

# 39 Olimpiada Internacional de Física

Hanoi, Vietnam 2008

## Problema 1: Mortero de arroz activado por agua

### A. Introducción

El arroz es el principal alimento básico de la mayoría de la gente en Vietnam. Para obtener arroz blanco del arroz con cáscara, uno necesita separar ésta (en un proceso llamado “descascarado”) y separar la capa de salvado (“fresado”). Las partes montañosas de la región norte de Vietnam son abundantes en corrientes de agua, y la gente que vive ahí usa *morteros de arroz activados por agua* en la separación de la capa de salvado. La Figura 1 muestra uno de esos morteros. La Figura 2 muestra cómo funciona.

### B. Diseño y operación

#### 1. Diseño

El mortero de arroz mostrado en la figura tiene las siguientes partes:

*El mortero*, básicamente un contenedor de madera para el arroz.

*La palanca*, que es un tronco de árbol con un extremo grande y un extremo pequeño. Puede rotar alrededor de un eje horizontal. *Un pilón* está unido perpendicularmente a la palanca en el extremo pequeño. La longitud del pilón es tal que toca el arroz en el mortero cuando la palanca está horizontal. El extremo grande de la palanca está tallado hueco para formar una cubeta. La forma de la cubeta es crucial para la operación del mortero.

#### 2. Modos de operación

El mortero tiene dos modos:

*Modo de operación.* En este modo el mortero atraviesa un ciclo de operaciones mostrado en la Figura 2. La función de moler arroz viene del trabajo que es transferido del pilón al arroz durante la etapa f) de la Figura 2. Si, por alguna razón, el pilón nunca toca el arroz, se dice que el mortero no está funcionando.

*Modo de reposo con la palanca levantada.* Durante la etapa c) del ciclo de operaciones (Figura 2), conforme el ángulo de inclinación  $\alpha$  incrementa, la cantidad de agua en la cubeta disminuye. En un momento particular de tiempo, la cantidad de agua es suficiente para hacerle contrapeso al peso de la palanca. Denote el ángulo de inclinación en este instante como  $\beta$ . Si la palanca se mantiene en este ángulo  $\beta$  y la velocidad angular inicial es cero, entonces la palanca se quedará en esta posición para siempre. Este es el modo de reposo con la palanca levantada. La estabilidad de esta posición depende del ritmo de flujo del agua,  $\Phi$ . Si  $\Phi$  excede cierto valor  $\Phi_2$ , entonces este modo de reposo es estable, y el mortero no puede estar en el modo de operación. En otras palabras,  $\Phi_2$  es el mínimo ritmo de flujo para que el mortero no trabaje.



Figura 1: Un mortero de arroz activado por agua.

## CICLO DE OPERACIÓN DE UN MORTERO ACTIVADO POR AGUA

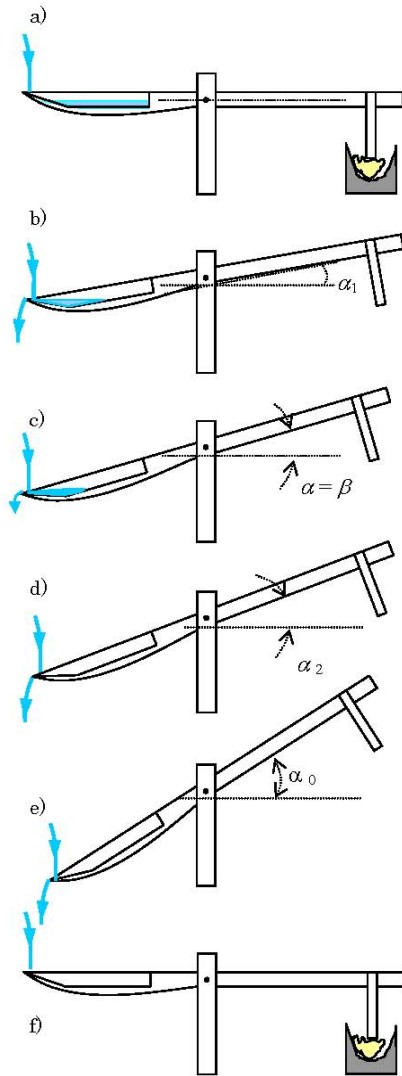


Figura 2:

- a) Al principio no hay agua en la cubeta, el pilón reposa en el mortero. El agua fluye dentro de la cubeta a un ritmo pequeño, pero por un tiempo la palanca permanece horizontal.
- b) En algún momento la cantidad de agua es suficiente para levantar la palanca. Debido a la inclinación, el agua se precipita al lado más lejano de la cubeta, inclinando la palanca más rápido. El agua empieza a fluir fuera cuando  $\alpha = \alpha_1$ .
- c) Conforme el ángulo  $\alpha$  se incrementa, el agua empieza a salir. En un ángulo de inclinación particular,  $\alpha = \beta$ , la torca total es cero.
- d)  $\alpha$  sigue incrementando, el agua sigue saliendo hasta que no queda agua en la cubeta.
- e)  $\alpha$  continúa incrementando debido a la inercia. Debido a la forma de la cubeta, el agua cae en ella pero inmediatamente sale. El movimiento inercial de la palanca sigue hasta que  $\alpha$  alcanza un máximo valor  $\alpha_0$ .
- f) Sin agua en la cubeta, el peso de la palanca la jala de nuevo a la posición horizontal inicial. El pilón le da un golpe al mortero (con arroz en él) y un nuevo ciclo comienza.

## C. El problema

Considere un mortero de arroz activado por agua con los siguientes parámetros (Figura 3):

La masa de la palanca (incluyendo el pilón) sin agua es  $M = 30 \text{ kg}$ .

El centro de masa de la palanca es G. La palanca rota alrededor del eje T (proyectado en el punto T de la figura).

El momento de inercia de la palanca alrededor de T es  $I = 12 \text{ kg m}^2$ .

Cuando el agua está en la cubeta, la masa del agua se denota como  $m$ , y el centro de masa del cuerpo de agua se denota como N.

El ángulo de inclinación de la palanca con respecto al eje horizontal es  $\alpha$ .

Las principales medidas de longitud del mortero y la cubeta son como en la Figura 3.

Desprecie la fricción de la rotación alrededor del eje y también la fuerza debida al agua cayendo en la cubeta. En este problema, hacemos la aproximación de que la superficie del agua siempre es horizontal.

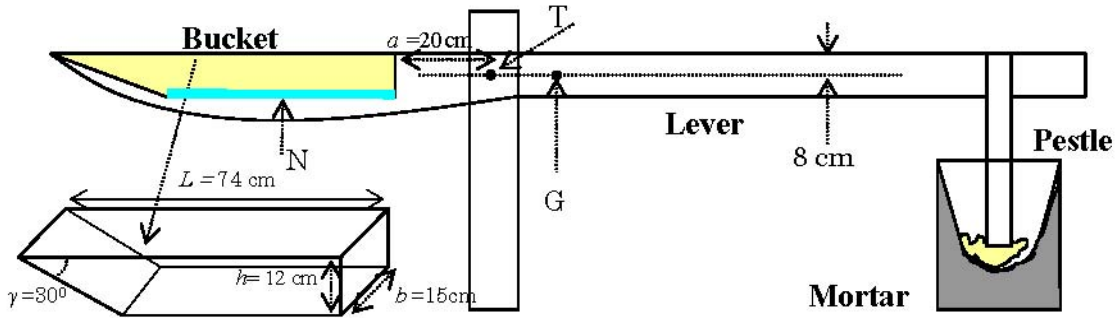


Figura 3: Diseño y dimensiones del mortero de arroz

### 1. La estructura del mortero

Al principio, la cubeta está vacía y la palanca permanece horizontal. Luego el agua empieza a fluir en la cubeta hasta que la palanca comienza a rotar. La cantidad de agua en este momento es  $m = 1.0 \text{ kg}$ .

- 1.1. Determine la distancia del centro de masa G de la palanca al eje de rotación T. Se sabe que GT es horizontal cuando la cubeta está vacía.
- 1.2. El agua empieza a salir de la cubeta cuando el ángulo entre la palanca y el eje horizontal se vuelve  $\alpha_1$ . La cubeta queda completamente vacía cuando este ángulo es  $\alpha_2$ . Determine  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ .
- 1.3. Sea  $\mu(\alpha)$  la torca total (respecto al eje T) que proviene del peso de la palanca y el agua en la cubeta.  $\mu(\alpha)$  es cero cuando  $\alpha = \beta$ . Determine  $\beta$  y la masa  $m_1$  del agua en la cubeta en ese instante.

