# Cadenas de Markov en Tiempo Continuo

Taller de filogenética bayesiana en RevBayes

Enero 2025

Rosana Zenil-Ferguson

# Cadenas de Markov en tiempo continuo (CTMC- Continuous-time Markov chains)

- Procesos estocásticos que nos permiten seguir la evolución de las tasas evolutivas para caracteres discretos y continuos en macroevolución.

- Las cadenas de Markov usualmente se denotan utilizando la siguiente notación matemática

$$\{X(t), t \geq 0\}$$

En esta notación el proceso estocástico $X(t)$ denota el valor de estado o caracter en el tiempo $t$ y el tiempo es medido en millones de años.

# Propiedad Markoviana

La pérdida de memoria

“El futuro, sólo depende del presente pero no del pasado”.

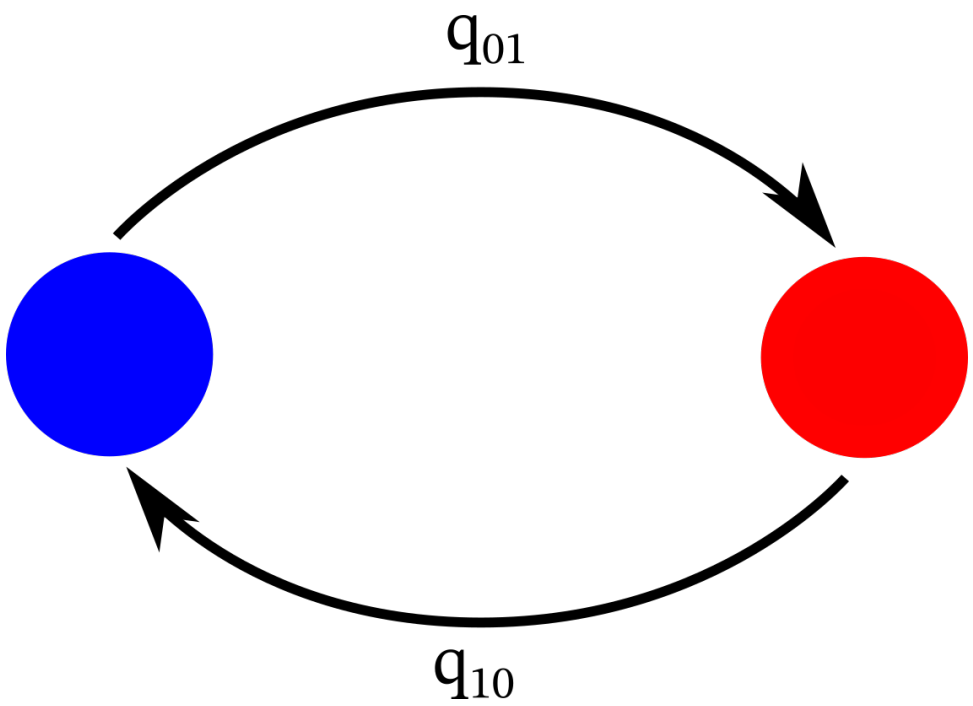
# Ejemplo con colores

Estamos interesados en entender cómo una variable es discreta con dos estados (azul y rojo) han evolucionado y cambiado en el tiempo.

