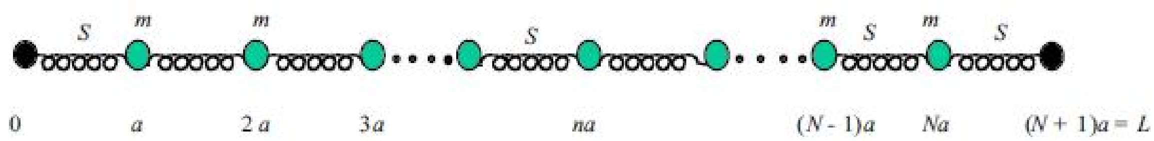
3 Olimpiada Asiática de Física

Singapur, Singapur 2002

Problema 1: Vibraciones en una red cristalina lineal

Un número N muy grande de partículas puntuales móviles idénticas ($N \gg 1$), cada una con masa m están dispuestas en una cadena recta de $N+1$ resortes sin masa idénticos, cada uno con rigidez (constante de resorte) S, que las unen entre sí y los extremos de la cadena están unidos a dos partículas inmóviles idénticas adicionales. Vea la figura. Este cadena servirá como modelo para los modos de vibración de un cristal unidimensional. Cuando la cadena se pone en movimiento, las vibraciones longitudinales de la cadena pueden ser vistas como una superposición de oscilaciones simples (llamadas modos) cada una con su propia frecuencia característica de modo.



(a) Escriba la ecuación de movimiento de la n-ésima partícula. [0.7 puntos]

(b) Para intentar resolver la ecuación de la parte (a) use la solución dada $X_n(\omega) = A\sin(nka)\cos(\omega t + \alpha)$, donde $X_n(\omega)$ es el desplazamiento de la n-ésima partícula desde el equilibrio, ω es la frecuencia angular del modo de vibración, y A, k y α son constantes; k y ω son los números de ondas y frecuencias de modo respectivamente. Para cada k habrá una correspondiente frecuencia ω. Encuentre la dependencia entre k y ω, los valores permitidos de k, y el máximo valor de ω. La vibración de la cadena es por lo tanto una superposición de todos estos modos de vibración. Fórmulas útiles: $\frac{d}{dx}\cos\alpha x = -\alpha\sin\alpha x$, $\frac{d}{dx}\sin\alpha x = \alpha\cos\alpha x$, $\alpha = \text{const.}$
$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$, $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$. [2.2 puntos]

De acuerdo con Planck, la energía de un fotón con frecuencia ω es $\hbar\omega$, donde $\hbar$ es la constante de Planck divida por 2π. Einstein dio un salto desde aquí asumiendo que un modo de vibración de un cristal dado con frecuencia ω también tiene esa energía. Note que un modo de vibración no es una partícula, sino una configuración de oscilaciones simples de la cadena completa. Este modo de vibración es análogo a un fotón y es llamado *fonón*. Seguiremos las consecuencias de esta idea por el resto del problema. Suponga que el cristal está formado por un número muy grande ($\sim 10^{23}$) de partículas en la cadena recta.

(c) Para una ω (o k) permitida dada podría no haber fonones; o podría haber uno; o dos; o cualquier número de fonones. Por ende tiene sentido intentar calcular la *energía promedio* $\langle E(\omega)\rangle$ de un modo *particular* con frecuencia ω. Sea $P_p(\omega)$ la probabilidad de que haya p fonones con esta frecuencia ω. Entonces el promedio requerido es

$$\langle E(\omega)\rangle = \frac{\sum_{p=0}^{\infty} p\hbar\omega P_p(\omega)}{\sum_{p=0}^{\infty} P_p(\omega)}$$

Aunque los fonones son discretos, el hecho de que haya tantos de ellos (y que P_p se vuelve pequeña para p grande) nos permite extender la suma a $p = \infty$ con error despreciable. Ahora la probabilidad P_p está dada por la fórmula de Boltzmann

$$P_p(\omega) \propto \exp(-p\hbar\omega/k_B T)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura absoluta del cristal, que se asume constante. La constante de proporcionalidad no depende de p. Calcule la energía promedio para los fonones de frecuencia ω. Fórmula posiblemente útil: $\frac{d}{dx}e^{f(x)} = \left(\frac{df}{dx}\right)e^{f(x)}$. [2.0 puntos]