## 2. Parámetros del modo de operación

El agua fluye dentro de la cubeta con un ritmo de flujo  $\Phi$  el cual es constante y pequeño. La cantidad de agua que fluye dentro de la cubeta cuando la palanca está en movimiento es despreciable. En esta parte, desprecie el cambio en el momento de inercia durante el ciclo de operación.

- 2.1. Esboce la gráfica de la torca  $\mu$  como función del ángulo  $\alpha$ ,  $\mu(\alpha)$ , durante un ciclo de operación. Escriba explícitamente los valores de  $\mu(\alpha)$  a los ángulos  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha = 0$ .
- 2.2. A partir de la gráfica de la sección 2.1, discuta y dé una interpretación geométrica de la energía total  $W_{\text{total}}$  producida por  $\mu(\alpha)$  y el trabajo  $W_{\text{golpe}}$  que es transferido del pilón al arroz.
- 2.3. De la gráfica que representa  $\mu$  contra  $\alpha$ , estime  $\alpha_0$  y  $W_{\text{golpe}}$ . (Asuma que la energía cinética del agua que fluye dentro de la cubeta y fuera de ésta es despreciable). Puede reemplazar las líneas curvas por líneas de zig-zag si le simplifica los cálculos.

## 3. El modo de reposo

El agua fluye dentro de la cubeta con un ritmo de flujo  $\Phi$ , pero uno no puede despreciar la cantidad de agua fluyendo dentro de la cubeta durante el movimiento de la palanca.

- 3.1. Asumiendo que la cubeta siempre está llena con agua,
  - 3.1.1. Esboce una gráfica de la torca  $\mu$  como función del ángulo  $\alpha$  en la vecindad de  $\alpha = \beta$ . ¿A qué tipo de punto de equilibrio pertenece la posición de la palanca  $\alpha = \beta$ ?
  - 3.1.2. Encuentre la forma analítica de la torca  $\mu(\alpha)$  como una función de  $\Delta\alpha$  cuando  $\alpha = \beta + \Delta\alpha$  y  $\Delta\alpha$  es pequeño.
  - 3.1.3. Escriba la ecuación de movimiento de la palanca, que se mueve con velocidad inicial cero desde la posición  $\alpha = \beta + \Delta\alpha$  (con  $\Delta\alpha$  pequeño). Muestre que el movimiento es, con buena precisión, de oscilaciones armónicas. Compute el periodo  $\tau$ .
- 3.2. A un  $\Phi$  dado, la cubeta está llena de agua en todo momento sólo si la palanca se mueve lo suficientemente lento. Hay un límite superior para la amplitud de las oscilaciones armónicas, el cual depende de  $\Phi$ . Determine el valor mínimo  $\Phi_1$  de  $\Phi$  (en kg/s) tal que la palanca pueda hacer oscilaciones armónicas con amplitud de  $1^\circ$ .
- 3.3. Asuma que  $\Phi$  es lo suficientemente grande de tal modo que durante el movimiento libre de la palanca cuando el ángulo de inclinación disminuye de  $\alpha_2$  a  $\alpha_1$  la cubeta siempre está llena de agua. Sin embargo, si  $\Phi$  es demasiado grande el mortero no puede operar. Asumiendo que el movimiento de la palanca es la de un oscilador armónico, estime el ritmo de flujo mínimo  $\Phi_2$  para que el mortero de arroz no trabaje.

