

13 Olimpiada Asiática de Física

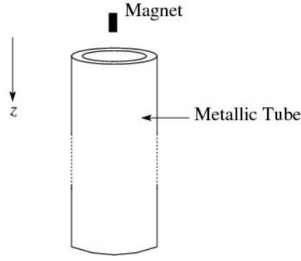
Nueva Delhi, India 2012

Problema 1: El arrastre de un imán que cae

Una discusión clara y detallada discusión sobre corrientes parásitas fue por primera vez provista por el físico británico Sir James H. Jeans (1877-1946) en su célebre libro *The mathematical theory of electricity and magnetism* (1925). El presente problema está basado en electricidad y magnetismo.



James H. Jeans
(1877-1946)



Un imán pequeño con momento dipolar de magnitud p y masa m a través de un largo tubo metálico no magnético sostenido verticalmente como se muestra en la Figura 1 (no está a escala). En general la caída está gobernada por

$$m\ddot{z} = mg - k\dot{z} \quad (1)$$

Aquí g es la aceleración debida a la gravedad. Note que el parámetro de amortiguamiento k se debe a la generación de corrientes parásitas en el tubo.

Figura 1:

I.1. Obtenga la velocidad terminal del imán. [0.5 puntos]

I.2. Obtenga $z(t)$, i.e. la posición del imán al tiempo t . Tome $v(0) = 0$ y $z(0) = 0$. [1.0 puntos]

Hemos de intentar entender la dinámica de la caída. Para lograr esto, consideramos en las partes I.3-I.8 un problema simplificado del imán cayendo axialmente hacia un anillo metálico no magnético fijo de radio a , resistencia R e inductancia L como se muestra en la Figura 2. En este problema, hemos de ignorar efectos de radiación.

En nuestro caso es conveniente cambiar las coordenadas de referencia a un sistema de coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) como se muestra en la Figura 2 donde el eje z es el eje del anillo, el imán está inicialmente en reposo en el origen y el centro del anillo está a una distancia z_0 del origen. Los ejes cartesianos (x, y, z) también se muestran en la figura. El imán tiene momento dipolar \vec{p} en la dirección z positiva ($\vec{p} = p\hat{k}$) donde \hat{k} es vector unitario en la dirección z . Asumiremos que durante la caída, el momento magnético se mantiene en la misma dirección. La componente axial B_z y la componente radial B_ρ del campo magnético en un punto arbitrario (ρ, φ, z) cuando el imán está en el origen están dadas por

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \left[\frac{3z^2}{\rho^2 + z^2} - 1 \right]$$

$$B_\rho = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3p\rho z}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}}$$

donde μ_0 es la permeabilidad del vacío.

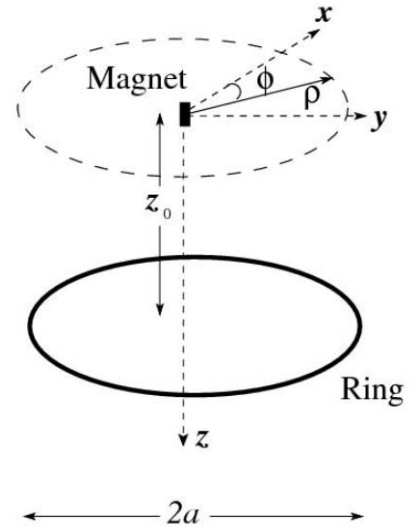


Figura 2:

- I.3. Sea v la velocidad instantánea del imán. Obtenga la magnitud de la fem inducida \mathcal{E}_i en el anillo. **[1.5 puntos]**
- I.4. Esta fem dará lugar a una corriente inducida i en el anillo. Obtenga la magnitud de la fuerza electromagnética instantánea f_{em} en el anillo en términos de i . **[1.0 puntos]**
- I.5. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza en el imán debida a este anillo? **[0.5 puntos]**
- I.6. Exprese la fem en el anillo en términos de L , R e i . No resuelva para i . **[0.5 puntos]**
- I.7. Conforme el imán cae pierde energía potencial gravitatoria. Identifique las tres principales formas de energía en las cuales la energía potencial gravitatoria es convertida y escriba la expresiones que usaría para calcular cada una de esas tres contribuciones. **[1.0 puntos]**
- I.8. ¿El campo magnético del imán realiza algún trabajo en el proceso? **[0.5 puntos]**