(d) Nos gustaría a continuación calcular la *energía total* E_T del cristal. En la parte (c) encontramos la energía promedio $\langle E(\omega)\rangle$ del modo de vibración con frecuencia ω. Para encontrar E_T debemos multiplicar $\langle E(\omega)\rangle$ por el número por unidad de frecuencia ω de modos de modos del cristal y luego sumar todos éstos para el rango completo desde $\omega = 0$ hasta ω_max. Tome un intervalo Δk en el rango de los números de onda. Para N muy grande y Δk mucho más grande que la separación entre valores sucesivos (permitidos) de k, ¿cuántos modos pueden encontrarse en el intervalo Δk? [1.0 puntos]

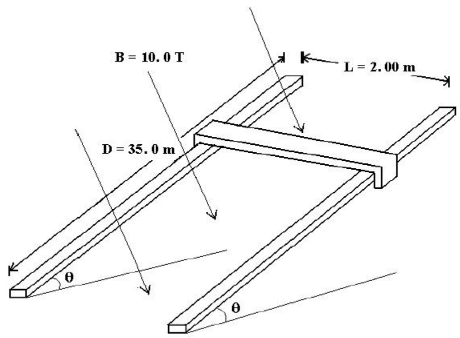
(e) Para hacer uso de los resultados de (a) y de (b), aproxime Δk como $\left(\frac{dk}{d\omega}\right)d\omega$ y reemplace cualquier suma por una integral sobre ω. (Es más conveniente usar la variable ω en lugar de k en este punto). Exprese el número total de modos del cristal en esta aproximación. También obtenga una expresión para E_T pero no la evalúe. La siguiente integral podría ser útil: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$. [2.2 puntos]

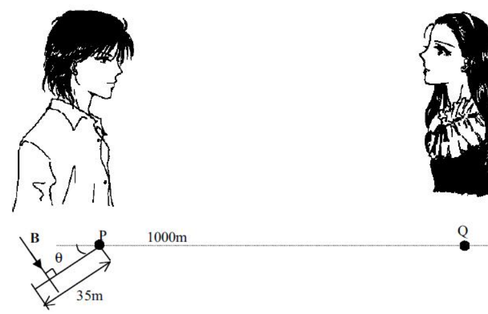
(f) La capacidad calorífica molar a volumen constante C_V de un cristal es experimentalmente accesible: $C_V = \frac{dE_\mathrm{T}}{dT}$ (T es la temperatura absoluta). Para el cristal en discusión, determine la dependencia de C_V con T para temperaturas muy altas y muy bajas (i.e.¿es constante, lineal o dependiente de una potencia para un intervalo de la temperatura?). Esboce una gráfica cualitativa de C_V contra T , indicando las tendencias predichas para T muy bajas y muy altas. [1.9 puntos]

Problema 2: El cañón de riel

Un chico en P y una chica en Q estaban profundamente enamorados. Estos dos lugares están separados por un estrecho de ancho $w = 1000\,\mathrm{m}$. Después de aprender la teoría del cañón de riel en clase, el chico no pudo esperar para construir dicho dispositivo para lanzarse a través del estrecho. Construyó una rampa de elevación ajustable θ sobre la cual colocó dos rieles de metal (la longitud de cada riel es $D = 35.0\,\mathrm{m}$) en paralelo, separados por $L = 2.00\,\mathrm{m}$. Logró conectar un suministro de poder de 2424 V DC a los extremos de los rieles. Una barra conductora puede deslizarse libremente en los rieles metálicos de tal modo que él puede aferrarse a ella sin peligro mientras se desliza.