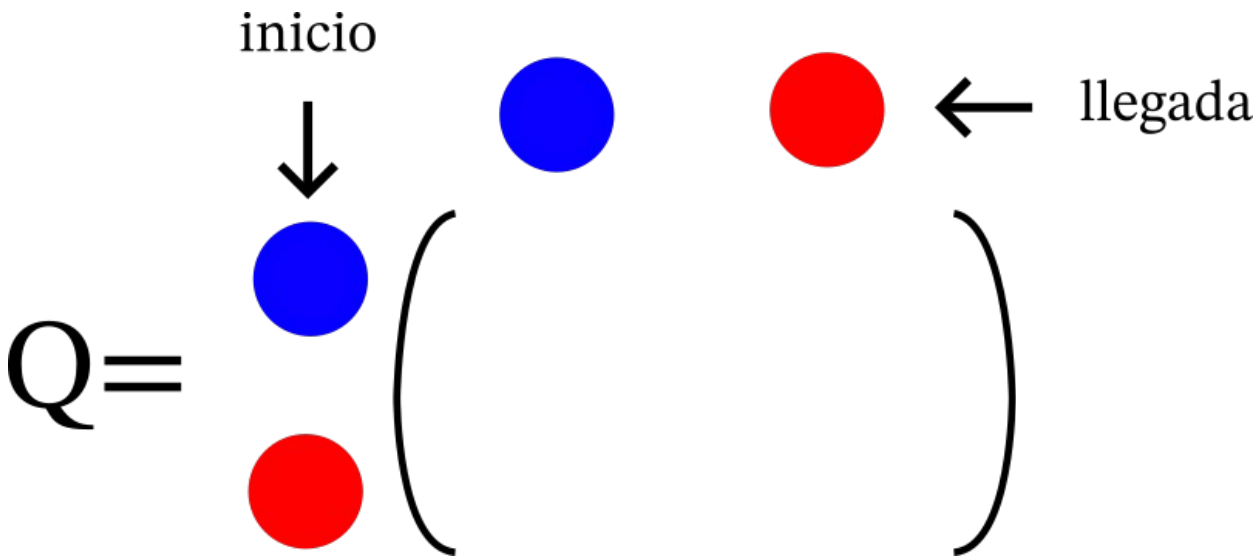
1. La evolución de azul (estado 0) a rojo (estado 1) sucede con parámetro : $q_{01}$
2. La evolución de rojo (estado 1) al azul (estado 0): $q_{10}$

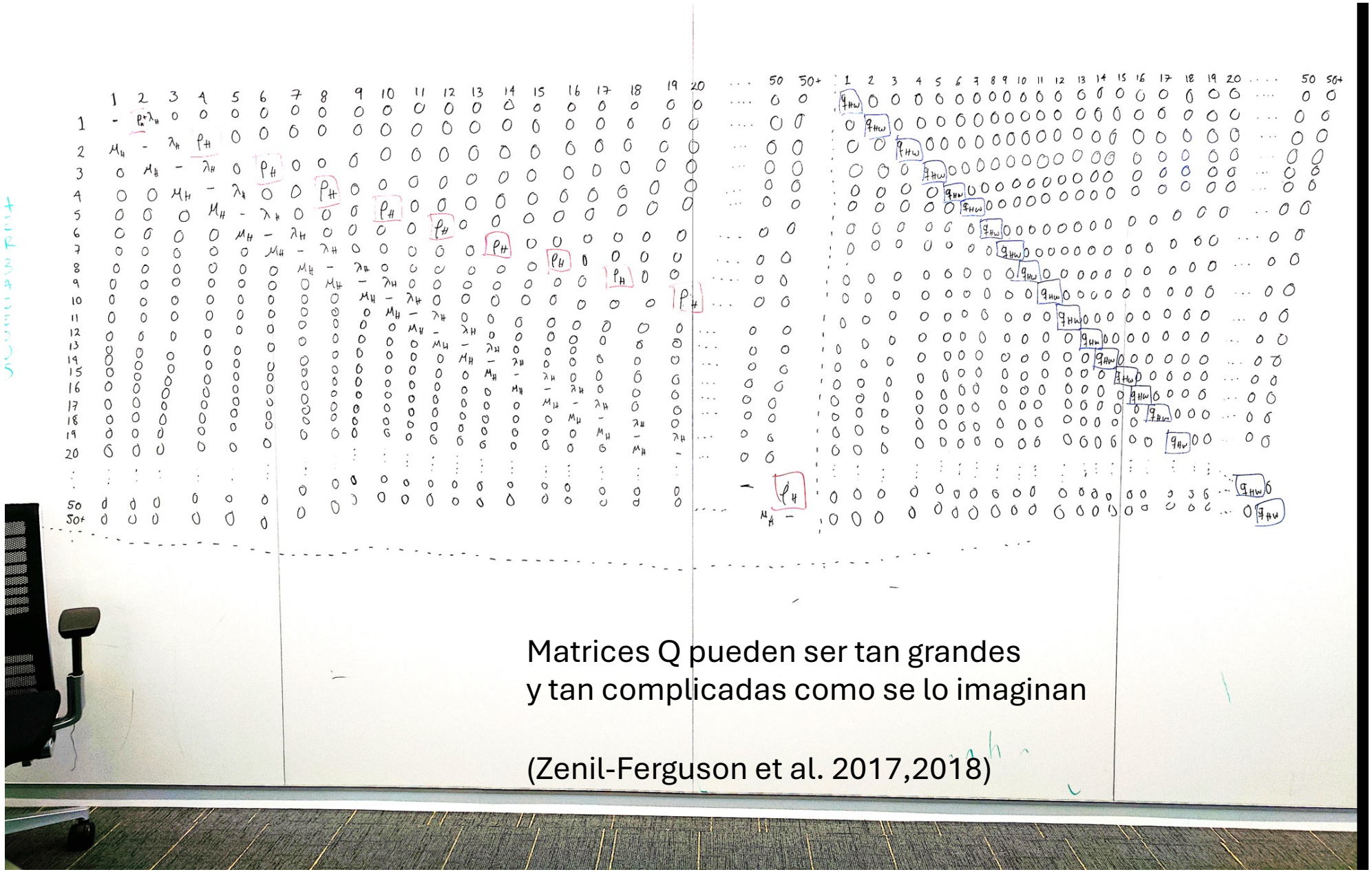
Estos parámetros se interpretan como tasas instantáneas de transición

