线性代数笔记

ixtWuko

主要内容包括：

- 行列式的性质、计算方法
- 矩阵的加减、数乘、乘法、幂、转置
- 伴随矩阵，矩阵的逆，可逆的条件与性质
- 矩阵初等变换，分块矩阵
- 矩阵的秩及其性质
- 向量的加减、数乘、内积
- 线性相关、线性无关，极大线性无关组与秩的关系
- 正交矩阵，标准正交化，向量空间与坐标变换
- 线性方程组的解
- 矩阵的特征值、特征向量
- 相似矩阵，相似对角化
- 二次型、标准型、规范型，正定二次型

一 行列式

1 行列式的定义

- $|\boldsymbol{A}|$或者$\det \boldsymbol{A}$，其中$\boldsymbol{A}$为n阶方阵。
- $\begin{vmatrix} a_1 1 & a_1 2 & \cdots & a_1 n \\ a_2 1 & a_2 2 & \cdots & a_2 n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n 1 & a_n 2 & \cdots & a_n n \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$，

  其中$\tau()$为序列的逆序数。

2 行列式的性质与计算

性质

- 把某行（或列）的k倍加到另一行（或列），行列式的值不变。
- 某行（或列）有公因子k，则可以把k提到行列式记号外。
- $\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$
- 两行（或列）对应成比例，行列式为零。

- 两行（或列）互换位置，行列式反号。
- $|\boldsymbol{A}^T|=|\boldsymbol{A}|\quad|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$
- $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$
- $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$
- $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}\quad|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$
- $|\boldsymbol{A}|=\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$，其中$\lambda_i$为$\boldsymbol{A}$的特征值。
- $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\implies|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$

计算

- $|\boldsymbol{A}|=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}$，其中，$A_{ik},A_{kj}$均为元素对应的代数余子式。（注意代数余子式的符号）

  任一行（或列）元素与**另一行（或列）**元素的代数余子式乘积之和为零。
- 求$|\boldsymbol{A}|$，可以增加一行构成$\begin{vmatrix}1&*\\0&\boldsymbol{A}\end{vmatrix}$，其中$*$用于化简。
- 上（下）三角形行列式（左下或右上元素全为零）的值等于主对角线元素的乘积。
- 左上或者右下元素全为零的行列式用副对角线计算，为$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$。
- 拉普拉斯展开式：$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&*\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\*&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，$\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&*\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}*&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，其中$m,n$分别为两个对角上矩阵的阶。
- 范德蒙行列式：$\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod\limits_{1\le j<j\le n}(x_i-x_j)$。（所有满足大下标减小下标的乘积）

结合后面的内容，有以下等价关系：

行列式$|\boldsymbol{A}|=0\iff$矩阵$\boldsymbol{A}$不可逆$\iff$秩$r(\boldsymbol{A})<n\iff\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解$\iff$

0是矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值$\iff\boldsymbol{A}$的行（列）向量线性相关。

二 矩阵

1 矩阵定义与计算

定义

- 方阵、零矩阵、单位阵（主对角线元素为1，其余为0）、对角阵（$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}[a_1,a_2,\cdots,a_n]$）、上（下）三角阵；
- 对称阵（$\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$）、反对称阵（$\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$）；

- 正交阵（$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{E}$）、初等矩阵（单位阵经一次初等变换得到的矩阵）；
- 伴随矩阵（由矩阵的行列式的所有代数余子式所构成的，下标行列互换的矩阵）；
- 奇异矩阵（$|\boldsymbol{A}|=0$）

计算

- 加减：对应元素加减。
  - $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$
  - $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$
- 数乘：每个元素都数乘。
  - $k(m\boldsymbol{A})=(km)\boldsymbol{A}=m(k\boldsymbol{A})$
  - $(k+m)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{A}$
  - $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$
- 乘法：前一个矩阵的行与后一个矩阵的列对应元素相乘再求和，作为结果矩阵该行该列的元素。
  - $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$
  - $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$
  - $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$
  - $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$
  - $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}\nRightarrow\boldsymbol{A}=0\ or\ \boldsymbol{B}=0$
  - $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\ and\ \boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}\nRightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$
- 方阵的幂
  - $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}\quad\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$
  - $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^k=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\cdots(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$
  - $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2$
  - $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^2\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$
  - $\begin{bmatrix}a_1&&\\&a_2&\\&&a_3\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a_1^n&&\\&a_2^n&\\&&a_3^n\end{bmatrix}$
- 转置：沿主对角线互换位置。
  - $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T$
  - $(k\boldsymbol{A})^T=k\boldsymbol{A}^T$
  - $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$
  - $(\boldsymbol{A}^T)^T=\boldsymbol{A}$
  - 设α,β均为n为列向量，则(1)$\alpha\beta^T,\beta\alpha^T$为$n$维矩阵，且二者互为转置；(2)$\alpha^T\beta,\beta^T\alpha$为一个数，且$\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=$前面矩阵的主对角线元素之和；(3)$|\alpha\beta^T|=|\beta\alpha^T|=0$。
- 伴随矩阵计算

