

# 9 Olimpiada Asiática de Física

Ulaanbaatar, Mongolia 2008

## Problema 1: Ceremonia del té y física de burbujas

La ceremonia del té es tradicional en Asia. Uno de los pasos importantes en la preparación del té es la ebullición del agua fresca cuando las burbujas aparecen dentro. Las burbujas son conocidas en la vida diaria y ocupan un rol importante en la física, química, medicina y tecnología. No obstante, su comportamiento es a menudo sorprendente e inesperado, y en muchos casos, todavía no comprendido.

A temperatura ambiente, el agua pura está saturada con gas. Con el incremento de temperatura, la presión de exceso del gas disuelto  $P_{ab}$  aumenta, el aire disuelto es liberado y las burbujas de aire (**ABs**) aparecen en el fondo y en las paredes de la tetera (Figura 2). Para el aire puro la humectabilidad es suficiente y una AB representa una esfera truncada de radio  $R_{ab}$  y con base sin mojar de radio  $r_{ab} \ll R_{ab}$ . Con más calentamiento las ABs se expanden y tras alcanzar ciertos tamaños pueden desprenderse del fondo (Figura 3), ascender hacia la superficie del agua y reventar ahí. Las burbujas de vapor (**VBs**) aparecen cuando la temperatura del agua en el fondo alcanza un valor crítico  $T_w \approx T_{crit} = 100^\circ\text{C}$  a la cual la presión del vapor saturado excede a la presión externa. La producción de vapor se incrementa diez veces, las VBs expanden y se despegan del fondo. Las VB pueden considerarse estar hechas sólo de vapor. Si el agua es calentada suficientemente, la VB ascendientes continúan hinchándose, alcanzar la superficie y reventar. De lo contrario, el agua no se calienta lo suficiente en las capas superiores y existe un fuerte gradiente vertical de temperatura. Alcanzando las capas relativamente frías, las VB se colapsan en el volumen del agua (Figura 4). Esto causa la desgasificación inducida - fuertes oscilaciones y un considerable aumento de gas disuelto es liberado en forma de burbujas de aire microscópicas (**MAB**). Esto puede generar vibraciones ultrasónicas.

Las principales etapas de la evolución de las burbujas durante el proceso de ebullición son:

- la aparición y crecimiento de ABs en el fondo y las paredes, su transmutación en VBs;
- la separación y elevación de VBs, su desaparición en el volumen del agua o en la superficie;
- la aparición de MABs en el volumen del agua y su ascenso a la superficie.

Esta descripción teórica concuerda muy bien con los experimentos modernos. Particularmente, un interesante experimento de análisis de ruido (**NAE**, Universidad Estatal de los Urales, Ekaterinburg) para el agua hirviendo fue llevado a cabo. Micrófonos altamente sensibles conectados a amplificadores de banda ancha y llevados a una tetera eléctrica han detectado tres principales orígenes de ruidos:

1. Desprendimientos de ABs del fondo antes de la ebullición (generan oscilaciones con  $\nu_1 \sim 100\text{ Hz}$ );
2. Colapsos de VBs en el volumen del agua (generan oscilaciones con  $\nu_1 \sim 1\text{ kHz}$ );
3. Apariciones de MABs bajo la superficie del agua (generan oscilaciones con  $\nu_1 \sim 35\text{ kHz}$  a  $60\text{ kHz}$ ).

## Sugerencias:

- 1) Es bien sabido que una pequeña burbuja asciende a través de un camino rectilíneo y un flujo laminar es observado- el agua fluye fácilmente y por capas (vea la Figura 1). Entonces, la fórmula de Stokes describe la fuerza disipativa para una partícula que se mueve a baja velocidad  $v_{\text{lam}}$ :

$$F_A = 6\pi\eta_w R_b v_{\text{lam}}$$

En contraste con este dibujo, cuando las burbujas relativamente grandes se elevan a la superficie, eso perturba al agua circundante, los huecos de cavitación aparecen detrás y se observa el flujo turbulento (vea la Figura 1). En este caso, parte de la energía cinética de una burbuja ascendiente es transferida al trabajo disipativo.

