34 OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA
TAIPEI, TAIWAN, 2003

Problema 1 (Un Columpio con un Peso que Cae)**.** Una varilla cilíndrica rígida de radio R se mantiene horizontal arriba del suelo. Con una cadena de masa despreciable y longitud $L(L > 2\pi R)$, un péndulo lenteja de masa m esta suspendido desde un punto A en la punta de la varilla como se muestra en la figura 1a. La lenteja se levanta hasta que este nivelado con A y entonces se libera desde el reposo cuando la cuerda esté tensa. Ignorar cualquier estiramiento de la cadena. Asumir que el péndulo de lenteja puede ser tratado como un punto de masa y oscila solo en un plano perpendicular al eje de la varilla. En consecuancia, el péndulo es también conocido como como la particula. La aceleración de gravedad es $\overrightarrow{g}$.

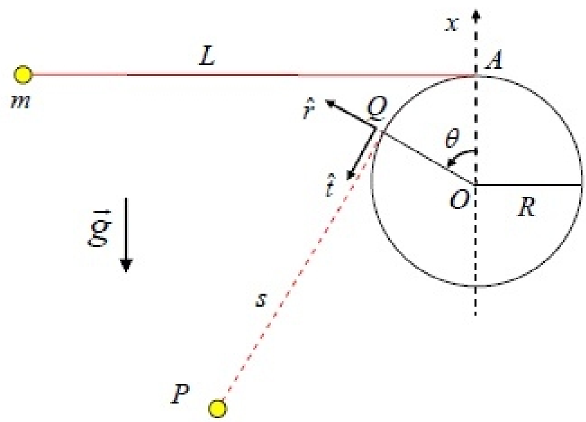


Figura 1a

Sea O del sistema coordenado. Cuando la particula está en el punto P, la cadena es tangencial a la superficie cilíndrica en Q. La longitud del segmento de línea QP es llamado s. El vector unitario tangente y el vector unitario radial en Q están dados por $\hat{t}$ y $\hat{r}$, respectivamente. El desplazamiento angular θ de radio OQ, medido en sentido antihorario desde eje vertical x a lo largo de OA, es tomado positivo.

Cuando $\theta = 0$,la longitud s es igual a L y la energía potencial gravitacional U de la partícula es cero. Como la partícula se mueve, la razón de tiempo de cambio instantáneo de θ y s están dados por $\widetilde{\theta}$ y $\widetilde{s}$, respectivamente.

A menos que se indique lo contrario, todas las velocidades son relativas al punto fijo O.

Parte A

En Parte A, la cadena está tensa cuando la partícula se mueve. En términos de las cantidades introducidas arriba(i.e.,s, θ, $\widetilde{s}$, $\widetilde{\theta}$, R, L, g, $\hat{t}$ y $\hat{r}$), encontrar:

(a) [0.5 puntos] La relación entre $\widetilde{\theta}$ y $\widetilde{s}$.
(b) [0.5 puntos] La velocidad $\overrightarrow{v}_Q$ del punto en movimiento Q relativo a O.
(c) [0.7 puntos] La velocidad de la partícula $\overrightarrow{v}'$ relativa al punto de movimiento Q cuando está en P.
(d) [0.7 puntos] La velocidad de la partícula $\overrightarrow{v}$ relativa a O cuando está en P.
(e) [0.7 puntos] El $\hat{t}$-componente de la *aceleración* de la partícula relativa a O cuando está en P.
(f) [0.5 puntos] La energía potencial gravitacional de la partícula U cuando está en P.
(g) [0.7 puntos] La velocidad v_m de la partícula en el punto mas bajo de su trayectoria.

Parte B

En Parte B, la razón L/R tiene el siguiente valor:

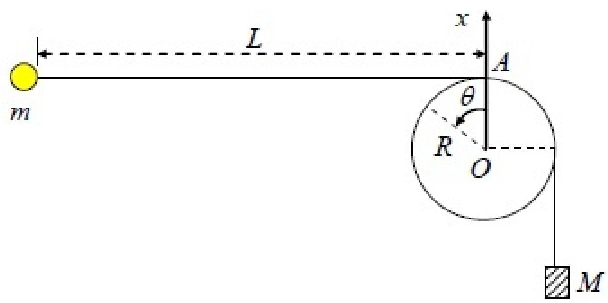
$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3}\cot\frac{\pi}{16} = 3.534 + 3.352 = 6.886$$

(h) [2.4 puntos] ¿ Cuál es la velocidad v_s de la partícula cuando el segmento de cadena de Q a P es a la vez recta y más corta en longitud?(en términos de g y R)

(i) [1.9 puntos] ¿ Cuál es la velocidad v_H de la partícula en su punto mas alto H cuando se ha inclinado hacia el otro lado de la varilla?(en términos de g y R)

Parte C

En Parte C, en lugar de iniciar suspendido de A, el péndulo de masa m está conectado por una cadena sobre la parte superior de la varilla a un peso pesado de masa M, como se muestra en la figura 1b. El peso puede ser tratado como una partícula.



