

42 OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA BANGKOK, TAILANDIA, 2011

Problema 1: Un problema de tres cuerpos y LISA

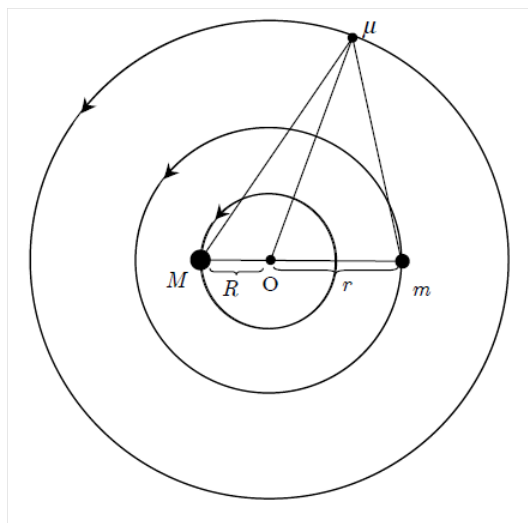


Figura 1: Órbitas coplanarias de tres cuerpos

1.1 Dos masas gravitatorias M y m se mueven en órbitas circulares de radios R y r , respectivamente, alrededor de su centro de masa común. Encuentre la velocidad angular ω_0 de la línea que une a M y m , en términos de R , r , M , m y la constante de gravitación universal G . **[1.5 puntos]**

1.2 Un tercer cuerpo de masa infinitesimal μ es colocada en una órbita circular coplanar alrededor del mismo centro de masa de tal forma que μ permanece estacionaria respecto tanto de M como de m como se muestra en la Figura 1. Asuma que la masa infinitesimal no es colineal con M y m . Encuentre los valores de los siguientes parámetros en términos de R y r : **[3.5 puntos]**

- 1.2.1 La distancia entre μ y M .
- 1.2.2 La distancia entre μ y m .
- 1.2.3 La distancia entre μ y el centro de masas.

1.3 Considere el caso en el que $M = m$. Si a μ ahora se le imprime una pequeña perturbación radial (a lo largo de $O\mu$), ¿cuál es la frecuencia angular de oscilación de μ alrededor de la posición sin perturbar, en términos de ω_0 ? Asuma que el momento angular de μ se conserva. **[3.2 puntos]**

La Antena Espacial de Interferometría Láser (LISA, por sus siglas en inglés) es un grupo de tres naves espaciales idénticas usado para detectar ondas gravitacionales de baja frecuencia. Cada una de las naves espaciales es colocada en los vértices de un triángulo equilátero como se muestra en la Figura 2 y Figura

3. Los lados (o "brazos") miden aproximadamente 5.0 millones de kilómetros de largo. La constelación de LISA está en una órbita similar a la terrestre alrededor del Sol, siguiendo a la Tierra por 20° . Cada una se mueve en una órbita individual ligeramente inclinada alrededor del Sol. De manera efectiva, las tres naves parecen rodar alrededor de su centro común a una revolución por año.

Están continuamente transmitiendo y recibiendo señales láser entre sí. En conjunto, detectan las ondas gravitacionales midiendo pequeños cambios en las longitudes de los brazos usando medios interferométricos. Una colisión de objetos masivos, tales como agujeros negros, en galaxias cercanas es un ejemplo de las fuentes de ondas gravitacionales.