- $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$
- $(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^* = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$
- $(\boldsymbol{A}^*)^T = (\boldsymbol{A}^T)^*$
- $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$
- $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1} \quad (\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$
- $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$

2 可逆矩阵

定义

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$，可逆矩阵也称为非奇异矩阵。

- 若$\boldsymbol{A}$可逆，则其逆矩阵必唯一。
- $\boldsymbol{A}$可逆 $\iff |\boldsymbol{A}| \neq 0$

可逆的充分必要条件

- $|\boldsymbol{A}| \neq 0$
- $r(\boldsymbol{A}) = n$
- $\boldsymbol{A}$的行（列）向量线性无关。
- 齐次方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$只有零解。
- 非齐次方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$总有唯一解。
- 矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值全不为零。

性质

- $k \neq 0, (k\boldsymbol{A})^{-1} = \dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$
- $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$
- $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$
- $(\boldsymbol{A}^2)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^2$
- $(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^T$
- $|\boldsymbol{A}^{-1}| = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$
- $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{-1} \neq \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}$

求逆的方法

- $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$
- $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E}) \longrightarrow (\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{A}^{-1})$，使用初等行变换进行左侧的变形。

- 利用定义$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$。
- $\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$

3 初等变换

定义

- 有某个非零常数乘矩阵的某一行（或列）的每一个元素。
- 互换矩阵的某两行（或列）的位置。
- 将矩阵的某行（或列）元素的常数倍加到另一行（或列）。
- 初等矩阵：
  - $\boldsymbol{E}_2(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - $\boldsymbol{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - $\boldsymbol{E}_{31}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}$

  初等矩阵左乘时对行作变换，右乘时对列作变换。
- 矩阵$\boldsymbol{A}$经过有限次初等变换变成矩阵$\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{A}$等价于$\boldsymbol{B}$。

  （若存在可逆矩阵$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{A}$等价于$\boldsymbol{B}$，记作$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$。）

性质

- 初等矩阵的转置仍是初等矩阵。
- 初等矩阵都是可逆矩阵，其逆矩阵仍是同一类型的矩阵。
- 任何可逆矩阵逆，都可以经过一系列初等变换化成单位阵，也就意味着可逆矩阵可以表示成有限个初等矩阵的乘积。

4 矩阵的秩

定义

非零子式的最高阶数，称为矩阵的秩。

性质

- $r(\boldsymbol{A})=0 \iff \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

  $r(\boldsymbol{A})\geq 1 \iff \boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$
- 对于$m\times n$矩阵，$r(\boldsymbol{A})\leq \min(m,n)$

- 对于n阶方阵，$r(\boldsymbol{A})=n \iff \boldsymbol{A}$可逆
- $k \neq 0, r(k\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$
- $r(\boldsymbol{A}^T)=r(\boldsymbol{A}), \quad r(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$
- 若$\boldsymbol{A}$可逆，则$r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{B}), r(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$
- $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leq r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$
- 若$\boldsymbol{A}$是$m \times n$矩阵，$\boldsymbol{B}$是$n \times s$矩阵，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，则$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}) \leq n$
- $\max\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\} \leq r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \leq r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$
- $r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \leq \min\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\}$
- $r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \geq r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n$
- $r\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$

5 分块矩阵

- $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^T & \boldsymbol{C}^T \\ \boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{D}^T \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^n & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^n \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$$
- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，对$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{O}$按列分块，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s]=[\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_s]=[\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}]$

三 向量

1 向量的定义和计算

计算

- 加减，与矩阵的加减类似。
- 数乘，与矩阵的数乘类似。
- 内积$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}$