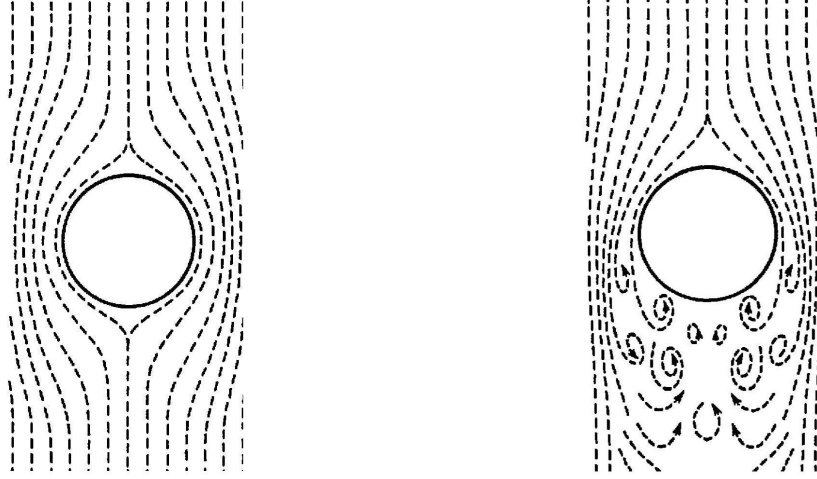


Figura 1: Tipos de flujo laminar y turbulento de las burbujas ascendientes en el agua

- 2) Cuando la superficie del agua tiene una forma convexa (cóncava) aparece una tensión superficial debida a la interacción molecular cerca de la orilla. Esta presión puede ser dada por la fórmula

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R}$$

donde  $\sigma$  es el coeficiente de tensión superficial (unidades de N/m), la fuerza por unidad de longitud en la superficie, y  $R$  es el radio de la superficie curvada.

- 3) Cuando se lidia con procesos cortos con tiempo de duración característico  $t$ , su valor inverso puede ser considerado como una frecuencia característica  $\nu = \frac{1}{t}$ . Use esta definición para calcular las frecuencias de ruidos.

### Datos útiles:

$P_0 = 1.016 \times 10^5 \text{ Pa}$  - presión atmosférica,

$\rho_w = 10^3 \text{ kg/m}^3$  - densidad del agua,

$\rho_{\text{vapor}} = 0.017 \text{ kg/m}^3$  - densidad del vapor a  $T = 293 \text{ K}$  ( $0.596 \text{ kg/m}^3$  a  $T = 373 \text{ K}$ ),

$P_{\text{vapor}} = 0.023 \times 10^5 \text{ Pa}$  - presión del vapor a  $T = 293 \text{ K}$  ( $1.016 \times 10^5 \text{ Pa}$  a  $T = 373 \text{ K}$ ),

$g = 9.81 \text{ m/s}^2$  - aceleración de la gravedad,

$\mu_{\text{air}} = 0.029 \text{ kg/mol}$  - masa molar del aire,

$R = 8.31 \text{ J/K mol}$  - constante universal de los gases,

$\sigma = 0.0725 \text{ N/m}$  - coeficiente de tensión superficial del agua,

$\eta_w = 0.3 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$  - coeficiente de viscosidad del agua

$H = 10 \text{ cm}$  - altura del agua en la tetera



Figura 2: Burbujas en una tetera

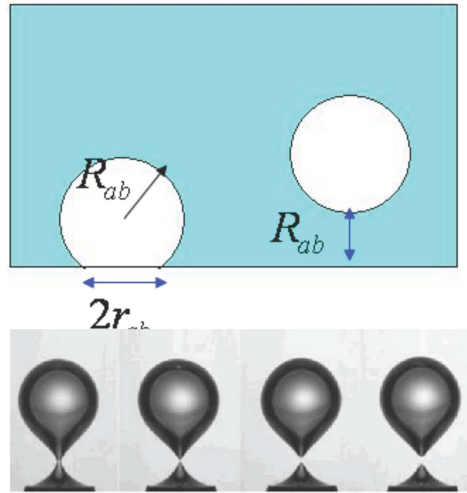


Figura 3: Burbuja de aire desprendiéndose del fondo



Figura 4: Burbuja de vapor colapsando

## Preguntas:

Considere el agua hirviendo en una tetera de vidrio cilíndrica con fondo plano a presión atmosférica normal. El fondo de la tetera se calienta uniformemente y existe un gradiente vertical de temperatura, las burbujas aparecen y evolucionan (Figura 2).

