

# 36 Olimpiada Internacional de Física

Salamanca, España 2005

## Problema 1: Un satélite desafortunado

Las maniobras orbitales más frecuentes realizadas por naves espaciales constan en variaciones de velocidad en la dirección del vuelo, o sea, son aceleraciones para alcanzar órbitas más altas o frenados hechos para regresar a la atmósfera. En este problema estudiaremos las variaciones orbitales cuando el empuje del motor es aplicado en la dirección radial.

Para obtener los valores numéricos use: El radio terrestre  $R_T = 6.37 \times 10^6$  m, gravedad en la superficie de la Tierra  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>, y duración del día sideral  $T_0 = 24.0$  horas.

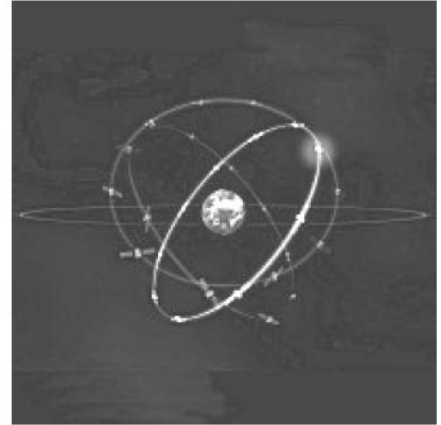


Image: ESA

Consideramos un satélite geosincrónico<sup>1</sup> de comunicaciones de masa  $m$  colocado en una órbita ecuatorial circular de radio  $r_0$ . Estos satélites tienen un “motor de apogeo” que provee los empujes tangenciales necesarios para alcanzar la órbita final.

Las puntuaciones se muestran al inicio de cada subpregunta, en paréntesis.

### Pregunta 1

**1.1** (0.3) Calcule el valor numérico de  $r_0$ .

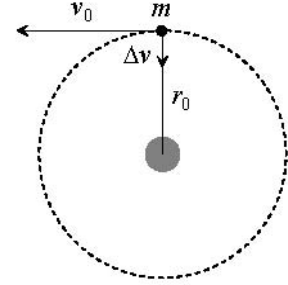
**1.2** (0.3 + 0.1) Dé una expresión analítica de la velocidad  $v_0$  del satélite como función de  $g$ ,  $R_T$  y  $r_0$  y de su valor numérico.

**1.3** (0.4 + 0.4) Obtenga expresiones de su momento angular  $L_0$  y su energía mecánica  $E_0$  como funciones de  $v_0$ ,  $m$ ,  $g$  y  $R_T$ .

---

<sup>1</sup>Su periodo de revolución es  $T_0$ .

Una vez que se ha alcanzado esta órbita geosíncrona circular (vea la Figura F-1), el satélite se ha establecido en la localización deseada y se ha alistado para realizar su trabajo, cuando un error de los controladores terrestres causa que el motor de apogeo se dispare de nuevo. El empuje resulta ser dirigido hacia la Tierra y, a pesar de la rápida reacción del personal para apagar el motor, una indeseada variación de velocidad  $\Delta v$  es impartida en el satélite. Caracterizamos este impulso por el parámetro  $\beta = \Delta v/v_0$ . La duración del empuje del motor es siempre despreciable respecto a cualquier otro tiempo orbital, por lo que puede considerarse como instantánea.



F-1

## Pregunta 2

Suponga que  $\beta < 1$ .

**2.1** (0.4 + 0.5) Determine los parámetros de la nueva órbita<sup>2</sup>, *semi-lado-recto*  $l$  y *excentricidad*  $\varepsilon$ , en términos de  $r_0$  y  $\beta$ .

**2.2** (1.0) Calcule el ángulo  $\alpha$  entre el eje mayor de la nueva órbita y el vector de posición en el disparo accidental.

**2.3** (1.0 + 0.2) Dé expresiones analíticas de las distancias  $r_{min}$  del perigeo y  $r_{max}$  del apogeo desde el centro de la Tierra, como funciones de  $r_0$  y  $\beta$ , y calcule sus valores numéricos para  $\beta = 1/4$ .

