

# 7 Olimpiada Asiática de Física

Almaty, Kazakhstan 2006

## Problema 1: Enfriamiento láser de átomos

En este problema se le pide considerar el mecanismo del enfriamiento de un átomo con ayuda de radiación láser. Las investigaciones en este campo llevaron a un considerable progreso en el entendimiento de las propiedades de los gases cuánticos de átomos fríos, y se les otorgaron premios Noben en 1997 y 2001.

### Introducción teórica

Considere un simple modelo de dos niveles del átomo, con energía de estado base  $E_g$  y energía de estado excitado  $E_e$ . La diferencia de energías es  $E_e - E_g = \hbar\omega_0$ , la frecuencia angular del láser usado es  $\omega$ , y la desafinación del láser es  $\delta = \omega - \omega_0 \ll \omega_0$ . Asuma que todas las velocidades de los átomos satisfacen  $v \ll c$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz. Siempre puede restringirse a los primeros ordenes no triviales en los parámetros pequeños  $v/c$  y  $\delta/\omega_0$ . El ancho natural del estado excitado  $E_e$  debido al decaimiento espontáneo es  $\gamma \ll \omega_0$ : para un átomo en el estado excitado, la probabilidad de regresar al estado base por unidad de tiempo es  $\gamma$ . Cuando un átomo regresa al estado base, emite un fotón de frecuencia cercana a  $\omega_0$  en una dirección arbitraria.

Puede demostrarse en la mecánica cuántica que cuando un átomo está sujeto a radiación láser de baja intensidad, la probabilidad de excitar al átomo por unidad de tiempo depende la frecuencia de la radiación en el marco de referencia del átomo,  $\omega_a$ , de acuerdo a

$$\gamma_p = s_0 \frac{\gamma/2}{1 + 4(\omega_a - \omega_0)^2 / \gamma^2} \ll \gamma \quad (1)$$

Donde  $s_0 \ll 1$  es un parámetro que depende de las propiedades de los átomos y la intensidad del láser.

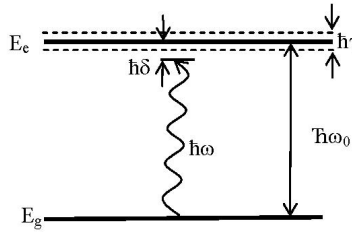


Figura 1: *Note que los parámetros mostrados no están a escala*

En este problema las propiedades del gas de átomos de sodio son investigadas despreciando las interacciones entre los átomos. La intensidad del láser es lo suficientemente pequeña de tal modo que el número de átomos en el estado excitado es siempre mucho menor que el número de átomos en el estado base. Puede también despreciar los efectos de la gravedad, que en los experimentos reales son compensados por un campo magnético adicional.

## Valores numéricos

Constante de Planck	$\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Masa del átomo de sodio	$m = 3.81 \times 10^{-26} \text{ kg}$
Frecuencia de la transición usada	$\omega_0 = 2\pi \cdot 5.08 \times 10^{14} \text{ Hz}$
Ancho de línea del estado excitado	$\gamma = 2\pi \cdot 9.80 \times 10^6 \text{ Hz}$
Concentración de los átomos	$n = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$

## Preguntas

- a) **[1.0 Puntos]** Suponga que el átomo se mueve en la dirección  $x$  positiva con velocidad  $v_x$ , y la radiación láser con frecuencia  $\omega$  se está propagando en la dirección de  $x$  negativa. ¿Cuál es la frecuencia de la radiación en el marco de referencia del átomo?
- b) **[2.5 Puntos]** Suponga que el átomo se está moviendo en la dirección  $x$  positiva con velocidad  $v_x$ , y dos rayos láser idénticos brillan a lo largo de la dirección  $x$  desde los dos lados. Las frecuencias de los láseres son  $\omega$ , y los parámetros de intensidad son  $s_0$ . Encuentre la expresión de la fuerza promedio  $F(v_x)$  que actúa en un átomo. Para  $v_x$  pequeña, esta fuerza puede escribirse como  $F(v_x) = -\beta v_x$ . Encuentre la expresión para  $\beta$ . ¿Cuál es el signo de  $\delta = \omega - \omega_0$  si el valor absoluto de la velocidad del átomo disminuye? Asuma que el momento de un átomo es mucho mayor que el momento de un fotón.

En lo que sigue asumiremos que la velocidad del átomo es lo suficientemente pequeña de tal modo que uno puede usar la expresión lineal de la fuerza promedio.