- Q1.** Escriba la condición de presión del crecimiento de una AB en el volumen del agua a una altura  $h < H$ , donde  $H$  es el nivel de la superficie del agua en la tetera. Tome en cuenta la desigualdad  $2\pi\sigma r_{ab} \gg P_{\text{ext}}\pi r_{ab}^2$ .  
[En términos de  $P_{ab}$ ,  $P_0$ ,  $R_{ab}$ ,  $\rho_w$ ,  $g$ ,  $\sigma$ ,  $h$ ,  $H$ ]. (1.0 puntos)
- Q2.** Escriba para una AB la condición de desprendimiento del fondo de la tetera (Figura 3). Tome en cuenta la relación  $r_{ab} \ll R_{ab}$ . [En términos de  $r_{ab}$ ,  $R_{ab}$ ,  $\rho_w$ ,  $\sigma$ ]. (1.5 puntos)
- Q3.** Considere una AB con radio  $R_b$  en el fondo de la tetera. Conforme el agua es hervida, la burbuja se satura de vapor y amplía su radio. Escriba el cociente  $\xi = m_{\text{air}}/m_{\text{vapor}}$  de las masas de aire y de vapor saturado dentro de la burbuja a una temperatura dada  $T$ . Calcule el cociente a temperatura ambiente  $T = 20^\circ\text{C}$  ( $R_b = 0.5\text{ mm}$ ) y al punto de ebullición  $T = 100^\circ\text{C}$  ( $R_b = 1\text{ mm}$ ).  
[En términos de  $\mu_{\text{air}}$ ,  $T$ ,  $P_0$ ,  $P_{\text{vapor}}$ ,  $R_b$ ,  $\rho_w$ ,  $\rho_{\text{vapor}}$ ,  $\sigma$ ,  $H$ ]. (1.5 puntos)
- Q4.** Usando los datos del NAE y la ley de Newton estime el radio de la AB despegada del fondo y elevada una distancia  $R_{ab}$  (Figura 3). Asuma que la masa agregada (tomando en cuenta la capa circundante de agua) de la AB es la mitad de la burbuja de agua análoga. (1.0 puntos)
- Q5.** Escriba el radio de la base de la AB justo antes del ascenso, cuando el “cuello” que la conecta es muy angosto (vea la Figura 3). [En términos de  $R_{ab}$ ,  $\rho_w$ ,  $\sigma$ ]. Calcúlelo usando el radio encontrado en Q4. (1.5 puntos)
- Q6.** Usando los datos del NAE estime el radio de una VB que colapsa (Figura 4) asumiendo que la presión radial es aproximadamente 3 kPa durante el proceso. (1.2 puntos)
- Q7.** Usando el resultado anterior para la VB, calcule el radio de la MAB producida durante la desgasificación inducida. (0.5 puntos)
- Q8.** Escriba la velocidad del ascenso de una AB típica usando la ley de Stokes de un flujo laminar.  
[En términos de  $R_{ab}$ ,  $\rho_w$ ,  $\eta_w$ ]. Estime el tiempo del ascenso para  $H = 10\text{ cm}$ . (0.6 puntos)
- Q9.** Escriba la velocidad promedio de elevación de una VB con un tipo de flujo turbulento.  
[En términos de  $R_{ab}$ ,  $\rho_w$ ,  $\eta_w$ ]. Estime el tiempo del ascenso para  $H = 10\text{ cm}$ . (1.2 puntos)

## Problema 2: Cristal iónico, Potencial de Yukawa y Principio de Pauli

Los átomos de muchos elementos químicos poseen muy baja energía de ionización y fácilmente pierden sus electrones externos. Vice versa, los átomos de otros elementos aceptan fácilmente los electrones. Llevados en un volumen, estos iones positivos y negativos pueden combinarse en estructuras iónicas estables. Muchos sólidos exhiben una estructura cristalina, en la que los átomos están acomodados en patrones extremadamente regulares y periódicos. En un cristal ideal la misma unidad estructural básica es repetida a lo largo del espacio.