**2.4** (0.5 + 0.2) Determine el periodo  $T$  de la nueva órbita como función de  $T_0$  y  $\beta$ , y calcule su valor numérico para  $\beta = 1/4$ .

## Pregunta 3

**3.1** (0.5) Calcule el parámetro de impulso mínimo,  $\beta_{esc}$ , necesario para que el satélite escape a la gravedad de la Tierra.

**3.2** (1.0) Determine en este caso la distancia de máximo acercamiento entre el satélite y el centro de la Tierra en la nueva trayectoria,  $r_{min}$ , como una función de  $r_0$ .

---

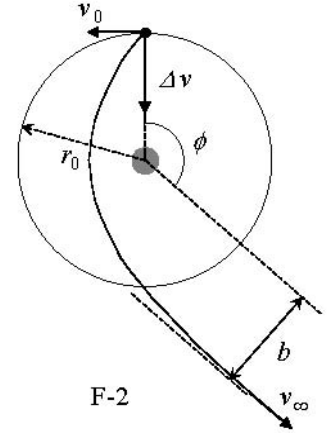
<sup>2</sup>Vea la sugerencia.

## Pregunta 4

**4.1** (1.0) Determine la velocidad residual en el infinito ,  $v_\infty$ , como una función de  $v_0$  y  $\beta$ .

**4.2** (1.0) Obtenga el parámetro de impacto  $b$  de la dirección de escape asintótica en términos de  $r_0$  y  $\beta$ .

**4.3** (1.0 + 0.2) Determine el ángulo  $\phi$  de la dirección de escape asintótica en términos de  $\beta$ . Calcule su valor numérico para  $\beta = \frac{3}{2}\beta_{esc}$ .



## SUGERENCIA

Bajo la acción de fuerzas centrales obedeciendo la ley del inverso de los cuadrados, los cuerpos siguen trayectorias descritas por elipses, parábolas o hipérbolas. En la aproximación  $m \ll M$  la masa gravitante  $M$  está en uno de los focos. Tomando el origen en el foco, la ecuación polar general de estas curvas puede escribirse como (vea la Figura F-3):

$$r(\theta) = \frac{l}{1 - \varepsilon \cos \theta}$$

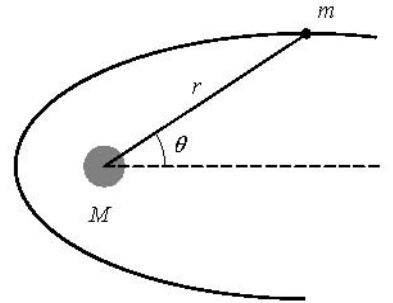
donde  $l$  es una constante positiva llamada *semi-lado-recto* y  $\varepsilon$  es la *excentricidad* de la curva. En términos de las constantes de movimiento:

$$l = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \text{y} \quad \varepsilon = \left(1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}\right)^{1/2}$$

donde  $G$  es la constante de Newton,  $L$  es el módulo del momento angular de la masa orbitante, respecto al origen, y  $E$  es su energía mecánica, con energía potencial cero en el infinito.

Tenemos los siguientes casos:

- Si  $0 \leq \varepsilon < 1$ , la curva es una elipse (circunferencia para  $\varepsilon = 0$ ).
- Si  $\varepsilon = 1$ , la curva es una parábola.
- Si  $\varepsilon > 1$ , la curva es una hipérbola.



F-3

## Problema 2: Mediciones absolutas de cantidades eléctricas

Las transformaciones científicas y tecnológicas que surgieron en el siglo XIX produjeron una imprescindible necesidad de estándares universalmente aceptados para las cantidades eléctricas. Se pensó que las nuevas unidades absolutas deberían depender únicamente de los estándares de longitud, masa y tiempo establecidos tras la revolución francesa. Un intensivo trabajo experimental para establecer los valores de estas unidades se desarrolló entre 1861 y 1912. Proponemos aquí tres casos de estos estudios.

