

41 Olimpiada Internacional de Física

Zagreb, Croacia 2010

Problema 1. Imagen de una carga en un objeto metálico

Introducción - Método de imágenes

Una carga puntual q es colocada en la vecindad de una esfera metálica de radio R conectada a tierra (vea la Figura 1a) y consecuentemente una distribución superficial de carga es inducida en la esfera. Calcular el campo eléctrico y el potencial de la distribución de carga superficial es una tarea formidable. Sin embargo, los cálculos pueden simplificarse considerablemente usando el llamado método de imágenes. En este método, el campo eléctrico y el potencial producidos por la carga distribuida en la esfera puede representarse como el campo eléctrico y el potencial de una sola carga puntual q' colocada dentro de la esfera (no es necesario que lo demuestre). Nota: **El campo eléctrico de esta carga imagen q' produce el campo eléctrico y el potencial sólo fuera de la esfera (incluida su superficie).**

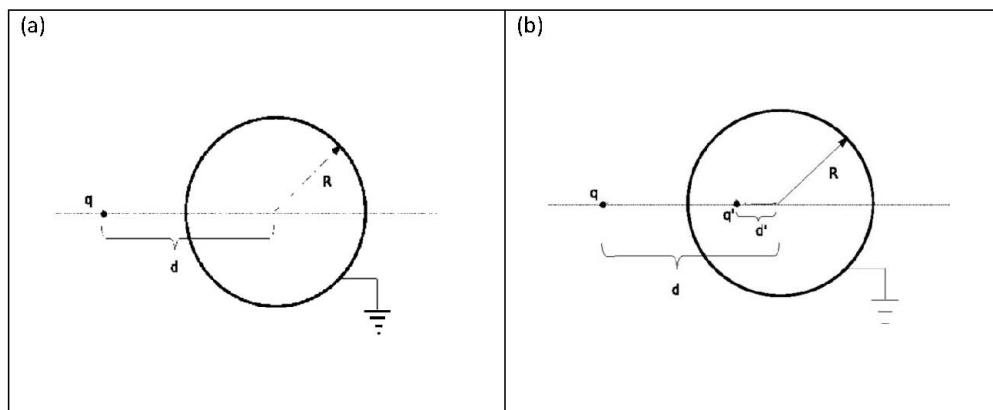


Figura 1: (a) Una carga puntual q en la vecindad de una esfera metálica conectada a tierra. (b) El campo eléctrico de la carga inducida en la esfera puede representarse como el campo eléctrico de una carga imagen q' .

Tarea 1 - La carga imagen

La simetría del problema indica que la carga q' debe ser colocada en la línea que conecta a la carga puntual q y al centro de la esfera (vea la Figura 1b).

- ¿Cuál es el valor del potencial en la esfera? (0.3 puntos)
- Expresa q' y la distancia d' entre la carga q' y el centro de la esfera, en términos de q , d y R . (1.9 puntos)
- Encuentre la magnitud de la fuerza que actúa sobre la carga q . ¿Es una fuerza repulsiva? (0.5 puntos)

Tarea 2 - Blindaje de un campo electrostático

Considere una carga puntual q colocada a una distancia d del centro de la esfera metálica aterrizada de radio R . Estamos interesados en cómo la esfera afecta el campo eléctrico en el punto A al lado opuesto de ésta (vea la Figura 2). El punto A está en la línea que conecta a q con el centro de la esfera; su distancia a la carga puntual q es r .

- Encuentre el vector del campo eléctrico en el punto A . (0.6 *puntos*)
- Para una distancia muy grande $r \gg d$, encuentre la expresión para el campo eléctrico usando la aproximación $(1 + a)^{-2} \approx 1 - 2a$, donde $a \ll 1$. (0.6 *puntos*)
- ¿En qué límite de d es que la esfera metálica aterrizada proyecta el campo de la carga q completamente, tal que el campo eléctrico en el punto A sea exactamente cero? (0.3 *puntos*)