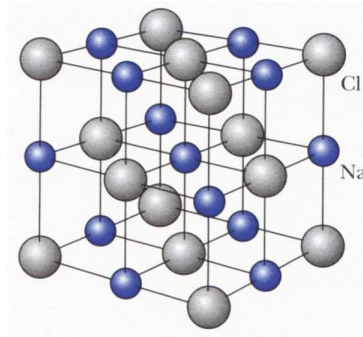


Figura 1: La red cúbica centrada en las caras del cloruro de sodio (NaCl). El espaciado de la red entre los centros atómicos es constante y dado por  $r_0$ .

La principal contribución a la energía de enlace de un cristal iónico está dada por la energía potencial electrostática de los iones.

La interacción eléctrica que actúa entre dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  separadas una distancia  $R$  está bien definida por el potencial de Coulomb:

$$V_C(R) = k \frac{q_1 q_2}{R}$$

donde  $k = 1/4\pi\epsilon_0 = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$  es la constante de Coulomb. Una fuerza negativa implica una fuerza atractiva. La fuerza se dirige a lo largo de la línea que une a las dos cargas. Para el caso de los cristales de NaCl ambos tipos de iones tienen la carga unitaria  $\pm e$  y uno también debería tomar en cuenta a muchos otros vecinos que actúan sobre el ion elegido. Tomando en cuenta a todos los iones positivos y negativos en un cristal de dimensiones infinitas resulta en la energía potencial **atractiva**  $V_{\text{att}}(r) = \alpha V_C(r)$  donde  $r$  es la distancia entre los vecinos más cercanos y  $\alpha = 1.74756$  es la constante de Madelung [*E. Madelung, Phys. Zs, 19 (1918) p542*] y es usada al determinar la energía de un ion individual en el cristal.

Junto con la energía potencial atractiva debería haber una energía potencial **repulsiva** debida al principio de exclusión de Pauli y la superposición de las capas electrónicas en la red cristalina. En contraste con la parte atractiva de tipo Coulomb, la energía potencial de repulsión es de muy corto rango.

Hay dos diferentes modelos para describir al potencial repulsivo.

**Modelo #1.** Una aproximación razonable al potencial de repulsión es una función exponencial:

$$V_{\text{rep1}}(r) = \lambda e^{-r/\rho}, \quad (\lambda, \rho > 0)$$

que describe la interacción de repulsión entre el ion seleccionado y la red cristalina entera. Aquí  $\lambda$  es la fuerza de unión y  $\rho$  es el parámetro de rango.

**Modelo #2.** Otra buena aproximación para el potencial repulsivo es una potencia inversa

$$V_{\text{rep2}}(r) = \frac{b}{r^n}, \quad (b > 0)$$

donde  $b$  es la fuerza de unión y  $n$  es un entero mayor que 2 (el exponente de Born). Estos parámetros toman en cuenta la repulsión con cristales enteros.

Obviamente, los parámetros físicos y los potenciales modelados dependen del tipo de red cristalina.

Datos experimentales para la constante de red  $r_0$  y la energía de disociación  $E_{\text{dis}}$  (necesaria para romper la red en iones separados) son dados en la Tabla 1 para algunos cristales iónicos a temperatura y presión normales.

Cristal	$r_0/[\text{nm}]$	$E_{\text{dis}}/[\text{kJ/mol}]$
NaCl	0.282	+764.4
LiF	0.214	+1014.0
RbBr	0.345	+638.8

Tabla 1: Propiedades de los cristales de sales con la estructura del NaCl [C.Kittel, “Introduction to Solid State Physics”, N.Y., Wiley (1976) p.92] (en una mol hay el número de Avogrado de pares de iones o átomos).