# El Modelo



# La matriz Q





Matrices Q pueden ser tan grandes
y tan complicadas como se lo imaginan

(Zenil-Ferguson et al. 2017,2018)

# ¿Qué es la matriz Q?

- La matriz Q es la derivada de la matriz de probabilidad

$$P'(t) = P(t)Q$$

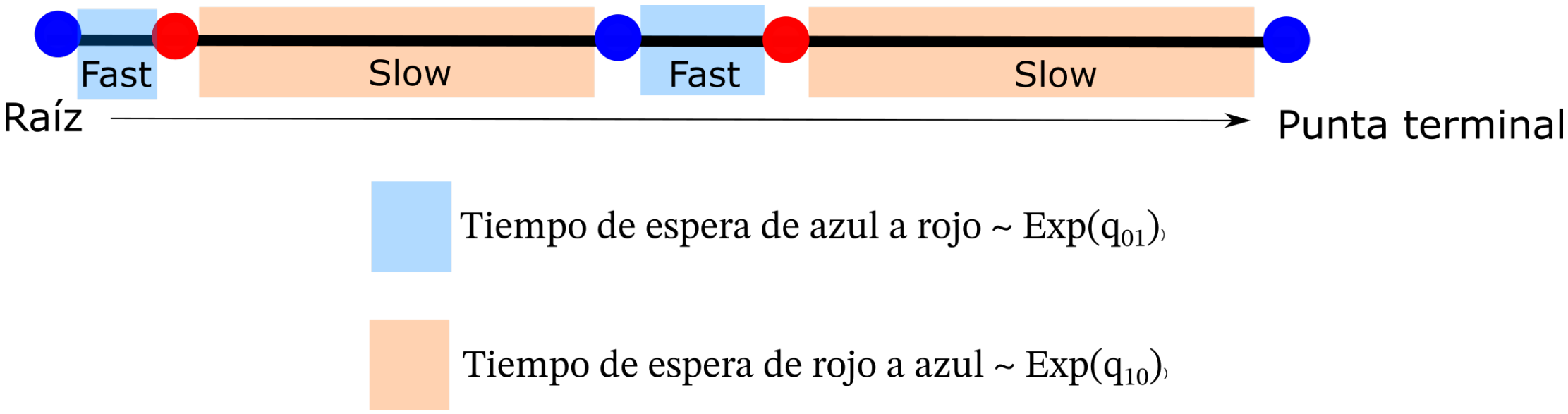
- Los elementos de la matriz $Q$ son las tasas de transición

# Interpretando las tasas de transición

Para evolucionar de azul a rojo en un linaje vamos a esperar en promedio

$$1/q_{01}$$

unidades de tiempo.