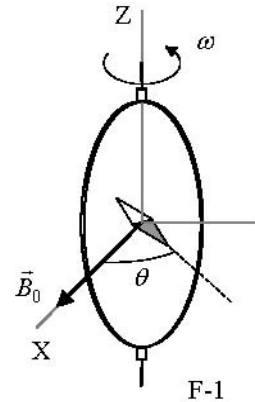
Las puntuaciones se muestran al inicio de cada subpregunta, en paréntesis.

### Determinación del ohm (Kelvin)

Una bobina cerrada circular de  $N$  vueltas, radio  $a$  y resistencia total  $R$  gira con velocidad angular uniforme  $\omega$  alrededor de un diámetro vertical, en un campo magnético horizontal  $\vec{B}_0 = B_0 \hat{i}$ .

1. (0.5 + 1.0) Calcule la fuerza electromotriz  $\varepsilon$  inducida en la bobina, también la potencia promedio<sup>1</sup>  $\langle P \rangle$  necesaria para mantener la bobina en movimiento. Desprecie la autoinductancia de la bobina.

Una pequeña aguja magnética es colocada en el centro de la bobina, como se muestra en la figura F-1. Es libre de girar lentamente alrededor del eje  $Z$  en el plano horizontal, pero no puede seguir la rápida rotación de la bobina.

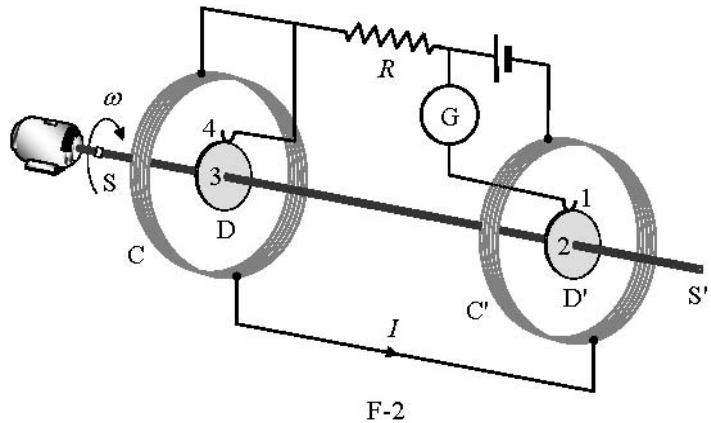


2. (2.0) Una vez que se alcanza el régimen estacionario, la aguja se fijará en una dirección haciendo un pequeño ángulo  $\theta$  con  $\vec{B}_0$ . Compute la resistencia  $R$  de la bobina en términos de este ángulo y de los otros parámetros del sistema.

Lord Kelvin usó este método en los 1860s para establecer un estándar absoluto del ohm. Para evitar hacer rotar la bobina, Lorentz ideó un método alternativo usado por Lord Rayleigh y Ms. Sidgwick, el cual analizamos en los siguientes párrafos.

### Determinación del ohm (Rayleigh, Sidgwick)

La configuración experimental experimental se muestra en la Figura F-2. Consta de dos discos idénticos  $D$  y  $D'$  de radio  $b$  montados en un eje conductor  $SS'$ . Un motor rota el sistema a una velocidad angular  $\omega$ , que puede ajustarse para medir  $R$ . Dos bobinas idénticas  $C$  y  $C'$  (de radio  $a$  y  $N$  vueltas cada una) rodean a los discos. Están conectadas de tal forma que la corriente fluye a través de ellas en direcciones opuestas. El aparato completo sirve para medir la resistencia  $R$ .



