

12 Olimpiada Asiática de Física

Tel Aviv, Israel 2011

Problema 1: La paradoja de Shockley-James

En el año 1905, Albert Einstein propuso la teoría especial de la relatividad para resolver la inconsistencia entre la mecánica de Newton y el electromagnetismo de Maxwell. El entendimiento adecuado de la teoría llevó a la solución de muchas paradojas aparentes. En el momento, la discusión se centraba principalmente en la propagación de ondas electromagnéticas.

En este problema, resolvemos una paradoja de tipo distinto. Para un sistema de cargas bastante simple propuesto por W. Shockley y R.P. James en 1967, entender la conservación de momento lineal requiere de un cuidadoso análisis relativista. Si una carga puntual está localizada cerca de un magneto de magnetización cambiante, hay una fuerza eléctrica inducida en la carga, pero ninguna reacción aparente en el magneto. El proceso puede ser lo suficientemente lento para que cualquier radiación electromagnética (y cualquier momento que ésta se lleve) sea despreciable. De ese modo, aparentemente tenemos un cañón sin retroceso.

En nuestro análisis de este sistema, demostraremos que en la mecánica relativista, un cuerpo compuesto puede tener momento mecánico no nulo y permanecer estacionario.

Parte I: Entendiendo el impulso en la carga puntual (3.3 puntos)

Considere un bucle circular de corriente de radio r que lleva una corriente I_1 , y un segundo bucle de corriente más grande de radio $R \gg r$, concéntrico con el primero y yaciendo en el mismo plano.

- (1.0 puntos) Una corriente I_2 que pasa por el bucle 2 (el bucle más grande) genera un flujo magnético Φ_{B1} a través del bucle 1. Encuentre el cociente $M_{21} = \Phi_{B1}/I_2$. A éste se le llama coeficiente de inductancia mutua.
- (0.8 puntos) Dado que $M_{12} = \Phi_{B1}/I_2 = M_{21}$, obtenga la FEM inducida total \mathcal{E}_2 en el bucle más grande que resulta de una variación $\dot{I}_1 = \frac{dI_1}{dt}$ de la corriente en el bucle más pequeño. Desprecie la corriente en el bucle más grande. *Sugerencia: La FEM inducida es igual al ritmo de cambio del campo magnético a través del bucle.*
- (0.5 puntos) La FEM que encontró en la parte (b) se debe a la componente tangencial de un campo eléctrico inducido. Obtenga una expresión del campo eléctrico tangencial E al radio R en función del ritmo de cambio de la corriente \dot{I}_1 .

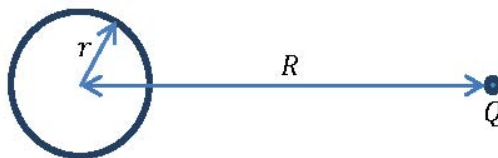


Figura 1: Un bucle circular de corriente y una carga puntual Q .

Ahora removemos el bucle de corriente más grande, y en su lugar ponemos una carga Q puntual masiva en el radio R , como se muestra en la Figura 1. Puede asumirse que la carga se mueve muy poco durante los intervalos de tiempo relevantes.

- (1.0 puntos) Encuentre el impulso tangencial total Δp recibido por la carga puntual desde que la corriente en el bucle pequeño cambia de un valor inicial $I_1 = I$ al valor final $I_1 = 0$.

Parte II: Entendiendo el retroceso del bucle de corriente (4.4 puntos)

Ahora entenderemos el origen del retroceso en el bucle, usando un bucle de geometría distinta.

- e. (1.1 puntos) Considere un tubo hueco con paredes hechas de un material aislante neutro de longitud l y sección transversal A que lleva una corriente I . La corriente se debe a partículas cargadas con masa en reposo m y carga q distribuidas homogéneamente con densidad de número n dentro del tubo. Asuma que las partículas cargadas están todas moviéndose a lo largo del tubo con la misma velocidad. Encuentre el momento total p de las partículas cargadas en el tubo, tomando en cuenta los efectos de la relatividad especial.
- f. (3.3 puntos) Considere un bucle cuadrado de corriente con lado l . A una distancia $R \gg l$ del bucle, hay una carga puntual Q ; vea la Figura 2. El bucle lleva corriente I . Modelaremos al bucle de corriente como un tubo neutro, igual que en la parte (e). Los portadores de carga pueden moverse libremente a lo largo del bucle, chocando elásticamente con las paredes y dando vueltas a la derecha elásticas en las esquinas. Desprecie todas las interacciones entre los portadores de carga. Asuma también que todos los portadores de carga en una sección dada a lo largo del tubo siempre se mueven con la misma velocidad. Asuma que el bucle es pesado y que su movimiento puede ser despreciado. Calcule el momento lineal total p_{hid} de los portadores de carga en el bucle. Se le llama “momento oculto”.