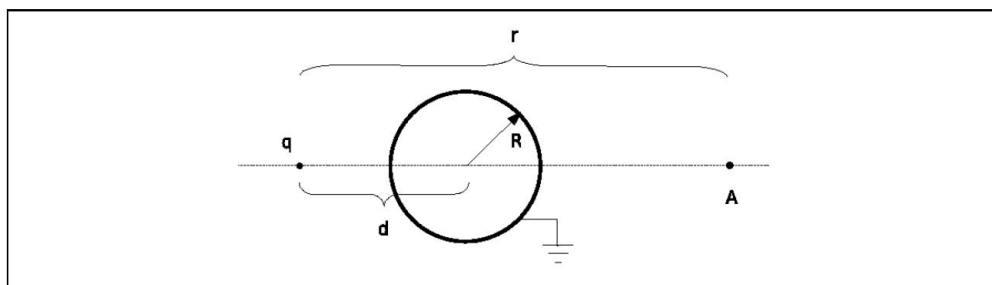


Figura 2: El campo eléctrico en el punto A es parcialmente proyectado por la esfera aterrizada.

Tarea 3 - Pequeñas oscilaciones en el campo eléctrico de la esfera metálica aterrizada

Una carga puntual q con masa m está suspendida en un hilo de longitud L que está unido a una pared en la vecindad de la esfera metálica aterrizada. En sus consideraciones, ignore todos los efectos electrostáticos de la pared. La carga puntual hace un péndulo matemático (vea la Figura 3). El punto en el que el hilo se conecta a la pared está a una distancia l del centro de la esfera. Asuma que los efectos de la gravedad son despreciables.

- Encuentre la magnitud de la fuerza eléctrica actuando sobre la carga q para un ángulo α dado e indique su dirección en un diagrama claro. (0.8 *puntos*)
- Determine la componente de esta fuerza que actúa en la dirección perpendicular al hilo en términos de l , R , q y α . (0.8 *puntos*)
- Encuentre la frecuencia de las pequeñas oscilaciones del péndulo. (1.0 *puntos*)

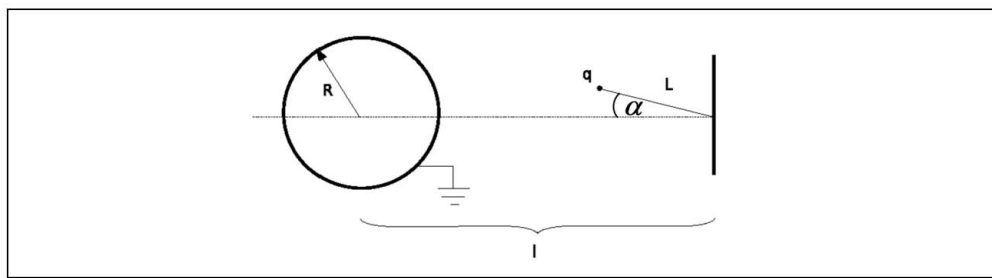


Figura 3: Una carga puntual en la vecindad de la esfera aterrizada oscila como un péndulo.

Tarea 4 - La energía electrostática del sistema

Para una distribución de cargas eléctricas, es importante conocer la energía electrostática del sistema. En nuestro problema (vea la Figura 1a), hay una interacción electrostática entre la carga externa q y las cargas inducidas en la esfera, y también hay una interacción electrostática entre las mismas cargas inducidas en la esfera. En términos de la carga q , el radio de la esfera R y la distancia d determine las siguientes energías electrostáticas:

- a) la energía electrostática entre la carga q y las cargas inducidas en la esfera; (1.0 *puntos*)
- b) la energía electrostática entre las cargas inducidas en la esfera; (1.2 *puntos*)
- c) la energía electrostática total de la interacción en el sistema. (1.0 *puntos*)

Pista: Hay varias formas de resolver este problema:

1. En una de ellas, puede usar la siguiente integral: $\int_d^\infty \frac{xdx}{(x^2 - R^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2 - R^2}$.
2. En la otra, puede usar como un hecho que para una colección de N cargas q_i localizadas en puntos \vec{r}_i , $i = 1, \dots, N$, la energía electrostática es una suma sobre todos los pares de cargas: $V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$.

Problema 2. Física de chimenea

Introducción

Los productos gaseosos de la combustión son lanzados a la atmósfera de temperatura T_{Air} a través de una alta chimenea de sección transversal A y altura h (vea la Figura 1). La materia sólida es quemada en el horno que está a temperatura T_{Smoke} . El volumen de gases producido por unidad de tiempo en el horno es B .

