概率论与数理统计笔记

ixtWuko

主要内容包括：

- 随机事件，概率，条件概率，全概率公式、贝叶斯公式
- 古典概型、伯努利概型
- 随机变量
- 离散型随机变量的分布函数，0-1分布、二项分布、泊松分布、几何分布、超几何分布
- 连续型随机变量的分布函数，均匀分布、指数分布、正态分布
- （随机变量的函数）的分布
- 二维随机变量及其分布，二维均匀分布，二维正态分布
- （两个随机变量的函数）的分布
- 数学期望，方差，协方差，相关系数
- 大数定律和中心极限定理
- 样本数字特征
- 统计抽样分布：χ^2分布，t分布，F分布
- 一个正态总体的抽样分布，两个正态总体的抽样分布
- 参数估计，点估计法（矩估计法、最大似然估计法），区间估计，正态总体的区间估计
- 假设检验的步骤，正态总体的假设检验

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}。$$

一 随机事件与概率

1 基本概念

- 随机试验：可重复、所有可能结果或结果所在范围已知
- 样本空间Ω、样本点ω
- 随机事件：样本空间的子集。必然事件Ω、不可能事件$\varnothing$。
- 事件的包含$\subset, \supset$、相等$=$、交$\cap$、并$\cup$、差$-$
- 互斥事件$AB = \varnothing$、对立事件$\overline{A} = \Omega - A$
- 运算规律

- 若$A \subset B$，则$A \cup B = B, A \cap B = A$
- $A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,
  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$,
  $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

* 频数、频率、概率

2 概率

定义

若实值函数P满足

- 对于任意事件$P(A) \geq 0$,
- 对于必然事件$P(\Omega) = 1$,
- 对于两两互斥的可数无穷多个事件有
  $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots$

则称$P(\cdot)$为概率。

性质

- $P(\varnothing) = 0$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- 对于两两互斥的有限个事件有$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$
- $A \subset B \implies P(A) \leq P(B), P(B - A) = P(B) - P(A)$
- 注意：$P(A) = 0$并不能得出A为不可能事件，$P(B) = 1$并不能得出B为必然事件；例如几何概型这样样本具有连续性的，有无穷个样本点，取到某个点的概论是0，取不到某个点的概率是1。

条件概率

$P(B \mid A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$为在事件$A$发生的条件下事件$B$发生的条件概率。

事件的独立性

设A,B两事件满足$P(AB)=P(A)P(B)$，则称A,B两事件独立。**注意：**多个事件独立并不是简单的满足上式，需要这些事件的全部任意组合都满足上式才行。如A,B,C相互独立需满足$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B)\\P(BC)=P(B)P(C)\\P(AC)=P(A)P(C)\\P(ABC)=P(A)P(B)P(C)\end{cases}$

- A,B相互独立、$A,\overline{B}$相互独立、$\overline{A},B$相互独立、$\overline{A},\overline{B}$相互独立这四个结论之间等价。
- A,B相互独立 $\iff P(B\mid A)=P(B) \iff P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$
- 当多个事件相互独立时，它的部分也相互独立。

常用公式

- 加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
- 减法公式：$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A\overline{B})$
- 乘法公式：$P(AB)=P(B\mid A)P(A)$，
  $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$
- 全概率公式：设$B_1,B_2,\cdots,B_n$满足$\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega,B_iB_j=\varnothing(i\neq j)$且$P(B_k)>0,k=1,2,\cdots,n$，则对任意事件$A$有$P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$。

  当$n=2$时，全概率公式为$P(A)=P(A\mid B)P(B)+P(A\mid\overline{B})P(\overline{B})$
- 贝叶斯公式：设$B_1,B_2,\cdots,B_n$满足$\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega,B_iB_j=\varnothing(i\neq j)$且
  $P(A)>0,P(B_k)>0,k=1,2,\cdots,n$，则$P(B_j\mid A)=\dfrac{P(B_j)P(A\mid B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)}$。

  （贝叶斯公式表征的是在已知一个结果的情况下，对题设条件的推断。）

3 古典概型和伯努利概型

古典概型

包含有限个样本点，且每个样本点发生的概率相同。

$P(A)=\dfrac{n_A}{n}$

几何概型

样本区间可以表示为一个几何区域，且每个样本点发生的概率相同。

$P(A)=\dfrac{L(\Omega_A)}{L(\Omega)}=\dfrac{\text{the area of }\Omega_A}{\text{the area of }\Omega}$，几何度量如长度、面积、体积等。

n重伯努利概型

各次实验是相互独立的，且每次实验只有两种结果中的一种。

设$P(A)=p$，则在n重伯努利试验中事件A发生k次的概率为$\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=1,2,\cdots,n$。