A continuación estimaremos el parámetro de amortiguamiento k debido al tubo (vea la Ecuación (1)). Tome un tubo infinitamente largo con radio a , pequeño grosor w , y conductividad eléctrica σ . Para esta y la siguiente parte, tomaremos la inductancia del tubo como despreciable. Es útil que considere al tubo como si estuviera hecho de muchos anillos cada uno con altura $\Delta z'$, radio a , pequeño grosor w y conductividad eléctrica σ (vea la Figura 3). Por simplicidad, los dos extremos del tubo están en $z = -\infty$ y $z = \infty$, respectivamente.

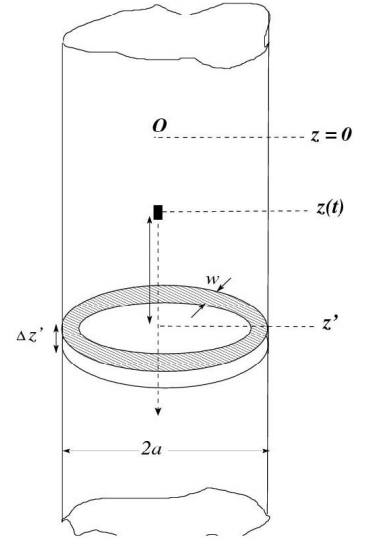


Figura 3:

- I.9. Obtenga la resistencia de un anillo individual. **[0.5 puntos]**
- I.10. Obtenga el parámetro de amortiguamiento k debido al tubo entero en términos de p , σ y los parámetros geométricos del anillo. Debido a que el anillo es muy delgado, puede tomar al campo magnético como constante a través del grosor del anillo e igual a $B_\rho(a)$. Asuma que en el instante t , el imán tiene una coordenada $z(t)$ y una velocidad instantánea \dot{z} . Debe expresar su respuesta en términos de una integral adimensional I que involucre una variable adimensional $u = (z - z')/a$. **[2.0 puntos]**
- I.11. Asuma que la constante de amortiguamiento k depende de lo siguiente

$$k = f(\mu_0, p, R_0, a)$$

donde R_0 es la resistencia efectiva para un tubo largo. Use el análisis dimensional para obtener una expresión de k . Tome que la constante adimensional correspondiente sea la unidad. **[1.0 puntos]**

La siguiente integral podría serle útil:

$$\int \frac{u du}{(u^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2} \frac{(u^2 + a^2)^{1-n}}{1-n} + C \quad (n > 1)$$

Problema 2: Límite de Chandrasekhar

En un famoso trabajo llevado a cabo en 1930, el físico indio Prof Subrahmanyan Chandrasekhar (1910-1995) estudió la estabilidad de las estrellas. Este problema le ayudará a construir una versión simplificada de su análisis.

Podría encontrar útiles los siguientes símbolos y valores.

Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Constante de gravitación universal	$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
Masa en reposo del electrón	$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masa en reposo del protón	$m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$



S. Chandrasekhar
(1910-1995)

- II.1. Considere una estrella esférica de densidad uniforme, radio R y masa M . Obtenga una expresión para su energía potencial gravitacional E_G debida a su propio campo gravitacional (autoenergía gravitacional).

[1.0 puntos]

- II.2. Asumimos que la estrella está hecha sólo de hidrógeno y que todo el hidrógeno está en forma ionizada. Consideramos la situación en la que la producción de energía de la estrella por fusión nuclear se ha detenido. Los electrones obedecen el principio de exclusión de Pauli y su energía total puede calcularse usando estadística cuántica. Puede tomar que esta energía electrónica total (ignorando la energía protónica) es:

$$E_e = \frac{\hbar^2 \pi^3}{10 m_e 4^{2/3}} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{7/3} \frac{N_e^{5/3}}{R^2}$$

donde N_e es el número total de electrones y $\hbar = h/2\pi$. Obtenga la condición de equilibrio de la estrella relacionando su radio R_{wd} con su masa. Este radio se llama radio de la enana blanca.