Asuma que:

- la velocidad de los gases en el horno es despreciablemente pequeña
- la densidad de los gases (humo) no es diferente a la del aire a la misma temperatura y presión; dentro del horno, los gases pueden ser tratados como ideales
- la presión del aire cambia con la altura según en concordancia con la ley hidrostática; el cambio de la densidad del aire con la altura es despreciable
- el flujo de gases satisface la ecuación de Bernoulli que establece que la siguiente cantidad se conserva en todos los puntos del flujo: $\frac{1}{2}\rho v^2(z) + \rho gz + p(z) = \text{const}$, donde ρ es la densidad del gas, $v(z)$ es su velocidad, $p(z)$ es su presión y z es la altura.
- el cambio de densidad del gas es despreciable a lo largo de la chimenea.

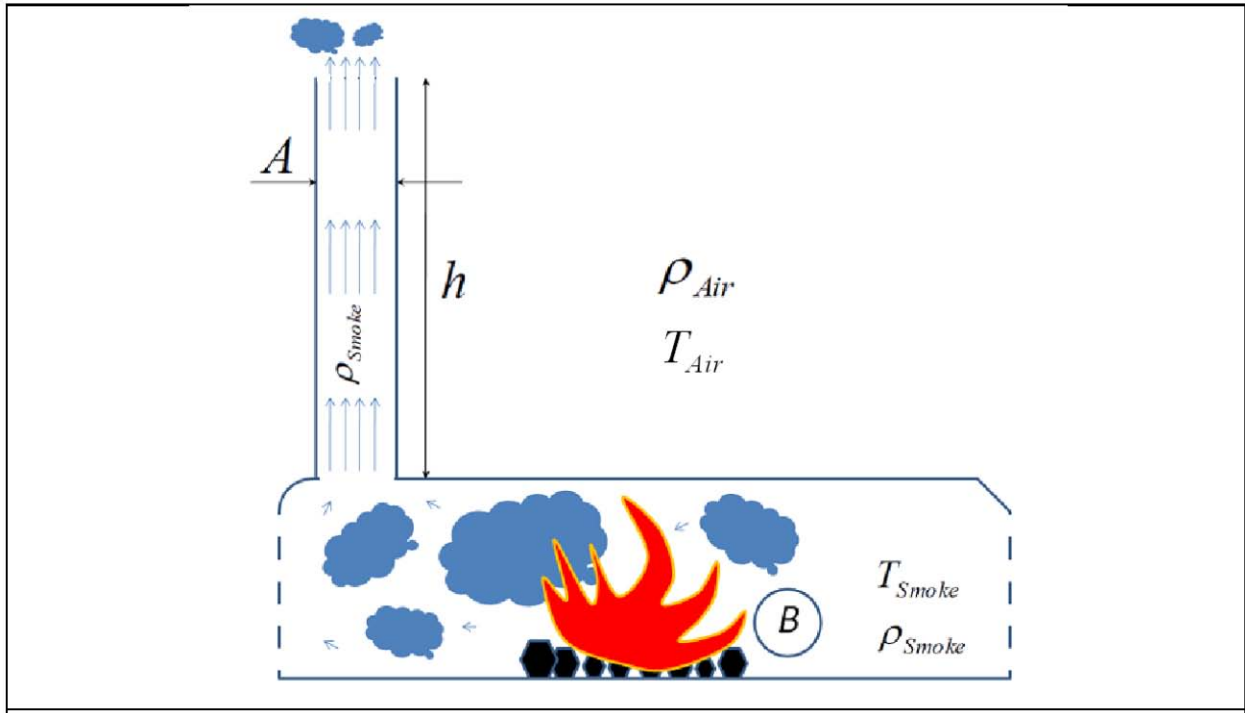


Figura 1: Dibujo de una chimenea de altura h con un horno a temperatura T_{Smoke} .

Tarea 1

- a) ¿Cuál es la mínima altura de la chimenea necesaria para que funciones eficientemente, de tal modo que pueda liberar todos los gases producidos a la atmósfera? Exprese su resultado en términos de B , A , T_{Air} , $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $\Delta T = T_{Smoke} - T_{Air}$. **Importante: en todas las tareas subsecuentes asuma que esta altura mínima es la altura de la chimenea.** (3.5 puntos)
- b) Asuma que dos chimeneas idénticas son construidas para servir al mismo propósito. Sus secciones transversales son idénticas, pero están diseñadas para trabajar en diferentes partes del mundo: una en regiones frías, diseñada para trabajar a una temperatura atmosférica promedio de -30°C ; y la otra en regiones cálidas, diseñada para trabajar a una temperatura atmosférica promedio de 30°C . La temperatura del horno es 400°C . Se calculó que la altura de la chimenea diseñada para trabajar en regiones frías es de 100 m. ¿Qué tan alta es la otra chimenea? (0.5 puntos)
- c) ¿Cómo varía la velocidad de los gases a lo largo de la chimenea? Haga un dibujo/diagrama asumiendo que la sección transversal de la chimenea no cambia con la altura. Indique el punto donde los gases entran en la chimenea. (0.6 puntos)
- d) ¿Cómo varía la presión de los gases con la altura a lo largo de la chimenea? (0.5 puntos)