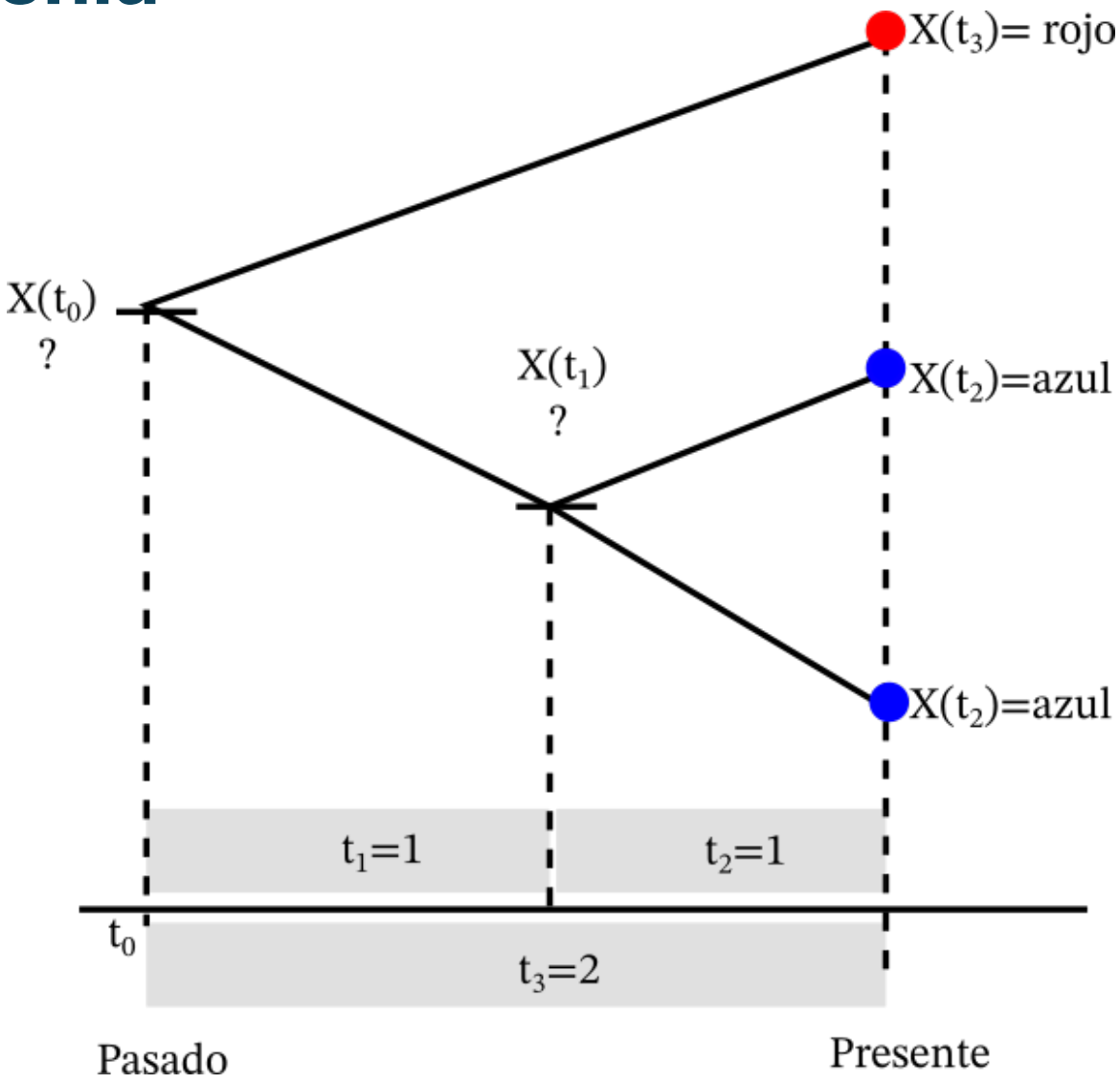


# ¿Cuál es la probabilidad de evolucionar de azul a rojo?

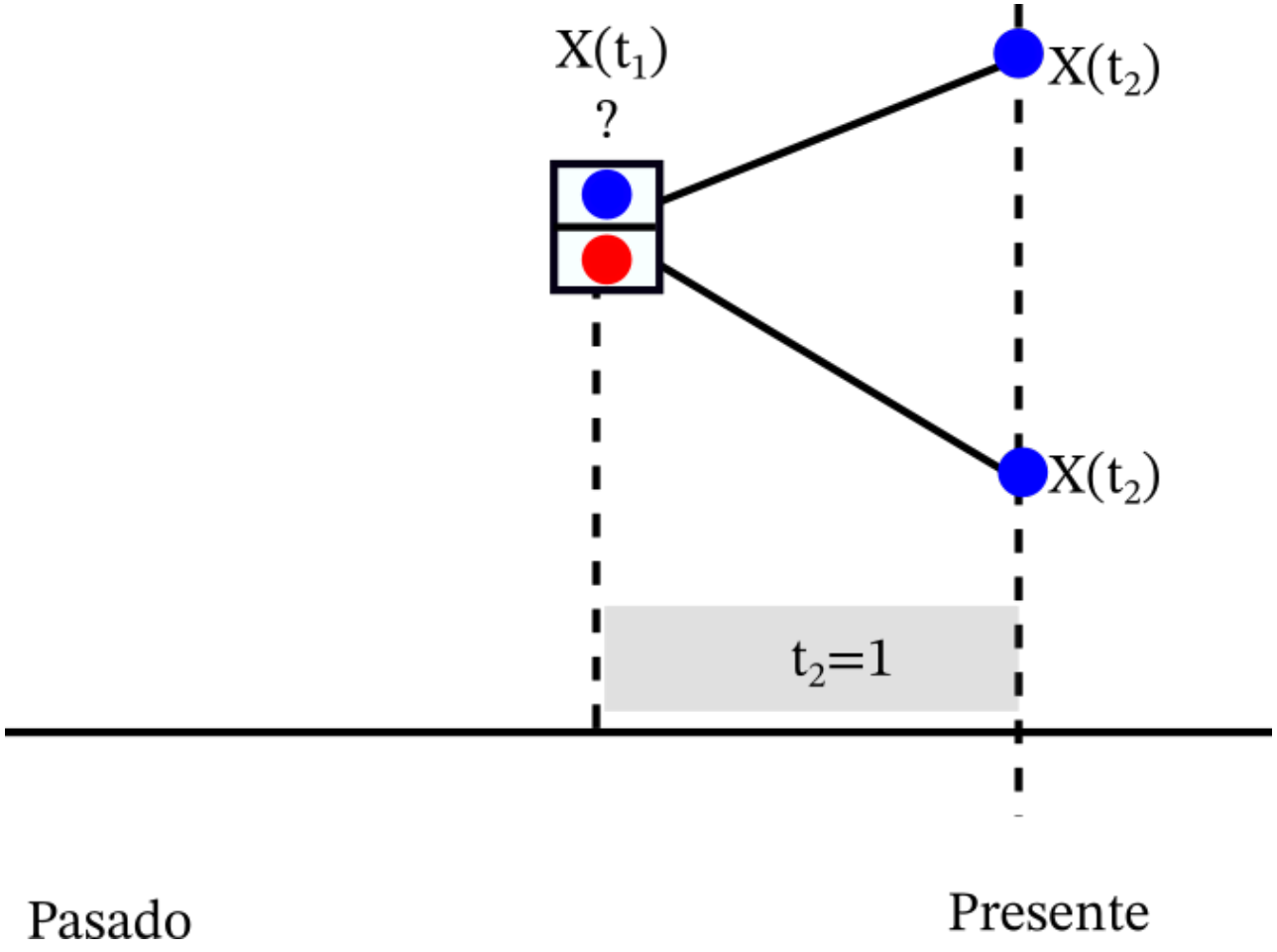
$$P(t) = e^{Qt}$$

$$(P(t)) = \frac{1}{q_{01} + q_{10}} \begin{pmatrix} q_{10} + q_{01}e^{-(q_{01}+q_{10})t} & q_{01} - q_{01}e^{-(q_{01}+q_{10})t} \\ q_{10} - q_{10}e^{-(q_{01}+q_{10})t} & q_{01} + q_{10}e^{-(q_{01}+q_{10})t} \end{pmatrix}$$