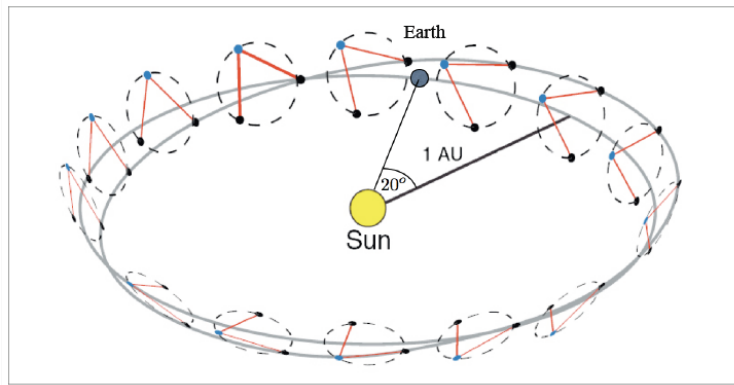


Figura 2: Ilustración de la órbita de LISA. Las tres naves ruedan alrededor de su centro de masa común a una revolución por año. Inicialmente, van detrás de la Tierra por 20° . (Imagen de D.A. Shaddock, "An Overview of the Laser Interferometer Space Antenna", Publications of the Astronomical Society of Australia, 2009, 26, pp.128-132.).

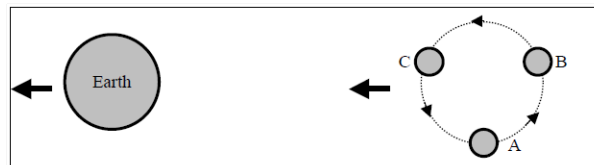


Figura 3: Vista aumentada de las tres naves siguiendo a la Tierra. A, B y C son las tres naves en los vértices de un triángulo equilátero.

1.4 En el plano que contiene a las tres naves espaciales, ¿cuál es la velocidad relativa de una nave respecto a la otra? **[1.8 puntos]**

Problema 2: Una burbuja de jabón electrificada

Una burbuja de jabón esférica con aire interno de densidad ρ_i y temperatura T_i , y radio R_0 está rodeada por aire con densidad ρ_a , presión atmosférica P_a y temperatura T_a . La película de jabón tiene tensión superficial γ , densidad ρ_s y grosor t . La masa y tensión superficial del jabón no cambian con la temperatura. Asuma que $R_0 \gg t$.

El incremento en energía dE que se requiere para incrementar el área de la superficie de la interfase jabón-aire por dA está dada por $dE = \gamma dA$, donde γ es la tensión superficial del filme.

2.1 Encuentre la razón $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a}$ en términos de γ , P_a y R_0 . **[1.7 puntos]**

2.2 Encuentre el valor numérico de $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1$ usando los siguientes datos: $\gamma = 0.0250 \text{ N m}^{-1}$, $R_0 = 1.00 \text{ cm}$ y $P_a = 1.013 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}$. **[0.4 puntos]**

2.3 La burbuja está formada inicialmente por aire más caliente por dentro. Encuentre el mínimo valor numérico de T_i tal que la burbuja pueda flotar en aire quieto. Utilice $T_a = 300 \text{ K}$, $\rho_s = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho_a = 1.30 \text{ kg m}^{-3}$, $t = 100 \text{ nm}$ y $g = 9.80 \text{ m s}^{-2}$. **[2.0 puntos]**

Tras un rato desde que la burbuja se haya formado, entrará en equilibrio térmico con sus alrededores. Esta burbuja en aire quieto caerá naturalmente hacia el suelo.

2.4 Encuentre la mínima velocidad u de una corriente ascendente de aire que evitará que la burbuja caiga estando en equilibrio térmico. De su respuesta en términos de ρ_s , R_0 , g , t y el coeficiente de viscosidad del aire η . Puede asumir que la velocidad es lo suficientemente pequeña para que se aplique la ley de Stokes, e ignore el cambio de radio cuando la temperatura desciende al equilibrio. La fuerza de arrastre de la ley de Stokes es $F = 6\pi\eta R_0 u$. **[1.6 puntos]**

2.5 Calcule el valor numérico de u usando $\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. **[0.4 puntos]**

Los cálculos anteriores sugieren que los términos que involucran a la tensión superficial γ contribuyen muy poco a la precisión del resultado. En todas las preguntas siguientes, puede despreciar los términos que contengan a la tensión superficial.