Planta de energía solar

El flujo de gases en una chimenea puede utilizarse para construir un tipo particular de planta de energía solar (una chimenea solar). La idea se ilustra en la Figura 2. El sol calienta el aire debajo del acumulador de área S con una periferia abierta para permitir el flujo no distribuido de aire (vea la Figura 2). Conforme el aire calentado asciende por la chimenea (flechas sólidas delgadas), nuevo aire frío entra al acumulador desde sus alrededores (flechas punteadas gruesas) permitiendo un flujo continuo de aire a través de la planta de energía. El flujo de aire a través de la chimenea mueve una turbina, resultando en la producción de energía eléctrica. La energía de radiación solar por unidad de tiempo por unidad de superficie horizontal del acumulador es G . Asuma que toda esta energía puede usarse para calentar el aire en el acumulador (el calor específico del aire es c y uno puede despreciar su dependencia respecto a la temperatura). Definimos la eficiencia de la chimenea solar como la razón entre energía cinética del flujo de aire y la energía solar absorbida en el calentamiento del aire antes de su entrada en la chimenea.

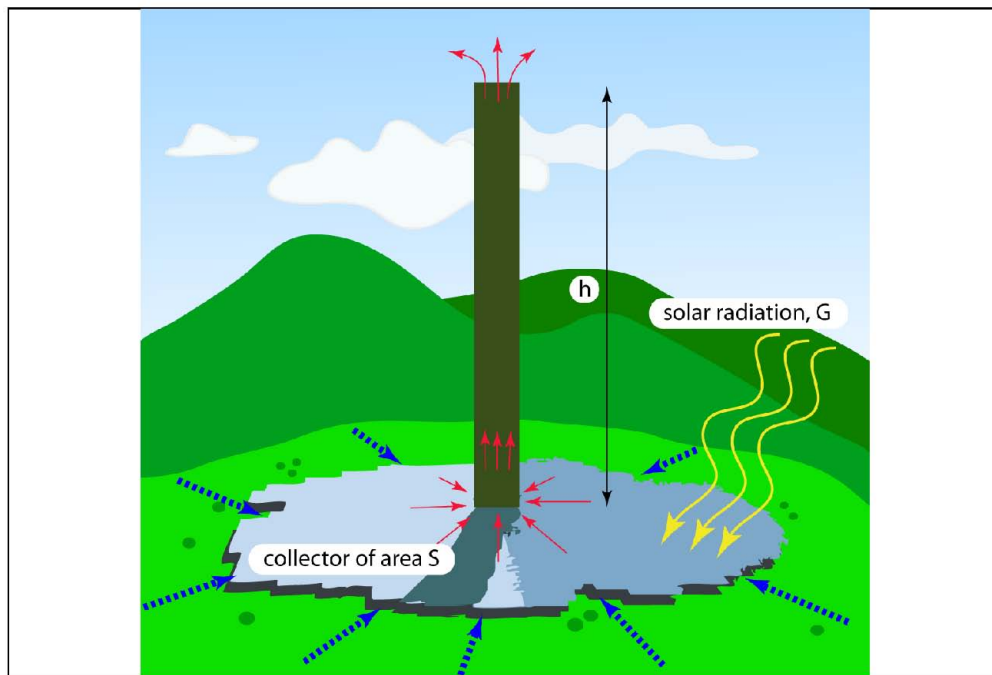


Figura 2: Dibujo de una planta de energía solar.