二 随机变量及其分布

1 随机变量及其分布函数

定义

- 随机变量：在样本空间上的实值函数$X=X(\omega)$。
- 分布函数：记函数$F(x)=P\{X\leq x\}$为随机变量X的分布函数。

分布函数的性质

- $0\leq F(x)\leq 1$
- $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$
- $x_1<x_2 \implies F(x_1)\leq F(x_2)$
- $F(x)$是右连续的，即$F(x+0)=F(x)$
- 对任意$x_1<x_2$，有$P\{x_1<X\leq x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$
- 对任意x，有$P\{X=x\}=F(x)-F(x-0)$
- 只有满足以上条件的才能成为一个分布函数。
- $P\{X\leq x\}=F(x), P\{X<x\}=F(x-0)$

2 离散型随机变量、连续型随机变量

离散型

设离散型随机变量X的可能取值为$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，$X$取各可能值的概率为$P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$,被称为离散型随机变量的概率分布或分布律。

分布律也可以表格的形式给出 $\begin{array}{c|ccccc} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ \hline P & p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{array}$

- $p_k\geq 0, k=1,2,\cdots$
- $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} p_k=1$

常用离散分布

- $(0-1)$分布：$\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & 1-p & p \end{array}$
- 伯努利分布/二项分布$X\sim B(n,p)$：$P\{X=k\}=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$

- 泊松分布$X \sim P(\lambda)$：$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\cdots$
    - 泊松定理：在伯努利实验中，p_n表示事件A在试验中出现的概率，它与试验总数n有关，如果$\lim\limits_{n\to\infty} np_n=\lambda$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{C}_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$
- 几何分布$X \sim Ge(p)$：$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}, k=1,2,\cdots$
- 超几何分布$X \sim H(N,M,n)$：$P\{X=k\}=\dfrac{\mathrm{C}_M^k\mathrm{C}_{N-M}^{n-k}}{\mathrm{C}_N^n}, k=l_1,\cdots,l_2$，其中$l_1=\max(0,n-N+M), l_2=\min(M,n)$。如果$N$件产品中包含$M$件次品，从中任取一次取出$n$件，令$X$等于抽取的$n$件产品中的次品数，则$X$服从超几何分布。

连续型

若对于分布函数$F(x)$，存在一个非负可积函数$f(x)$，使得对任意实数x都有
$F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt, -\infty<x<+\infty$，称函数$f(x)$为连续型随机变量$X$的概率密度。

- $f(x)>0$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$
- 对任意实数$x_1<x_2$，有
  $P\{x_1<X<x_2\}=P\{x_1<X\le x_2\}=P\{x_1\le X<x_2\}=P\{x_1\le X\le x_2\}$
  $=\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt=F(x_2)-F(x_1)$
- 在$f(x)$的连续点处有$F'(x)=f(x)$

常用连续分布

- 均匀分布$X \sim U(a,b)$：概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & others\end{cases}$
    - 对于$a\le c<d\le b$，有$P\{c<X\le d\}=\dfrac{d-c}{b-a}$
- 指数分布$X \sim E(\lambda)$：概率密度为$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，分布函数为$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$
- 正态分布$X \sim N(\mu,\sigma^2)$：概率密度为$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty<x<+\infty$。
    - 当$X \sim N(0,1)$时，分布函数为$\mathit{\Phi}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$。
    - 当$X \sim N(\mu,\sigma^2)$时，分布函数为$F(x)=\mathit{\Phi}(\dfrac{x-\mu}{\sigma})$。
    - $P\{a<X<b\}=\mathit{\Phi}(\dfrac{b-\mu}{\sigma})-\mathit{\Phi}(\dfrac{a-\mu}{\sigma}), a<b$。
    - 概率密度$f(x)$关于$x=\mu$对称。

- $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$
- $\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$。
- $P\{|X|\le a\}=2\Phi(a)-1$

- 补充：根据正态分布的概率密度，可以计算形如$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dx$的积分