<sup>1</sup>El valor promedio  $\langle X \rangle$  de la cantidad  $X(t)$  en un sistema periódico de periodo  $T$  es  $\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$ . Podría necesitar una o más de estas integrales:

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = \int_0^{2\pi} \cos x dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \pi, \text{ y posteriormente}$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

3. (2.0) Asuma que la corriente  $I$  que pasa por las bobinas C y C' crea un campo magnético uniforme  $B$  alrededor de D y D', igual al del centro de cada bobina. Calcule<sup>1</sup> la fuerza electromotriz  $\varepsilon$  inducida entre las monturas 1 y 4, asumiendo que la distancia entre las bobinas es mucho mayor que el radio de las bobinas y que  $a \gg b$ .

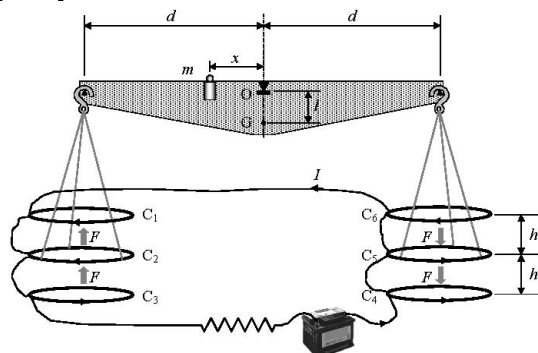
Los discos están conectados al circuito por contactos escobilla en sus bordes 1 y 4. El galvanómetro G detecta el flujo de corriente a través del circuito 1-2-3-4.

4. (0.5) La resistencia  $R$  es medida cuando G da lectura cero. Dé  $R$  en términos de los parámetros físicos del sistema.

## Determinación del ampere

Hacer pasar corriente eléctrica a través de dos conductores y medir la fuerza entre ellos brinda una determinación absoluta de la corriente misma. La “Balanza de Corriente” diseñada por Lord Kelvin en 1882 explota este método. Consiste en seis bobinas de una vuelta  $C_1, \dots, C_6$  de radio  $a$  conectadas en serie. Como se muestra en la Figura F-3, las bobinas fijas  $C_1, C_3, C_4$  y  $C_6$  están en dos planos horizontales separados por una pequeña distancia  $2h$ . Las bobinas  $C_2$  y  $C_5$  son cargadas por brazos de balanza de longitud  $d$  y están (en equilibrio) equidistantes a ambos planos.

La corriente  $I$  fluye a través de las diferentes bobinas en una dirección tal que la fuerza magnética en  $C_2$  apunta hacia arriba mientras que aquella en  $C_5$  va hacia abajo. Una masa  $m$  a una distancia  $x$  del fulcro O se requiere para regresar la balanza a su posición de equilibrio descrita anteriormente cuando la corriente pasa por el circuito.



F-3

5. (1.0) Compute la fuerza  $F$  en  $C_2$  debida a la interacción magnética con  $C_1$ . Por simplicidad, asuma que la fuerza por unidad de longitud es la misma que corresponde a dos cables rectos y largos transportando corrientes paralelas.

6. (1.0) La corriente  $I$  es medida cuando la balanza está en equilibrio. Dé el valor de  $I$  en términos de los parámetros físicos del sistema. Las dimensiones del aparato son tales que se pueden despreciar los efectos mutuos entre las bobinas en la izquierda y en la derecha.

Sea  $M$  la masa de la balanza (exceptuando a  $m$  y las partes colgantes),  $G$  su centro de masa y  $l$  la distancia  $\overline{OG}$ .

7. (2.0) El equilibrio de la balanza es estable contra variaciones que producen pequeños cambios  $\delta z$  en la altura de  $C_2$  y  $-\delta z$  en la de  $C_5$ . Calcule<sup>2</sup> el máximo valor  $\delta z_{\max}$  tal que la balanza aún regrese a la posición de equilibrio cuando es soltada.

<sup>2</sup>Considere que los centros de las bobinas permanecen aproximadamente alineados.

