= \frac{0.7546}{0.7409} = 1.018 \\
 \hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \\
 &= 9.979 - 1.0184 \times 9.9688 = -0.1736
 \end{aligned}$$

```
calcolo_beta(semplice = T)
```

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}_1 &= \frac{\text{cov}(X, Y)}{\hat{\sigma}_X^2} \\
 &= \frac{0.7546}{0.7409} = 1.018 \\
 \hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \\
 &= 9.979 - 1.0184 \times 9.9688 = -0.1736
 \end{aligned}$$

```
residuo(x[12], y[12])
```

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_i &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i = \\
 &= -0.1736 + 1.0184 \times 8.7061 = 8.693 \\
 \hat{\varepsilon}_i &= y_i - \hat{y}_i \\
 &= 8.178 - 8.6926 = -0.5141
 \end{aligned}$$

```
se_beta0()
```

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= (1 - r^2) \hat{\sigma}_Y^2 \\
 &= (1 - 0.4375) \times 1.756 \\
 &= 0.988 \\
 S_\varepsilon^2 &= \frac{n}{n-2} \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \\
 &= \frac{100}{100-2} \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \\
 &= \frac{100}{100-2} \times 0.988 = 1.008
 \end{aligned}$$

E quindi

$$V(\hat{\beta}_0) = \sigma_\varepsilon^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n \hat{\sigma}_X^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{V(\hat{\beta}_0)} &= S_{\varepsilon}^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{n\hat{\sigma}_X^2} \right) \\
 &= 1.008 \times \left( \frac{1}{100} + \frac{9.969^2}{100 \times 0.7409} \right) \\
 \widehat{SE(\hat{\beta}_0)} &= \sqrt{1.362} \\
 &= 1.167
 \end{aligned}$$

```
se_beta1()
```

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 &= (1 - r^2)\hat{\sigma}_Y^2 \\
 &= (1 - 0.4375) \times 1.756 \\
 &= 0.988 \\
 S_{\varepsilon}^2 &= \frac{n}{n-2} \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 \\
 &= \frac{100}{100-2} \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 \\
 &= \frac{100}{100-2} \times 0.988 = 1.008
 \end{aligned}$$

E quindi

$$\begin{aligned}
 V(\hat{\beta}_1) &= \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{n\hat{\sigma}_X^2} \\
 \widehat{V(\hat{\beta}_1)} &= \frac{S_{\varepsilon}^2}{n\hat{\sigma}_X^2} \\
 &= \frac{1.008}{100 \times 0.7409} = 0.01361 \\
 \widehat{SE(\hat{\beta}_1)} &= \sqrt{0.01361} \\
 &= 0.1166
 \end{aligned}$$

```
ttest_beta(cof = 0, bj0 = 0, h1 = "<", alpha = 0.01)
```

**A** FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \beta_0 = \beta_{0;H_0} = 0 \\ H_1 : \beta_0 < \beta_{0;H_0} = 0 \end{cases}$$

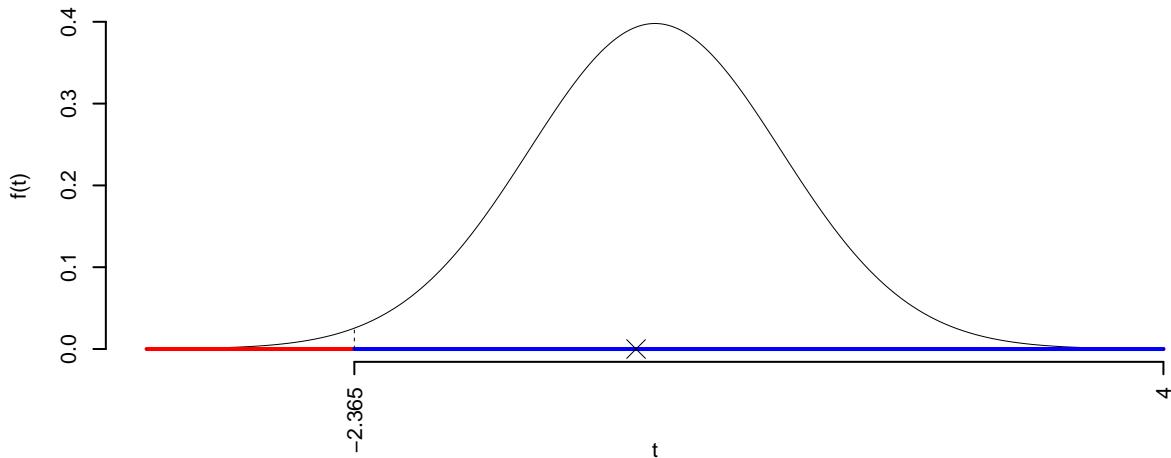
**B** SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST,  $T$  Test su un coefficiente di regressione:  $\Rightarrow$  t-Test.