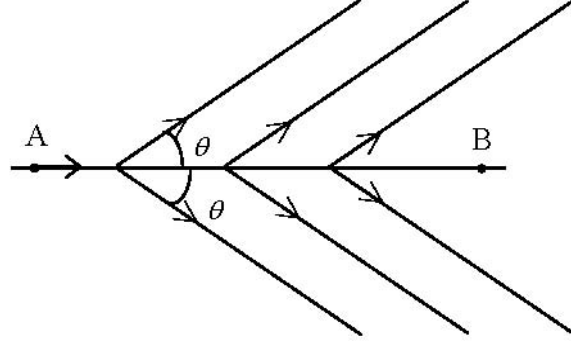
## Problema 2: Luz de Cherenkov y contador de imágenes de anillo

La luz se propaga en el vacío con velocidad  $c$ . No hay partícula alguna que se mueva a una velocidad mayor a  $c$ . Sin embargo, es posible que en un medio transparente una partícula se mueva con velocidad  $v$  mayor que la velocidad de la luz en ese mismo medio  $\frac{c}{n}$ , donde  $n$  es el índice de refracción del medio.

Los experimentos (Cherenkov, 1934) y la teoría (Tamm y Frank, 1937) mostraron que una partícula cargada, moviéndose con velocidad  $v$  en un medio transparente con índice de refracción  $n$  tal que  $v > \frac{c}{n}$ , radia luz, llamada *luz de Cherenkov*, en direcciones que forman con la trayectoria de la partícula un ángulo

$$\theta = \arccos \frac{1}{\beta n} \quad (1)$$

donde  $\beta = \frac{v}{c}$ .



1. Para establecer este hecho, considere una partícula que se mueve a velocidad constante  $v > \frac{c}{n}$  en línea recta. Pasa por A al tiempo 0 y por B al tiempo  $t_1$ . Como el problema es simétrico con respecto a rotaciones alrededor de AB, basta con considerar los rayos de luz en un plano que contenga a AB. En algún punto C entre A y B, la partícula emite una onda de luz esférica, que se propaga con velocidad  $\frac{c}{n}$ . Definimos el frente de onda a un tiempo  $t$  dado como la cubierta de todas estas esferas a ese tiempo.

1.1. Determine el frente de onda al tiempo  $t_1$  y dibuje su intersección con un plano que contenga a la trayectoria de la partícula.

1.2. Exprese el ángulo  $\varphi$  entre esta intersección y la trayectoria de la partícula en términos de  $n$  y  $\beta$ .

2. Consideremos un rayo de partículas que se mueve a una velocidad  $v > \frac{c}{n}$ , tal que el ángulo  $\theta$  es pequeño, a lo largo de una línea recta IS. El rayo cruza en el punto S un espejo esférico cóncavo de longitud focal  $f$  y centro C. SC hace con SI un pequeño ángulo  $\alpha$ . El rayo de partículas crea la imagen de un anillo en el plano focal del espejo. Explique por qué con ayuda de un dibujo que ilustre este hecho. Dé la posición del centro O y el radio  $r$  de la imagen del anillo. Este montaje es utilizado en los *contadores Cherenkov de imágenes de anillo* (RICH) y el medio que la partícula atraviesa es llamado *radiador*.

**Nota:** en todas las preguntas del presente problema, los términos de segundo orden o mayores en  $\alpha$  y  $\theta$  serán despreciados.

3. Un rayo de partículas con momento conocido  $p = 10.0 \text{ GeV}/c$  consiste en tres tipos de partículas: protones, kaones y piones, con masas en reposo  $M_p = 0.94 \text{ GeV}/c^2$ ,  $M_\kappa = 0.50 \text{ GeV}/c^2$  y  $M_\pi = 0.14 \text{ GeV}/c^2$ , respectivamente. Recuerde que  $pc$  y  $Mc^2$  tienen dimensiones de energía, y que  $1 \text{ eV}$  es la energía adquirida por un electrón después de ser acelerado por un voltaje de  $1 \text{ V}$ , y  $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$ ,  $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$ .

El rayo de partículas atraviesa un medio de aire (el radiador) bajo presión  $P$ . El índice de refracción depende de la presión del aire según la relación  $n = 1 + aP$ , donde  $a = 2.7 \times 10^{-4} \text{ atm}^{-1}$ .

3.1. Calcule para cada uno de estos tres tipos de partícula el valor mínimo  $P_{\min}$  de la presión del aire tal que emitan luz de Cherenkov.

3.2. Calcule la presión  $P_1$  tal que la imagen de anillo de los kaones tenga un radio igual a la mitad del correspondiente a la imagen de los piones. Calcule los valores de  $\theta_\kappa$  y  $\theta_\pi$  en este caso. ¿Es posible observar la imagen de anillo de los protones bajo esta presión?

