

## 2 Olimpiada Asiática de Física

Taipei, Taiwan 2001

### Problema 1: ¿Cuándo se convertirá la Luna en un satélite sincrónico?

El periodo de rotación de la Luna en torno a su eje es actualmente el mismo que su periodo de revolución alrededor de la Tierra de modo que el mismo lado de la Luna siempre encara a la Tierra. La igualdad de estos dos periodos surgió probablemente debido a la acción de las fuerzas de marea a través de la larga historia del sistema Tierra-Luna.

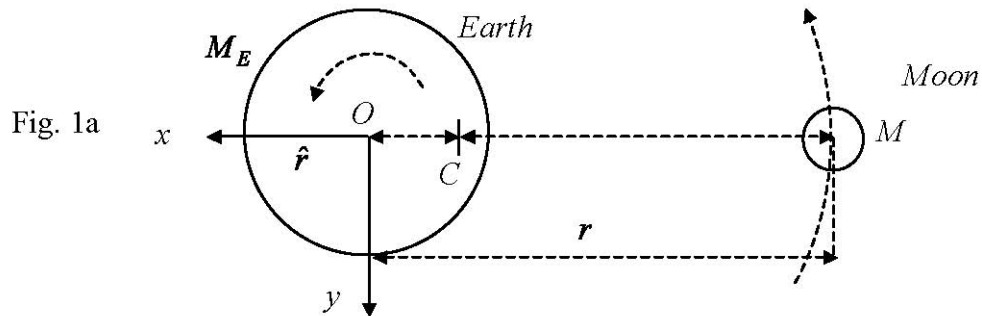
Sin embargo, el periodo de rotación de la Tierra en torno a su eje es actualmente más corto que el periodo de revolución de la Luna. Como resultado, las fuerzas lunares de marea siguen actuando de una manera que tiende a ralentizar la velocidad rotacional de la Tierra y a alejar aún más a la Luna de la Tierra.

En esta pregunta, estamos interesados en obtener una estimación de cuánto más tiempo le tomará al periodo rotacional de la Tierra igualar al periodo de revolución de la Luna. La Luna entonces se convertirá en un satélite sincrónico, apareciendo en el cielo como un objeto fijo visible sólo para aquellos observadores en el lado de la Tierra que encare a la Luna. También queremos encontrar cuánto le tomaría a la Tierra completar una rotación cuando dichos dos periodos sean iguales.

Dos sistemas de coordenadas rectangulares de mano derecha son adoptados como marcos de referencia. Los terceros ejes coordenados de estos dos sistemas son paralelos entre sí y normales al plano orbital de la Luna.

- (I) El primer marco, llamado marco  $CM$ , es un marco inercial con su origen localizado en el centro de masa  $C$  del sistema Tierra-Luna.
- (II) El segundo marco, llamado marco  $xyz$ , tiene su origen fijado en el centro de la Tierra. Su eje  $z$  coincide con el eje de rotación de la Tierra. Su eje  $x$  está a lo largo de la línea que conecta los centros de la Luna y de la Tierra, y apunta en la dirección del vector unitario  $\hat{r}$  como se muestra en la Fig. 1a. La Luna siempre se mantiene en el eje  $x$  negativo en este marco.

Note que las distancias en la Fig. 1a no están dibujadas a escala. Las flechas curvadas muestran las direcciones de la rotación de la Tierra y la revolución de la Luna. La distancia Tierra-Luna está denotada por  $r$ .



Se dan los siguientes datos:

- (a) En el presente, la distancia entre la Tierra y la Luna es  $r_0 = 3.85 \times 10^8$  m e incrementa a un ritmo de 0.038 m por año.
- (b) El periodo de revolución de la Luna es actualmente  $T_M = 27.322$  das.
- (c) La masa de la Luna es  $M = 7.35 \times 10^{22}$  kg.
- (d) El radio de la Luna es  $R_M = 1.74 \times 10^6$  m.
- (e) El periodo de rotación de la Tierra es actualmente  $T_E = 23.933$  horas.
- (f) La masa de la Tierra es  $M_E = 5.97 \times 10^{24}$  kg.
- (g) El radio de la Tierra es  $R_E = 6.37 \times 10^6$  m.
- (h) La constante de gravitación universal es  $G = 6.67259 \times 10^{-11}$  N m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>.

