5 Olimpiada Asiática de Física

Hanoi, Vietnam 2004

Problema 1: Medición de masa en estado de ingravidez

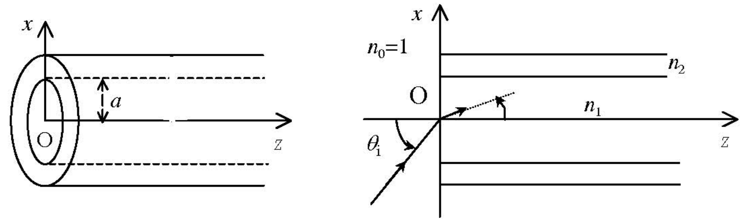
En una nave espacial que orbita la Tierra hay estado de ingravidez, por lo que uno no puede usar instrumentos ordinarios para medir el peso y luego deducir la masa de un astronauta. Skylab 2 y algunas otras naves espaciales están provistas con un Dispositivo de Medición de Masa Corporal que consiste en una silla unida a un extremo de un resorte. El otro extremo del resorte está unido a un punto fijo de la nave espacial. El eje del resorte pasa por el centro de masa de la nave. La constante de fuerza (dureza) del resorte es $k = 605.6\,\mathrm{N/m}$.

1. Cuando la nave está fijada a la plataforma, la silla (sin persona) oscila con periodo $T_0 = 1.28195\,\mathrm{s}$. Calcule la masa m_0 de la silla. **[**2.0 ***puntos*****]**

2. Cuando la nave orbita la Tierra el astronauta se ata a la silla y mide el periodo T' de sus oscilaciones. Obtiene $T' = 2.33044\,\mathrm{s}$, y luego calcula aproximadamente su masa. Siente un poco de duda e intenta encontrar el verdadero valor de su masa. Mide de nuevo el periodo de oscilación de la silla (sin persona) y encuentra $T_0' = 1.27395\,\mathrm{s}$. ¿Cuál es el verdadero valor de la masa del astronauta y la masa de la nave? **[**4.0 ***puntos*****]**

Nota: La masa del resorte es despreciable y el astronauta está flotando.

Problema 2: Fibra óptica



Una fibra óptica consta de un un núcleo cilíndrico de radio a, hecho de un material transparente con índice de refracción que varía gradualmente desde un valor $n = n_1$ en el eje hasta un valor $n = n_2$ (con $1 < n_2 < n_1$) a una distancia a del eje, según la fórmula

$$n = n(x) = n_1\sqrt{1 - \alpha^2 x^2}$$

donde x es la distancia al eje del núcleo y α es una constante. El núcleo está envuelto por un revestimiento hecho de un material con índice de refracción constante n_2.Fuera de la fibra hay aire, de índice de refracción n_0.

Sea Oz el eje de la fibra, con O el centro del extremo de la fibra.

Dados $n_0 = 1.000$; $n_1 = 1.500$; $n_2 = 1.460$, $a = 25\,\mu$m.

1. Un rayo de luz monocromática entre en la fibra en el punto O bajo un ángulo de incidencia θ_i, siendo el plano de incidencia el plano xOz.

   a. Muestre que en cada punto de la trayectoria de la luz dentro de la fibra, el índice de refracción n y el ángulo θ entre el rayo de luz y el eje Oz satisfacen la relación $n\cos\theta = C$ donde C es una constante. Encuentre una expresión para C en términos de n_1 y θ_i. **[**1.0 ***puntos*****]**

   b. Use el resultado encontrado en 1.a. y la identidad trigonométrica $\cos\theta = \left(1 + \tan^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$, donde $\tan\theta = \frac{dx}{dz} = x'$ es la pendiente de la tangente a la trayectoria en el punto (x, z), y obtenga una ecuación para x'. Encuentre la expresión completa para α en términos de n_1, n_2 y a. Diferenciando los dos lados de esta ecuación contra z, encuentre la ecuación para la segunda derivada x''. **[**1.0 ***puntos*****]**

   c. Encuentre la expresión de x como función de z, eso es $x = f(z)$, que satisfaga la ecuación anterior. Esta es la ecuación de la trayectoria de la luz en la fibra. **[**1.0 ***puntos*****]**

   d. Esboce un periodo completo de las trayectorias de los rayos de luz que entran en la fibra bajo dos diferentes ángulos de incidencia θ_i. **[**1.0 ***puntos*****]**