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_{0;H_0}}{\widehat{SE}(\hat{\beta}_0)} &\sim t_{n-2} \\ t_{\text{obs}} &= \frac{(-0.1736 - 0)}{1.167} = -0.1488. \end{aligned}$$

C CONCLUSIONE

La significatività è  $\alpha = 0.01$ , dalle tavole osserviamo  $t_{100-2;0.01} = -2.365$ .

Essendo  $t_{\text{obs}} = -0.1488 > t_{100-2;0.01} = -2.365$  allora **rifiuto**  $H_0$  al 1%.



Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(T_{100-2} < -0.15) = 0.441028$$

Attenzione il calcolo del  $p_{\text{value}}$  con la  $T$  è puramente illustrativo e non può essere riprodotto senza una calcolatrice statistica adeguata.

$$0.1 < p_{\text{value}} = 0.441028 \leq 1$$

```
ttest_beta(cof = 1, bj0 = 0, h1 = "\\"neq", alpha = 0.01)
```

A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = \beta_{1;H_0} = 0 \\ H_1 : \beta_1 \neq \beta_{1;H_0} = 0 \end{cases}$$

**B** SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST,  $T$  Test su un coefficiente di regressione:  $\Rightarrow$  t-Test.

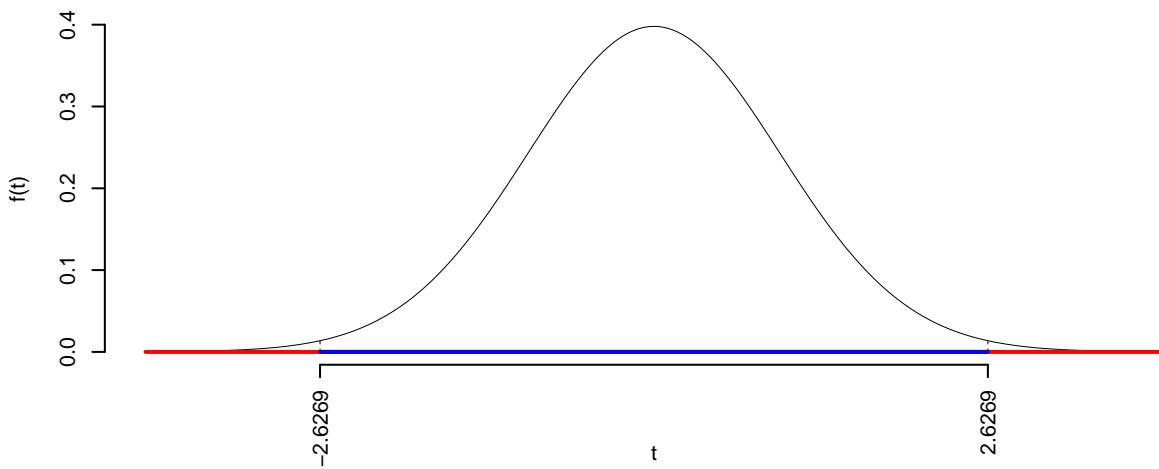
$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1;H_0}}{SE(\hat{\beta}_1)} \sim t_{n-2}$$

$$t_{\text{obs}} = \frac{(1.018 - 0)}{0.1166} = 8.733.$$

**C** CONCLUSIONE

La significatività è  $\alpha = 0.01$ , dalle tavole osserviamo  $t_{100-2;0.005} = 2.6269$ .