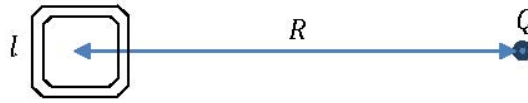


Figura 2: Un bucle cuadrado de corriente y una carga puntual Q

Cuando la corriente se detiene, este momento lineal es transferido al bucle, y éste recibe un impulso igual a menos el impulso recibido por la carga puntual Q . Este es el retroceso extraviado que estábamos buscando. (Note que en el estado inicial también hay momento en el campo electromagnético; esto es importante para la conservación del momento total del sistema entero).

Parte III: Resumiendo los resultados (2.3 puntos)

- g. (0.8 puntos) Los bucles de corriente comúnmente están caracterizados por su momento magnético $\mu = IS$, donde I es la corriente y S es el área del bucle. Exprese la respuesta de la parte (d) en términos de μ , r , R y Q . Del mismo modo, exprese la respuesta de la parte (f) en términos de μ , l , R y Q . Note que las constantes eléctricas y magnéticas están relacionadas por:

$$\frac{4\pi k}{\mu_0} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2 \quad (1)$$

donde c es la velocidad de la luz.

- h. (1.5 puntos) En un modelo más realista, el bucle de corriente es un cable conductor, y el campo en la carga Q no penetra en el conductor. Asumimos que la corriente sigue siendo conducida por portadores de carga dentro del cable. Decida si cada uno de los siguientes enunciados es cierto o falso.

Nota: Puede dejar algún enunciado sin decidir, pero si decide incorrectamente, no obtendrá crédito en absoluto para toda la parte (h).

- A. (0.5 puntos) El momento lineal del bucle de corriente es cero.
- B. (0.5 puntos) Conforme la corriente total del bucle cambia desde I hasta cero, los portadores de carga desaceleran, causando corrientes inducidas en el material conductor del cable. Debido a estas corrientes inducidas, la carga puntual Q no recibirá un impulso neto.
- C. (0.5 puntos) Las cargas superficiales en el cable, inducidas por la presencia de la carga externa, experimentarán una fuerza eléctrica conforme la corriente cambia de I a cero. De este modo, el bucle recibirá el mismo impulso encontrado en la parte (f).

Problema 2: La puerta que cruje

El fenómeno del crujido es muy común, y puede encontrarse en puertas, armarios, el chillido del gis en el pizarrón, tocando un violín, los zapatos nuevos, los frenos del coche, y otros sistemas de la vida diaria. Aquí en Israel, un fenómeno similar provoca violentos terremotos con un periodo de varias décadas. Éstos se originan en el Rift del Mar Muerto, ubicado justo encima de la grieta más profunda conocida en la corteza terrestre.

El mecanismo físico para el crujido está basado en la elasticidad combinada con la diferencia entre los coeficientes de fricción estática y cinética. En este problema, estudiaremos este mecanismo y su aplicación en el caso de una puerta que abre.

Parte I: Modelo general (7.5 puntos)

Considere el siguiente sistema (vea la Figura 1):

Una caja con masa m está unida a un largo resorte ideal con constante de resorte k , cuyo otro extremo es jalado con una velocidad constante u . Los coeficientes de fricción estática y dinámica entre la caja y el suelo están dados respectivamente por μ_s y μ_k , donde $\mu_k < \mu_s$.

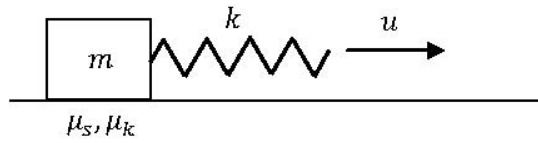


Figura 1: Un modelo general para el crujido

Nos gustaría entender por qué este montaje permite dos tipos diferentes de movimiento:

1. La fricción siempre es cinética. Éste es conocido como modo de **puro deslizar**.
 2. La fricción cinética y estática se alternan. Éste es conocido como modo de **pegar-deslizar**. El movimiento de pegar-deslizar es la fuente del sonido de crujido encontrado comúnmente.
- a. (1.0 puntos) Considere el caso donde al tiempo inicial $t = 0$, la caja se desliza en el suelo con velocidad v_0 , y la tensión del resorte se equilibra exactamente con la fricción cinética. Asuma que $0 < v_0 < u$. La **enlongación del resorte** x oscilará como función de t .
- a1. (0.6 puntos) Encuentre el periodo T_0 y la amplitud A de estas oscilaciones.
 - a2. (0.4 puntos) Esboce una gráfica cuantitativa de la enlongación del resorte $x(t)$ para $0 < t < 3T_0$.
- b. (1.2 puntos) Ahora, considere el caso en el que en $t = 0$ la caja está en reposo, mientras que la enlongación inicial del resorte x es la misma que en la parte (a). Esboce una gráfica cualitativa de la velocidad $v(t)$ de la caja **respecto al suelo** para $0 < t < 3T$, donde T es el (nuevo) periodo de las oscilaciones $x(t)$. El movimiento a la derecha corresponde a un signo positivo de v . Indique aproximadamente en su gráfica la línea horizontal $v = u$.
- c. (0.5 puntos) Para las condiciones iniciales de la parte (b), encuentre el valor promedio en el tiempo \bar{x} de la enlongación del resorte después de que haya pasado un tiempo lo suficientemente largo.
- d. (2.4 puntos) Para las condiciones de la parte (b), encuentre el periodo T de las oscilaciones $x(t)$.

Generalmente, el movimiento de pegar-deslizar se detiene a grandes velocidades de impulso u . Discutiremos uno de los posibles mecanismos detrás de este efecto.

- e. (2.4 puntos) Suponga que durante cada periodo T , una pequeña cantidad de energía es disipada como calor en el resorte, a través de un mecanismo adicional. Sea $\eta = \left| \frac{\Delta A}{A} \right|$ la pérdida fraccional de amplitud por periodo debida a la disipación en el movimiento de pegar-deslizar. Para $\eta \ll 1$, encuentre la velocidad de impulso crítica u_c por encima de la cual el pegar-deslizar periódico se vuelve imposible.

Los resultados de la parte (e) no se requieren para la parte II.

Parte II: Aplicación a la puerta que cruje (2.5 puntos)

Una bisagra de puerta es un cilindro metálico, hueco y con extremos abiertos, de radio r , altura h y grosor Δr . El extremo inferior del cilindro se encuentra en una base de metal unida a la pared (el área de contacto es un anillo de radio r); vea la Figura 2. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el cilindro y su base son μ_s y μ_k respectivamente, con $\mu_k < \mu_s$. El extremo superior del cilindro está unido a la puerta, la cual puede considerarse perfectamente rígida. Una puerta típica está aferrada a dos o tres de esas bisagras, pero su peso se concentra sólo en una de ellas-esta es la bisagra que va a crujir. El cilindro de esa bisagra presiona a su basa metálica con el peso de la puerta entera, cuya masa es M .

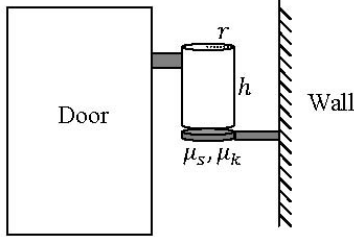


Figura 2: Dibujo esquemático de una puerta

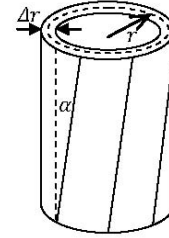


Figura 3: El cilindro de bisagra torcido

El cilindro no es un cuerpo perfectamente rígido-puede torcerse tangencialmente sin cambiar su forma general, de modo que los segmentos verticales se inclinan un pequeño ángulo α ; vea la Figura 3. La fuerza elástica en un pequeño elemento de área de la base dS debida a la deformación está dada por:

$$dF = G\alpha dS$$

donde G es una propiedad del material llamada módulo de corte. Use los valores $r = 5 \text{ mm}$, $h = 3 \text{ cm}$, $\Delta r = 1 \text{ mm}$, $\mu_s = 0.75$, $\mu_k = 0.55$, $G = 8 \times 10^{10} \text{ Pa}$, $M = 30 \text{ kg}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Puede usar la aproximación $\Delta r \ll r$.