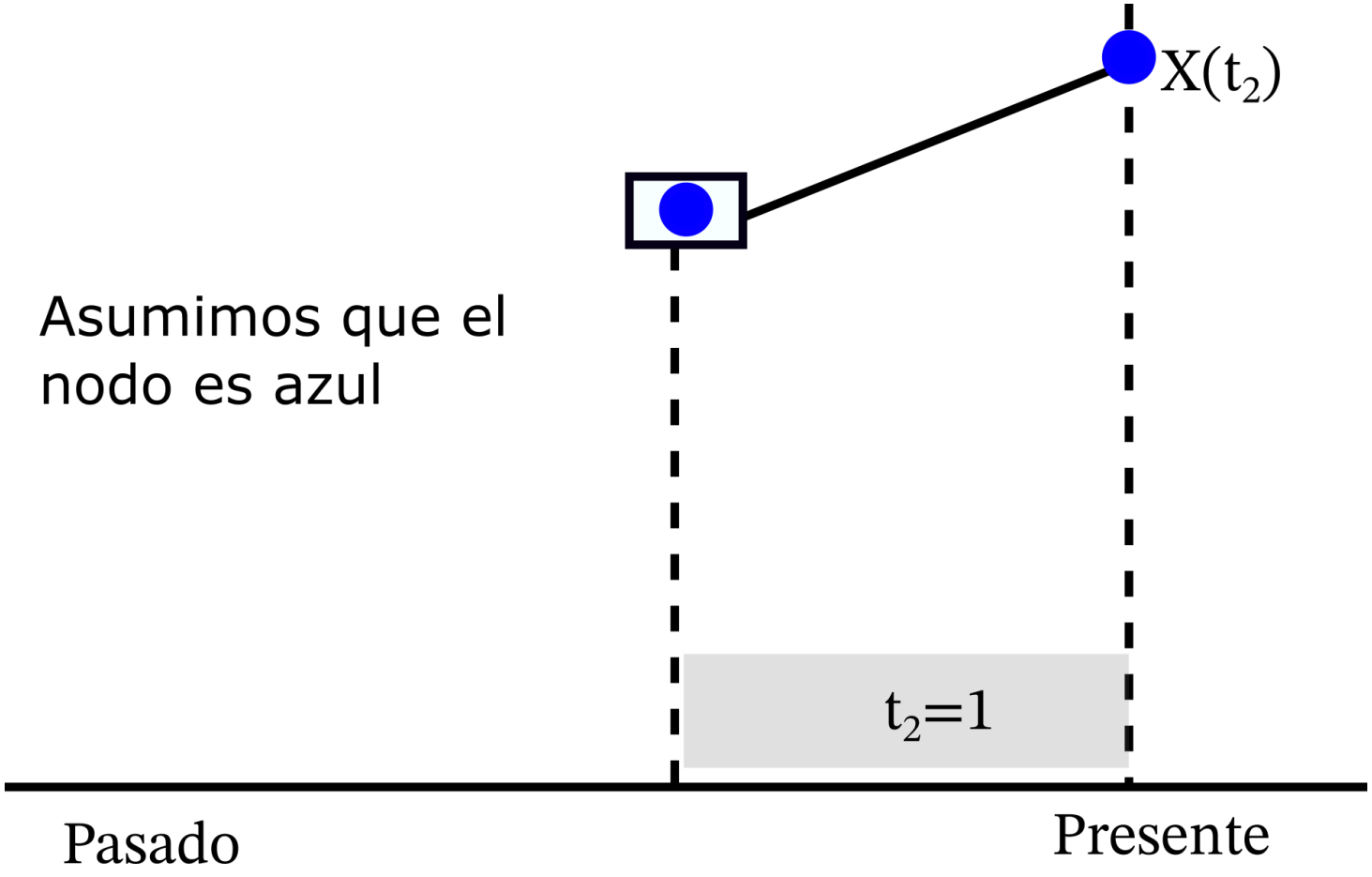
# Calculando la función de verosimilitud de una CTMC en una filogenia