Puede hacer las siguientes suposiciones al responder las preguntas:

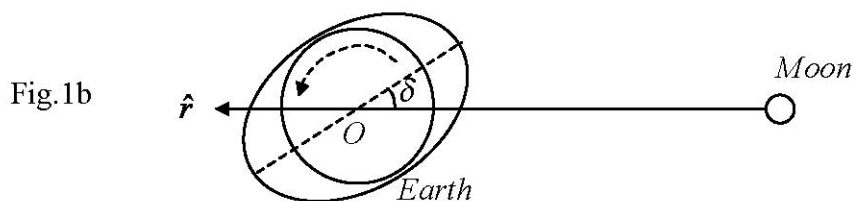
- (i) El sistema Tierra-Luna está aislado del resto del universo.
- (ii) La órbita de la Luna alrededor de la Tierra es circular.
- (iii) El eje de rotación de la Tierra es perpendicular al plano orbital de la Luna.
- (iv) Si la Luna está ausente y la Tierra no rota, la distribución de masa en la Tierra es esféricamente simétrica y el radio de la Tierra es  $R_E$ .
- (v) Tanto para la Tierra como para la Luna, el momento de inercia  $I$  en torno a cualquier eje que pase por su centro es el de una esfera uniforme con respectiva masa  $M$  y radio  $R$ , i.e.  $I = \frac{2}{5}MR^2$ .

Responda las siguientes preguntas:

- (1) Con el respecto al centro de masa  $C$ , ¿cuál el valor actual del momento angular total  $L$  del sistema Tierra-Luna?
- (2) Cuando el periodo de rotación de la Tierra y el periodo de revolución de la Luna se vuelvan iguales, ¿cuál será la duración de un rotación de la Tierra? Denote su respuesta como  $T$  y exprésela en unidades del día presente. Sólo una solución aproximada es requerida, por lo que puede usar métodos iterativos.
- (3) Considere que la Tierra es una esfera sólida giratoria cubierta con una capa superficial de agua, y asuma que mientras la Luna se mueve alrededor de la Tierra el agua permanece estacionaria en el marco  $xyz$ . En el modelo, las fuerzas de fricción entre la esfera sólida giratoria y la capa de agua son tomadas en cuenta. Mientras más rápido gire la Tierra se asume que arrastrará mareas lunares de modo que la línea que conecta los abultamientos de las mareas forma un ángulo  $\delta$  con el eje  $x$ , como se muestra en la Fig. 1b. Consecuentemente, las fuerzas de marea lunares actuando sobre la Tierra ejercerán una torca  $\Gamma$  en torno a  $O$  para ralentizar la rotación de la Tierra.

Se asume que el ángulo  $\delta$  es constante e independiente de la distancia Tierra-Luna  $r$  hasta que desaparece cuando la revolución de la Luna es sincrónica con la rotación de la Tierra de modo que las fuerzas de fricción ya no existan. La torca  $\Gamma$  por lo tanto disminuye con la distancia Tierra-Luna y es proporcional a  $\frac{1}{r^6}$ .

De acuerdo con este modelo, ¿cuándo tendrán la rotación de la Tierra y la revolución de la Luna el mismo periodo? Denote su respuesta como  $t_f$  y exprésela en unidades del año presente.