4. Ahora asuma que el rayo no es perfectamente monocromático: los momentos de las partículas están distribuidos en un intervalo centrado en  $10 \text{ GeV}/c$  que tiene una media anchura a media altura  $\Delta p$ . Esto hace que la imagen del anillo se ensanche, correspondientemente la distribución de  $\theta$  tiene una media anchura a media altura  $\Delta\theta$ . La presión del radiador es  $P_{\frac{1}{2}}$  determinada en 3.2.

4.1. Calcule  $\frac{\Delta\theta_\kappa}{\Delta p}$  y  $\frac{\Delta\theta_\pi}{\Delta p}$ , los valores de  $\frac{\Delta\theta}{\Delta p}$  en los casos de los kaones y piones.

4.2. Cuando la separación entre las imágenes de los anillos,  $\theta_\pi - \theta_\kappa$ , es mayor que diez veces la suma de las medias anchuras  $\Delta\theta = \Delta\theta_\kappa + \Delta\theta_\pi$ , eso es  $\theta_\pi - \theta_\kappa > 10\Delta\theta$ , es posible distinguir bien las dos imágenes de anillos. Calcule el máximo valor de  $\Delta p$  tal que las dos imágenes de anillos puedan seguir distinguiéndose.

5. Cherenkov descubrió por primera vez el efecto que lleva su nombre cuando estaba observando una botella de agua cerca de una fuente radioactiva. Él vio que la botella de agua emitía luz.

5.1. Encuentre la energía cinética mínima  $T_{\min}$  de una partícula con masa en reposo  $M$  moviéndose en agua, tal que emita luz de Cherenkov. El índice de refracción del agua es  $n = 1.33$ .

5.2. La fuente radioactiva usada por Cherenkov emite ya sea partículas  $\alpha$  (i.e. núcleos de helio) con masa en reposo  $M_\alpha = 3.8 \text{ GeV}/c^2$  o partículas  $\beta$  (i.e. electrones) con masa en reposo  $M_e = 0.51 \text{ MeV}/c^2$ . Calcule los valores de  $T_{\min}$  para las partículas  $\alpha$  y  $\beta$ .

Sabiendo que la energía cinética de las partículas emitidas por fuentes radiactivas nunca exceden unos pocos MeV, determine qué partículas dan lugar a la radiación observada por Cherenkov.

6. En las secciones anteriores de este problema, la dependencia del efecto Cherenkov con la longitud de onda  $\lambda$  ha sido ignorada. Ahora tomamos en cuenta el hecho de que la radiación de Cherenkov de una partícula tiene un amplio espectro continuo incluyendo el rango visible (longitudes de onda entre  $0.4 \mu\text{m}$  y  $0.8 \mu\text{m}$ ). También sabemos que el índice de refracción  $n$  del radiador disminuye linealmente hasta un 2% de  $n - 1$  cuando  $\lambda$  incrementa a lo largo de este rango.

6.1. Considere un rayo de piones con un momento definido de  $10.0 \text{ GeV}/c$  moviéndose bajo una presión de aire de 6 atm. Encuentre la diferencia angular  $\delta\theta$  asociada entre los dos extremos del rango visible.

6.2. En esta base, estudie cualitativamente el efecto de la dispersión en la imagen de anillo de los piones con momentos distribuidos en un intervalo centrado en  $p = 10 \text{ GeV}/c$  con una media anchura a media altura  $\Delta p = 0.3 \text{ GeV}/c$ .

6.2.1. Calcule el ensanchamiento debido a la dispersión (índice de refracción variante) y debido a la acromaticidad del rayo (momento variante).

6.2.2. Describa cómo el color del rayo cambia entre sus bordes interno y externo.

### Problema 3: Variación de la temperatura del aire con la altitud, estabilidad atmosférica y contaminación del aire

El movimiento vertical del aire gobierna muchos procesos atmosféricos, tales como la formación de nubes, la precipitación y la dispersión de contaminantes. Si la atmósfera es *estable*, el movimiento vertical está restringido y los contaminantes tienden a acumularse alrededor del sitio de emisión en lugar de ser dispersados y diluidos. Mientras tanto, en una atmósfera *inestable*, el movimiento vertical del aire fomenta la dispersión vertical de los contaminantes. Por lo tanto, la concentración de los contaminantes no sólo depende de la fuerza de las fuentes de emisión, sino que también de la *estabilidad* de la atmósfera.