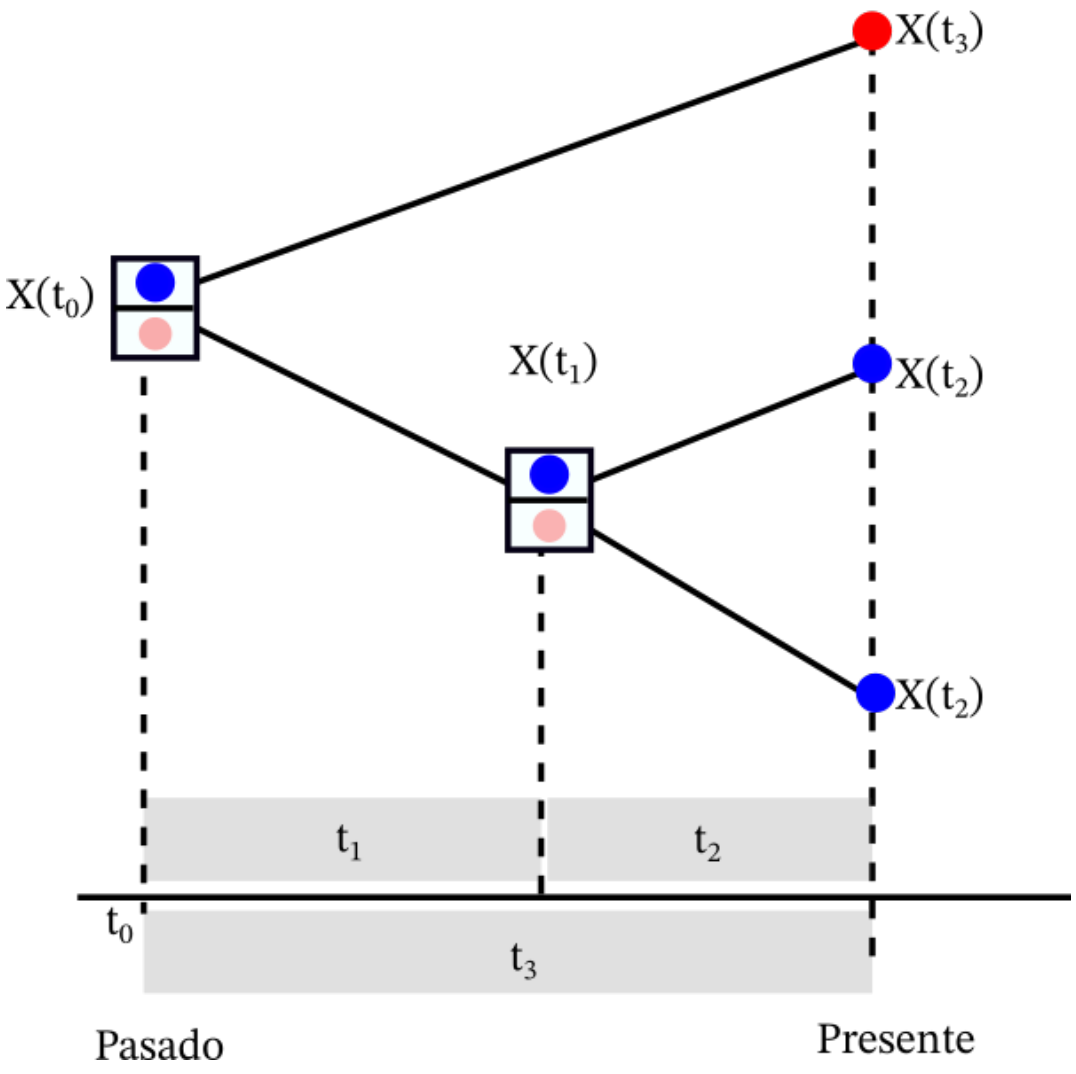


# Calculando la función de verosimilitud de una CTMC en una filogenia



# Calculando la función de verosimilitud de una CTMC en una filogenia




X(t3)
X(t0)
X(t1)
X(t2)
X(t2)
t1
t2
t0
t3
Pasado
Presente

# Probabilidades en la raíz

| Azul | Rojo |
|---|---|
| $\pi(azul)$ | $\pi(rojo)$ |

1. Asumir probabilidades uniformes. $\pi(azul) = \pi(rojo) = 1/2$

2. Verosimilidades pesadas por el promedio. Por ejemplo, fijamos la raíz en azul, y calculamos la verosimilitud del resto del árbol. Al final tenemos una verosimilitud fijada en azul $L_{azul}$ y en rojo $L_{rojo}$ calculamos la relativa

3. Calculamos la distribución estacionaria (esta es una propiedad de las CTMC que no hemos discutido pero que existe bajo ciertas condiciones)

# Probabilidades en la raíz

- Mi favorita: Asumir que es incierta pero es una variable aleatoria y co-estimarla en el MCMC

$$\left(\pi(Blue), \pi(Red)\right)$$