Las siguientes fórmulas matemáticas pueden ser útiles al responder las preguntas:

(M1) Para  $0 \leq s \leq r$  y  $x = \cos \theta$ :

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + s^2 + 2rx}} \approx \left( \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} + \frac{3x^2 - s^2}{2r^3} + \dots \right)$$

(M2) Si  $a \neq 0$  y  $\frac{d\omega}{dt} = b\omega^{1-a}$ , entonces  $\omega^a(t') - \omega^a(t) = (t' - t)ab$

## Problema 2: Movimiento de un dipolo eléctrico en un campo magnético

Bajo la presencia de un campo magnético constante  $\vec{B}$ , el movimiento traslacional de un sistema de cargas eléctricas está acoplado con su movimiento rotacional. Como resultado, las leyes de conservación para el *momento* y la *componente del momento angular* en la dirección de  $\vec{B}$  son modificadas de su forma usual. Eso se ilustra en este problema al considerar el movimiento de un **dipolo eléctrico** hecho de dos partículas de igual masa  $m$  que llevan cargas  $q$  y  $-q$  respectivamente ( $q > 0$ ). Las dos partículas están conectadas por una vara rígida aislante de longitud  $l$  cuya masa puede ser despreciada. Sea  $\vec{r}_1$  el vector de posición de la partícula con carga  $q$ ,  $\vec{r}_2$  el de la otra partícula, y  $\vec{l} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ . Denote por  $\vec{\omega}$  a la *velocidad angular* de rotación en torno al centro de masa del dipolo. Denote por  $\vec{r}_{CM}$  y  $\vec{v}_{CM}$  a los vectores de *posición* y *velocidad* del *centro de masa* respectivamente. *Los efectos relativistas y los efectos de radiación electromagnética pueden ser despreciados.*

Note que la *fuerza magnética* que actúa sobre una partícula de carga  $q$  y velocidad  $\vec{v}$  es  $q\vec{v} \times \vec{B}$ , donde el producto cruz de dos vectores  $\vec{A}_1 \times \vec{A}_2$  está definido, en términos de las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  de los vectores, por

$$\begin{aligned}(\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)_x &= (\vec{A}_1)_y(\vec{A}_2)_z - (\vec{A}_1)_z(\vec{A}_2)_y \\(\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)_y &= (\vec{A}_1)_z(\vec{A}_2)_x - (\vec{A}_1)_x(\vec{A}_2)_z \\(\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)_z &= (\vec{A}_1)_x(\vec{A}_2)_y - (\vec{A}_1)_y(\vec{A}_2)_x\end{aligned}$$

### (1) Leyes de conservación

- Escriba las *ecuaciones de movimiento* del *centro de masa* del dipolo y para la *rotación en torno* al centro de masa calculando la fuerza total y la torca total respecto al centro de masa que actúan en el dipolo.
- A partir de la ecuación de movimiento del centro de masa, obtenga la *forma modificada* de la ley de conservación del *momento total*. Denote la correspondiente cantidad conservada modificada como  $\vec{P}$ . Escriba una *expresión* en términos de  $\vec{v}_{CM}$  y  $\vec{\omega}$  para la *energía* conservada  $E$ .
- El momento angular consiste en dos partes. Una parte es debida al movimiento del centro de masa y la otra se debe a la rotación en torno al centro de masa. De la forma modificada de la ley de conservación del momento total y de la ecuación de movimiento de rotación en torno al centro de masa, demuestre que la cantidad  $J$  definida por  $J = (\vec{r}_{CM} \times \vec{P} + I\vec{\omega}) \cdot \vec{B}$  **se conserva**.

Note que

$$\begin{aligned}\vec{A}_1 \times \vec{A}_2 &= -\vec{A}_2 \times \vec{A}_1 \\ \vec{A}_1 \cdot (\vec{A}_2 \times \vec{A}_3) &= (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2) \cdot \vec{A}_3 \\ \vec{A}_1 \times (\vec{A}_2 \times \vec{A}_3) &= (\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_3)\vec{A}_2 - (\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2)\vec{A}_3\end{aligned}$$

para cualesquiera tres vectores  $\vec{A}_1$ ,  $\vec{A}_2$  y  $\vec{A}_3$ . Aplicaciones repetidas de las primeras dos fórmulas anteriores puede ser útil para encontrar la ley de conservación en cuestión.

En lo que sigue, sea  $\vec{B}$  en la dirección  $z$ .

### (2) Movimiento en el plano perpendicular a $\vec{B}$

Suponga que inicialmente el centro de masa del *dipolo* está *en reposo* en el origen,  $\vec{l}$  apunta en la dirección  $x$  y la *velocidad angular inicial* del dipolo es  $\omega_0 \hat{z}$  ( $\hat{z}$  es el vector unitario en la dirección  $z$ ).