3 随机变量的函数的分布

离散型

设X的分布律为$P\{X=x_k\}=p_k,k=1,2,\cdots$，则$X$的函数$Y=g(X)$的分布律为$P\{Y=g(x_k)\}=p_k,k=1,2,\cdots$。如果在$g(x_k)$中有相同的数值，则将它们相应的概率和作为$Y$取该值的概率。

连续型

- 公式法：设X的概率密度为$f_X(x)$，又$y=g(x)$是单调、导数不为零的可导函数，$h(y)$是它的反函数，则X的函数$Y=g(X)$的概率密度为
  $f_Y(y)=\begin{cases}|h'(x)|f_X(h(y)), & \alpha<y<\beta\\ 0, & others\end{cases}$。
- 定义法：$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}=\int_{g(x)\le y}f_X(x)dx$。

  $f_Y(y)=F_Y'(y)$

三 多维随机变量及其分布

1 二维随机变量及其分布

二维随机变量

- 二维随机变量的联合分布函数 $F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$

- $F(x,y)$的性质

  - $0\le F(x,y)\le 1$
  - $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0$
  - $F(+\infty,+\infty)=1$
  - $F(x,y)$对于x,y均单调不减。
  - $F(x,y)$对于x,y均右连续。
  - $P\{a<x\le b,c<y\le d\}=F(b,d)-F(b,c)-F(a,d)+F(a,c)$

- 二维随机变量的边缘分布

  - $F_X(x)=P\{X\le x\}=F(x,+\infty)$

- $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=F(+\infty,y)$

- 二维随机变量的条件分布
  - $F_{X|Y}(x|y)=P\{X\le x|Y=y\}$
    $=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}P\{X\le x|y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}$
    $=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\dfrac{P\{X\le x,y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}}{P\{y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon\}}$
  - 同理可以定义$F_{Y|X}(y|x)$

二维离散型随机变量

- 二维离散型随机变量的概率分布（分布律） $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\ i,j=1,2,3,\cdots$
- 二位离散型随机变量的联合分布函数$F(x,y)=\sum\limits_{x_i\le x}\sum\limits_{y_i\le y}p_{ij}$
- 二维离散型随机变量的边缘分布
  - $p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}p_{ij}$
  - $p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum\limits_{j=1}^{+\infty}p_{ij}$
- 二维离散型随机变量的条件分布
  - $P\{X=x_i|Y=y_j\}=\dfrac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$
  - $P\{Y=y_j|X=x_i\}=\dfrac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$
- p_{ij}的性质
  - $p_{ij}\ge 0$
  - $\sum\limits_i\sum\limits_j p_{ij}=1$

二维连续型随机变量

- 二维连续型随机变量的概率密度 $f(x,y)$
- 二位连续型随机变量的联合分布函数$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$
- 二维连续型随机变量的边缘密度
  - $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$
  - $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$
- 二维连续型随机变量的条件密度

- $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)},F_{X|Y}(x|y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{f(s,y)}{f_Y(y)}ds$
- $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)},F_{Y|X}(y|x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,s)}{f_X(x)}ds$

- $f(x,y)$的性质
  - $f(x,y)\geq 0$
  - $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$

2 随机变量的独立性

随机变量的独立性

如果对于任意x,y都有$P\{X\leq x,Y\leq y\}=P\{X\leq x\}P\{Y\leq y\}$即$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，则称随机变量$X$和$Y$相互独立。

随机变量相互独立的充分必要条件

- 离散型随机变量相互独立 $\iff p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$
- 连续型随机变量相互独立 $\iff f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

3 二维均匀分布和二维正态分布

二维均匀分布

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A} & (x,y)\in G\\ 0 & \text{others}\end{cases}$$

- 均匀分布与几何度量密不可分。

二维正态分布

$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]$$

其中，$\rho=\dfrac{\mathrm{cov(X,Y)}}{\sqrt{D_X}\sqrt{D_Y}}$

- 若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，则$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$。
- 概率论中约定：相互独立的正态随机变量X和Y就是指$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;0)$。
- X和Y相互独立$\iff \rho=0$
- 当行列式$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0$时，$(aX+bY,cX+dY)$也一定是二维正态分布。
- (X,Y)为二维正态分布，且$a^2+b^2\neq 0$，则$aX+bY\sim N(a\mu_1+b\mu_2,a^2\sigma_1^2+2ab\sigma_1\sigma_2\rho+b^2\sigma_2^2)$。