Tarea 2

- a) ¿Cuál es la eficiencia de la planta de energía solar? (2.0 *puntos*)
- b) Haga un diagrama que muestre cómo cambia la eficiencia de la chimenea con su altura. (0.4 *puntos*)

Prototipo de Manzanares

La chimenea prototipo construida en Manzanares, España, tenía una altura de 195 m y un radio de 5 m. El acumulador es circular con un diámetro de 244 m. El calor específico del aire bajo condiciones operativas ordinarias de la chimenea solar prototipo es 1012 J/kg K , la densidad del aire caliente es aproximadamente 0.9 kg/m^3 , la temperatura típica de la atmósfera es $T_{Air} = 295 \text{ K}$. En Manzanares, la potencia solar por unidad de superficie horizontal es típicamente de 150 W/m^2 durante un día soleado.

Tarea 3

- a) ¿Cuál es la eficiencia promedio de la planta de energía prototipo? Escriba la estimación numérica. (0.3 *puntos*)
- b) ¿Cuánta potencia podría ser producida en la planta solar prototipo? (0.4 *puntos*)
- c) ¿Cuánta energía podría producir durante un típico soleado? (0.3 *puntos*)

Tarea 4

- a) ¿Cuál es el aumento de temperatura del aire cuando entra a la chimenea (aire caliente) respecto a sus alrededores (aire frío)? Escriba la fórmula general y evalúela para la chimenea prototipo. (1.0 *puntos*)
- b) ¿Cuál es el ritmo de flujo de masa de aire a través del sistema? (0.5 *puntos*)

Problema 3. Modelo simple del núcleo atómico

Introducción

A pesar de que los núcleos son objetos cuánticos, algunas leyes fenomenológicas de sus propiedades básicas (como su radio o energía de enlace nuclear) pueden deducirse con suposiciones simples: (i) los núcleos están constituidos por nucleones (i.e. protones y neutrones); (ii) la interacción nuclear fuerte que une a estos nucleones tiene un muy corto rango (sólo actúa entre nucleones adyacentes); (iii) el número de protones (Z) en un núcleo dado es aproximadamente igual al número de neutrones (N), i.e. $Z \approx N \approx A/2$, donde A es el número total de nucleones ($A \gg 1$). **Importante:** Utilice estas suposiciones en las Tareas 1-4 a continuación.

Tarea 1 - El núcleo atómico como un sistema de nucleones empaquetados

En un modelo simple, el núcleo puede pensarse como una bola formada por nucleones estrechamente empaquetados (vea la Figura 1a), donde los nucleones son bolas rígidas de radio $r_N = 0.85 \text{ fm}$ ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$). La fuerza nuclear sólo está presente entre dos nucleones que estén en contacto. El volumen V del núcleo es mayor que el volumen de todos los nucleones AV_N , donde $V_N = \frac{4}{3}\pi r_N^3$. El cociente $f = AV_N/V$ es llamado factor de empaquetamiento y da el porcentaje de espacio llenado por la materia nuclear.

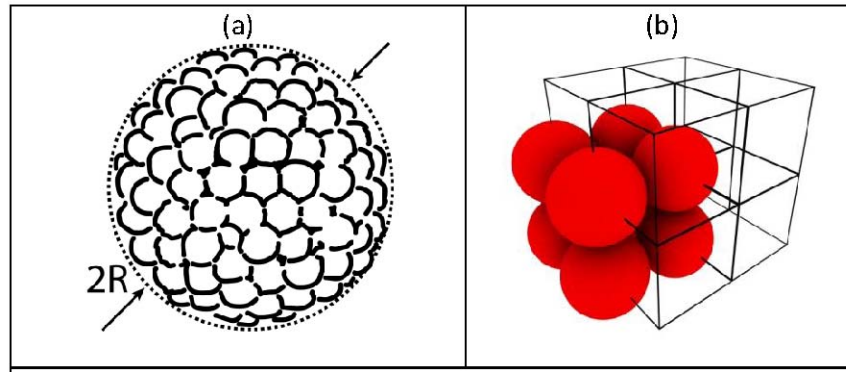


Figura 1: (a) El núcleo atómico como una bola de neutrones estrechamente empaquetados. (b) El empaquetamiento SC

- a) Calcule cuál sería el factor de empaquetamiento f si los nucleones estuviesen arreglados en un sistema cristalino “cúbico simple” (SC), donde cada nucleón está centrado en los puntos de una red cúbica infinita (vea la Figura 1b). (0.3 puntos)

Importante: En todas las tareas subsecuentes, asuma que el factor de empaquetamiento de los núcleos es igual al de la Tarea 1a. Si no fuera capaz de calcularlo, en las tareas siguientes use $f = 1/2$.