  若$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})=0$，则称两向量正交。

  $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$为向量的长度。

  - $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$
  - $k(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})=(k\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}, k\boldsymbol{\beta})$
  - $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$

- $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geq 0$
- $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})^2 \leq (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})$ （施瓦茨不等式）

2 线性相关

线性表出

- 线性组合$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$。
- 向量β可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性表出：存在实数$k_1, k_2, \cdots, k_m$使得$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$。
- 两个向量组可以互相线性表出，称这两个向量组等价。
  - 等价向量组具有传递性、对称性、反身性。
  - 向量组和它的极大线性无关组是等价向量组。
  - 向量组的任意两个极大线性无关组是等价向量组。
  - 等价向量组有相同的秩，但是反之不成立。

线性无关

- 线性相关：存在**不全为零**的实数$k_1, k_2, \cdots, k_m$使得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$成立，否则称它线性无关。
- n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性相关 $\iff$ 齐次方程组$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \mathbf{0}$有非零解

  $\iff r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) < m \iff$ 向量组中至少有一个向量可以被其余向量线性表出。
  - n个n维向量$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$线性相关 $\iff |\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n| = 0$
  - $n+1$个n维向量必线性相关。
  - 若$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$线性相关，则$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$必线性相关。
  - 若n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，则它的延伸组$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_m \\ \boldsymbol{\beta}_m \end{pmatrix}$必线性无关。
- n维向量组β可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性表出 $\iff$ 非齐次方程组$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta}$有解

  $\iff r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta})$
- 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，且向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \beta$线性相关，则向量$\beta$可由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$线性表出，且表示法唯一。
- 若n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$能够由$n$维向量组$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$线性表出，且$s > t$，则$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性相关。

若n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$能够由$n$维向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性表出，且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$s\le t$。

3 极大线性无关组、秩

- 极大线性无关组
    - 只有一个零向量构成的向量组没有极大线性无关组。
    - 极大线性无关组虽然一般不唯一，但是其向量个数是一定的。
    - $r(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s)\le r(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_s,\boldsymbol{a}_{s+1})$
- 如果向量组(I)可以由向量组(II)线性表出，则$r(\mathrm{I})\le r(\mathrm{II})$。如果两个向量组等价（可以相互线性表出），则其秩相等。
- $r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$的行秩$=\boldsymbol{A}$的列秩。
- **经初等变换后的向量组的秩不变。**

4 正交矩阵

正交矩阵

- 满足$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$的矩阵
- $\boldsymbol{A}$是正交矩阵$\iff \boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}^{-1}\iff \boldsymbol{A}$的列向量（行向量）组是正交规范的向量组。
- 若$\boldsymbol{A}$是正交矩阵，则$|\boldsymbol{A}|=1\ or\ -1$。

Schmidt标准正交化

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，其标准正交化方法步骤如下：

令$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2$，则$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$两两正交。

再将其单位化，取$\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_3}{|\boldsymbol{\beta}_3|}$

5 向量空间

- 全体n维向量连同向量的加法和数乘运算合成n维向量空间。
- 子空间、基底(在本空间下一个可以表示其他所有向量的线性无关组）、坐标（用基底表示一个向量时的各个向量的系数）、维数$\mathrm{dim}V=m$
- 规范正交基：满足$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\ne j\end{cases}$的一组基。
- 齐次方程组的解的集合是一个向量空间的子空间，又称解空间，其基础解系是这个解空间的一个基底。
- 有一个基底变换到另一个基底的方法，使用过渡矩阵。
    - 基底变换公式 $[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{C}$

- 坐标变换公式 若向量$\boldsymbol{\gamma}$在基底$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标是$x_1,x_2,\cdots,x_n$，在基底$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$下的坐标是$y_1,y_2,\cdots,y_n$，则$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$
- 过渡矩阵$\boldsymbol{C}$是可逆矩阵。
- 若过渡矩阵是一个正交矩阵，其中一个基底是规范正交基，则另一个也是规范正交基。

四 线性方程组

1 克拉默法则

- 若非齐次线性方程组的系数行列式$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则方程组有唯一解，且$x_i=\dfrac{|\boldsymbol{A}_i|}{\boldsymbol{A}},i=1,2,\cdots,n$。其中$|\boldsymbol{A}_i|$是$|\boldsymbol{A}|$的第 i 列元素替换称方程组右端的常数项$b_1,b_2,\cdots,b_n$所构成的行列式。
- 若齐次线性方程组的系数行列式$|\boldsymbol{A}|=0$，则方程组有非零解；否则，方程组有唯一零解。