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，且$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$，则$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} C_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \sigma_i^2)$。

4 两个随机变量函数的分布

离散型

对于$Z = g(X, Y)$，有$P\{Z = z_k\} = P\{g(X, Y) = z_k\} = \sum_{g(x_i, y_j) = z_k} p_{ij}$。也即可以取到相同$Z$值的$(x, y)$的概率累加。

连续型

对于$Z = g(X, Y)$，有$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{g(X, Y) \leq z\} = \iint_{g(x,y) \leq z} f(x, y) dx dy$。

有以下几种常见情况：

- $Z = X \pm Y$、$Z = XY$、$Z = \frac{X}{Y}$，以Z表示Y，根据X, Y的范围确定Z的范围，然后分区域进行积分
  $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y(z)) |y'(z)| dx$。
  特别的，当$Z = X + Y$时，
  $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy$
  $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y) dy$
  当X, Y相互独立时，$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$，则
  $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z - y) f_Y(y) dy = f_X * f_Y$，被成为卷积公式。
- $Z = \max(X, Y)$，则$F_Z(z) = P\{\max(X, Y) \leq z\} = P\{X \leq z, Y \leq z\} = F_{XY}(z, z)$
- $Z = \min(X, Y)$，则$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{\min(X, Y) \leq z\} = P\{(X \leq z) \cup (Y \leq z)\} \\ &= F_X(z) + F_Y(z) - F_{XY}(z, z) \end{aligned}$
- X, Y相互独立，则
  - $X \sim B(n, p), Y \sim B(m, p) \rightarrow X + Y \sim B(n + m, p)$
  - $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2) \rightarrow X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

四 随机变量的数字特征

1 数学期望

数学期望的定义

- 离散型，$EX = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$

- 连续型，$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

数学期望的性质

- $E(C)=C$
- $E(aX+b)=aEX+b$
- $E(X\pm Y)=EX\pm EY$
- X,Y相互独立，则$E(XY)=EXEY$

随机变量函数的期望

对于$Y=g(X)$，

- 离散型，$EY=E(g(X))=\sum_{k=1}^{+\infty}g(x_k)p_k$
- 连续型，$EY=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$

二维随机变量函数的期望

对于$Z=g(X,Y)$，

- 离散型，$EZ=E(g(X,Y))=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$
- 连续型，$EZ=E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$

2 方差

方差的定义

方差$DX=E\{[X-E(X)]^2\}$。

标准差或均方差$\sigma(X)=\sqrt{DX}$。

方差的计算

$DX=E(X^2)-(EX)^2$

方差的性质

- $D(C)=0$
- $D(aX+b)=a^2DX$
- $D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2\text{cov}(X,Y)$
- 若X,Y相互独立，则$D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY$，$D(XY)=DX\cdot DY+DX(EY)^2+DY(EX)^2$

3 常用随机变量的数学期望和方差

- 0-1分布，$EX=p,DX=p(1-p)$
- 二项分布$X\sim B(n,p)$，$EX=np,DX=np(1-p)$
- 泊松分布$X\sim P(\lambda)$，$EX=\lambda,DX=\lambda$
- 几何分布$X\sim Ge(p)$，$EX=\dfrac{1}{p},DX=\dfrac{1-p}{p^2}$
- 超几何分布$X\sim H(N,M,n)$，$EX=n\dfrac{M}{N},DX=\dfrac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
- 均匀分布$X\sim U(a,b)$，$E(X)=\dfrac{a+b}{2},D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$
- 指数分布$X\sim E(\lambda)$，$E(X)=\dfrac{1}{\lambda},D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$
- 正态分布$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2$
- $\chi^2(n)$分布，$EX=n,DX=2n$

4 矩

矩的定义

- k阶原点矩：$E(x^k)$
- k阶中心矩：$E[(X-EX)^k]$
- X,Y的$k+l$阶混合矩$E(X^kY^l)$
- X,Y的$k+l$阶混合中心矩$E[(X-EX)^k(Y-EY)^l]$

5 协方差

协方差的定义

- 协方差$\mathrm{cov}(X,Y)=EE[(X-EX)(Y-EY)]=E(XY)-EXEY$
- 协方差矩阵
  $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$，其中$c_{ij}=\mathrm{cov}(X_i,X_j)$，$c_{ij}=c_{ji}$。