- f. (1.0 puntos) Empezamos a rotar la puerta lentamente desde el equilibrio (torca cero). Para pequeños ángulos de rotación, obtenga una expresión para el coeficiente de torsión $\kappa = \frac{\tau}{\theta}$, donde τ es la torca que debe aplicarse para rotar la puerta por un ángulo θ .
- g. (1.5 puntos) A una velocidad angular muy baja, cuando la transición de pegar a deslizar ocurre, un pulso de sonido es emitido. Encuentre la velocidad angular de la puerta Ω para la cual la frecuencia de estos pulsos entra al rango audible en $f = 20 \text{ Hz}$. Asuma que la frecuencia f_0 de las oscilaciones de puro deslizar en la bisagra es mucho mayor: $f_0 \gg f$. Proporcione una expresión y un resultado numérico.

Problema 3: Globo de cumpleaños

El dibujo muestra un globo largo de hule, del tipo que es popular en las fiestas de cumpleaños. Un globo parcialmente inflado usualmente se divide en dos regiones de diferentes radios. En este problema, consideramos un modelo simplificado para ayudarnos a entender este fenómeno.



Considere un globo con la forma de un largo cilindro homogéneo (excepto por los extremos), con una boquilla a través de la cual el globo puede ser inflado. Todos los procesos serán considerados isotérmicos a temperatura ambiente. En todo momento, la presión P dentro del globo excede a la presión atmosférica P_0 por una pequeña fracción, de modo que el aire puede ser tratado como un fluido incompresible. La gravedad y el peso del globo también pueden ser despreciados. La inflación es lenta y cuasiestática. En las partes (a)-(d), el globo es inflado uniformemente en toda su longitud. Denotamos por r_0 y L_0 al radio y longitud del globo antes de que fuera inflado.

Figura 1: Un globo de fiesta parcialmente inflado.

- a. (1.8 puntos) El globo es sostenido por la boquilla, mientras sus otras partes cuelgan libre. Encuentre el cociente σ_L/σ_t entre la tensión superficial longitudinal σ_L (en la dirección paralela al eje del globo) y la tensión superficial transversal σ_t (en la dirección tangente a la sección transversal circular del globo). La tensión superficial de un filme de hule es la fuerza que las partes adyacentes ejercen la una a la otra, por unidad de longitud de la frontera.

La ley de Hooke es una aproximación lineal de la elasticidad de la vida real para tensiones pequeñas. Asuma que la longitud del globo se mantiene constante en L_0 , mientras la tensión superficial σ_t depende linealmente del cociente de inflación r/r_0 :

$$\sigma_t = k \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right) \quad (1)$$

- b. (1.0 puntos) Con estas suposiciones, obtenga una expresión para la dependencia de la presión P dentro del globo con el volumen del globo V . Esboce una gráfica de $P - P_0$ en función de V . ¿Cuál es la máxima presión de inflación P_{max} que resulta de la aproximación de elasticidad de Hooke?

En realidad, debido a que el cociente de inflación r/r_0 es grande (en la Figura 1, pueden observarse valores típicos alrededor de 5), uno debe considerar el comportamiento no lineal del hule y los cambios en la longitud del globo. Estos efectos permiten mayores presiones de inflación que la que se predijo en la parte (b). En un globo típico, la gráfica $\sigma_t(r)$ se compone por tres partes:

1. Para ritmos de inflación pequeños, $\sigma_t(r)$ crece en un modo como la ley de Hooke.
2. Para $r - r_0 \sim r_0$, la longitud del globo L empieza a incrementarse, y $\sigma_t(r)$ alcanza una larga meseta donde crece muy lentamente.
3. Para algún cociente de inflación grande, el hule comienza a resistir cualquier estiramiento posterior, lo que lleva a un fuerte aumento en $\sigma_t(r)$.

Esta conducta es representada en la Figura 2.

- c. (1.3 puntos) Esboce una gráfica cualitativa de la diferencia de presiones $P - P_0$ en función de V para un globo uniformemente inflado que se comporta de acuerdo a la Figura 2. Indique todos los puntos de extremos locales en su gráfica. Indique también los puntos que corresponden a $r = 1$ cm y $r = 2.5$ cm. Encuentre los valores de $P - P_0$ en esos dos puntos con precisión de 10%.