Essendo  $|t_{\text{obs}}| = 8.7327 > t_{100-2;0.005} = 2.6269$  allora **rifiuto**  $H_0$  al 1%.



Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(|T_{100-2}| > |8.73|) = 2P(T_{100-2} > 8.73) = 7e - 14$$

Attenzione il calcolo del  $p_{\text{value}}$  con la  $T$  è puramente illustrativo e non può essere riprodotto senza una calcolatrice statistica adeguata.

$$0 < p_{\text{value}} = 7e - 14 \leq 0.001$$

## G.5 Esempi

```
punti <- list(c(14,3,2,2),c(14,3,2,2),14,c(3,3,3,3),c(10,4),c(14,3,2,2,2))
punt_p <- function(start=F,next=F,num=F){
```

```

tot <- sum(unlist(punti))
it <- ifelse(start,item_start(num),item_(num))
it <- ifelse(nex,item_next(num),it)
ptt <- punti[[i1]][i2]
ptt_30 <- round(ptt/tot*31,2)
paste(it,"**(Punti ",ptt,")**",sep="")
}

```

### G.5.0.1 Esercizio 1

```

```{r 25-test-functions-12, echo=FALSE}
set.seed(1)                      # per ottenere sempre la stessa simulazione
n <- 250                          # ampiezza campionaria

brk  <- c(0,15,30,50,100,250)      # intervalli (breaks)
hh   <- c( 20,120,100, 50,10)      # aspetto presunto istogramma

nomex <- "Spesa"
samp <- genera_dati(brk = brk, hh = hh, n = n)

ls2e(stat_base(samp,brk))        # crea il data set e la tabella dat3
```

```

Su un campione di `$`r n`$` famiglie della provincia di Modena è stato rilevata la spesa mensile in telecomunicazioni (in euro), qui di seguito la distribuzione delle frequenze relative:

```

```{r , echo=FALSE}
kable(dat3[,c(1,2,4)]) %>%
  kable_styling(full_width = F)
```

`r punt_p(nex = T, start = T)` Disegnare l'istogramma di densità percentuale.

:::{.sol data-latex=""}
```{r 25-test-functions-14, echo=FALSE}
kable(dat3) %>%                      # Stampa la tabella
  kable_styling(full_width = F)
histp(axes = T)
h.int(60,250,density=20)
```
:::

```

**r punt\_p()** Qual è la percentuale di famiglie con spesa superiore a 60 euro?

```
:::{.sol data-latex=""}
```{r 25-test-functions-15, echo=FALSE}
F_print(60,verso=">")
```
:::
```

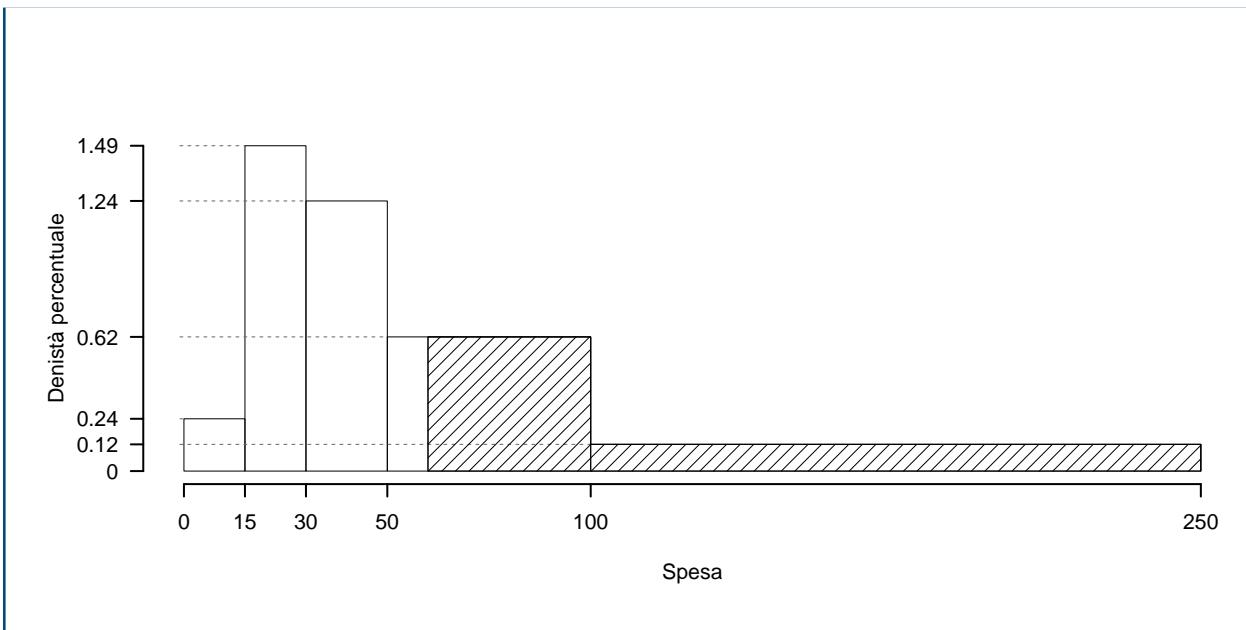
Su un campione di 250 famiglie della provincia di Modena è stato rilevata la spesa mensile in telecomunicazioni (in euro), qui di seguito la distribuzione delle frequenze relative:

| $[x_j, x_{j+1})$ | $f_j$ |
|------------------|-------|
| 0                | 15    |
| 15               | 30    |
| 30               | 50    |
| 50               | 100   |
| 100              | 250   |
|                  | 1.000 |

2.a (Punti 14) Disegnare l'istogramma di densità percentuale.

### Soluzione

| $[x_j, x_{j+1})$ | $n_j$ | $f_j$ | $b_j$ | $h_j$ | $F_j$  | $f_j\%$ |
|------------------|-------|-------|-------|-------|--------|---------|
| 0                | 15    | 9     | 0.036 | 15    | 0.2400 | 0.036   |
| 15               | 30    | 56    | 0.224 | 15    | 1.4933 | 0.260   |
| 30               | 50    | 62    | 0.248 | 20    | 1.2400 | 0.508   |
| 50               | 100   | 77    | 0.308 | 50    | 0.6160 | 0.816   |
| 100              | 250   | 46    | 0.184 | 150   | 0.1227 | 1.000   |
|                  | 250   | 1.000 | 250   |       |        | 100.0   |



2.b (Punti 3) Qual è la percentuale di famiglie con spesa superiore a 60 euro?

### Soluzione

$$\begin{aligned}
 \%(X > 60) &= (100 - 60) \times h_4 + f_5 \times 100 \\
 &= (40) \times 0.616 + (0.184) \times 100 \\
 &= 0.4304 \times (100) \\
 \#(X > 60) &\approx 108
 \end{aligned}$$

---

```

```{r 25-test-functions-21, echo=FALSE}
# preparo i parametri
s1 <- 27
n1 <- 37
s2 <- 30
n2 <- 45
alpha <- 0.05
h1 <- "\neq"
```

`r punt_p(nex = T)` Sono stati intervistati `r n1` uomini
e `r n2` donne, `r s1` su `r n1` uomini si sono
dichiarati favorevoli, mentre sono favorevoli `r s2` su `r n2`
donne. Testare al livello di significatività del 5% l'ipotesi che uomini e

```

donna abbiano lo stesso parere contro l'alternativa che siano diversi.

```
::::{.sol data-latex=""}
```{r ,results='asis', echo=FALSE}
ztest_2c_pi(s1 = s1,s2 = s2,n1 = n1,n2 = n2,
             h1 = h1,alpha = alpha,a = "U",b = "D")
```
:::
```

``r punt_p()`` Costruire un intervallo di confidenza al 95% per la proporzione di uomini favorevoli

```
::::{.sol data-latex=""}
```{r ,results='asis', echo=FALSE}
idc(xm = s1,alpha = .95,n = n1 ,dist_ = "z")
```
:::
```

4.a (**Punti 3**) Sono stati intervistati 37 uomini e 45 donne, 27 su 37 uomini si sono dichiarati favorevoli, mentre sono favorevoli 30 su 45 donne. Testare al livello di significatività del 5% l'ipotesi che uomini e donna abbiano lo stesso parere contro l'alternativa che siano diversi.