2 齐次线性方程组

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$

- 基础解系：设$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的解向量，若满足(1)$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关，(2)任一解向量都可以由$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性表出，则称向量组$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$为$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$基础解系。
- 齐次线性方程组的基础解系的线性组合仍是该齐次线性方程组的解。

  通解记为$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$。
- $r(\boldsymbol{A})=r$，基础解系有$n-r$个线性无关解向量组成。
- 齐次线性方程组一定有解，至少有零解。
- 齐次线性方程组$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$只有零解$\iff\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关$\iff r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=r(\boldsymbol{A})=n$
- 齐次线性方程组$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$有非零解$\iff\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性相关$\iff r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=r(\boldsymbol{A})<n$

求基础解系和通解

1. 将系数矩阵利用**初等行变换**化成阶梯型矩阵；
2. 阶梯型矩阵中的**第一个系数不为零**的r个未知量称为**独立未知量**，**后面的**未知量称为**自由未知量**。将自由未知量分别赋值1得到$n-r$向量，分别带入原方程求得独立未知量的值。
3. 上面得到的$n-r$个解就是方程的基础解系；
4. 将其写成通解形式。

3 非齐次线性方程组

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$

- 通解记为$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}$。$\boldsymbol{\eta}$为特解。
- 非齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$两个解的差是对应齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解。

  $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1+k\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{b}$，其中$\boldsymbol{\xi}$是齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的一个解。
- 非齐次线性方程组$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$无解 $\iff$ $\boldsymbol{b}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表出 $\iff$ $r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$
- 非齐次线性方程组$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$有解 $\iff$ $\boldsymbol{b}$可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表出 $\iff$ $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$
  - 若$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b})=n \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有唯一解。
  - 若$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b})=r<n \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有无穷多解。

求通解

1. 将增广矩阵$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$利用初等变换化成阶梯型矩阵，求对应齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的通解；
2. 再求一个非齐次特解$\boldsymbol{\eta}$;
3. 将上述两部分组合写成通解形式。

五 特征值、特征向量、相似矩阵

1 特征值、特征向量

定义

$\boldsymbol{A}$是n阶方阵，如果对应数λ，存在非零向量$\boldsymbol{\alpha}$，使得$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，则称$\lambda$为矩阵$\boldsymbol{A}$的**特征值**，$\boldsymbol{\alpha}$为矩阵$\boldsymbol{A}$的对应有$\lambda$的**特征向量。**

由上可得$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，而$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，因此 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，称为$\boldsymbol{A}$的**特征方程**，矩阵$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$称为**特征矩阵。**

性质

设$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n},\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$是$\boldsymbol{A}$的特征值，则

- $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$
- $\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=|\boldsymbol{A}|$
- $\lambda_1\neq\lambda_2$都是$\boldsymbol{A}$的特征值 $\implies$ $\boldsymbol{A}$的对应于λ_1,λ_2的特征向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关。
- λ_i是n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的r_i重特征值，则其对应的线性无关特征向量个数至多r_i个。

求特征值、特征向量

- 由$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$求出$\boldsymbol{A}$的全部特征值$\lambda_i$，再由齐次线性方程组$(\lambda_i \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$求出对应的特征向量。通解就是全体特征向量。
- 利用定义，一般用于抽象矩阵。

2 相似矩阵、矩阵的相似对角化

定义

设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是$n$阶矩阵，若存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$。

若$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，其中$\boldsymbol{\Lambda}$为对角阵，则称$\boldsymbol{A}$可**相似对角化**，$\boldsymbol{\Lambda}$是$\boldsymbol{A}$的标准型。

相似矩阵的性质

- $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$
- $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\implies\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$
- $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}\implies\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$
- 若$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则
  - $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$
  - $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$
  - $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$有相同的特征值
  - $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$
  - $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_{ii}$
- $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^n\implies\boldsymbol{A}^n\sim\boldsymbol{B}^n$