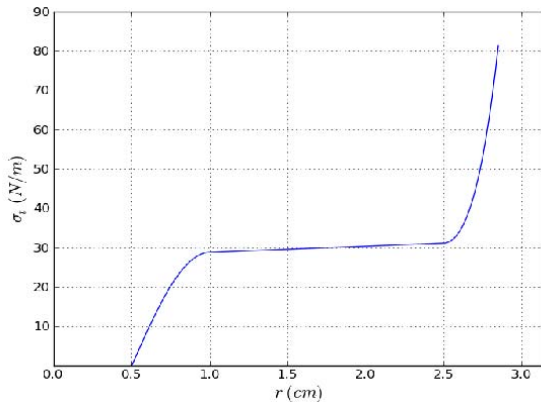


Figura 2: $\sigma_t(r)$ para un globo de fiesta realista.

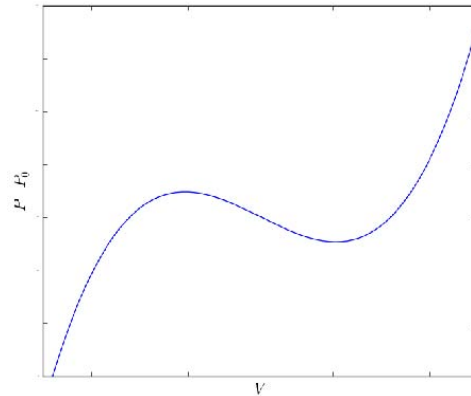


Figura 3: Una gráfica de la ecuación (2).

Para explorar las consecuencias del comportamiento que encontró en la parte (c), aproximamos $P(V)$ para un globo uniformemente inflado usando una función cúbica:

$$P - P_0 = a((V - u)^3 - b(V - u) + c) \quad (2)$$

donde a , b , c y u son constantes positivas. Asuma que el volumen u es mayor que el volumen del globo sin inflar V_0 , y que c es lo suficientemente grande de modo que la función (2) sea positiva en todo el rango $V > V_0$. Vea la Figura 3.

El globo está unido a una gran reserva de aire mantenida a una presión controlable P . Puede suceder que algunos valores de P sean consistentes con más de un valor de V . Si el globo sufre perturbaciones ocasionales (tales como estiramientos locales por fuerzas externas) mientras es sostenido a esa presión de inflación, podría saltar a un volumen diferente. Esto sucederá cuando sea energéticamente favorable para el sistema entero, que consta del globo, la atmósfera y la maquinaria que mantiene la presión P . Si la presión es aumentada lentamente desde P_0 , y existen suficientes perturbaciones en cada paso, el explosivo salto de volumen sucederá a una cierta presión P_c donde la energía requerida para moverse entre ambos estados es cero. Por encima de esta presión, ir de la rama de volumen menor a la de volumen mayor libera energía, y vice-versa. Este tipo de discontinuidad es encontrada a menudo en la naturaleza, y a veces es referida como “transición de fase”.

- d. (2.3 puntos) Considerando la ecuación (2), obtenga el valor de P_c , el volumen V_1 del globo antes del salto, y el volumen V_2 después del salto. Exprese sus respuestas usando a , b , c y u .

Un agente inflador más realista, como un niño cumpleañero, es incapaz de proveer suficiente aire para el cambio instantáneo de volumen descrito anteriormente. En vez de eso, el aire es bombeado gradualmente en el globo, efectivamente controlando su volumen en lugar de su presión. En ese caso, un nuevo tipo de conducta se vuelve posible. Si ayuda a minimizar la energía total del sistema, el globo se dividirá (dadas suficientes perturbaciones) en dos regiones cilíndricas de diferentes radios, cuyas longitudes cambiarán gradualmente. La división en sí misma requiere energía, la cual puede despreciar. También hemos de despreciar la longitud de la capa de frontera (estas suposiciones son válidas para un globo muy largo).

- e. (1.0 puntos) Esboce una gráfica cualitativa de la diferencia de presiones $P - P_0$ en función de V , tomando la división en cuenta. Indique en sus ejes a la presión $P_c - P_0$ y a los volúmenes V_1 y V_2 .
- f. (1.4 puntos) El globo está en el rango de volumen que permite dos regiones coexistentes. Encuentre la longitud L_{thin} de la región más delgada en función del volumen total de aire V . Exprese su respuesta en términos de V_1 , V_2 y el radio r_1 de la región más delgada.
- g. (1.2 puntos) El globo está en el rango de volumen que permite dos regiones coexistentes. Encuentre el trabajo latente $\Delta W / \Delta L_{thin}$ que debe realizarse en el globo para convertir una unidad de longitud de la región delgada a la región gruesa. Exprese su respuesta en términos de P_c , V_1 , V_2 y el radio r_1 de la región más delgada.