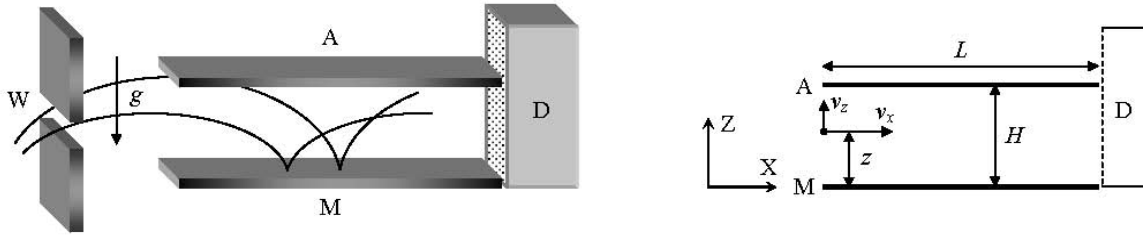
Use las aproximaciones  $\frac{1}{1 \pm \beta} \approx 1 \mp \beta + \beta^2$  o  $\frac{1}{1 \pm \beta^2} \approx 1 \mp \beta^2$  para  $\beta \ll 1$ , y  $\sin \theta \approx \tan \theta$  para  $\theta$  pequeña.

### Problema 3: Neutrones en un campo gravitacional

En el familiar mundo clásico, una bola elástica que rebota sobre la superficie de la Tierra es un ejemplo ideal de movimiento perpetuo. La bola está atrapada: no puede ir por debajo de la superficie ni por encima de su punto de retorno. Permanecerá atada en este estado, regresando hacia abajo y rebotando hacia arriba una vez más, por siempre. Solo el arrastre el aire y rebotes inelásticos podrían detener el proceso y serán ignorados en lo que sigue.

Un grupo de físicos del Instituto Laue-Langevin en Grenoble reportaron<sup>3</sup> en 2002 evidencia experimental del comportamiento de los neutrones en el campo gravitacional de la Tierra. En el experimento, se permitió que unos neutrones moviéndose hacia la derecha cayeran hacia una superficie horizontal de cristal que actuaba como un espejo de neutrones, donde rebotaban elásticamente de vuelta a la altura inicial una y otra vez.

El arreglo del experimento es bosquejado en la Figura F-1. Consta de una apertura  $W$ , el espejo de neutrones  $M$  (a altura  $z = 0$ ), el absorbedor de neutrones  $A$  (a una altura  $z = H$  y de longitud  $L$ ) y el detector de neutrones  $D$ . El rayo de neutrones vuela con una componente horizontal de velocidad constante  $v_x$  de  $W$  hacia  $D$  a través de la cavidad entre  $A$  y  $M$ . Todos los neutrones que alcanzan la superficie de  $A$  son absorbidos y desaparecen del experimento. Aquellos que alcanzan la superficie de  $M$  son reflejados elásticamente. El detector  $D$  cuenta el ritmo de transmisión  $N(H)$ , que es el número total de neutrones que alcanzar  $D$  por unidad de tiempo.



F-1

Las puntuaciones se muestran al inicio de cada subpregunta, en paréntesis.

Los neutrones entran a la cavidad con un amplio rango de velocidades verticales positivas y negativas  $v_z$ . Una vez en la cavidad, vuelan entre el espejo de abajo y el absorbedor de arriba.

1. (1.5) Compute clásicamente el rango de velocidades  $v_z(z)$  de los neutrones que, entrando a una altura  $z$ , pueden llegar al detector  $D$ . Asuma que  $L$  es mucho más grande que cualquier otra longitud en el problema.

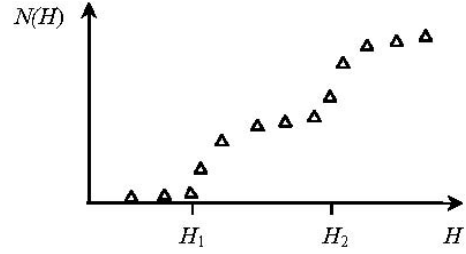
2. (1.5) Calcule clásicamente la mínima longitud  $L_c$  de la cavidad para asegurar que todos los neutrones fuera del rango anterior, sin importar el valor de  $z$ , sean absorbidos por  $A$ . Use  $v_x = 10 \text{ m s}^{-1}$  y  $H = 50 \mu\text{m}$ .