### Soluzione

#### Test $Z$ per due proporzioni

##### A FORMULAZIONE DELLE IPOTESI

$$\begin{cases} H_0 : \pi_U = \pi_D \\ H_1 : \pi_U \neq \pi_D \end{cases}$$

##### B SCELTA E CALCOLO STATISTICA-TEST, $Z$

$$\hat{\pi}_U = \frac{s_U}{n_U} = \frac{27}{37} = 0.7297 \quad \hat{\pi}_D = \frac{s_D}{n_D} = \frac{30}{45} = 0.6667$$

Calcoliamo la proporzione comune sotto  $H_0$

$$\pi_C = \frac{s_U + s_D}{n_U + n_D} = \frac{57}{82} = 0.6951$$

$$\frac{\hat{\pi}_U - \hat{\pi}_D}{\sqrt{\frac{\pi_C(1-\pi_C)}{n_U} + \frac{\pi_C(1-\pi_C)}{n_D}}} \sim N(0, 1)$$

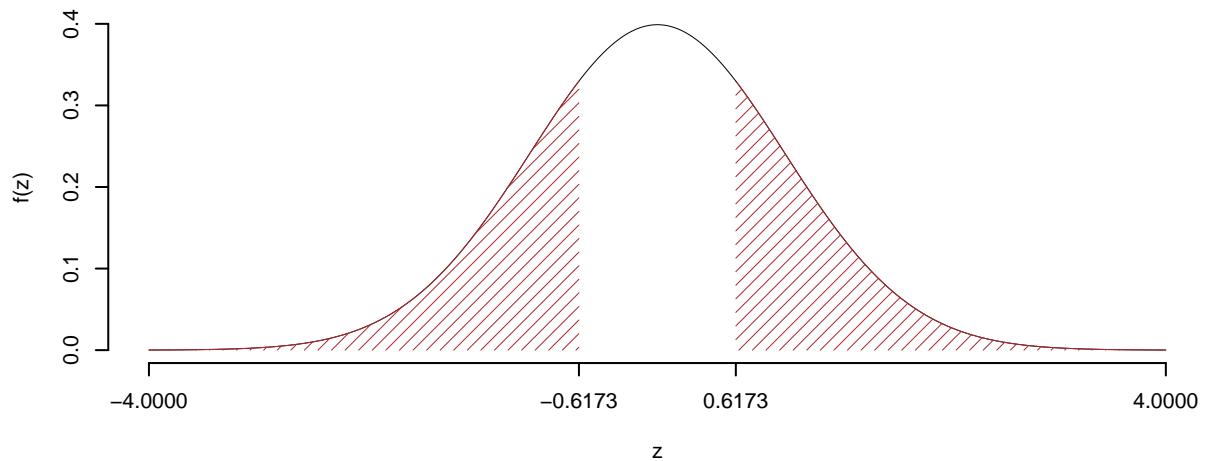
$$z_{\text{obs}} = \frac{(0.7297 - 0.6667)}{\sqrt{\frac{0.6951(1-0.6951)}{37} + \frac{0.6951(1-0.6951)}{45}}} = 0.6173.$$

CONCLUSIONE

Il  $p_{\text{value}}$  è

$$p_{\text{value}} = P(|Z| > |0.62|) = 2P(Z > 0.62) = 0.537051$$

$$0.1 < p_{\text{value}} = 0.537051 \leq 1$$



Non rifiuto  $H_0$  a nessun livello di significatività,  
 $p_{\text{value}} > 0.1$ , non significativo

4.b (Punti 3) Costruire un intervallo di confidenza al 95% per la proporzione di uomini favorevoli

**Soluzione**

$$1 - \alpha = 0.05 \text{ e quindi } \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha/2 = 0.475$$

$$\hat{\pi} = \frac{S_n}{n} = \frac{27}{37} = 0.7297$$

$$\begin{aligned} Idc : \quad & \hat{\pi} \pm z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1 - \hat{\pi})}{n}} \\ & 0.7297 \pm 0.06271 \times \sqrt{\frac{0.7297(1 - 0.7297)}{37}} \\ & 0.7297 \pm 0.06271 \times 0.07301 \\ & [0.7252, 0.7343] \end{aligned}$$