协方差的性质

- $\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY$
- $D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2\mathrm{cov}(X,Y)$
- $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(Y,X)$
- $\mathrm{cov}(X,X)=DX$
- $\mathrm{cov}(X,C)=0$
- $\mathrm{cov}(aX,bY)=ab\mathrm{cov}(X,Y)$
- $\mathrm{cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{cov}(X_1,Y)+\mathrm{cov}(X_2,Y)$

6 相关系数

相关系数的定义

相关系数$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

相关系数的性质

- $|\rho_{XY}|\le 1$
- $|\rho_{XY}|=1 \iff$ 存在不全为零的常数a,b使得$P\{aX+bY=1\}=1$
- 若$\rho_{XY}=0$，则X,Y不相关。
- $\rho_{XX}=1$
- 若随机变量X,Y相互独立，则X,Y必不相关。反之不成立。
- 对于**二维正态随机变量**，相互独立和不相关是等价的。

五 大数定律和中心极限定理

1 切比雪夫不等式

设随机变量X的数学期望$E(X)$和方差$D(X)$存在，则对任何的$\varepsilon>0$，总有 $P\{|X-E(X)|\ge\varepsilon\}\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

2 依概率收敛

设$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是一个随机变量序列，$A$是一个常数，如果对任意$\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|X_n-A|<\varepsilon\}=1$，则称随机变量序列$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$依概率收敛于$A$。

3 切比雪夫大数定律

设$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$为相互独立的随机变量序列，存在常数$C$，使$D(X_i)\le C(i=1,2,\cdots)$，则对任意$\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}=1$

4 辛钦大数定律

设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$独立同分布，具有数学期望$E(X_i)=\mu,i=1,2,\cdots$，则对任意$\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$

5 伯努利大数定律

设随机变量$X_n\sim B(n,p),n=1,2,\cdots$，则对于任意$\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$

6 列维-林德伯格中心极限定理

设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$独立同分布，$E(X_n)=\mu,D(X_n)=\sigma^2,n=1,2,\cdots$，则对任意实数$x$，有$\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq x\right\}=\varPhi(x)$ 表明当n充分大时，$\frac{\sum_{i=1}^n X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\sim N(0,1)$。

7 棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

设随机变量$X_n\sim B(n,p),n=1,2,\cdots$，则对任意实数$x$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq x\right\}=\varPhi(x)$ 表明当n充分大时，$\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\sim N(0,1)$。

8 李雅普诺夫中心极限定理

设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$相互独立，$E(X_i)=\mu_i,D(X_i)=\sigma_i^2,i=1,2,\cdots$。记$B_n^2=\sum\limits_{i=1}^n\sigma_i^2$，若存在正数$\delta$，使得$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum\limits_{i=1}^n E(|X_i-\mu_i|^{2+\delta})=0$，则有$\lim\limits_{n\to+\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i-\sum_{i=1}^n\mu_i}{B_n}\leq x\right\}=\varPhi(x)$ 表明当n充分大时，$\frac{\sum_{i=1}^n X_i-\sum_{i=1}^n\mu_i}{B_n}\sim N(0,1)$。

六 数理统计的基本概念

1 基本概念

概念：总体、样本、统计量（以样本作为输入，经过一个不含其它未知量的函数，所得的量）

样本数字特征

- 样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i$
- 样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2$
- 样本标准差 $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2}$
- 样本k阶原点矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i^k,k=1,2,A_1=\overline{X}$
- 样本k阶中心矩 $B_k=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^k,k=1,2,B_2=\frac{n-1}{n}S^2\neq S^2$
- 顺序统计量 将样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$按从小到大的顺序排列，第k个称为第k顺序统计量，记作$X_{(k)}$。

  $X_{(1)}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n),X_{(n)}=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$

样本数字特征的性质

- 若总体X具有数学期望$E(X)=\mu$，则$E(\overline{X})=E(X)=\mu$
- 若总体X具有方差$D(X)=\sigma^2$，则$D(\overline{X})=\dfrac{1}{n}D(X)=\dfrac{\sigma^2}{n},E(S^2)=D(X)=\sigma^2$
- 若总体X的k阶原点矩$E(X^k)=\mu_k,k=1,2,\cdots$存在，则$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k=\mu_k,k=1,2,\cdots$

