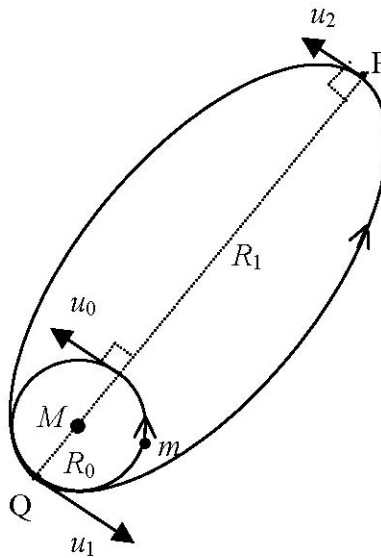


## 4 Olimpiada Asiática de Física

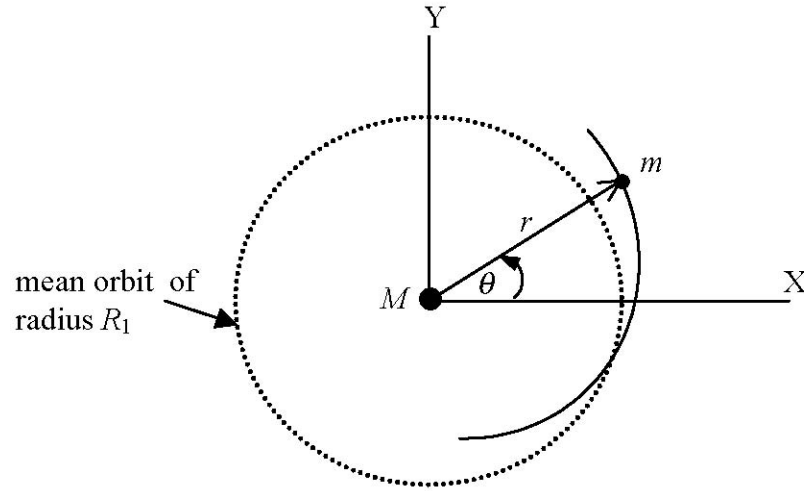
Bangkok, Tailandia 2003

### Problema 1: Transferencia de órbitas satelitales

En un futuro cercano podríamos formar parte en el lanzamiento de un satélite que, desde el punto de vista de la física, requiera sólo del uso de mecánica simple.



- Un satélite de masa  $m$  está dando vueltas alrededor de la Tierra de masa  $M$  en una órbita circular de radio  $R_0$ . ¿Cuál es la velocidad  $u_0$  de la masa  $m$  en términos de  $M$ ,  $R_0$  y la constante de gravitación universal  $G$ ?  
(1.0 puntos)
- Hemos de poner a este satélite en una trayectoria que lo lleve al punto P a una distancia  $R_1$  del centro de la Tierra incrementando (casi instantáneamente) su velocidad en el punto Q de  $u_0$  a  $u_1$ . ¿Cuál es el valor de  $u_1$  en términos de  $u_0$ ,  $R_0$  y  $R_1$ ?  
(2.0 puntos)
- Deduzca el mínimo valor de  $u_1$  en términos de  $u_0$  que le permita al satélite dejar la superficie de la Tierra completamente.  
(1.0 puntos)
- (Haciendo referencia a la parte b.) ¿Cuál es la velocidad  $u_2$  del satélite en el punto P en términos de  $u_0$ ,  $R_0$  y  $R_1$ ?  
(1.0 puntos)
- Ahora, queremos cambiar la órbita del satélite en el punto P a una órbita circular de radio  $R_1$  incrementando el valor de  $u_2$  (casi instantáneamente) a  $u_3$ . ¿Cuál es la magnitud de  $u_3$  en términos de  $u_2$ ,  $R_0$  y  $R_1$ ?  
(1.0 puntos)



- f) Si el satélite es ligero e instantáneamente perturbado en la dirección radial para que se desvíe de su órbita previamente perfectamente circular de radio  $R_1$ , encuentre el periodo de oscilación  $T$  de  $r$  en torno a la distancia media  $R_1$ . (3.0 puntos)

**Sugerencia:** Los estudiantes pueden hacer uso (si es necesario) de la ecuación de movimiento del satélite en órbita:

$$m \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 r \right] = -G \frac{Mm}{r^2} \quad (1)$$

y la conservación de momento angular:

$$mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const.} \quad (2)$$

- g) Dé un esbozo aproximado de la órbita perturbada completa junto con la órbita sin perturbar. (1.0 puntos)

## Problema 2: Giroscopio óptico

En 1913 Georges Sagnac (1869-1926) consideró el uso de un resonador de anillo para buscar el rumbo del éter relativo al marco de referencia giratorio. Sin embargo, como sucede a menudo, sus resultados terminaron siendo útiles en formas que el mismo Sagnac jamás hubiera soñado. Una de esas aplicaciones es el Giroscopio de Fibra Óptica (FOG) que está basado en un fenómeno simple, observado por primera vez por Sagnac. La física esencial asociada con el efecto Sagnac se debe al cambio de fase causado por dos rayos de luz coherentes mandados alrededor del del anillo giratorio de fibra óptica en direcciones opuestas. Este cambio de fase también es usado para determinar la velocidad angular del anillo.