2. La luz se propaga en la fibra óptica.

   a. Encuentre el máximo ángulo de incidencia θ_{iM} bajo el cual el rayo de luz aún pueda propagarse dentro del núcleo de la fibra. **[**1.5 ***puntos*****]**

   b. Determine una expresión de las coordenadas z en las que el rayo de luz cruza el eje Oz para $\theta_i \neq 0$. **[**1.5 ***puntos*****]**

3. La luz es usada para transmitir señales en la forma de pulsos de luz muy cortos (de ancho de pulso despreciable).

   a. Determine el tiempo τ que le toma a la luz viajar desde el punto O al primer punto de intersección con el eje Oz para un ángulo de incidencia $\theta_i \neq 0$ y $\theta_i \leq \theta_{iM}$.
   El cociente entre la coordenada z del primer punto de intersección y τ es llamado velocidad de propagación a lo largo de la fibra. Asuma que esta velocidad varia monótonamente con θ_i. Encuentre esta velocidad (llamada v_M) para $\theta_i = \theta_{iM}$. Encuentre también la velocidad de propagación (llamada v_0) de la luz a lo largo del eje Oz. Compare ambas velocidades. **[**3.25 ***puntos*****]**

   b. El rayo de luz que lleva las señales es un rayo convergente que entra a la fibra por O bajo diferentes ángulos de incidencia θ_i con $0 \leq \theta_i \leq \theta_{iM}$. Calcule la máxima frecuencia de repetición f de los pulsos de las señales, tal que a una distancia $z = 1000$ m dos pulsos consecutivos aún estén separados (eso es, que los pulsos no se traslapen). **[**1.75 ***puntos*****]**

Atención:

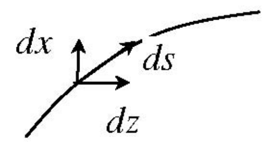
1. Las propiedades ondulatorias de la luz no son consideradas en este problema.

2. Desprecie cualquier dispersión cromática en la fibra.

3. La velocidad de la luz en el vacío es $c = 2.998 \times 10^8$ m/s.

4. Puede utilizar las siguientes fórmulas:

   - La longitud de un pequeño elemento de arco ds en el plano $x\mathrm{O}z$ es $ds = dz\sqrt{1 + \left(\dfrac{dx}{dz}\right)^2}$



   - $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b}\arcsin\tfrac{bx}{a}$
   - $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = -\frac{x\sqrt{a^2 - b^2x^2}}{2b^2} + \frac{a^2\arcsin\tfrac{bx}{a}}{2b^3}$
   - $\arcsin x$ es la función inversa de la función seno. Si valor equivale a el ángulo cuyo seno es x. En otras palabras, si $y = \arcsin x$ entonces $\sin y = x$.

Problema 3: Compresión y expansión de un sistema de dos gases

Un cilindro está dividido en dos componentes separadas por una partición móvil NM. La componente de la izquierda está limitada por el fondo del cilindro y por la partición NM (Figura 1). Esta componente contiene un mol de vapor de agua. El componente de la derecha está limitado por la partición NM y un pistón móvil AB. Esta componente contiene un mol de gas nitrógeno (N_2).

Al principio, los volúmenes y temperaturas de los gases en las dos componentes son iguales. La partición NM es buena conductora de calor. Su capacidad calorífica es muy pequeña y puede despreciarse.

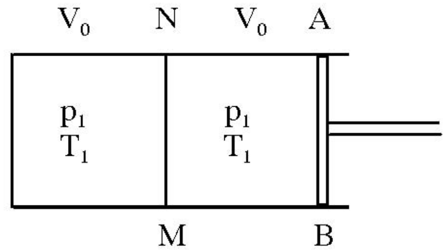


Figura 1:

El volumen específico del agua líquida es despreciable en comparación con el volumen específico del vapor de agua a la misma temperatura.

El calor latente de vaporización L está definido como la cantidad de calor que debe suministrarse a una unidad de masa de la sustancia para convertirla de su estado líquido a su estado de vapor a la misma temperatura. Para el agua, a $T_0 = 373\,\mathrm{K}$, $L = 2250\,\mathrm{kJ/kg}$.