Un ingeniero experto, conmovido por todos estos esfuerzos, le diseñó un sistema que puede producir un campo magnético $B = 10.0\,\mathrm{T}$ que puede apuntarse perpendicular al plano de los rieles. La masa del chico es de 70 kg. La masa de la barra conductora es 10 kg y su resistencia es $R = 1.0\,\Omega$.





Justo después de que terminó la construcción y tras revisar que funcionaba perfectamente, recibió una llamada de la chica sollozando, diciéndole que su padre iba a casarla con un hombre rico a menos que él pudiera llegar a Q en los siguientes 11 segundos tras la llamada. Habiendo dicho eso, ella colgó.

El chico inmediatamente entró en acción y se lanzó a través del estrecho hacia Q.

Muestre, siguiendo los pasos enlistados a continuación, si le es posible llegar a tiempo, y si sí, ¿cuál es el rango de θ que debe poner en la rampa?

(a) Encuentre la aceleración del chico paralela al riel. [3.0 puntos]

(b) Obtenga una expresión en términos de θ para el tiempo gastado

   (I) en los rieles, t_s y

   (II) en el vuelo, t_f. [3.0 puntos]

(c) Grafique el tiempo total $T = t_s + t_f$ contra el ángulo de inclinación θ. [1.5 puntos]

(d) Considerando los parámetros relevantes de este dispositivo, obtenga el rango de ángulos que debería usar. Haga otra gráfica si es necesario. [2.5 puntos]

Haga las siguientes suposiciones:

1) El tiempo entre el final de la llamada y todas la preparaciones (tales como colocar θ al ángulo adecuado) son despreciables. Eso es, el lanzamiento comienza al tiempo $t = 0$ cuando la barra (con el chico aferrado a ella) comienza a moverse.
2) El chico puede empezar su movimiento desde cualquier punto a lo largo de los rieles metálicos.
3) El extremo más alto de la rampa y Q están al mismo nivel, y la distancia entre ellos es $w = 1000\,\mathrm{m}$.
4) No hay riesgos de seguridad como el aterrizaje, descargas eléctricas, etc.
5) La resistencia de los rieles metálicos, la resistencia interna del suministro de poder, la fricción entre la barra conductora y los rieles, y la resistencia del aire son todas despreciables.
6) Tome la aceleración debida a la gravedad como $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

Algunas notas matemáticas:

1. $\displaystyle\int e^{-ax}dx = -\frac{e^{-ax}}{a}$
2. La solución a $\dfrac{dx}{dt} = a + bx$ está dada por $x(t) = \dfrac{a}{b}\left(e^{bt} - 1\right) + x(0)e^{bt}$

Problema 3: Fabricación de obleas

La fabricación de obleas se refiere a la producción de chips semiconductores a partir del silicio. En la tecnología moderna hay más de veinte procesos; vamos a concentrarnos en la deposición de películas delgadas.

El proceso de fabricación de obleas, películas delgadas de varios materiales son depositadas en la superficie de la oblea de silicio. La superficie del sustrato debe estar extremadamente limpia antes del proceso de deposición. La presencia de trazos de oxígeno u otros elementos resultará en la formación de una capa de contaminación. El ritmo de formación de esta capa está determinado por el ritmo de impregnación de las moléculas de gas que golpean la superficie del sustrato. Asumiendo que el número de moléculas por unidad de volumen es n, el ritmo de impregnación del gas en una unidad de área del sustrato está dada por

$$J = \tfrac{1}{4} n\bar{v}$$

donde $\bar{v}$ es la velocidad media o promedio de las moléculas de gas.