- b) Estime la densidad de masa promedio ρ_m , densidad de carga ρ_c , y el radio R de un núcleo que tiene A nucleones. La masa promedio de un nucleón es $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$. (1.0 puntos)

Tarea 2 - Energía de enlace del núcleo atómico - términos de volumen y superficie

La energía de enlace nuclear es la energía requerida para desarmar el núcleo en nucleones separados, y esencialmente proviene de la fuerza nuclear de atracción entre cada nucleón con sus vecinos. Si un nucleón dado no está en la superficie del núcleo, contribuye a la energía de enlace total con $a_V = 15.8 \text{ MeV}$ ($1 \text{ MeV} = 1.602 \times 10^{-13} \text{ J}$). La contribución de un nucleón en la superficie a la energía de enlace es aproximadamente $a_V/2$. Expresa la energía de enlace E_b de un núcleo con A nucleones en términos de A , a_V y f , e incluyendo la corrección de la superficie. (1.9 *puntos*)

Tarea 3 - Efectos electrostáticos (de Coulomb) en la energía de enlace

La energía electrostática de una bola homogéneamente cargada (con radio R y carga Q_0) es $U_C = \frac{3Q_0^2}{20\pi\epsilon_0 R}$, donde $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$.

- Aplique esta fórmula para obtener la energía electrostática del núcleo. En un núcleo, cada protón no está actuando sobre sí mismo (por fuerza de Coulomb), sino sólo sobre el resto de los protones. Uno puede tomar eso en cuenta reemplazando $Z^2 \rightarrow Z(Z-1)$ en la fórmula obtenida. Use esta corrección en las tareas subsiguientes. (0.4 *puntos*)
- Escriba la fórmula completa de la energía de enlace, incluyendo el término principal (el de volumen), el término de corrección de superficie y la corrección electrostática obtenida. (0.3 *puntos*)

Tarea 4 - Fisión de núcleos pesados

La fisión es un proceso nuclear en el que un núcleo se divide en partes más pequeñas (núcleos más ligeros). Suponga que un núcleo con A nucleones se divide sólo en dos partes iguales como se muestra en la Figura 2.

- Calcule la energía cinética total de los productos de la fisión E_{kin} cuando los centros de los dos núcleos ligeros están separados por una distancia $d \geq 2R(A/2)$, donde $R(A/2)$ es su radio. El núcleo grande estaba inicialmente en reposo. (1.3 *puntos*)
- Asuma que $d = 2R(A/2)$ y evalúe la expresión de E_{kin} obtenida en la parte a) para $A = 100, 150, 200$ y 250 (expresa sus resultados en unidades de MeV). Estime los valores de A para los cuales la fisión es posible en el modelo descrito anteriormente. (1.0 *puntos*)