El ritmo de transmisión de neutrones  $N(H)$  es medido en  $D$ . Se espera que incremente monotónicamente con  $H$ .

3. (2.5) Compute el ritmo clásico  $N_c(H)$  asumiendo que los neutrones llegan a la cavidad con velocidad vertical  $v_z$  y a una altura  $z$ , siendo todos los valores de  $v_z$  y  $z$  igualmente probables. De las respuestas en términos de  $\rho$ , el número constante de neutrones por unidad de tiempo, por unidad de velocidad vertical, por unidad de altura, que entran en la cavidad con velocidad vertical  $v_z$  y a una altura  $z$ .

<sup>3</sup>V. V. Nesvizhevsky et al. "Quantum states of neutrons in the Earth's gravitational field." Nature, 415 (2002) 297. Phys Rev D 67, 102002 (2003).

Los resultados experimentales obtenidos por el grupo de Grenoble no concuerdan con las predicciones clásicas anteriores, mostrando en su lugar que el valor de  $N(H)$  experimenta fuertes aumentos cuando  $H$  cruza ciertas alturas críticas  $H_1, H_2 \dots$  (la Figura F-2 muestra un bosquejo). En otras palabras, el experimento mostró que el movimiento vertical de los neutrones rebotando en el espejo está cuantizado. En el lenguaje de Bohr y Sommerfield usado para obtener los niveles de energía del átomo de hidrógeno, esto puede escribirse como: “La acción  $S$  de estos neutrones a lo largo de la dirección vertical es un múltiplo entero de la constante de acción de Planck  $h$ ”. Aquí,  $S$  está dado por:



F-2

$$S = \int p_z(z) dz = nh, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{Regla de cuantización de Bohr – Sommerfield})$$

donde  $p_z$  es la componente vertical del momento clásico, y la integral cubre un ciclo completo de rebote. Sólo los neutrones con estos valores de  $S$  están permitidos en la cavidad.

4. (2.5) Compute las alturas de retorno  $H_n$  y los niveles de energía  $E_n$  (asociados al movimiento vertical) usando la condición de cuantización de Bohr-Sommerfield. Dé el valor numérico de  $H_1$  en  $\mu\text{m}$  y el de  $E_1$  en eV.

La distribución de inicial de neutrones  $\rho$  en la entrada se convierte, durante el vuelo a través de la cavidad, en la distribución tipo escalera detectada en D (vea la Figura F-2). De ahora en adelante, consideraremos por simplicidad el caso de una cavidad larga con  $H < H_2$ . Clásicamente, todos los neutrones con energías dentro del rango considerado en la pregunta 1 serían permitidos en ella, mientras que cuánticamente sólo los neutrones en el nivel de energía  $E_1$  son permitidos. De acuerdo con el principio de incertidumbre de tiempo-energía de Heisenberg, esta reorganización requiere de un tiempo mínimo de vuelo. La incertidumbre de la energía del movimiento vertical será significativa si la longitud de la cavidad es pequeña. Este fenómeno conllevará al ensanchamiento de los niveles de energía.

5. (2.0) Estime el mínimo tiempo de vuelo  $t_q$  y la mínima longitud  $L_q$  de la cavidad necesarios para observar el fuerte incremento en el número de neutrones en D. Use  $v_x = 10 \text{ m s}^{-1}$ .

Datos:

|   |   |
|---|---|
| Constante de acción de Planck           | $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$          |
| Velocidad de la luz en el vacío         | $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$         |
| Carga elemental                         | $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$            |
| Masa del neutrón                        | $M = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$           |
| Aceleración de la gravedad en la Tierra | $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$                     |
| Si es necesario, use esta expresión:    | $\int (1-x)^{1/2} dx = -\frac{2(1-x)^{3/2}}{3}$ |