- Si la magnitud de  $\omega_0$  es menor que un *valor crítico*  $\omega_c$ , el dipolo no logrará una *vuelta completa* respecto a su centro de masa. Encuentre  $\omega_c$ .
- Para una  $\omega_0 > 0$  general, ¿cuál es la *máxima distancia*  $d_m$  en la dirección  $x$  que el centro de masa puede alcanzar?
- ¿Cuál es la *tensión* en la varilla? Exprésela como función de la velocidad angular  $\omega$ .

### Problema 3: Vibraciones térmicas de los átomos superficiales

Esta pregunta considera las vibraciones térmicas de los átomos superficiales en un cristal de metal elemental con una estructura cristalina cúbica centrada en las caras (*fcc*). La celda cúbica unitaria de una red *fcc* consiste en un átomo en cada esquina y un átomo en el centro de cada cara de la celda cúbica, como se muestra en la Fig. 3a. Para el cristal en consideración, usamos  $(a, 0, 0)$ ,  $(0, a, 0)$  y  $(0, 0, a)$  para representar las posiciones de los tres átomos en los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  de su celda. La constante de la red  $a$  es igual a  $3.92 \text{ \AA}$  (i.e. la longitud de cada arista del cubo es  $3.92 \text{ \AA}$ ).

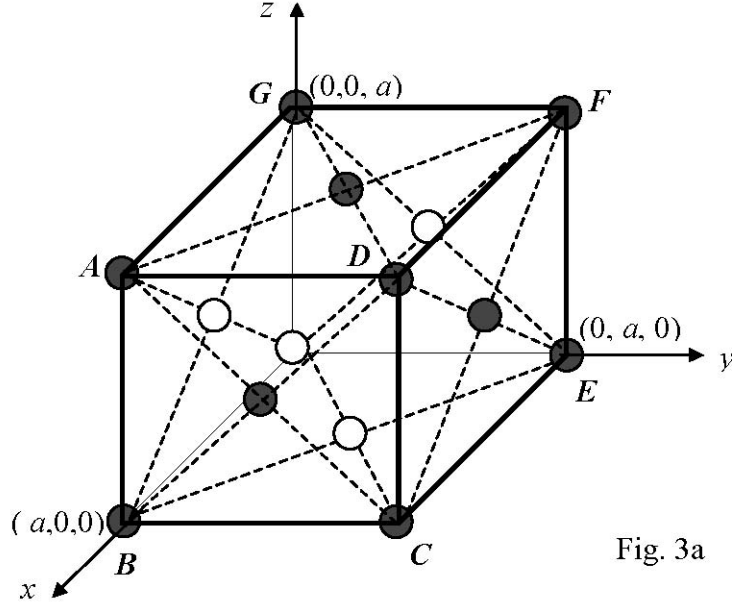


Fig. 3a

- (1) El cristal está cortado de tal modo que el plano que contiene a ABCD se convierte en una superficie de frontera y es elegido para realizar experimentos de difracción de electrones de baja energía. Un rayo colimado de electrones con energía cinética de  $64.0 \text{ eV}$  incide en este plano superficial con un ángulo de incidencia  $\phi_0$  de  $15.0^\circ$ . Note que  $\phi_0$  es el ángulo entre el rayo de electrones incidente y la normal del plano superficial. El plano que contiene a  $\overline{AC}$  y a la normal del plano superficial es el plano de incidencia. Por simplicidad, asumiremos que todos los electrones incidentes son retrodispersados sólo por los átomos superficiales en la capa de hasta arriba.
  - (a) ¿Cuál es la longitud de onda de las ondas materiales de los electrones incidentes?
  - (b) Si un detector es montado para detectar a los electrones que no dejan el plano de incidencia tras ser difractados, ¿a qué ángulos con la normal de la superficie serán observables estos electrones difractados?
- (2) Asuma que las vibraciones térmicas de los átomos superficiales son armónicas simples. La amplitud de la vibración aumenta conforme la temperatura se eleva. La difracción de electrones de baja energía provee un modo de medir la amplitud de vibración promedio. La intensidad  $I$  del rayo difractado es proporcional al número de electrones dispersados por segundo. La relación entre la intensidad  $I$  y el desplazamiento  $\vec{u}(t)$  de los átomos superficiales está dada por

$$I = I_0 \exp \left\{ - \left\langle \left[ (\vec{K}' - \vec{K}) \cdot \vec{u} \right]^2 \right\rangle \right\} \quad (1)$$