Como se muestra en el diagrama esquemático de la Figura 1, una onda de luz entre en un camino circular de fibra óptica de radio  $R$  en el punto P en una plataforma giratoria con velocidad angular constante  $\Omega$ , en la dirección horaria. Aquí la onda de luz se parte en dos ondas que viajan en direcciones opuestas, horaria (CW) y contrahoraria (CCW), a través del anillo. El índice de refracción del material de la fibra óptica es  $\mu$ . Asuma que la luz que viaja dentro del cable de fibra óptica es un suave camino circular de radio  $R$ .

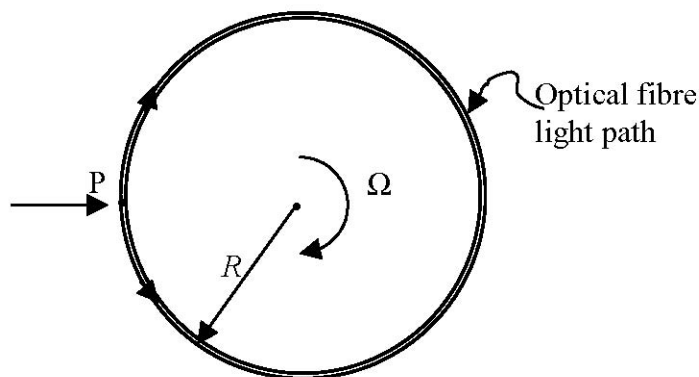
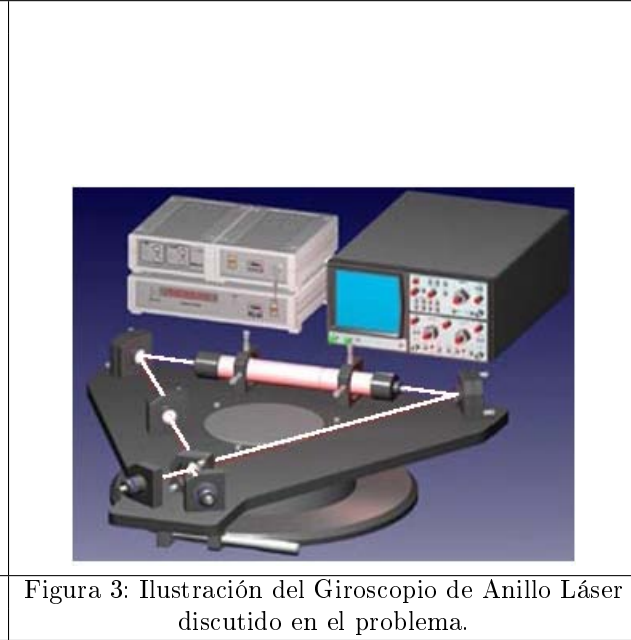
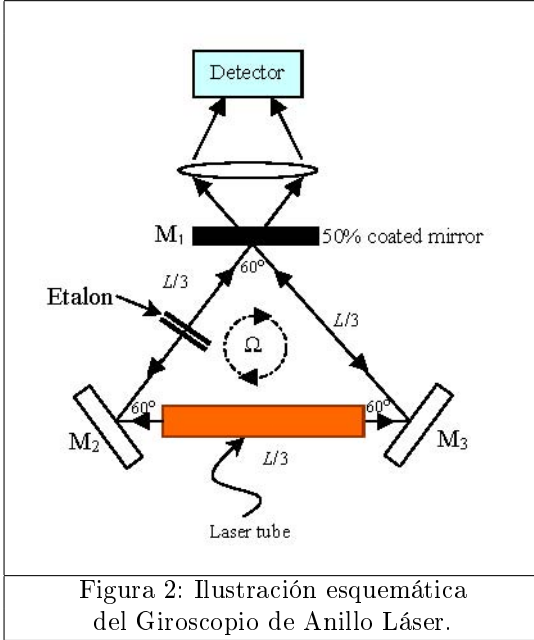


Figura 1:

- Prácticamente, la velocidad tangencial es mucho menor que la velocidad de la luz tal que  $(R\Omega)^2 \ll c^2$ . Encuentre la diferencia de tiempos  $\Delta t = t^+ - t^-$  donde  $t^+$  y  $t^-$  denotan el tiempo de tránsito de los viajes redondos de los rayos CW y CCW, respectivamente. Dé su respuesta en términos del área  $A$  encerrada por el anillo. (2.0 puntos)
- Encuentre la diferencia de caminos ópticos  $\Delta L$  cuando los rayos CW y CCW completan un viaje redondo dentro del anillo giratorio. (2.0 puntos)
- Para una fibra óptica circular de radio  $R = 1$  m, ¿cuál es el máximo valor de  $\Delta L$  para la rotación de la Tierra? Dado  $\mu = 1.5$ . (1.0 puntos)
- En la parte b), la medición pudo ser amplificada incrementando el número de vueltas en la espira de fibra óptica,  $N$ . Encuentre la diferencia de fase  $\Delta\theta$  cuando las luces completan los recorridos. (1.0 puntos)

El segundo esquema del Giroscopio Óptico es el Giroscopio de Anillo Láser (RLG). Esto pudo lograrse con la inclusión de una cavidad de láseres activos en un anillo triangular equilátero de longitud total  $L$ , como se muestra en la Figura 2. El láser aquí generará dos fuentes de luz coherente amplificada propagándose en direcciones opuestas. Para mantener la oscilación láser en este resonador de anillo triangular, el perímetro del anillo debe ser un múltiplo entero de la longitud de onda  $\lambda$ . El etalón, una componente adicional insertada en el anillo, es capaz de crear pérdidas de frecuencia selectivas en el resonador de anillo, de tal modo que los modos indeseados puedan ser amortiguados y suprimidos.



- e) Encuentre la diferencia de tiempos de tránsito de en los sentidos horario y contrahorario,  $\Delta t$ , para el caso del anillo triangular mostrado en la Figura 2. Dé su respuesta en términos de  $\Omega$  y del área  $A$  encerrada por el anillo. Muestre que el resultado es el mismo que para el anillo circular. (2.0 puntos)
- f) Si el anillo está girando con velocidad angular  $\Omega$  como se muestra en la Figura 2, habrá una diferencia de frecuencias entre las mediciones de CW y CCW. ¿Cuál es la frecuencia de pulso observada,  $\Delta \nu$ , entre los rayos CW y CCW en términos de  $L$ ,  $\Omega$  y  $\lambda$ . (2.0 puntos)

### Problema 3: Lentes de plasma

La física de intensos rayos de partículas tiene un gran impacto no sólo en la investigación básica, sino también en aplicaciones dentro de la medicina y la industria. La lente de plasma es un dispositivo usado para proveer un ultra-fuerte enfoque final al final de los colisionadores lineales. Para apreciar las posibilidades de las lentes de plasma, es bastante natural compararlas con las usuales lentes magnéticas y electrostáticas. En las lentes magnéticas, la capacidad de enfoque es proporcional al gradiente de campo magnético. El límite superior práctico de las lentes de cuadrupolo está en el orden de los  $10^2$  T/m, mientras que para las lentes de plasma con una densidad de  $10^{17}$  cm $^{-3}$ , su capacidad de enfoque es equivalente a la de un gradiente de campo magnético de  $3 \times 10^6$  T/m (alrededor de cuatro órdenes de magnitud más que la de los lentes de cuadrupolo magnético).

En lo que sigue, ilustraremos por qué los intensos rayos de partículas relativistas podrían producir rayos con autoenfoque y no se vuelan en pedazos por el espacio libre.

- a) Considere un largo y cilíndrico rayo de electrones con densidad de número uniforme  $n$  y velocidad promedio  $v$  (ambas cantidades en el marco de referencia del laboratorio). Encuentre una expresión para el campo eléctrico en un punto a una distancia  $r$  del eje central del rayo usando electromagnetismo clásico. (1.0 puntos)
- b) Encuentre una expresión para el campo magnético en el mismo punto que en a). (2.0 puntos)
- c) ¿Cuál es la fuerza neta hacia afuera sobre un electrón del rayo de electrones que pasa por ese punto? (1.0 puntos)
- d) Asumiendo que la expresión obtenida en c) es aplicable a velocidades relativistas, ¿cuál es será la fuerza sobre el electrón conforme  $v$  se acerca a la velocidad de la luz  $c$  (donde  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ )? (1.0 puntos)
- e) Si el rayo de electrones de radio  $R$  entra al plasma con densidad uniforme  $n_0 < n$  (el plasma es un gas ionizado de iones y electrones con igual densidad de carga), ¿cuál será la fuerza neta sobre el *ión de plasma estacionario* a una distancia  $r'$  fuera del rayo de electrones mucho después de que el rayo haya entrado al plasma? Puede asumir que la densidad de iones de plasma permanece constante y que se mantiene la simetría cilíndrica. (3.0 puntos)
- f) Después de un tiempo lo suficientemente largo, ¿cuál será la fuerza neta sobre un electrón a una distancia  $r$  del eje central del rayo en el plasma, asumiendo que  $v \rightarrow c$  y dado que la densidad de iones de plasma permanece constante y la simetría cilíndrica se mantiene? (2.0 puntos)