2 常用统计抽样分布和正态总体的抽样分布

χ^2分布

- 定义：设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且均服从标准正态分布$N(0,1)$，则称随机变量$\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$服从自由度为$n$的$\chi^2$分布，记作$\chi^2\sim\chi^2(n)$。
- 性质：
  - 设$\chi^2\sim\chi^2(n)$，则$E(\chi^2)=n,D(\chi^2)=2n$
  - 设$\chi_1^2\sim\chi^2(n_1),\chi_2^2\sim\chi^2(n_2)$，且$\chi_1^2,\chi_2^2$相互独立，则$\chi_1^2+\chi_2^2\sim\chi^2(n_1+n_2)$
  - 设$\chi^2\sim\chi^2(n)$，对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件$P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=\int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty}f(x)dx=\alpha$的点$\chi_\alpha^2(n)$为$\chi^2(n)$分布的上$\alpha$分位点。

t分布

- 定义：设随机变量X,Y相互独立，且$X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(n)$，则称随机变量$T=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$服从自由度为$n$的$t$分布，记作$T\sim t(n)$。
- 性质：
  - t分布的概率密度$f(x)$是偶函数，且当n充分大时，$t(n)$分布近似于$N(0,1)$分布。
  - 设$T\sim t(n)$，对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件$P\{T>t_\alpha(n)\}=\int_{t_\alpha(n)}^{+\infty}f(x)dx=\alpha$的点$t_\alpha(n)$为$t(n)$分布的上$\alpha$分位点。
  - $t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$

F分布

- 定义：设随机变量X,Y相互独立，且$X\sim\chi^2(n_1),Y\sim\chi^2(n_2)$，则称随机变量$F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$服从自由度为$(n_1,n_2)$的$F$分布，记作$F\sim F(n_1,n_2)$，其中$n_1$和$n_2$分别成为第一自由度和第二自由度。
- 性质：
  - 设$F\sim F(n_1,n_2)$，对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件$P\{F>F_\alpha(n_1,n_2)\}=\int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{+\infty}f(x)dx=\alpha$的点$F_\alpha(n_1,n_2)$为$F(n_1,n_2)$分布的上$\alpha$分位点。

- 若$F \sim F(n_1,n_2)$，则$\frac{1}{F} \sim F(n_2,n_1)$，且有$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$。

一个正态总体的抽样分布

设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体的样本，样本均值为$\overline{X}$，样本方差为S^2，则有：

- $\overline{X}$和S^2相互独立
- （已知σ求μ）$\overline{X} \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n}) \to U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
- （未知σ求μ）$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，
  $T=\frac{U}{\sqrt{\chi^2/(n-1)}}=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，另外$F=\frac{U^2/1}{\chi^2/(n-1)}=\frac{n(\overline{X}-\mu)}{S^2} \sim F(1,n-1)$
- （已知μ求σ）$\frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \to$
  $$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$$
- （未知μ求σ）$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$。（证明很麻烦）

两个正态总体的抽样分布

设总体$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$和总体$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$是分别来自总体$X$和$Y$的样本且相互独立，样本均值分别为$\overline{X}$和$\overline{Y}$，样本方差为$S_1^2$和$S_2^2$，则有：

- $\overline{X}-\overline{Y} \sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$
  $U=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$
- 若$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，则$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$，其中$S_\omega^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$
- $F=\frac{\frac{1}{n_1\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)}{\frac{1}{n_2\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)} \sim F(n_1,n_2)$
- $F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$

七 参数估计

1 点估计

设总体X的分布函数为$F(x;\theta)$，θ是待估参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是总体X的一个样本，构造一个适当的统计量$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$来估计$\theta$的问题称为参数的点估计问题。统计量$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$称为$\theta$的估计量。