Hemos de determinar la estabilidad atmosférica usando el concepto de *paquete de aire* en meteorología y comparando la temperatura del paquete de aire que se eleva o se hunde adiabáticamente en la atmósfera con la del aire circundante. Veremos que en muchos casos un paquete de aire que contiene contaminantes y se eleva desde el suelo llegará al reposo en cierta altitud, llamada *altura de mezcla*. Mientras mayor sea la altura de mezcla, menor será la concentración de los contaminantes en el aire. Evaluaremos la altura de mezcla y la concentración de monóxido de carbono emitido por las motocicletas en el área metropolitana de Hanoi para un escenario de hora pico matutina, en la que la mezcla vertical está restringida debido a la inversión térmica (la temperatura del aire aumenta con la altitud) en las elevaciones mayores a 119 m.

Consideremos al aire como un gas diatómico ideal con masa molar  $\mu = 29 \text{ g/mol}$ .

Los procesos adiabáticos de quasi-equilibrio obedecen la ecuación  $pV^\gamma = \text{const}$ , donde  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  es el cociente entre las capacidades caloríficas isobárica e isocórica del gas.

El estudiante podrá usar los siguientes datos si es necesario:

La constante universal de los gases es  $R = 8.31 \text{ J/mol K}$ .

La presión atmosférica en el suelo es  $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$ .

La constante aceleración debido a la gravedad es  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ .

La capacidad calorífica molar isobárica del aire es  $c_p = \frac{7}{2}R$ .

La capacidad calorífica molar isocórica del aire es  $c_v = \frac{5}{2}R$ .

#### Sugerencias matemáticas

- a)  $\int \frac{dx}{A+Bx} = \frac{1}{B} \int \frac{d(A+Bx)}{A+Bx} = \frac{1}{B} \ln(A+Bx)$
- b) La solución de la ecuación diferencial  $\frac{dx}{dt} + Ax = B$  con  $A$  y  $B$  constantes es  $x(t) = x_1(t) + \frac{B}{A}$ , donde  $x_1(t)$  es la solución de la ecuación diferencial  $\frac{dx}{dt} + Ax = 0$ .
- c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$



## 1. Cambio de la presión con la altitud

- 1.1. Asuma que la temperatura de la atmósfera es uniforme e igual a  $T_0$ . Escriba la expresión que dé a la presión atmosférica  $p$  en función de la altitud  $z$ .
- 1.2. Asuma que la temperatura de la atmósfera varía con la altitud de acuerdo a la relación  $T(z) = T(0) - \Lambda z$ , donde  $\Lambda$  es una constante, llamada *ritmo de cambio de temperatura* (el gradiente vertical de temperatura es  $-\Lambda$ ).
  - 1.2.1. Escriba la expresión que dé a la presión atmosférica  $p$  en función de la altitud  $z$ .
  - 1.2.2. Un proceso llamado convección libre ocurre cuando la densidad del aire aumenta con la altitud. ¿Para qué valores de  $\Lambda$  ocurre la convección libre?

## 2. Cambio de la temperatura de un paquete de aire en movimiento vertical

Considere un paquete de aire que se mueve hacia arriba y hacia abajo en la atmósfera. Un paquete de aire es un cuerpo de aire de dimensión suficiente, de varios metros, para ser tratado como una entidad termodinámica independiente, pero lo suficientemente pequeño para que su temperatura pueda considerarse uniforme. El movimiento vertical del paquete de aire puede tratarse como un proceso quasi-adiabático, i.e. el intercambio de calor con sus alrededores es despreciable. Si el paquete de aire se eleva en la atmósfera, se expande y se enfría. A la inversa, si se mueve hacia abajo, la creciente presión externa comprimirá al aire en el paquete y su temperatura aumentará.