- c) **[2.0 Puntos]** Si uno usa seis láseres a lo largo de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  en las direcciones positivas y negativas, entonces para  $\beta > 0$  la fuerza disipativa actúa en los átomos y su energía promedio disminuye. Eso significa que la temperatura del gas, que está definida por la energía promedio, disminuye. Usando la concentración de átomos dada anteriormente, estime numéricamente la temperatura  $T_Q$  para la cuál ya no pueden considerarse a los átomos como objetos puntuales debido a los efectos cuánticos.

En lo que sigue se asumirá que la temperatura es mucho mayor que  $T_Q$  y que se usan seis láseres en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , como se explicó en la parte c).

En la parte b) calculó la fuerza promedio que actúa en el átomo. Sin embargo, debido a la naturaleza cuántica de los fotones, en cada proceso de absorción o emisión el momento del átomo cambia por un cierto valor discreto y en dirección arbitraria, debido al proceso de retroceso.

- d) **[0.5 Puntos]** Determine numéricamente el valor al cuadrado del cambio de momento en el átomo,  $(\Delta p)^2$ , como resultado de un evento de absorción o de emisión.
- e) **[3.5 Puntos]** Debido al efecto de retroceso, la temperatura promedio del gas después de un largo tiempo no se vuelve cero absoluto, sino que alcanza un valor finito. La evolución del momento del átomo puede representarse como un camino aleatorio en el espacio de momento con paso promedio  $\sqrt{\langle \Delta p^2 \rangle}$ , y un enfriamiento debido a la fuerza disipativa. La temperatura del estado estacionario es determinada por el efecto combinado de estos dos procesos diferentes. Demuestre que la temperatura del estado estacionario  $T_d$  es de la forma:  
 $T_d = \hbar \gamma \left( x + \frac{1}{x} \right) / (4k_B)$ . Determine  $x$ . Asuma que  $T_d$  es mucho mayor que  $\langle \Delta p^2 \rangle / (2k_B m)$ .

**Nota:** Si los vectores  $P_1, P_2, \dots, P_n$  están mutuamente estadísticamente no correlacionados, la raíz cuadrada media de su suma es  $\langle (P_1 + P_2 + \dots + P_n)^2 \rangle = P_1^2 + P_2^2 + \dots + P_n^2$

- f) **[0.5 Puntos]** Encuentre numéricamente el mínimo valor posible de la temperatura debido al efecto de retroceso. ¿Para qué cociente  $\delta/\gamma$  se logra esto?

## Problema 2: Oscilador amortiguado por la fricción de deslizamiento

### Introducción teórica

En mecánica, uno a menudo usa el llamado espacio fase, un espacio imaginario donde los ejes comprenden las coordenadas y momentos (o velocidades) de todos los puntos materiales del sistema. Los puntos del espacio fase son llamados puntos imagen. Cada punto imagen determina algún estado del sistema.

Cuando el sistema mecánico evoluciona, el punto imagen correspondiente sigue una trayectoria en el espacio fase llamada trayectoria fase. Uno pone una flecha a lo largo de la trayectoria fase para mostrar la dirección de la evolución. El conjunto de todas las trayectorias fase posibles de un sistema mecánico dado es llamado el retrato fase del sistema. El análisis de este retrato fase le permite a uno desenmarañar importantes propiedades cualitativas de la dinámica del sistema sin resolver las ecuaciones de movimiento del sistema de modo explícito. En muchos casos, el uso del espacio fase es el método más apropiado para resolver problemas en mecánica.

En este problema, le sugerimos usar el espacio fase al analizar algunos sistemas mecánicos con un grado de libertad, i.e., sistemas que son descritos por sólo una coordenada. En este caso, el espacio fase es un plano bi-dimensional. La trayectoria fase es una curva en este plano dada por la dependencia del momento respecto a la coordenada del punto, o vice versa, por la dependencia de la coordenada del punto respecto a su momento.

Como un ejemplo presentamos una trayectoria fase de una partícula libre moviéndose sobre el eje  $x$  en la dirección positiva (Figura 1).