Inicialmente, la lenteja está estacionaria en el mismo nivel como A asi que, con el peso se cuelgue debajo de O, la cadena está tensa con una sección horizontal de longitud L. La lenteja se libera desde el reposo y el peso comienza a caer. Asumir que la lenteja permanece en un plano vertical y puede oscilar pasado el peso que cae sin ninguna interrupción.

La fricción cinética entre la cadena y la superficie de la varilla se ignora. Pero la fricción estática se supone que es lo suficientemente grande como para que el peso permanecerá estacionaria una vez que se haya llegado a un tope(i.e. velocidad cero).

(j) [3.4 puntos] Asumir que el peso inducido se detenga después de caer a una distancia D y que $(L-D) >> R$. Si la partícula puede oscilar alrededor de la varilla a $\theta = 2\pi$ mientras que los dos segmentos de la cadena libre de la varilla permanecen rectos, la razón $\alpha = D/L$ no debe ser menor que un valor crítico α_c. Ignorar los términos de orden R/L o superiores, obtener una estimación de α_c en términos de M/m.

Problema 2 (Un Resonador de Cristal Piezoeléctrico bajo un Voltaje Alternante)**.** Considerar una varilla de longitud ℓ y un área transversal A (Figura 2a). Sus cambios de longitud por $\Delta\ell$ cuando es igual y fuerza opuesta de magnitud F son aplicados a sus caras de los extremos normalmente. La tensión T sobre las caras de los extremos está definido como F/A. El cambio fraccional en su longitud, i.e., $\Delta\ell/\ell$, es llamada la presión S de la varilla. En términos de la tensión y la presión, la ley Hooke's puede ser expresada como

(1) $$T = YS \qquad o \qquad \frac{F}{A} = Y\frac{\Delta\ell}{\ell}$$

donde Y es llamado el *módulo Young's* del material de la varilla. Notar que una tensión de compresión T corresponde a $F < 0$ y un decremento en longitud(i.e., $\Delta\ell < 0$). Tal tensión es negativo en valor y está relacionado a la presión p por $T = -p$.

Para una varilla uniforme de densidad ρ, la velocidad de propagación de ondas longitudinales(i.e., velocidad de sonido) a lo largo de la varilla está dado por

(2) $$u = \sqrt{Y/\rho}$$

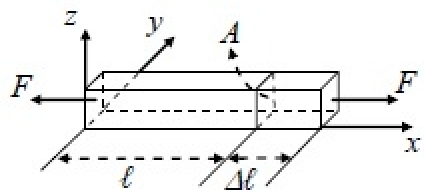


Figura 2a

Los efectos de amortiguación y disipación pueden ser ignorados respondiendo las siguientes preguntas.

Parte A: Propiedades Mecánicas

Una varilla uniforme de longitud semi-infinita, extendiéndose de $x = 0$ a ∞(ver Figura 2b), tiene una densidad ρ. Es inicialmente estacionaria y sin tensión. Un pistón entonces ejerce constantemente una presión p sobre su cara izquierda en $x = 0$ en un corto tiempo Δt, causando una onda de presión para propagarse a una velocidad u a la derecha.

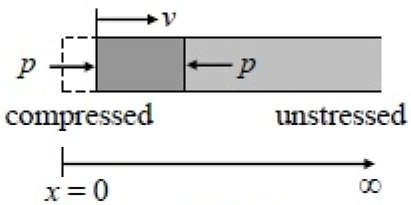


Figure 2b

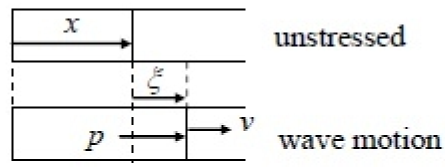


Figure 2c

(a) [1.6 puntos] Si el pistón provoca que la cara izquierda de la varilla se mueva a una velocidad constante v(Figura 2b), ¿ cuales son la presión S y la presión p en la cara izquierda durante el tiempo Δt?Las respuestas pueden ser dadas solamente en términos de ρ, u, y v.