矩阵相似对角化的条件

- n阶矩阵$\boldsymbol{A}$可相似对角化$\iff\boldsymbol{A}$有n个线性无关的特征向量。
- n阶矩阵$\boldsymbol{A}$有n个互不相同的特征值$\implies\boldsymbol{A}$有n个线性无关的特征向量。此时，特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$的对应的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，取$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$，则有$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中
$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$
- n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的每一个r_i重特征值对应的线性无关特征向量个数等于该特征值的重数$r_i\iff\boldsymbol{A}$可相似对角化。

3 实对称矩阵的相似对角化

定义

元素都是实数的对称矩阵称为实对称矩阵$\iff\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$

性质

- 实对称矩阵的特征值全部都是实数。
- 实对称矩阵的属于不同特征值对应的特征向量互相正交。
- 实对称矩阵必相似于对角阵，且存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$。

步骤

1. 解特征方程$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，求出所有的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$；
2. 求$(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$的基础解系$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ik_i}$，$i=1,2,\cdots,r$；
3. 将每个属于λ_i的特征向量正交化；
4. 将正交化之后的特征向量单位化，得到标准正交向量组；
5. 将其合并成正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，即是所求的正交阵。

六 二次型

1 二次型的定义与矩阵表示

定义

n个变量的一个二次元齐次多项式

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n\\+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n\\+\cdots\cdots\cdots\cdots\\+a_{nn}x_n^2\end{aligned}$$

称为n个变量的二次型，系数均为实数时，称为n元实二次型。

注意：a_{ij}是系数的一半。

矩阵表示

$$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

其中$\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$称为二次型$f$的对应矩阵。

- $r(\boldsymbol{A})=r\iff r(f)=r$
- $\boldsymbol{A}$正定$\iff f$正定
- 若$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是两个$n$阶对称阵，$f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},g=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$
  - $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\iff f=g$

- $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B} \iff f \simeq g$，合同关系$\simeq$见下。

合同矩阵

若存在可逆矩阵$\boldsymbol{C}$使得$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$，则称$\boldsymbol{A}$合同于$\boldsymbol{B}$，记为$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$。

- $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{A}$
- $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{B} \simeq \boldsymbol{A}$
- $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \simeq \boldsymbol{C} \implies \boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{C}$
- $f(x_{,1}, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y},$
  $= \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$

  其中$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$。此时$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$为合同矩阵，$f, g$为合同二次型。
- 合同矩阵、合同二次型都有相同的秩。

2 化二次型为标准型、规范型

- 若二次型只有平方项，没有混合项，则称为二次型的标准型。
- 在二次型的标准型中，若平方项的系数只有1、-1、0，则称为二次型的规范型
- 化二次型为标准型：
  - 配方法：对任意n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$，必存在可逆矩阵$\boldsymbol{C}$，使得$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\Lambda}$。因此，令$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，将二次型化成标准型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$ 。
  - 正交变换法：对任意n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$，必存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$。因此，令$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，将二次型化成标准型
    $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2$ ，其中λ_1，$\lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$\boldsymbol{A}$的$n$个特征值。
- 对于一个二次型，化成的标准型或者规范性不唯一，但是标准型中的正平方项的项数p、负平方项的项数q都是二次型唯一确定的。p称为正惯性系数，q称为负惯性系数，二次型的秩$r = p + q$。

  $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$有相同的正、负惯性系数。

3 正定二次型

定义

若对于任意的非零向量$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$，恒有$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$，则称二次型$f$为正定二次型，对应矩阵称为正定矩阵。

- $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$正定$\iff d_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$，也即正惯性系数$p = n = r$。
- 可逆线性变换不改变二次型的正定性，因此若要判断一个二次型是否是正定，应先将其化成标准型。

- $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$正定

  $\iff$ $\boldsymbol{A}$的正惯性指数$p = r = n$ $\iff$ $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{E}$

  $\iff$ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}^T \boldsymbol{D}$，其中$\boldsymbol{D}$是可逆矩阵

  $\iff$ $\boldsymbol{A}$的特征值全部大于零 $\iff$ $\boldsymbol{A}$的全部顺序主子式大于零。

- $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$正定

  $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{A}$的主对角元素$a_{ii} > 0$

  $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{A}$的行列式$|\boldsymbol{A}| > 0$

- $\boldsymbol{A}$正定时，与其相关的$k\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}^k, \boldsymbol{A}^*, f(\boldsymbol{A})$ $(f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)$均为正定矩阵。