(a) Asuma que las moléculas de gas obedecen una distribución de Maxwell-Boltzmann,

$$W(v) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{Mv^2}{(2RT)}}$$

donde $W(v)dv$ es la fracción de moléculas cuya velocidad se encuentra entre v y $v+dv$, M es la masa molar del gas, T es la temperatura del gas y R es la constante de gases. Demuestre que la velocidad media o promedio de las moléculas del gas está dada por

$$\bar{v} = \int_0^\infty vW(v)dv = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

[1.5 puntos]

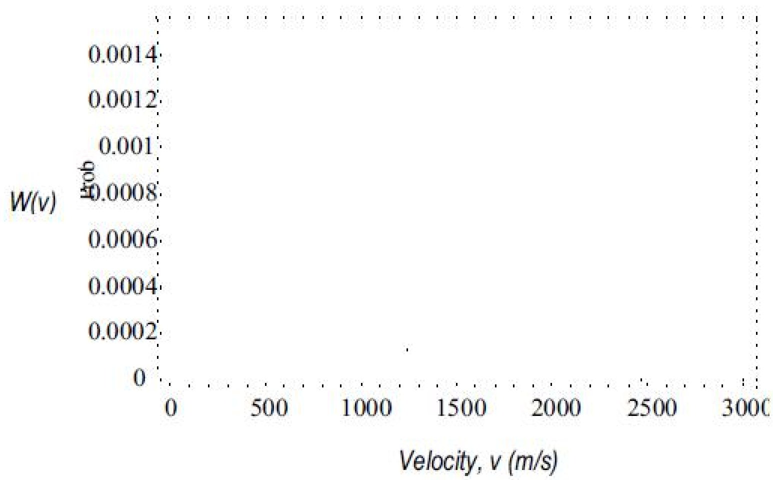
(b) Asumiendo que los gases se comportan como un gas ideal a baja presión P, muestre que el ritmo de impregnación está dado por

$$J = \frac{P}{\sqrt{2\pi mkT}}$$

donde m es la masa de la molécula y T es la temperatura del gas. [1.5 puntos]

(c) Si la presión residual del oxígeno en un sistema de vacío es 133 Pa, y modelando a la molécula de oxígeno como una esfera de radio aproximadamente 3.6×10^{-10} m, estime cuánto tiempo toma depositar una capa de oxígeno del grosor de una una molécula en la oblea a 300 °C, asumiendo que todas las moléculas de oxígeno que llegan a la superficie de la oblea de silicio son depositadas. Asuma también que las moléculas de oxígeno en la capa están dispuestas lado a lado. [1.7 puntos]

(d) En realidad, no todas las moléculas de oxígeno reaccionan con el silicio. Esto puede modelarse por el concepto de energía de activación donde las moléculas reactivas deben tener una energía total mayor a la energía de activación antes de poder reaccionar. Físicamente esta energía de activación describe el hecho de que los lazos químicos entre los átomos de silicio deben romperse antes de que puedan formarse nuevos lazos entre los átomos de silicio y de oxígeno. Asumiendo que la energía de activación de la reacción es de 1 eV, estime de nuevo cuánto tiempo tardará en depositar una capa atómica de oxígeno a la temperatura anterior. Puede asumir que el área bajo la curva de la distribución de Maxwell en la parte (a) es la unidad. [2.8 puntos]



(e) Para procesos de litografía, la oblea de silicio limpia es cubierta uniformemente con una capa de polímero transparente (foto-resina) de índice de refracción $\mu = 1.40$. Para medir el grosor de esta foto-resina, la oblea es iluminada con un rayo colimado de luz monocromática de longitud de onda $\lambda = 589\,\text{nm}$. Un cierto grosor mínimo de la foto-resina, d, hay interferencia destructiva de la luz refractada, asumiendo incidencia normal en el revestimiento. Derive una expresión para la relación entre d, μ y λ. Calcule d usando los datos dados. En este punto puede asumir que el silicio se comporta como un medio con índice de difracción mayor a 1.40 y puede ignorar las refracciones múltiples. [2.5 puntos]

Los siguientes datos pueden ser útiles:

La masa molar del oxígeno es $32\,\text{g}\,\text{mol}^{-1}$.

Constante de Boltzmann, $k = 1.38 \times 10^{-23}\,\text{J}\,\text{K}^{-1}$.

Número de Avogadro, $N_A = 6.02 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$.

Fórmula útil: $\int x^3 e^{-kx^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-kx^2} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{x^2}{k} \right)$