Como el tamaño del paquete no es grande, la presión atmosférica en los distintos puntos que estén en la frontera del paquete se puede considerar que tiene el mismo valor  $p(z)$ , donde  $z$  es la altitud del centro del paquete. La temperatura del paquete es uniforme y es igual a  $T_{\text{paquete}}(z)$ , que es en general diferente a la temperatura del aire circundante  $T(z)$ . Las partes 2.1 y 2.2 no haremos ninguna suposición sobre la forma de  $T(z)$ .

- 2.1. El cambio en la temperatura del paquete  $T_{\text{paquete}}$  con la altitud está definido por  $\frac{dT_{\text{paquete}}}{dz} = -G$ . Encuentre la expresión para  $G(T, T_{\text{paquete}})$ .
- 2.2. Considere la condición atmosférica especial en la que a cualquier altura  $z$  la temperatura  $T$  de la atmósfera sea igual a la del paquete  $T_{\text{paquete}}$ ,  $T(z) = T_{\text{paquete}}(z)$ . Usamos  $\Gamma$  para denotar el valor de  $G$  cuando  $T = T_{\text{paquete}}$ , eso es  $\Gamma = -\frac{dT_{\text{paquete}}}{dz}$  con  $(T = T_{\text{paquete}})$ .  $\Gamma$  es llamado el *ritmo seco de cambio de temperatura*.
  - 2.2.1. Encuentre una expresión para  $\Gamma$ .
  - 2.2.2. Calcule el valor numérico de  $\Gamma$ .
  - 2.2.3. Encuentre la expresión de la temperatura atmosférica  $T(z)$  en función de la altitud.
- 2.3. Asuma que la temperatura atmosférica depende de la altitud conforma a la relación  $T(z) = T(0) - \Lambda z$ , donde  $\Lambda$  es constante. Encuentre la dependencia de la temperatura del paquete  $T_{\text{paquete}}$  con la altitud  $z$ .
- 2.4. Escriba la expresión aproximada de  $T_{\text{paquete}}$  cuando  $|\Lambda z| \ll T(0)$  y  $T(0) \approx T_{\text{paquete}}(0)$ .

### 3. La estabilidad atmosférica

En esta parte, asumiremos que  $T$  cambia linealmente con la altitud.

3.1. Considere un paquete de aire inicialmente en equilibrio con el aire circundante a una altitud  $z_0$ , i.e. tiene la misma temperatura  $T(z_0)$  del aire circundante. Si el paquete es movido ligeramente arriba y abajo (por ejemplo, debido a turbulencia atmosférica), una de las siguientes cosas puede ocurrir:

- El paquete de aire encuentra su camino de vuelta a la altitud original  $z_0$ , y el equilibrio del paquete es estable. Se dice que la atmósfera es estable.
- El paquete continúa su movimiento en la dirección original, y el equilibrio del paquete es inestable. Se dice que la atmósfera es inestable.
- El paquete se mantiene en esa nueva posición, el equilibrio del paquete es indiferente. Se dice que la atmósfera es neutral.

¿Cuál es la condición de  $\Lambda$  necesaria para que la atmósfera sea estable, inestable o neutral?

3.2. Un paquete tiene una temperatura en el suelo  $T_{\text{paquete}}(0)$  mayor a la temperatura  $T(0)$  del aire circundante. La fuerza de empuje hará que el paquete se eleve. Encuentre la expresión de la máxima altura que el paquete puede alcanzar en el caso de una atmósfera estable en términos de  $\Lambda$  y  $\Gamma$ .

### 4. La altura de mezcla

4.1. La Tabla 1 muestra las temperaturas atmosféricas registradas por un globo meteorológico a las 7:00 am un día de noviembre en Hanoi. El cambio de la temperatura con la altitud puede ser descrito aproximadamente con la fórmula  $T(z) = T(0) - \Lambda z$  con diferentes ritmos de cambio  $\Lambda$  en las tres capas  $0 < z < 96$  m,  $96 \text{ m} < z < 119$  m, y  $119 \text{ m} < z < 215$  m.

Considere un paquete de aire con temperatura  $T_{\text{paquete}}(0) = 22^\circ\text{C}$  ascendiendo desde el suelo. Con base en los datos dados en la Tabla 1 y usando la aproximación lineal anterior, calcule la temperatura del paquete a las altitudes de 96 m y 119 m.