(b) [2.4 puntos] Considerar una onda longitudinal viajando a lo largo de la dirección x en la varilla. Para una sección transversal en x cuando la varilla no está en tensión(Figura 2c), sea $\zeta(x,t)$ su desplazamiento en tiempo t y asumir

$$\zeta(x,t) = \zeta_0 \sin k(x - ut) \tag{3}$$

donde ζ_0 y k son constantes. Determinar la velocidad correspondiente $v(x,t)$, presión $S(x,t)$ y presión $p(x,t)$ como una función de x y t.

Parte B: Propiedades Electromecánicas(incluyendo efecto piezoeléctrico)

Considerar una losa de cristal de cuarzo de longitud b, espesor h y anchura w(Figura 2d). Su longitud y espesor son a lo largo del eje x y el eje z. Los electrodos están formados por delgadas recubrimientos metálicos en sus superficies superior e inferior. Los cables eléctricos que también sirven como soporte de montaje (Figura 2e) se sueldan a los centros del electrodo, que pueden ser contraídas a ser estacionaria para oscilaciones longitudinales a lo largo de la dirección x.

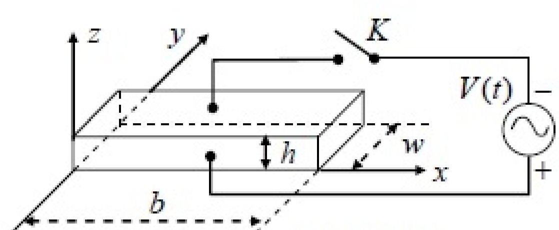


Figure 2d

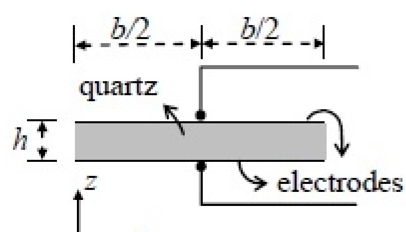


Figure 2e

El cristal de cuarzo bajo consideraciones tiene una densidad $\rho = 2.65 \times 10^3$ kg/m^3 y módulo Young's $Y = 7.87 \times 10^{10}$ N/m^2. La longitud b de la losa es 1.00 cm y la anchura w y altura h de la losa son tales que $h << w << b$. Con el interruptor de la izquierda K abierto, asumimos sólo modos longitudinales de oscilación de pie de onda en la dirección x se agitan en la losa de cuarzo.

Para una onda estacionaria de frecuancia $f = \omega/2\pi$, el desplazamiento $\zeta(x,t)$ en tiempo t de una sección transversal de una losa con una posición de equilibrio x puede ser escrita como

$$\zeta(x,t) = 2\zeta_0 g(x)\cos\omega t, \qquad (0 \le x \le b) \tag{4}$$

donde ζ_0 es una constante positiva y la función espacial $g(x)$ es de la forma

$$g(x) = B_1 \sin k(x - \frac{b}{2}) + B_2 \cos k(x - \frac{b}{2}) \tag{5}$$

$g(x)$ tiene el valor máximo de uno y $k = \omega/u$. Tener en cuenta que los centros de los electrodos son estacionarias y las caras izquierda y derecha de la losa son libres y deben tener cero tensión (o presión).

(c) [1.2 puntos] Determinar los valores de B_1 y B_2 en la ecuación (5) para una onda longitudinal estacionaria en la losa de cuarzo.

(d) [1.2 puntos] ¿ Cuales son las dos frecuencias menores en el cuál las ondas longitudinales estacionarias pueden ser agitados en la losa de cuarzo?

El efecto piezoeléctrico es una propiedad espacial de un cristal de cuarzo. Compresión o dilatación del cristal genera un voltaje eléctrico a través del cristal, e inversamente, un voltaje externo aplicado a través del cristal causa el cristal para expandir o contraer de la polaridad del voltaje. Por lo tanto, oscilaciones mecánicas y eléctricas pueden ser acoplados y hechos para resonar a través de un cristal de cuarzo.

Para tener en cuenta el efecto piezoeléctrico, dejar que las densidades de carga de superficie en los electrodos superior e inferior sea $-\sigma$ y $+\sigma$, respectivamente, cuando la losa de cuarzo está bajo un campo eléctrico E en la dirección z. Denotar la presión y la tensión de la losa en la dirección x por S y T, respectivamente. Entonces el efecto piezoeléctrico del cristal de cuarzo puede ser descrito por el siguiente conjunto de ecuaciones

$$S = (1/Y)T + d_p E \tag{6}$$

$$\sigma = d_p T + \varepsilon_T E \tag{7}$$

donde $1/Y = 1.27 \times 10^{-11}$ m^2/N es la conformidad elástica(i.e., la inversa del modulo de Young) en campo eléctrico constante y $\varepsilon_T = 4.06 \times 10^{-11}$ F/m es la permitividad en tensión constante, mientras $d_p = 2.25 \times 10^{-12}$ es el coeficiente piezoeléctrico.