## Preguntas:

- Q1.** Escriba la energía potencial de Coulomb  $V_{C0}(r)$  para un ion localizado en el centro de la red cúbica de la Figura 1. Deje que sólo interacte con sus vecinos más cercanos (en una distancia de hasta  $r = \sqrt{3}r_0$ ) de la red cristalina. Encuentre la constante de Madelung  $\alpha_0$  que corresponde a esta aproximación. (1.5 puntos)
- Q2.** Usando el Modelo #1 escriba la energía potencial neta por ion  $V_1(r)$ . Determine su ecuación de equilibrio para  $r = r_0$  y escriba la energía potencial neta  $V_1(r_0)$ . [En términos de  $\alpha$ ,  $r_0$ ,  $\rho$ ]. Use la constante de Madelung exacta  $\alpha$ . (1.5 puntos)
- Q3.** Usando los datos experimentales, estime el parámetro de rango  $\rho$ . Use  $N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ . (2.0 puntos)
- Q4.** Usando el Modelo #2 escriba la energía potencial neta  $V_2(r)$  por ion. Determine su posición de equilibrio  $r = r_0$  y escriba la energía potencial neta  $V_2(r_0)$ . Use la constante de Madelung  $\alpha$ . [En términos de  $\alpha$ ,  $r$ ,  $r_0$ ,  $n$ ]. (2.0 puntos)
- Q5.** Usando los datos experimentales (de la Tabla 1) estime el exponente de Born  $n$  para el NaCl. Estime las proporciones de la interacción de Coulomb y la exclusión de Pauli (la parte repulsiva) en la energía potencial neta del estado de equilibrio. (1.5 puntos)
- Q6.** La energía de ionización (requerida para extraer un electrón del átomo) del átomo de Na es  $+5.14 \text{ eV}$ , la afinidad electrónica (requerida para recibir un electrón en un átomo) del átomo de Cl es  $-3.61 \text{ eV}$ . Estime la energía de enlace total (que mantiene al átomo dentro de la red) por átomo en el cristal de NaCl. El resultado experimental es  $E_{\text{exp}} = -3.28 \text{ eV}$ . [En unidades de eV]. Use la conversión de unidades  $1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$ . (1.5 puntos)

### Problema 3: ¿Cómo se ve un objeto superlumínico?

¿Puede un objeto moverse más rápido que la luz? La respuesta es “No” si el objeto está moviéndose en el vacío. Pero la respuesta puede ser “Sí” si lidiamos con la velocidad de fase de la luz en un medio ópticamente denso con índice de refracción  $n$  ( $n = c/u$ , donde  $u$  es la velocidad de la luz en el medio, y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío).

Decimos que un cuerpo es superlumínico si  $u < v < c$ , donde  $v$  es la velocidad del cuerpo. Uno de los ejemplos bien conocidos de un objeto superlumínico es una partícula cargada que genera radiación de Cherenkov.

A través del problema tratamos con un objeto superlumínico con velocidad constante  $v$  en un medio óptico sin dispersión.  $u$  es la velocidad de la luz en el medio.

Por simplicidad, introducimos esta notación:  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$  y un ángulo  $\theta$  dado por  $\cos \theta = \frac{u}{v}$  y

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{v^2}{u^2} - 1}.$$

#### 1. Partícula radiante superlumínica

Como se muestra en la Figura 1, una partícula radiante se mueve a lo largo del eje  $x$  con velocidad constante  $v$  ( $v > u$ ).

Un observador  $M$  se encuentra a una distancia  $d$  del eje  $x$ .

Escogemos al punto más cercano al observador como el punto  $O$ , el origen del eje  $x$ . El tiempo en el que la partícula realmente pasa por el punto  $x = 0$  se toma como  $t = 0$ .

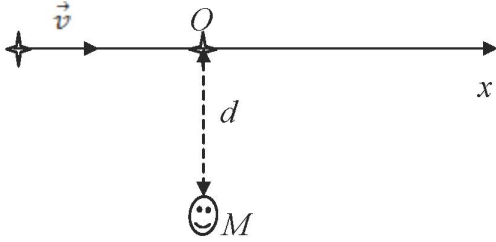


Figura 1:

- Q1.** Suponga que la luz radiada a un tiempo dado  $t'$  es observada al tiempo  $t$ .  
Exprese  $t$  en términos de  $d$ ,  $t'$ ,  $u$  y  $v$ . (1.0 puntos)
- Q2.** Al tiempo  $t = t_0$  el observador ve por primera vez a la partícula en la posición  $x'_0$ . Encuentre la posición aparente  $x'_0$  y el tiempo de observación  $t_0$  de esta primera aparición en términos de  $d$ ,  $v$  y  $\theta$ . (2.0 puntos)
- Q3.** Encuentre la(s) posición(es) aparente(s)  $x'$  de la partícula a cualquier tiempo  $t$ . Escriba su respuesta en términos de  $v$ ,  $\theta$ ,  $t$  y  $t_0$ . (2.0 puntos)
- Q4.** Encuentre la(s) velocidad(es) aparente(s)  $v'(t)$  de la partícula a cualquier tiempo dado  $t$ . Escriba su respuesta en términos de  $v$ ,  $\theta$ ,  $t$  y  $t_0$ . (1.0 puntos)
- Q5.** Encuentre la(s) velocidad(es) aparente(s)  $v'$  de la primera aparición de la partícula. (0.2 puntos)
- Q6.** Encuentre la(s) velocidad(es) aparente(s)  $v'$  de la primera a distancias infinitas del origen  $O$ . Escriba su respuesta en términos de  $v$  y  $u$ . (0.2 puntos)
- Q7.** Esboce la gráfica de la velocidad aparente  $v'$  contra el tiempo  $t$ , indicando claramente los valores asintóticos de la velocidad aparente. (1.0 puntos)
- Q8.** ¿Puede una velocidad aparente exceder la velocidad de la luz en el vacío, i.e.  $v' > c$ ? (0.2 puntos)



## 2. Objeto lineal radiante

Considere un objeto lineal, que radia luz y se mueve a lo largo del eje  $x$ . La longitud del objeto es  $L$  en el marco inercial del objeto.

### A. Movimiento paralelo

En esta sección, asumimos que el objeto lineal radiante se mueve longitudinalmente a lo largo del eje  $x$  como se muestra en la Figura 2.

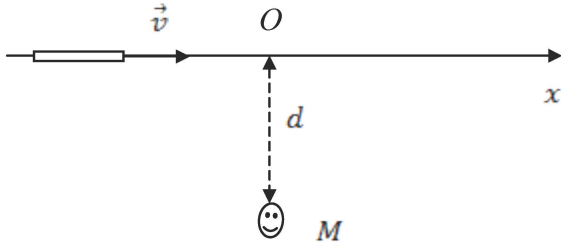


Figura 2:

**Q9.** Determine el intervalo de tiempo de aparición completa del objeto lineal completo desde la primera aparición de su punto frontal. Escriba su respuesta en términos de  $L$ ,  $\gamma$  y  $v$ . (0.3 puntos)

**Q10.** Determine la(s) longitud(es) aparente(s) del objeto en el momento de su aparición completa. Escriba su respuesta en términos de  $d$ ,  $L$ ,  $\theta$  y  $\gamma$ . (0.4 puntos)

### B. Movimiento perpendicular

En esta sección, asumimos que el objeto lineal radiante se mueve perpendicularmente a lo largo del eje  $x$  como se muestra en la Figura 3. Deje que el observador esté localizado en el origen del eje  $x$  ( $d = 0$ ). El objeto es simétrico respecto al eje  $x$ .

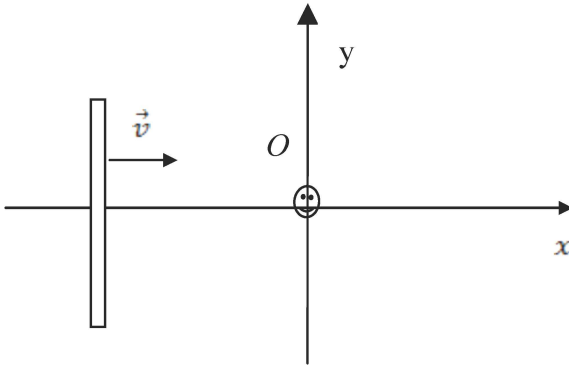


Figura 3:

**Q11.** Demuestre que para un tiempo dado  $t$ , la forma aparente de este objeto es una elipse o parte(s) de una elipse. (0.7 puntos)

**Q12.** Encuentre la posición  $x_C$  del centro de simetría de la elipse a un tiempo dado  $t$  en términos de  $v$ ,  $\theta$  y  $t$ . (0.5 puntos)

**Q13.** Determine las longitudes de los semiejes mayor y menor de la elipse a un tiempo dado  $t$  en términos de  $v$ ,  $\theta$  y  $t$ . (0.5 puntos)