4.2. Determine la máxima elevación  $H$  que el paquete puede alcanzar, y la correspondiente temperatura  $T_{\text{paquete}}(H)$  del paquete.

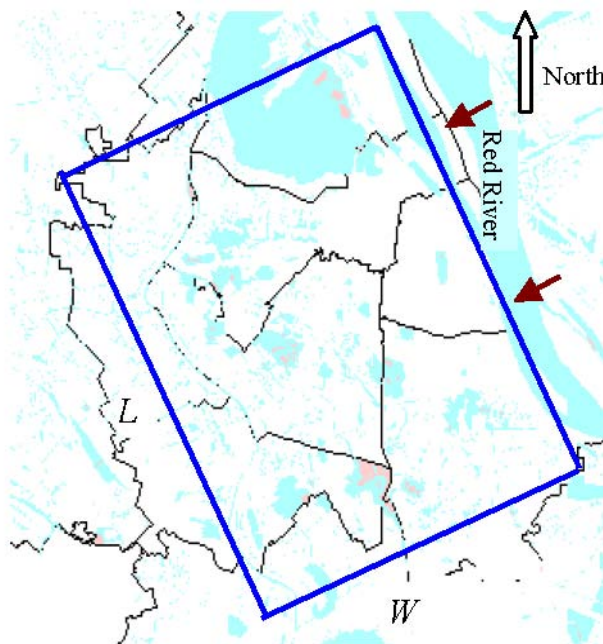
$H$  es llamada la altura de mezcla. Los contaminantes del aire emitidos desde el suelo pueden mezclarse con el aire de la atmósfera (por ejemplo, por vientos, turbulencia o dispersión) y se diluyen dentro de esta capa.

Tabla 1: Datos registrados por un globo meteorológico a las 7:00 una mañana de noviembre en Hanoi.

Altitud, m	Temperatura, °C
5	21.5
60	20.6
64	20.5
69	20.5
75	20.4
81	20.3
90	20.2
96	20.1
102	20.1
109	20.1
113	20.1
119	20.1
128	20.2
136	20.3
145	20.4
153	20.5
159	20.6
168	20.8
178	21.0
189	21.5
202	21.8
215	22.0
225	22.1
234	22.2
246	22.3
257	22.3

## 5. Estimación de la contaminación de monóxido de carbono (CO) durante la hora pico de las motocicletas en Hanoi.

El área metropolitana de Hanoi puede aproximarse como un rectángulo con dimensiones  $L$  y  $W$  como se muestra en la figura, con un lado tomado a lo largo del banco suroeste del Río Rojo.



Se estima que durante la hora pico matutina, de las 7:00 am a las 8:00 am, hay  $8 \times 10^5$  motocicletas en la calle, cada una recorriendo en promedio 5 km y emitiendo 12 g de CO por kilómetro. La cantidad del CO contaminante es considerada que se emite aproximadamente de manera uniforme en el tiempo, a un ritmo constante  $M$  durante la hora pico. Al mismo tiempo, el viento limpio del noreste sopla perpendicular al Río Rojo (i.e. perpendicular a los lados  $L$  del rectángulo) con velocidad  $u$ , pasa por la ciudad con la misma velocidad, y se lleva parte del aire contaminado con CO lejos de la atmósfera de la ciudad.

También podemos utilizar este modelo aproximado:

- El CO se esparce rápidamente a través del volumen entero de la capa de mezcla encima del área metropolitana de Hanoi, de modo que la concentración  $C(t)$  de CO al tiempo  $t$  puede asumirse constante a lo largo de la caja rectangular de dimensiones  $L$ ,  $W$  y  $H$ .
- El aire a contra viento que entra en la caja está limpio y no se considera que se pierda contaminación de la caja por los lados que son paralelos al viento.
- Antes de las 7:00 am, la concentración de CO en la atmósfera es despreciable.

- 5.1. Encuentre la ecuación diferencial que determina la concentración de CO contaminante  $C(t)$  en función del tiempo.
- 5.2. Escriba la ecuación solución para  $C(t)$ .
- 5.3. Calcule el valor numérico de la concentración  $C(t)$  a las 8:00 am. Dados  $L = 15$  km,  $W = 8$  km,  $u = 1$  m/s.