1. Suponga que el pistón y la pared del cilindro son buenos conductores de calor, la partición NM puede deslizarse libremente sin fricción. El estado inicial de los gases se define a continuación:

   Presión $p_1 = 0.5\,\mathrm{atm}$; volumen total $V_1 = 2V_0$; temperatura $T_1 = 373\,\mathrm{K}$.

   El pistón AB lentamente comprime a los gases en proceso isotérmico cuasi-estático (de cuasi-equilibrio) al volumen final $V_F = V_0/4$.

   a. Dibuje la curva $p(V)$, o sea la curva que representa la dependencia de la presión p respecto al volumen total V de ambos gases en el cilindro a temperatura T_1. Calcule las coordenadas de los puntos importantes de la curva. [1.5 ***puntos***]
   Constante de los gases: $R = 8.31\,\mathrm{J/mol\,K}$ o $R = 0.0820\,\mathrm{L\,atm/mol\,K}$; $1\,\mathrm{atm} = 101.3\,\mathrm{kPa}$; Bajo una presión $p_0 = 1\,\mathrm{atm}$ el agua hierve a una temperatura $T_0 = 373\,\mathrm{K}$.

   b. Calcule el trabajo realizado por el pistón el proceso de compresión de gases. [1.0 ***puntos***]
   $\int \frac{dV}{V} = \ln V$

   c. Calcule el calor cedido al exterior en el proceso. [1.5 ***puntos***]

2. Se cumplen todas las condiciones de la parte 1. excepto que ahora hay fricción entre la partición NM y la pared del cilindro de tal modo que NM sólo se desplaza cuando la diferencia de presiones que actúa en sus dos caras alcanza $0.5\,\mathrm{atm}$ o más (asumiendo que los coeficientes de fricción estática y cinética son iguales).

   a. Dibuje la curva $p(V)$ de la presión p en el compartimiento derecho en función del volumen total V de ambos gases en el cilindro a temperatura constante T_1. [1.5 ***puntos***]

   b. Calcule el trabajo realizado por el pistón al comprimir los gases. [0.5 ***puntos***]

   c. Después de que el volumen de los gases alcanza el valor $V_F = V_0/4$, el pistón AB se desplaza lentamente a la derecha y hace un proceso cuasi-estático e isotérmico de expansión de ambas sustancias (agua y nitrógeno) al volumen total inicial $2V_0$. Continúe dibujando en el diagrama de la pregunta 2.a. la curva que representa este proceso. [2.0 ***puntos***]

Sugerencia para 2

Haga una tabla como la que se muestra aquí y úsela para dibujar las curvas requeridas en 2.a. y 2.c.

Estado	Compartimento izquierdo		Compartimento derecho		Volumen	Presión en
	Volumen	Presión	Volumen	Presión	total	el pistón AB
Inicial	V_0	0.5 atm	V_0	0.5 atm	$2V_0$	0.5 atm
2						
3						
.						
.						
.						
.						
.						
Final					$2V_0$	

3. Suponga que la pared y fondo del cilindro y también el pistón son aislantes térmicos, la partición NM está fija y es conductora de calor, y que el estado inicial de los gases es como en 1. El pistón AB se mueve lentamente a la derecha e incrementa el volumen del compartimento derecho hasta que el vapor de agua empieza a condensarse en el compartimento izquierdo.

   a. Calcule el volumen final del compartimento derecho. **[**3.0 ***puntos*****]**

   b. Calcule el trabajo realizado por el gas en esta expansión. **[**1.0 ***puntos*****]**

El cociente de la capacidad calorífica isobárica con la isocórica $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ para el nitrógeno es $\gamma_1 = \frac{7}{5}$ y para el vapor de agua es $\gamma_2 = \frac{8}{6}$.

En el intervalo de temperatura de 353 K a 393 K uno puede usar la siguiente fórmula aproximada:

$$p = p_0 \exp\left[-\frac{\mu L}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right]$$

donde T es la temperatura de ebullición del agua bajo la presión p y μ es su masa molar. p_0, L y T_0 son dadas anteriormente.