构造估计量的方法

- 矩估计法：用样本矩估计相应的总体矩，用样本矩的函数估计总体矩相应的函数。
    - 设X为连续型随机变量，其概率密度为$f(x;\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$，其中$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$为待估参数，共$k$个，$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自$X$的样本。
      假设总体X的前k阶矩为$\mu_l = E(X^l) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^l f(x;\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)dx, l = 1, 2, \cdots, k$。对应的样本矩为$A_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l, l = 1, 2, \cdots, k$。样本矩依概率收敛于总体矩，$\mu_l = A_l, l = 1, 2, \cdots, k$，因此得到$k$个方程（由于有$k$个待估参数）组成的方程组，解得$k$个待估参数。（$\mu_l$根据随机变量的形式获得，$A_l$根据样本值获得。）
    - 设X为离散型随机变量，其分布律为$p(x;\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$，其中$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$为待估参数，共$k$个，$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自$X$的样本。
      假设总体X的前k阶矩为$\mu_l = E(X^l) = \sum_{x \in R_X} x^l p(x;\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k), l = 1, 2, \cdots, k$。对应的样本矩为$A_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l, l = 1, 2, \cdots, k$。样本矩依概率收敛于总体矩，$\mu_l = A_l, l = 1, 2, \cdots, k$，因此得到$k$个方程（由于又$k$个待估参数）组成的方程组，解得$k$个待估参数。（$\mu_l$根据随机变量的形式获得，$A_l$根据样本值获得。）
- 最大似然估计：
    - 设总体X是离散型随机变量，其分布律为$p(x;\theta), \theta \in \Theta$，$\Theta$的形式已经给出，$\theta$为待估参数。$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自$X$的样本。
      又设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是相应于样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的一个样本值，取得这一样本值的概率为$L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$。$L(\theta)$称为样本的似然函数。
      根据似然函数和θ的取值范围挑选**似然函数最大**的参数取值$\hat{\theta}$，称为参数θ的最大似然估计值。
    - 设总体X是连续型随机变量，其概率密度为$f(x;\theta), \theta \in \Theta$，$\Theta$的形式已经给出，$\theta$为待估参数。$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自$X$的样本。
      又设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是相应于样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的一个样本值，取得这一样本值的概率为$L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$。$L(\theta)$称为样本的似然函数。
      根据似然函数和θ的取值范围挑选**似然函数最大**的参数取值$\hat{\theta}$，称为参数θ的最大似然估计值。
    - 若$L(\theta)$或者$\ln L(\theta)$关于θ可微，值$\hat{\theta}$可以从方程$\frac{dL(\theta)}{d\theta} = 0$或者$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = 0$来求得。（求极值）
      若要估计的参数有两个， 可以根据偏导数等于零求得。

估计量的评选标准

- 无偏性/无偏估计量 $E(\hat{\theta})=\theta$，参数的估计量就是参数的实际值。
- 有效性/更有效的估计量 $D(\hat{\theta}_1)\leq D(\hat{\theta}_2)$，称估计量$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$更有效。
- 相合性/一致估计量 对于任意$\varepsilon<0$，有$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1$。（使用大数定律来证明）

2 区间估计

置信区间

设θ是总体X的未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本，如果两个统计量
$\theta_1=\theta_1(X_1,X_2,\cdots,X_n),\theta_2=\theta_2(X_1,X_2,\cdots,\theta_n)$满足 $P\{\theta_1<\theta<\theta_2\}=1-\alpha$ 则称随机区间(θ_1,θ_2)为参数θ的**置信水平**为$1-\alpha$的**置信区间**（或区间估计），θ_1,θ_2分别称为置信下限和置信上限。

另外还有单侧置信限，使用同样的方法计算。

正态总体的区间估计

其枢轴量分布的构造见上一节正态总体的抽样分布。

- 一个总体的参数的区间估计。设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本，$\overline{X},S^2$分别是样本均值和样本方差。

unknown parameter	$1-\alpha$ confidence interval
μ (σ^2 known)	$\left(\overline{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
μ (σ^2 unknown)	$\left(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$
σ^2	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

- 两个总体的参数的区间估计。设总体$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$和总体$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$是分别来自总体$X$和总体$Y$的样本，$\overline{X},\overline{Y},S_1^2,S_2^2$分别是样本均值和样本方差。

$$S_\omega^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

unknown parameter	$1-\alpha$ confidence interval
$\mu_1-\mu_2\ (\sigma_1^2,\sigma_2^2\ \text{known})$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\overline{X}-\overline{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$
$\mu_1-\mu_2\ (\sigma_1^2,\sigma_2^2\ \text{unknown,}$ but $\sigma_1^2=\sigma_2^2)$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\ \overline{X}-\overline{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-2)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-2)\right)$

八 假设检验

1 定义

假设检验

根据样本，按照一定的规则判断所做的假设真伪，并作出接受还是拒绝此假设的决定。

两类错误

对于假设H_0，

- 第一类错误：拒绝实际真的假设。
- 第二类错误：接受实际不真的假设。

显著性

- 显著性水平：在假设检验中允许犯第一类错误的概率。记作α，它表现了对弃真程度的控制。即发生H_0为真而拒绝了H_0这种事件的概率。
- 显著性检验：只控制第一类错误的检验。