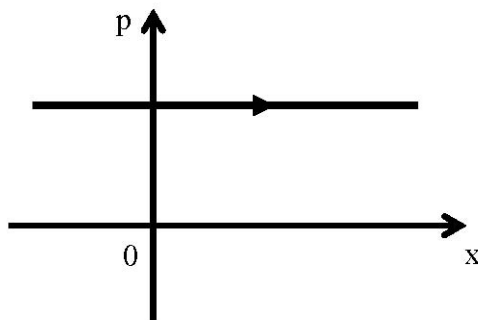


Figura 1: Trayectoria fase de una partícula libre

### Preguntas

#### A. Retratos fase (3.0 Puntos)

- A1. **[0.5 Puntos]** Haga un dibujo de la trayectoria fase de un punto material libre que se mueve entre dos paredes paralelas absolutamente reflejantes localizadas en  $x = -L/2$  y  $x = L/2$ .
- A2. Investigue la trayectoria fase del oscilador armónico, i.e., del punto material de masa  $m$  afectado por la fuerza de Hooke  $F = -kx$ :
  - a) **[0.5 Puntos]** Encuentre la ecuación de la trayectoria fase y sus parámetros.
  - b) **[0.5 Puntos]** Haga un dibujo de la trayectoria fase del oscilador armónico.
- A3. **[1.5 Puntos]** Considere un punto material de masa  $m$  en el extremo de una vara sólida sin masa de longitud  $L$ , cuyo otro extremo está fijado (la intensidad del campo gravitacional es  $g$ ). Es conveniente usar el ángulo  $\alpha$  entre la vara y la línea vertical como una coordenada del sistema. El plano fase es el plano con las coordenadas  $(\alpha, \frac{d\alpha}{dt})$ . Estudie y haga un dibujo del retrato fase de este péndulo a un ángulo arbitrario  $\alpha$ . ¿Cuántos tipos de trayectorias fase  $K$  cualitativamente diferentes tiene este sistema? Dibuje al menos una trayectoria típica de cada tipo. Encuentre las condiciones que determinan a estos diferentes tipos de trayectorias fase. (No tome a los puntos de equilibrio como trayectorias fase). Desprecie la resistencia del aire.

## B. El oscilador amortiguado por la fricción de deslizamiento (7.0 Puntos)

Cuando se considera la resistencia a un movimiento, usualmente se lidia con dos tipos de fuerzas de fricción. El primer tipo es la fuerza de fricción que depende de la velocidad (fricción viscosa), y es definida por  $\mathbf{F} = -\gamma\mathbf{v}$ . Un ejemplo es dado por el movimiento de un cuerpo sólido en líquidos o gases. El segundo tipo es la fuerza de fricción que no depende de la magnitud de la velocidad. Está definida por el valor  $F = \mu N$  y con dirección opuesta a la velocidad relativa entre los cuerpos en contacto (fricción de deslizamiento). Un ejemplo está dado por el movimiento de un cuerpo sólido sobre la superficie de otro cuerpo sólido.

Como un ejemplo específico del segundo tipo, considere un cuerpo sólido en la superficie horizontal atado a un extremo de un resorte cuyo otro extremo está fijo. La masa del cuerpo es  $m$ , el coeficiente de elasticidad del resorte es  $k$ , y el coeficiente de fricción entre el cuerpo y la superficie es  $\mu$ . Asuma que el cuerpo se mueve a lo largo de una línea recta con la coordenada  $x$  ( $x = 0$  corresponde al resorte que no está estirado). Asuma que los coeficientes de fricción estática y dinámica son el mismo. En el instante inicial, el cuerpo tiene posición  $x = A_0$  ( $A_0 > 0$ ) y velocidad cero.

- B1. **[1.0 Puntos]** Escriba la ecuación de movimiento del oscilador amortiguado por la fricción de rozamiento.
- B2. **[2.0 Puntos]** Haga un dibujo de la trayectoria fase de este oscilador y encuentre los puntos de equilibrio.
- B3. **[1.0 Puntos]** ¿El cuerpo se detiene completamente en la posición en la que el resorte no está estirado? Si no, determine la longitud de la región en la que el cuerpo puede llegar al alto total.
- B4. **[2.0 Puntos]** Encuentre la disminución de la máxima desviación del oscilador en la dirección positiva  $x$  durante una oscilación  $\Delta A$ . ¿Cuál es el tiempo entre dos desviaciones máximas consecutivas en la dirección positiva? Encuentre la dependencia de esta máxima desviación  $A(t_n)$  donde  $t_n$  es el tiempo de la  $n$ -ésima máxima desviación en la dirección positiva.
- B5. **[1.0 Puntos]** Haga un dibujo de la dependencia de la coordenada respecto al tiempo,  $x(t)$ , y estime el número  $N$  de oscilaciones del cuerpo.