En la ecuación (1),  $I$  e  $I_0$  son las intensidades a temperatura  $T$  y al cero absoluto, respectivamente.  $\vec{K}$  y  $\vec{K}'$  son los vectores de onda de los electrones incidentes y de los electrones difractados, respectivamente. Los paréntesis de ángulo  $\langle \rangle$  son usados para denotar un promedio sobre el tiempo. Note que la relación entre el vector de onda  $\vec{K}$  y el momento  $\vec{p}$  de una partícula es  $\vec{K} = 2\pi\vec{p}/h$ , donde  $h$  es la constante de Planck.

Para medir las amplitudes de vibración de los átomos superficiales de un cristal metálico, un rayo colimado de electrones con energía cinética de 64.0 eV incide en la superficie del cristal con un ángulo de incidencia de 15.0°. El detector está montado para medir a los electrones reflejados especularmente. Sólo los electrones dispersados elásticamente son detectados. Una gráfica de  $\ln(I/I_0)$  contra la temperatura  $T$  se muestra en la Fig. 3b.

Asuma que la energía total de un átomo que vibra en la dirección de la normal a la superficie  $\hat{x}$  está dada por  $k_B T$ , donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann.

- Calcule la *frecuencia de vibración* en la dirección de la normal de la superficie de los átomos superficiales.
- Calcule la *raíz cuadrada media del desplazamiento*, i.e. el valor de  $\langle u_x^2 \rangle^{1/2}$ , en la dirección de la normal de la superficie para los átomos superficiales a 300 K.

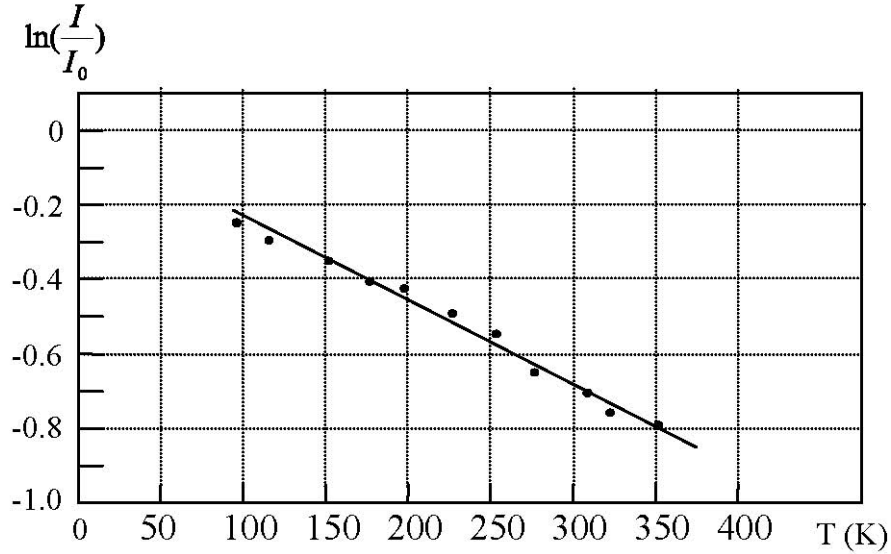


Fig. 3b

Los siguientes datos son dados:

Peso atómico del metal  $M = 195.1$

Constante de Boltzmann  $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$  J/K

Masa del electrón  $= 9.11 \times 10^{-31}$  kg

Carga del electrón  $= 1.60 \times 10^{-19}$  C

Constante de Planck  $= h = 6.63 \times 10^{-34}$  Js