显著性检验的一般步骤

1. 根据问题提出原假设H_0，（由此也可以得出对立的假设H_1）；
2. 给出显著性水平α，可以取$0.1, 0.05, 0.01, 0.001$等；
3. 确定检验的统计量、拒绝域W形式；
4. 按照犯第一类错误的概率等于α求出拒绝域W的具体值；

5. 根据样本值计算检验统计量T的观测值t，若$t \in W$，则拒绝原假设H_0，否则，接受原假设H_0。

2 正态总体参数的假设检验

设显著性水平为α，单个正态总体为$N(\mu,\sigma^2)$的参数的假设检验以及两个正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2),N(\mu_2,\sigma_2^2)$的$\mu_1-\mu_2$和$\sigma_1^2=\sigma_2^2$的假设检验。表中$S_\omega=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$

parameter test	H_0	H_1	static test	distribution of static when H_0 is true	reject region
μ (σ^2 known)	$\mu=\mu_0$ $\mu\le\mu_0$ $\mu\ge\mu_0$	$\mu\ne\mu_0$ $\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,1)$	$\lvert U\rvert\ge u_{\frac{\alpha}{2}}$ $U\ge u_\alpha$ $U\le -u_\alpha$
μ (σ^2 unknown)	$\mu=\mu_0$ $\mu\le\mu_0$ $\mu\ge\mu_0$	$\mu\ne\mu_0$ $\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\lvert T\rvert\ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ $T\ge t_\alpha(n-1)$ $T\le -t_\alpha(n-1)$
σ^2 (μ known)	$\sigma^2=\sigma_0^2$ $\sigma^2\le\sigma_0^2$ $\sigma^2\ge\sigma_0^2$	$\sigma^2\ne\sigma_0^2$ $\sigma^2>\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$	$\chi^2(n)$	$\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ *or* $\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ $\chi^2\ge\chi^2_\alpha(n)$ $\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n)$
σ^2 (μ unknown)	$\sigma^2=\sigma_0^2$ $\sigma^2\le\sigma_0^2$ $\sigma^2\ge\sigma_0^2$	$\sigma^2\ne\sigma_0^2$ $\sigma^2>\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ *or* $\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ $\chi^2\ge\chi^2_\alpha(n-1)$ $\chi^2\le\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\mu_1-\mu_2$ (σ_1^2,σ_2^2 known)	$\mu_1-\mu_2=\mu_0$ $\mu_1-\mu_2\le\mu_0$ $\mu_1-\mu_2\ge\mu_0$	$\mu_1-\mu_2\ne\mu_0$ $\mu_1-\mu_2>\mu_0$ $\mu_1-\mu_2<\mu_0$	$U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$N(0,1)$	$\lvert U\rvert\ge u_{\frac{\alpha}{2}}$ $U\ge u_\alpha$ $U\le -u_\alpha$
$\mu_1-\mu_2$ (σ_1^2,σ_2^2 unknown but $\sigma_1^2=\sigma_2^2$)	$\mu_1-\mu_2=\mu_0$ $\mu_1-\mu_2\le\mu_0$ $\mu_1-\mu_2\ge\mu_0$	$\mu_1-\mu_2\ne\mu_0$ $\mu_1-\mu_2>\mu_0$ $\mu_1-\mu_2<\mu_0$	$T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\mu_0}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$	$t(n_1+n_2-2)$	$\lvert T\rvert\ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$ $T\ge t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $T\le -t_\alpha(n_1+n_2-2)$
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ (μ_1,μ_2 known)	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\le\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\ge\sigma_2$	$\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$ $\sigma_1^2>\sigma_2^2$ $\sigma_1^2<\sigma_2$	$F=\dfrac{n_2\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}$	$F(n_1,n_2)$	$F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)$ *or* $F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)$ $F\ge F_\alpha(n_1,n_2)$ $F\le F_{1-\alpha}(n_1,n_2)$
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ (μ_1,μ_2 unknown)	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\le\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\ge\sigma_2$	$\sigma_1^2\ne\sigma_2^2$ $\sigma_1^2>\sigma_2^2$ $\sigma_1^2<\sigma_2$	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$F(n_1-1,n_2-2)$	$F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ *or* $F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ $F\ge F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$ $F\le F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$