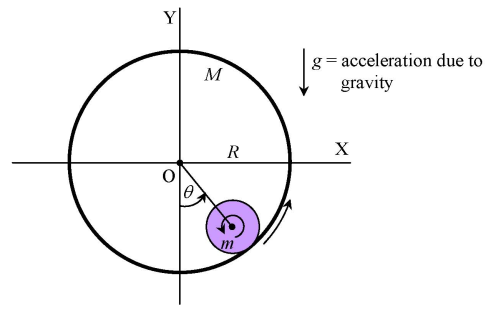
10 Olimpiada Asiática de Física

Bangkok, Tailandia 2009

Problema 1: Cilindros rodantes

Un cilindro de paredes delgadas con masa M y áspera superficie interna de radio R puede rotar alrededor de su eje central OZ horizontal fijo. El eje Z es perpendicular a la página y va hacia afuera. Otro cilindro uniforme sólido más chico de masa m y radio r rueda sin deslizarse (excepto en la pregunta 1.8) sobre la superficie interna de M alrededor de su propio eje central que es paralelo a OZ.



1.1) La rotación de M ha de comenzar desde el reposo en el instante $t = 0$ cuando m está descansando en el punto más bajo. En un tiempo posterior t la posición angular del centro de masa de m es θ y para entonces M ha girado un ángulo de ϕ radianes. ¿Cuántos radianes (designados ψ) habrá girado la masa m alrededor de su eje central respecto a una línea fija (por ejemplo, el eje Y)? Dé su respuesta en términos de θ, ϕ, R y r. (0.8 puntos)

1.2) ¿Cuál es la aceleración angular de m, $\frac{d^2\psi}{dt^2}$, alrededor de su propio eje que atraviesa su centro de masa? Dé su respuesta en términos de R, r, y derivadas de θ y ϕ. (0.2 puntos)

1.3) Obtenga una expresión de la aceleración angular del centro de masa de m, $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, en términos de m, g, R, r, θ, $\frac{d^2\phi}{dt^2}$, y el momento de inercia I_{CM} de m alrededor de su eje central. (1.8 puntos)

1.4) ¿Cuál es el periodo de la oscilación de pequeña amplitud de m cuando M está obligada a rotar con velocidad angular constante? Dé su respuesta sólo en términos de R, r y g. (1.3 puntos)

1.5) ¿Cuál es el valor de θ para la posición de equilibrio de m en la pregunta 1.4? (0.2 puntos)

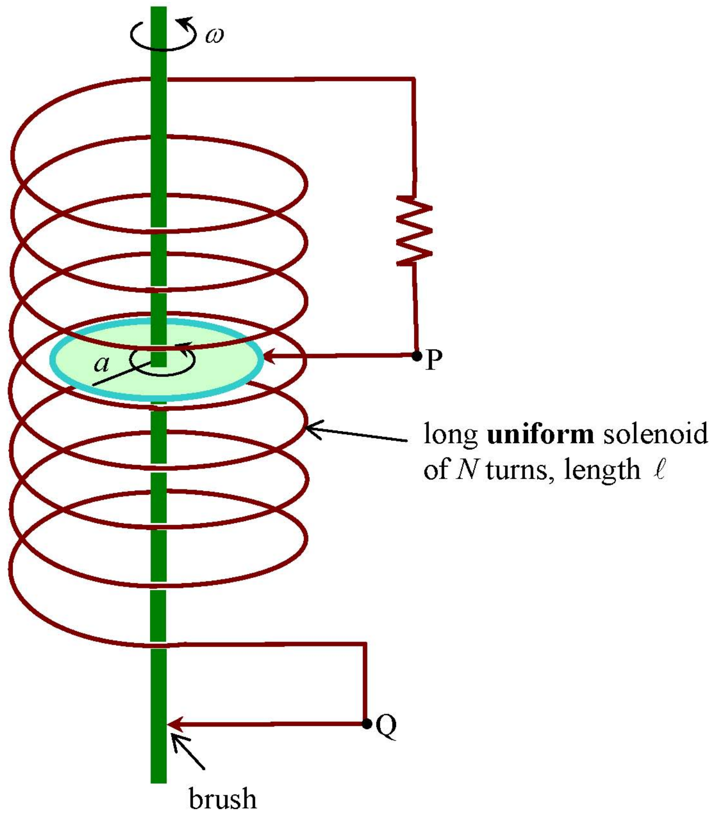
1.6) ¿Cuál es la posición de equilibrio de m cuando M está rotando con aceleración angular constante α? Dé su respuesta en términos de R, g y α. (0.7 puntos)

1.7) Ahora se permite que M rote (oscile) libremente, sin restricción, en torno a su eje central OZ mientras m está ejecutando oscilaciones de pequeña amplitud sólo con rodar en la superficie interna de M. Encuentre el periodo de esta oscilación. (2.5 puntos)

1.8) Considere la situación en la que M está rotando firmemente a una velocidad angular Ω y m está rotando (rodando) en torno a su centro de masa estacionario, en la posición de equilibrio encontrada en 1.5. M es llevada a detenerse abruptamente. ¿Cuál es el mínimo de Ω tal que m rodará hacia arriba y alcanzará el punto más alto de la superficie cilíndrica de M? Se asume que el coeficiente de fricción entre m y M es lo suficientemente grande para que m empiece a rodar sin deslizamiento poco después de un pequeño arrastre justo después de que M se detuvo. (2.5 puntos)

Problema 2: Dínamo magnético autoexcitado

Un disco metálico de radio a montado en eje esbelto está rotando con una velocidad angular constante ω dentro de un solenoide largo con inductancia L cuyos dos extremos están conectados al disco giratorio por contactos escobilla como se muestra. La resistencia total del circuito completo es R. Una pequeña perturbación magnética puede iniciar el crecimiento de una fuerza electromotriz inducida a través de las terminales P y Q.