**Nota:** La ecuación de una elipse con semiejes  $a$  y  $b$  y centro en el origen tiene la siguiente forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

### Problema 3: Este problema consiste en cuatro partes no relacionadas

- A. [2.5 Puntos] La fosa de las Marianas en el Océano Pacífico tiene una profundidad de  $H = 10920$  m. La densidad del agua salada en la superficie del océano es  $\rho_0 = 1025 \text{ kg/m}^3$ , el módulo de compresibilidad es  $K = 2.1 \times 10^9 \text{ Pa}$ , y la aceleración de la gravedad es  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Desprecie el cambio en la temperatura y en la aceleración de la gravedad con la profundidad, desprecie también la presión atmosférica.

A1) Encuentre la relación entre la densidad  $\rho(x)$  y la presión  $P(x)$  a una profundidad  $x$ .

A2) Encuentre el valor de la presión  $P(H)$  en el fondo de la fosa de las Marianas. Puede utilizar métodos iterativos para resolver esta parte.

**Nota:** Los fluidos tienen una compresibilidad muy pequeña. El coeficiente de compresibilidad está definido como

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dP} \right)_{T=\text{const}}$$

El módulo de compresibilidad  $K$  es el inverso de  $\kappa$ :  $K = 1/\kappa$ .

- B. [2.5 Puntos] Un pistón móvil ligero separa un recipiente en dos partes. El recipiente está aislado de los alrededores. Una parte del recipiente contiene  $m_1 = 3 \text{ g}$  de hidrógeno a temperatura  $T_{10} = 300 \text{ K}$ , y la otra parte contiene  $m_2 = 16 \text{ g}$  de oxígeno a temperatura  $T_{20} = 400 \text{ K}$ . Las masa molares del hidrógeno y del oxígeno son  $\mu_1 = 2 \text{ g/mol}$  y  $\mu_2 = 32 \text{ g/mol}$  respectivamente, y  $R = 8.31 \text{ J/K mol}$ . El pistón lentamente conduce el calor entre el oxígeno y el hidrógeno, y eventualmente la temperatura del sistema se equilibra. Todos los procesos son cuasi-estacionarios.

B1) ¿Cuál es la temperatura final del sistema  $T$ ?

B2) ¿Cuál es el cociente entre la presión final  $P_f$  y la presión inicial  $P_i$ ?

B3) ¿Cuál es la cantidad total de calor  $Q$  que es transferida del oxígeno al hidrógeno?

- C. [2.5 Puntos] Dos placas conductoras idénticas  $\alpha$  y  $\beta$  con cargas  $-Q$  y  $+q$  respectivamente ( $Q > q > 0$ ) están localizadas paralelas entre sí separadas por una pequeña distancia. Otra placa idéntica de masa  $m$  y carga  $+Q$  se sitúa paralelamente a las placas originales a una distancia  $d$  de la placa  $\beta$  (vea la Figura 1). El área superficial de las placas es  $S$ . La placa  $\gamma$  es soltada y puede moverse libremente, mientras que las placas  $\alpha$  y  $\beta$  se mantienen fijas. Asuma que la colisión entre las placas  $\beta$  y  $\gamma$  es elástica, y desprecie la fuerza gravitacional y los efectos de borde. Asuma que carga tiene suficiente tiempo para redistribuirse entre las placas  $\beta$  y  $\gamma$  durante la colisión.

C1) ¿Cuál es el campo eléctrico  $E_1$  que actúa sobre la placa  $\gamma$  antes de la colisión con la placa  $\beta$ ?

C2) ¿Cuáles son las cargas de las placas,  $Q_\beta$  y  $Q_\gamma$ , después de la colisión?

C3) ¿Cuál es la velocidad  $v$  de la placa  $\gamma$  después de la colisión a una distancia  $d$  de la placa  $\beta$ ?

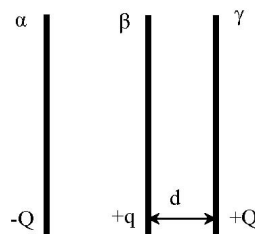


Figura 1:

- D. [2.5 Puntos] Dos lentes delgadas  $D_1$  y  $D_2$  están localizadas a una distancia  $L = 25 \text{ cm}$  entre ellas, y sus ejes ópticos principales coinciden. Este sistema crea una imagen directa real del objeto, localizada en el eje óptico principal más cerca de la lente  $D_1$ , con aumento  $\Gamma' = 1$ . Si las posiciones de las dos lentes son intercambiadas, el sistema de nuevo produce una imagen directa real, con aumento  $\Gamma'' = 4$ .

D1) ¿Cuáles son los tipos de las lentes? Señale cual es lente convergente y cual es lente divergente.

D2) ¿Cuál es la diferencia entre las potencias de las lentes  $\Delta D = D_1 - D_2$ ?