[2.0 puntos]

- II.3. Evalúe numéricamente R_{wd} dado que la masa de la estrella es la misma que la masa solar ($M_S = 2.00 \times 10^{30} \text{ kg}$).

[1.5 puntos]

- II.4. Asumiendo que la distribución de los electrones es homogénea, obtenga una estimación del orden de magnitud de la separación promedio r_{sep} entre los electrones si el radio de la estrella es R_{wd} como lo obtuvo en la parte II.3.

[1.0 puntos]

- II.5. Permitámonos estimar la velocidad de los electrones. Para ese propósito, asuma que cada electrón forma una onda estacionaria en una caja unidimensional de longitud r_{sep} . Estime la velocidad del electrón v en el estado de más baja energía usando la hipótesis de de Broglie.

[1.0 puntos]

- II.6. Considere ahora una modificación al análisis de la parte II.2. Si tomamos a los electrones en el límite ultrarelativista ($E = pc$), un análisis similar lleva a

$$E_{e \text{ rel}} = \frac{\pi^2}{4^{4/3}} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{5/3} \frac{\hbar c}{R} N_e^{4/3}$$

Obtenga la expresión de la masa para la cual la estrella estará en equilibrio, en términos de las constantes dadas al inicio del problema. Llamamos a ésta la masa crítica M_C .

[1.5 puntos]

- II.7. Si la masa M de la estrella es mayor que la masa crítica M_C obtenida en la parte II.6, diga si la estrella se va a expandir o a contraer.

[0.5 puntos]

- II.8. Calcule un estimado numérico de esta masa crítica en unidades de la masa solar M_S . (Nota: Su respuesta puede diferir del famoso resultado de Chandrasekhar debido a las aproximaciones hechas en este análisis).

[1.5 puntos]

Problema 3: La fase de Pancharatnam

Este problema lidia con los fenómenos de dos rayos asociados con la luz, su interferencia, polarización y superposición. El contexto particular del problema fue estudiado por el físico indio S. Pancharatnam (1934-1969).



S. Pancharatnam
(1934-1969)

Considere el montaje experimental mostrado en la Figura 1. Dos rayos de luz monocromática coherentes (marcados como rayo 1 y rayo 2), viajando en la dirección z , inciden en dos rendijas angostas separadas por una distancia d ($S_1S_2 = d$). Después de pasar a través de las rendijas, los dos rayos interfieren y el patrón es observado en la pantalla S . La distancia entre las rendijas y la pantalla es D y $D \gg d$. Asuma que el ancho de cada rendija S_1 y S_2 es mucho menor que la longitud de onda de la luz.

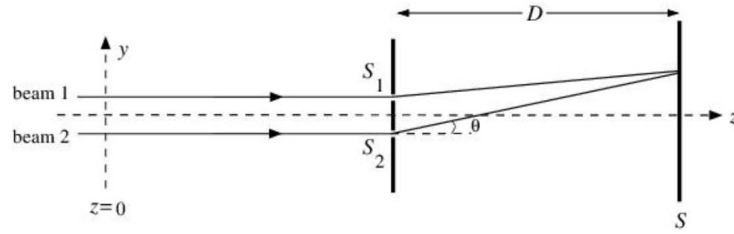


Figura 1:

- III.1. Sean los rayos 1 y 2 linealmente polarizados en $z = 0$. Los correspondientes vectores del campo eléctrico están dados por

$$\vec{E}_1 = \hat{i}E_0 \cos(\omega t) \quad (1a)$$

$$\vec{E}_2 = \hat{i}E_0 \cos(\omega t) \quad (1b)$$

donde \hat{i} es el vector unitario a lo largo del eje x , ω es la frecuencia angular de la luz y E_0 es la amplitud. Encuentre la expresión de la intensidad de la luz $I(\theta)$ que será observada en la pantalla, donde θ es el ángulo mostrado en la Figura 1. Expresé su respuesta en términos de θ , d , E_0 , c y ω (donde c es la velocidad de la luz). Además, note que la intensidad es proporcional al promedio en el tiempo del cuadrado del campo eléctrico. Aquí puede denotar a la constante de proporcionalidad como β . Puede ignorar la atenuación en la magnitud de los campos eléctricos con la distancia desde las rendijas a cualquier punto en la pantalla.

[1.0 puntos]

- III.2. Una losa de vidrio perfectamente transparente de grueso w e índice de refracción μ es introducida en el camino del rayo 1 antes de las rendijas. Encuentre la expresión de la intensidad de la luz $I(\theta)$ que será observada en la pantalla. Expresé su respuesta en términos de θ , d , E_0 , c , ω , μ y w .

[1.0 puntos]

- III.3. Un dispositivo óptico (conocido como lámina de cuarto de onda (QWP)) es introducida en el camino del rayo 1, antes de las rendijas, reemplazando a la losa. Este dispositivo cambia la polarización del rayo del estado de polarización lineal $\vec{E}_1 = \hat{i}E_0 \cos(\omega t)$ al estado de polarización circular, el cual está dado por

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[iE_0 \cos(\omega t) + \hat{j}E_0 \sin(\omega t)] \quad (2)$$

donde \hat{j} es el vector unitario a lo largo del eje y .

Asuma que el dispositivo no introduce diferencia de camino alguna y que es perfectamente transparente. Note que la punta del vector del campo eléctrico traza un círculo conforme el tiempo transcurre y por ende, se dice que el rayo está circularmente polarizado. Asumimos que el ángulo θ es lo suficientemente pequeño de modo que la intensidad desde la rendija uno no dependa de θ incluso para polarización \hat{j} .

- III.3.a. Encuentre la expresión de la intensidad de la luz $I(\theta)$ que será observada en la pantalla. Expresé su respuesta en términos de θ , d , E_0 , c y ω .
- III.3.b. ¿Cuál es la máxima intensidad I_{\max} ?
- III.3.c. ¿Cuál es la mínima intensidad I_{\min} ?

[2.0 puntos]

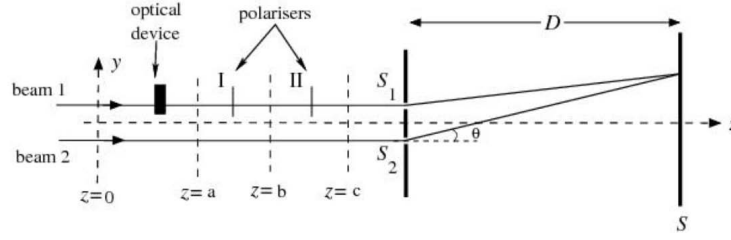


Figura 2:

- III.4. Ahora considere el montaje experimental (vea la Figura 2) en el que el rayo 1 está sujeto a:

- el dispositivo (QWP) descrito en la parte III.3,
- un polarizador lineal (marcado como I), entre $z = a$ y $z = b$ que permite que sólo pase la componente del campo eléctrico paralela a un eje (\hat{i}'). El vector unitario \hat{i}' está definido como $\hat{i}' = \hat{i} \cos \gamma + \hat{j} \sin \gamma$, y
- otro polarizador lineal (marcado como II) entre $z = b$ y $z = c$ que polariza al rayo de vuelta a la dirección \hat{i} .

De ese modo el rayo 1 está de vuelta en su estado original de polarización. Asuma que los polarizadores no introducen diferencia de camino alguna y son perfectamente transparentes.