2.1) Escriba la ecuación diferencial para $i(t)$, la corriente a través del circuito. Exprese su respuesta en términos de L, R, y la fuerza electromotriz inducida $\mathcal{E}$ a través de las terminales P y Q. (1.0 puntos)

2.2) ¿Cuál es la densidad de flujo magnético (B) en términos de i, N, l , y la permeabilidad del espacio libre μ_0? Ignore el campo magnético generado por el disco y el eje. (1.5 puntos)

2.3) ¿Cuál es la expresión para la fuerza electromotriz inducida en $\mathcal{E}$ en términos de μ_0, N, a, l, i, y la velocidad angular ω? (2.0 puntos)

2.4) Resuelva la ecuación de la pregunta 2.1 para la corriente a cualquier tiempo t en términos de la corriente inicial $i(0)$ y otros parámetros. (1.5 puntos)

2.5) ¿Cuál es el mínimo valor de la velocidad angular que permitirá que la corriente crezca? Dé su respuesta en términos de R, μ_0, N, a, y l. (2.0 puntos)

2.6) Para mantener una cierta velocidad angular constante ω, ¿cuál debe ser el valor de la torca aplicada al eje en el instante t? (2.0 puntos)

Problema 3: El fenómeno Leidenfrost

El propósito es estimar el tiempo de vida de una gota semiesférica de un líquido yaciendo sobre una muy delgada capa de vapor que está aislando térmicamente a la gota de la placa muy caliente que está debajo.

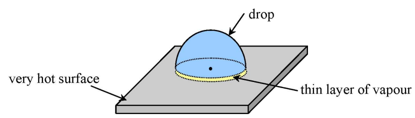


Figura 1:

Aquí se asumirá que el flujo de vapor debajo de la gota es línea de corriente y se comporta como un fluido newtoniano con coeficiente de viscosidad η y conductividad térmica $\mathcal{K}$. El calor latente de vaporización del líquido es l. Para un fluido newtoniano tenemos que el esfuerzo cortante es $\frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dz}$, donde $\frac{dv}{dz}$ es la velocidad de corte, v es la velocidad de flujo, z es la distancia perpendicular a la dirección del flujo y F es la fuerza tangencial a la superficie A.

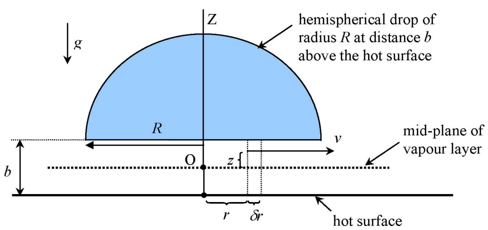


Figura 2:

v es la velocidad del vapor en la dirección radial a una altura z por encima del plano medio. La presión P dentro del vapor debe ser mayor cerca del centro O. Esto resultará en el desbordamiento del vapor y de la fuerza que sostiene a la gota contra el empuje de la gravedad. El grosor de la capa de vapor bajo equilibrio térmico y mecánico es b.
Para un flujo newtoniano de vapor podemos aproximar que

$$\frac{dv}{dz} = \frac{z}{\eta}\frac{dP}{dr}$$

3.1) Demuestre que $v(z) = \frac{z^2}{2\eta}\frac{dP}{dr} + C$ donde C es una constante arbitraria de integración. (0.5 puntos)

3.2) Referente a la Figura 2, encuentre el valor de C en términos de η, $\frac{dP}{dr}$, y b usando la condición de frontera $v = 0$ para $z = \pm\frac{b}{2}$. (0.5 puntos)

3.3) Calcule el ritmo de flujo de volumen de vapor a través de la superficie cilíndrica definida por r. (Sugerencia: El cilindro es de rario r y altura b debajo de la gota.) (1.0 puntos)

3.4) Asumiendo que el ritmo de producción de vapor con densidad ρ_V se debe al flujo de calor desde la superficie caliente hasta la gota, encuentre la expresión para la presión $P(r)$. Use P_a para representar la presión atmosférica y use ΔT para la diferencia de temperaturas entre la superficie caliente y la gota. Asuma que el sistema ha alcanzado el estado estacionario. (2.0 puntos)

3.5) Calcule el valor de b igualando el peso de la gota con la fuerza neta debido a la diferencia de presión las partes de arriba y de abajo de la gota. La densidad de la gota es ρ_0. (2.0 puntos)

3.6) ¿Cuál es el ritmo total de vaporización? (2.0 puntos)

3.7) Asuma que la gota mantiene una forma semiesférica, ¿cuál es el tiempo de vida de la gota? (2.0 puntos)