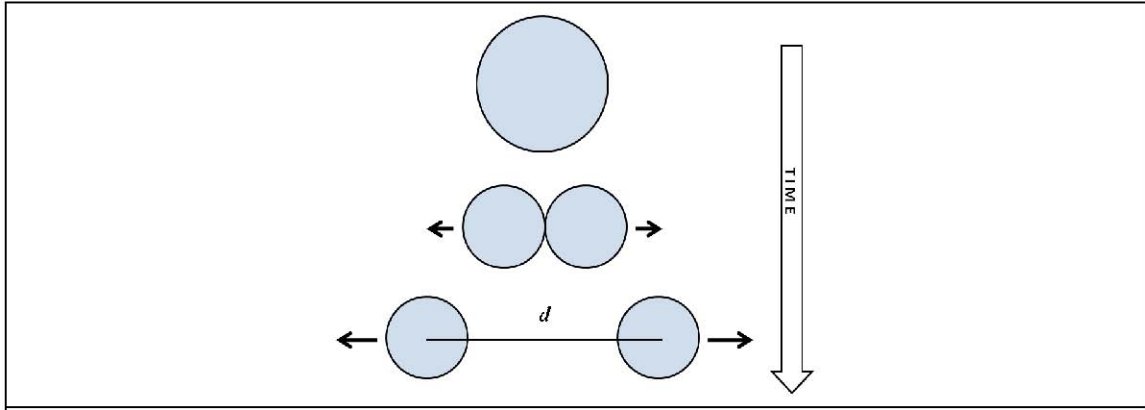


Figura 2: Una descripción esquemática de la fisión nuclear en nuestro modelo

Tarea 5 - Reacciones de transferencia

- a) En física moderna, las energías de los núcleos y sus reacciones son descritos en términos de masas. Por ejemplo, si un núcleo (con velocidad cero) está en un estado excitado de energía E_{exc} por encima del estado base, su masa es $m = m_0 + E_{exc}/c^2$, donde m_0 es su masa en el estado base en reposo. La reacción nuclear $^{16}\text{O} + ^{54}\text{Fe} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^{58}\text{Ni}$ es un ejemplo de las llamadas “reacciones de transferencia”, en la que parte de un núcleo (“cluster”) es transferido al otro (vea la Figura 3). En nuestro ejemplo la parte transferida es un cluster ^4He (partícula α). Las reacciones de transferencia ocurren con máxima probabilidad si la velocidad del producto de la reacción tipo-proyectil (en este caso: ^{12}C) es igual en magnitud y dirección a la velocidad del proyectil (en nuestro caso: ^{16}O). El ^{54}Fe objetivo está inicialmente en reposo. En la reacción, el ^{58}Ni está excitado en uno de sus estados de mayor energía. Encuentre la energía de excitación de ese estado (y exprese en unidades de MeV) si la energía cinética del ^{16}O proyectil es 50 MeV. La velocidad de la luz es $c = 3 \times 10^8$ m/s. (2.2 puntos)

1.	$M(^{16}\text{O})$	15.99491 a.m.u.
2.	$M(^{54}\text{Fe})$	53.93962 a.m.u.
3.	$M(^{12}\text{C})$	12.00000 a.m.u.
4.	$M(^{58}\text{Ni})$	57.93535 a.m.u.

Tabla 1: Las masas en reposo de los reactivos en su estado base. 1 a.m.u = 1.6605×10^{-27} kg.

- b) El núcleo de ^{58}Ni producido en el estado excitado discutido en la parte a) se desexcita a su estado base emitiendo un fotón gama en la dirección de su movimiento. Considere este decaimiento en el marco de referencia en el que el ^{58}Ni está en reposo para encontrar la energía de retroceso del ^{58}Ni (i.e. la energía cinética que adquiere el ^{58}Ni después de la emisión del fotón). ¿Cuál es la energía del fotón en ese sistema? ¿Cuál es la energía del fotón en el marco de referencia del laboratorio (i.e. cuál sería la energía del fotón medida en el detector que está posicionado en la dirección en la que se mueve el ^{58}Ni)? (1.6 puntos)

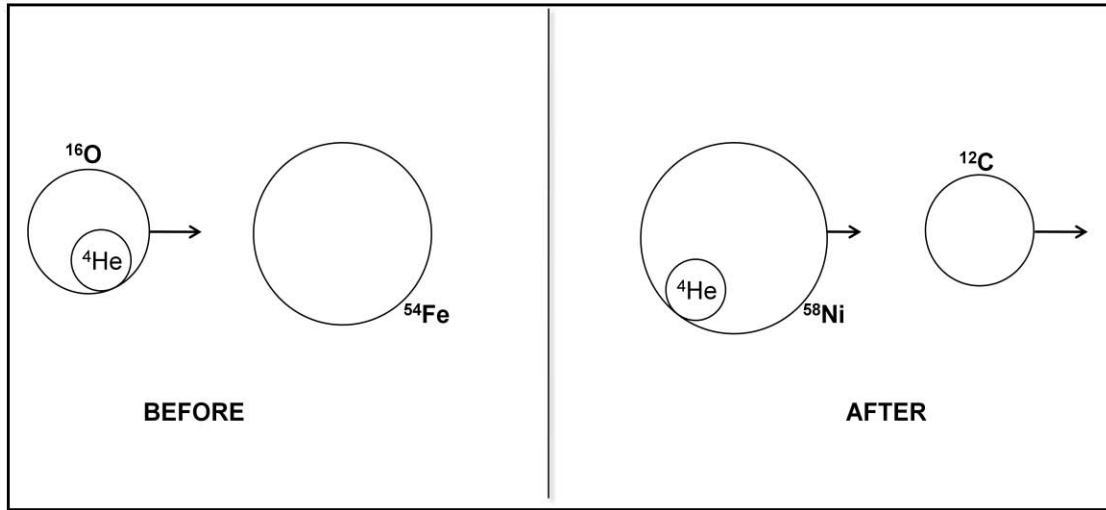


Figura 3: Esquema de la reacción de transferencia.