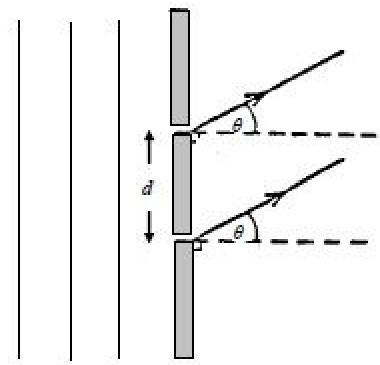
17 OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA
HARROW, UNITED KINGDOM, 1986

Figure 1.1



Problema 1.

Una onda plana de luz monocromática, de longitud de onda λ y frecuencia f, es incidente normalmente en dos rendijas estrechas idénticas, separadas por una distancia d, como se indica en la Figura 1.1. La onda de luz que emerge en cada rendija se da, a una distancia x en la dirección θ en el tiempo t, por

$$y = a\cos\left[2\pi(ft - x/\lambda)\right]$$

donde la amplitud a es el mismo para ambas ondas. (Supóngase que x es mucho mayor que d).

(i) Muestra que las dos ondas observadas en un ángulo θ normal a las rendijas, tienen una amplitud resultante A, que puede obtenerse mediante la adición de dos vectores, cada uno teniendo magnitud a, y cada uno con una dirección asociada determinada por la fase de la onda de luz.

Verificar geométricamente, a partir del diagrama vectorial, que

$$A = 2a\cos\theta$$

donde

$$\beta = \frac{\pi}{\lambda} d\sin\theta$$

(ii) La doble rendija se sustituye por una rejilla de difracción con N rendijas igualmente espaciadas, las rendijas adyacentes están separados por una distancia d. Utilizar el método de vectores de la adición de las amplitudes para demostrar que las amplitudes de vectores, cada uno de magnitud a, forman una parte de un polígono regular con vértices en un círculo de radio R dada por

$$R = \frac{a}{2\sin\beta},$$

Deducir de ello que la amplitud resultante es

$$\frac{a\sin N\beta}{\sin\beta}$$

y obtener la diferencia de fase resultante respecto a la de la luz desde la rendija en el borde de la rejilla.

(iii) Bosqueja, en la misma gráfica, $\sin N\beta$ y $(1/\sin\beta)$ como una función de β. En una gráfica por separado mostrar cómo la intensidad de la onda resultante varía como una función de β.

(iv) Determinar las intensidades de las máximos principales de intensidad.

(v) Demostrar que el número de máximos principales no puede exceder

$$\left(\frac{2d}{\lambda} + 1\right)$$

(vi) Demostrar que dos longitudes de onda λ y $\lambda + \delta\lambda$, donde $\delta\lambda << \lambda$, producen los máximos principales, con una separación angular dada por

$$\Delta\theta = \frac{n\Delta\lambda}{d\cos\theta}$$

donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Calcular esta separación angular de las líneas del sodio D para que $\lambda = 589.0$ nm, $\lambda + \delta\lambda = 589.6$ nm, $n = 2$, y $d = 1.2\times 10^{-6}$ m.

Recordar

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Problema 2. A principios de este siglo un modelo de la tierra se propuso en el que se supone que es una esfera de radio R que consiste en un manto sólido homogéneo isótropo abajo de radio R_c. La región central dentro de un radio R_c conteniendo un líquido. Figura 2.1.

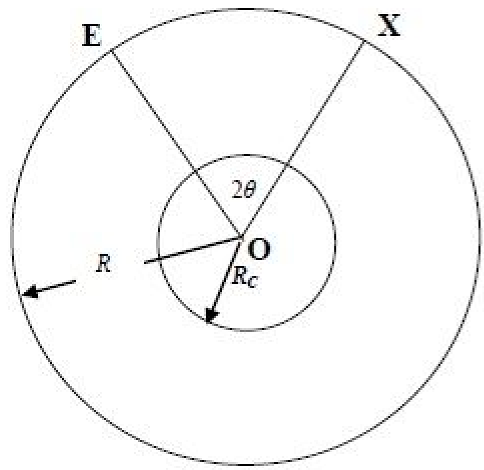


Figure 2.1

Las velocidades de las ondas sísmicas longitudinales y transversales P y las ondas S, respectivamente, son constantes, V_P y V_S en el manto. En el núcleo, las ondas longitudinales tienen una velocidad constante del $V_{CP} < V_P$, y las ondas transversales no se propagan.
Un terremoto en E en la superficie de la Tierra produce ondas sísmicas que viajan a través de la Tierra y son observados por un observador superficial, que puede configurar su sismómetro en cualquier punto X de la superficie de la Tierra. La separación angular entre E y X, 2θ dada por

$$2\theta = angulo\, EOX$$

donde O es el centro de la Tierra.