Dejemos el interruptor K en Figura 2d cerrado. El voltaje alternante $V(t) = V_m \cos\omega t$ ahora actúa a través de los electrodos y un campo eléctrico uniforme $E(t) = V(t)/h$ aparece en la dirección z en la losa de cuarzo. Cuando un estado estacionario se alcanza, una oscilación de onda estacionaria longitudinal de frecuencia angular ω aparece en la losa en la dirección x.

Con E siendo uniforme, la longitud de onda λ y la frecuencia f de una onda estacionaria longitudinal en la losa están todavía relacionados por $\lambda = u/f$ con u dado por la ecuación (2). Pero, como la ecuación (6) muestra que, $T = YS$ ya no es válida, aunque las definiciones de presión y tensión permanecen sin cambios y las caras extremas de la losa permanecen libres con cero tensión.

(e) [2.2 puntos] Tomando ecuaciones (6) y (7) en cuenta, la densidad de carga de la superficie σ en el electrodo inferior como una función de x y t es de la forma

$$\sigma(x,t) = \left[D_1 \cos k\left(x - \frac{b}{2}\right) + D_2\right] \frac{V(t)}{h} \tag{8}$$

donde $k = \omega/u$. Encontrar la expresión para D_1 y D_2.

(f) [1.4 puntos] La carga superficial total $Q(t)$ sobre el electrodo inferior esta relacionado a $V(t)$ por

$$Q(t) = \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{2}{kb}\tan\frac{kb}{2} - 1\right)\right] C_0 V(t) \tag{9}$$

Encontrar la expresión para C_0 y la expresión y valor numérico de α^2

Problema 3. Parte A

Masa del Neutrino y la Desintegración del Neutrón

Un neutrón de masa m_n se desintegra en reposo en el marco del laboratorio de referencia en tres partículas que no interactúan: un protón, un electrón y un anti-neutrino. La masa de reposo del protón es m_p, mientras que la masa de reposo del anti-neutrino m_v se asume no cero y mas pequeño que la masa de reposo del electrón m_e. Denotar la velocidad de la luz en el vacío por c. Los valores medidos de masa son como sigue:

$$m_n = 939.56563 \text{ MeV}/c^2,\ m_p = 938.27231 \text{ MeV}/c^2,\ m_e = 0.5109907 \text{ MeV}/c^2$$

En lo siguiente, todas las energías y velocidades se refieren al marco de laboratorio. Sea E la energía total del electron que sale de la desintegración.

(a) [4 puntos] Encontrar el valor posible máximo E_{max} de E y la velocidad v_m del anti-neutrino cuando $E = E_{max}$. Ambas respuestas pueden ser expresadas en términos de las masas de reposo de las partículas y la velocidad de la luz. Dado que $m_v < 7.3$ eV$/c^2$, calcular E_{max} y la razón v_m/c a 3 dígitos.

Parte B

Luz Levitación

Una semiesfera de vidrio transparente con radio R y masa m tiene un índice de refracción n. En el medio fuera de la semiesfera, el índice de refracción es igual a uno. Un rayo paralelo de luz monocromática láser está uniformemente y normalmente incidente sobre la porción central de la superficie plana, como se muestra en la figura 3a. La aceleración de gravedad $\overrightarrow{g}$ está verticalmente hacia abajo. El radio δ de la sección transversal circular del rayo láser es mas pequeño que R. Ambas, la semiesfera de vidrio y el rayo láser son axialmente simétricos con respecto al eje z.

La semiesfera de vidrio no absorbe cualquier luz láser. Su superficie se ha recubierto con una capa delgada de material transparente, de manera que las reflexiones son insignificantes cuando la luz entra y sale de la semiesfera de vidrio. El camino óptico atravesado por la luz láser que pasa a través de la capa superficial no reflectante también es insignificante.

(b) [4 puntos] Ignorando términos de orden $(\delta/R)^3$ o superior, encontrar la energía láser P necesario para el balance del peso de la semiesfera de vidrio.

Sugerencia: $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ cuando θ es mas pequeño que uno.

Figure 3a