- III.4.a. Escriba una expresión para el campo eléctrico del rayo 1 después del primer polarizador en $z = b$ [$\vec{E}_1(b)$].
- III.4.b. Escriba una expresión para el campo eléctrico del rayo 1 después del segundo polarizador en $z = c$ [$\vec{E}_1(c)$].
- III.4.c. ¿Cuál es la diferencia de fase α entre los dos rayos en las rendijas?

[2.0 puntos]

El tipo más general de polarización es la polarización elíptica. Una manera conveniente de expresar a la polarización elíptica es considerarla como una superposición de dos componentes ortogonales linealmente polarizadas, i.e.

$$\vec{E} = \hat{i}' E_0 \cos e \cos(\omega t) + \hat{j}' E_0 \sin e \sin(\omega t) \quad (3)$$

donde \hat{i}' , \hat{j}' y este estado de polarización son representados en la Figura 3.

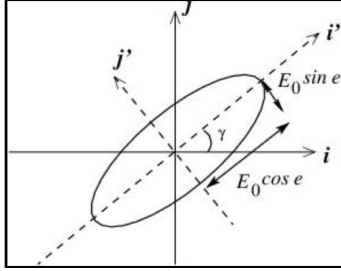


Figura 3:

La punta del vector del campo eléctrico traza una elipse conforme transcurre el tiempo. Aquí e representa la elipticidad y está dada por:

$$\tan e = \frac{\text{Semieje menor de la elipse}}{\text{Semieje mayor de la elipse}}$$

La polarización lineal (Ecuaciones (1)) y la polarización circular (Ecuación (2)) son casos especiales de la polarización elíptica (Ecuación (3)). Los dos parámetros $\gamma \in [0, \pi]$ y $e \in [-\pi/4, \pi/4]$ describen completamente el estado de polarización.

El estado de polarización también puede ser representado por un punto en una esfera de radio unitario llamada esfera de Poincare. La polarización del rayo descrita en la Ecuación (3) es representado por el punto P en la esfera de Poincare (vea la Figura 4), así la latitud es $\angle PCD = 2e$ y la longitud es $\angle ACD = 2\gamma$. Aquí C es el centro.

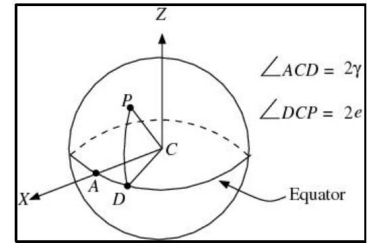


Figura 4:

III.5. Considere un punto en el ecuador de la esfera de Poincare.

III.5.a. Escriba el campo eléctrico \vec{E}_{eq} que corresponde a dicho punto.

III.5.b. ¿Cuál es su estado de polarización?

[0.5 puntos]

III.6. Considere un punto en el polo norte de la esfera de Poincare.

III.6.a. Escriba el campo eléctrico \vec{E}_{NP} que corresponde a dicho punto.

III.6.b. ¿Cuál es su estado de polarización?

[0.5 puntos]

III.7. Ahora, considere los tres estados de polarización del rayo 1 como fueron dados en la parte III.4. Represente a la polarización inicial (en $z = 0$) por un punto A_1 en la esfera de Poincare; después del dispositivo óptico, represente al estado (en $z = a$) por el punto A_2 ; y después del primer polarizador (en $z = b$), el estado es representado por el punto A_3 . En $z = c$, la polarización regresa a su estado original que es representado por A_1 . Localice estos puntos A_1 , A_2 y A_3 en la esfera de Poincare.

[1.5 puntos]

III.8. Si estos tres puntos (A_1 , A_2 y A_3 de la parte III.7) son unidos por grandes círculos en la esfera, un triángulo en la superficie de la esfera es obtenido. (Nota: Un gran círculo es una circunferencia en la esfera cuyo centro coincide con el centro de la esfera). La diferencia de fase α obtenida en la parte III.4 y el área S de la superficie curva delimitada por el triángulo están relacionadas entre sí. Relacione S con α .

Esta relación es general y fue obtenida por Pancharatnam, y la diferencia de fase es llamada *fase de Pancharatnam*.

[1.5 puntos]