(i) Demostrar que las ondas sísmicas que viajan a través del manto en una línea recta que llegan a X en un tiempo t (el tiempo de viaje después del terremoto), viene dada por

$$t = \frac{2R\sin\theta}{v},$$

para $\theta > \arccos\left(\frac{R_c}{R}\right)$

donde $v = v_P$ de las ondas P y $v = v_S$ para las ondas S.

(ii) Para algunas de las posiciones de X tales que las ondas sísmicas P llega al observador después de dos refracciones en la interfase manto-núcleo. Dibujar el camino de dicha onda sísmica P. Obtener una relación entre θ e i, el ángulo de incidencia de la onda sísmica P en la superficie del manto y núcleo, para las ondas P.

(iii) Con los datos

$R = 6370$ km
$R_C = 3470$ km
$V_{CP} = 10.85$ km s^{-1}
$v_S = 6.31$ km s^{-1}
$V_{CP} = 9.02$ km s^{-1}

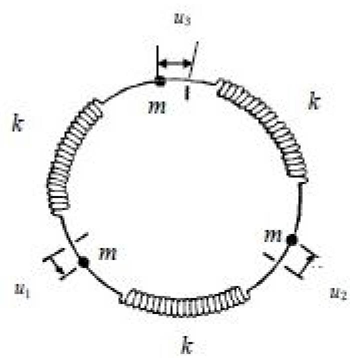
y el resultado obtenido en (ii), dibujar una gráfica de θ contra i. Opina sobre las consecuencias físicas de la forma de esta gráfica para los observadores ubicados en distintos puntos de la superficie de la Tierra. Bosqueje la variación del tiempo de viaje tomada por las ondas P y S como una función de θ para $0 \leq \theta$ grados.

(iv) Después de un terremoto un observador mide el tiempo transcurrido entre la llegada de la onda S, siguido de la onda P, como 2 minutos y 11 segundos. Deducir la separación angular del terremoto del observador con los datos que figuran en el apartado (iii).

(v) El observador en las mediciones anteriores, que algún tiempo después de la llegada de las ondas P y S hay dos grabaciones adicionales en el sismómetro separados por un intervalo de tiempo de 6 minutos y 37 segundos. Explique este resultado y verificar que efectivamente se asocia con la separación angular determinada en el apartado anterior.

Problema 3. Tres partículas, cada una de masa m, se encuentran en equilibrio y unidos por resorte sin masa no estiradas, cada uno con la constante de resorte de la Ley de Hooke k. Ellos se ven obligados a moverse en una trayectoria circular, como se indica en la Figura 3.1.

Figure 3.1



(i) Si cada masa se desplaza del equilibrio mediante pequeños desplazamientos u_1, u_2 y u_3, respectivamente, escribir la ecuación de movimiento para cada masa.

(ii) Verificar que el sistema tiene soluciones sencillas y armónicas de la forma

$$u_n = a_n \cos \omega t,$$

con aceleraciones, $(-\omega^2 u_n)$ donde $a_n (n = 1, 2, 3)$ son las amplitudes constantes, y ω, la frecuencia angular, puede tener 3 valores posibles,

$$\omega_0\sqrt{3},\, \omega_0\sqrt{3} \quad y \quad 0$$

donde $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

(iii) El sistema de resortes alternos y masas se extiende a N partículas, cada una de masa m está unido por medio de resortes a las masas de sus vecinos. Inicialmente, los resortes están sin deformarse y en equilibrio. Escribir la ecuación de movimiento de las n-simas masas ($n = 1, 2, \ldots, N$) en términos de su desplazamiento y los de las masas adyacentes cuando las partículas están desplazadas del equilibrio.

$$u_n(t) = a_s \sin\left(\frac{2ns\pi}{N} + \phi\right) \cos \omega_s t,$$

son soluciones oscilatorias donde $s = 1, 2, \ldots, N$, $n = 1, 2, \ldots, N$ y donde ϕ es una fase arbitraria, proporcionando las frecuencias angulares dadas por

$$\omega_s = 2\omega_0 \sin\left(\frac{s\pi}{N}\right),$$

donde $a_s (s = 1, 2, \ldots, N)$ son amplitudes constantes independientes de n.

Indicar el rango de frecuencias posibles para una cadena que contiene un número infinito de masas.

(iv) Determinar la razón

$$u_n/u_{n+1}$$

para N grande, en los dos casos:

(a) soluciones de baja frecuencia

(b) $\omega = \omega_{max}$, donde ω_{max} es la solución de frecuencia máxima.

Trazar gráficas típicas que indican los desplazamientos de las partículas contra el número de partículas a lo largo de la cadena en el tiempo t para los casos (a) y (b).

(v) Si una de las masas se sustituye por una masa $m' << m$ estimar una modificación importante que se podría esperar que se produzca para la distribución de la frecuencia angular.

Describe cualitativamente la forma del espectro de frecuencias se podría predecir para una cadena diatómica con masas alternas m y m' sobre la base del resultado anterior.

Recordar

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$2 \sin^2 A = 1 - \cos 2A$$