2.6 Si la burbuja ahora está electrificada uniformemente con carga total q , encuentre una ecuación que describa su nuevo radio R_1 en términos de R_0 , P_a , q y la permitividad eléctrica del vacío ϵ_0 . **[2.0 puntos]**

2.7 Asuma que la carga total no es muy grande (i.e. $\frac{q^2}{\epsilon_0 R_0^4} \ll P_a$) y que la burbuja experimenta tan solo un pequeño incremento en su radio. Encuentre ΔR , donde $R_1 = R_0 + \Delta R$. Puede utilizar que $(1+x)^n \approx 1+nx$ cuando $x \ll 1$. **[0.7 puntos]**

2.8 ¿Cuál debe ser la magnitud de esta carga q en términos de t , ρ_a , ρ_s , ϵ_0 , R_0 , P_a para que la burbuja flote sin moverse en aire quieto? Calcule también el valor numérico de q . La permitividad eléctrica del vacío es $\epsilon = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$. **[1.2 puntos]**

Problema 3: Conmemoración del centenario del núcleo atómico de Rutherford: Dispersión de un ión por un átomo neutro

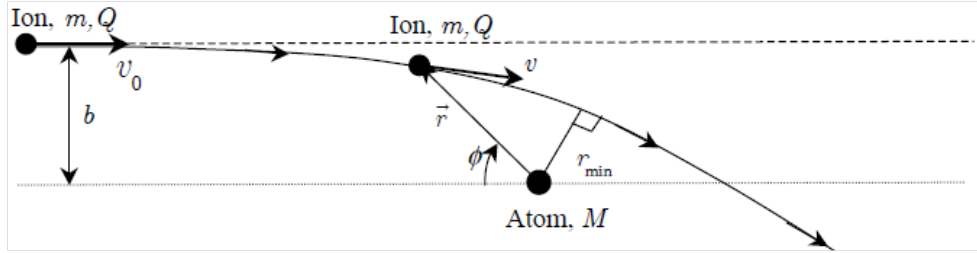


Figura 1:

Un ión de masa m y carga Q se está moviendo con una velocidad inicial no relativista v_0 desde una gran distancia hacia la vecindad de un átomo neutro de masa $M \gg m$ y de polarizabilidad eléctrica α . El parámetro de impacto es b , como se muestra en la Figura 1.

El átomo es polarizado instantáneamente por el campo eléctrico \vec{E} del ión que se aproxima. El momento dipolar eléctrico resultante del átomo es $\vec{p} = \alpha \vec{E}$. Ignore cualquier pérdida por radiación en este problema.

3.1 Calcule la intensidad de campo eléctrico \vec{E}_p a una distancia r desde un dipolo eléctrico ideal \vec{p} , desde el origen O en la dirección de \vec{p} , como en la Figura 2. **[1.2 puntos]**

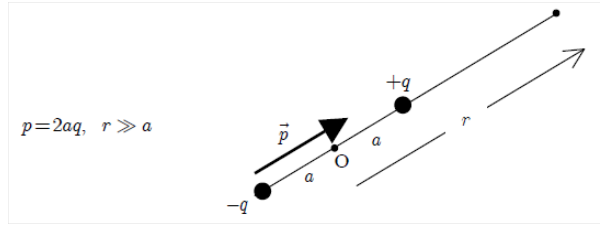


Figura 2:

3.2 Encuentre la expresión de la fuerza \vec{f} actuando en el ión debida al átomo polarizado. Muestre que esta fuerza es de atracción independientemente del signo la carga del ión. **[3.0 puntos]**

3.3 ¿Cuál es la energía potencial eléctrica de la interacción ión-átomo, en términos de α , Q y r ?

[0.9 puntos]

3.4 Encuentre una expresión para r_{\min} , la distancia de mayor acercamiento, mostrada en la Figura 1.

[2.4 puntos]

3.5 Si el parámetro de impacto b es menor que un valor crítico b_0 , el ión descenderá en espiral hacia el átomo. En ese caso, el ión será neutralizado, y el átomo, en cambio, es cargado. Este proceso se conoce como interacción de intercambio de carga. ¿Cuál es el área de la sección transversal $A = \pi b_0^2$ de esta colisión de intercambio de carga del átomo vista por el ión?

[2.5 puntos]