

29 OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA
REYKJAVÍK, ICELAND, 1998

Problema 1 (Balanceo de un Prisma Hexagonal). Considerar un prisma hexagonal regular, largo, sólido y rígido como un tipo común de pluma (Figura 1.1). La masa del prisma es M y se distribuye uniformemente. La longitud de cada lado de la sección transversal del hexágono es a . El momento de inercia I del prisma hexagonal alrededor de su eje central es

$$(1) \quad I = \frac{5}{12} Ma^2$$

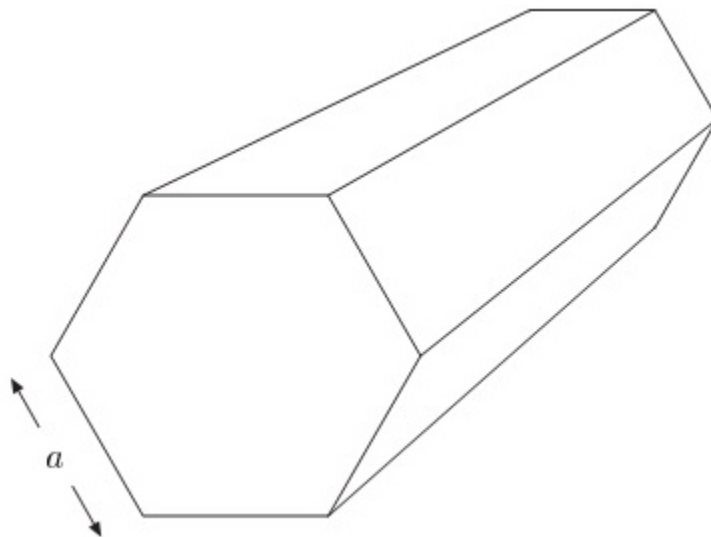


Figura 1.1: Un prisma sólido con la sección transversal de un hexágono regular.

El momento de inercia I' alrededor del borde del prisma es

$$(2) \quad I' = \frac{17}{12} Ma^2$$

- a) (3.5 puntos) El prisma está inicialmente en reposo con su eje horizontal en un plano inclinado el cual hace un ángulo pequeño θ con la horizontal (Figura 1.2). Asumir que la superficie del prisma es ligeramente cóncava, así que el prisma solo toca el plano en sus bordes. El efecto de esta concavidad sobre el momento de inercia puede ser ignorado. El prisma está ahora desplazado del reposo y empieza un balanceo irregular hacia el plano. Asumir que la fricción previene cualquier bajón y que el prisma no pierde contacto con el plano. La velocidad angular justo antes de que un borde golpee el plano es ω_i , mientras ω_f es la velocidad angular inmediatamente después del impacto.

Mostrar que podemos escribir

$$(3) \quad \omega_f = s\omega_i$$

y escribir el valor del coeficiente s .

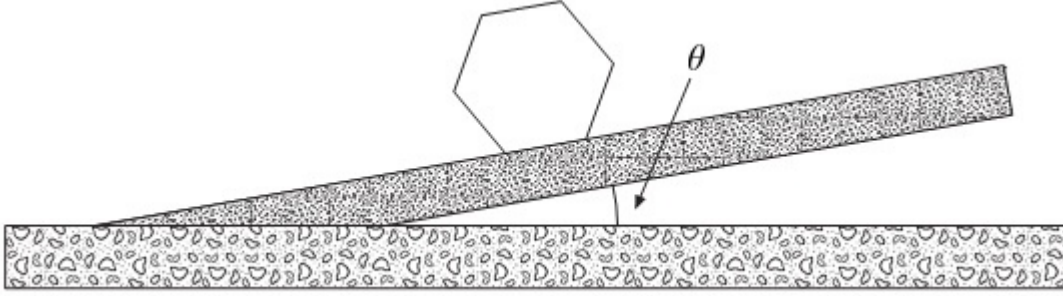


Figura 1.2: Un prisma hexagonal sobre un plano inclinado

- b) (1 punto) La energía cinética del prisma justo antes y después del impacto es similarmente K_i y K_f .

Mostrar que se puede escribir

$$(4) \quad K_f = rK_i$$

y escribir el valor del coeficiente r .

- c) (1.5 puntos) Para el siguiente impacto a ocurrir K_i puede exceder un valor mínimo $K_{i,min}$, el cual puede ser escrito de la forma

$$(5) \quad K_{i,min} = \delta Mga$$

donde $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ es la aceleración de gravedad.

Encontrar el coeficiente δ en términos del ángulo θ y el coeficiente r . (Usar el símbolo algebraico r , no su valor).

- d) (2 puntos) Si la condición de la parte (c) se satisface, la energía cinética K_i aproximaría un valor fijo $K_{i,0}$ como el prisma que rueda por la pendiente.

Dado que el límite existe, mostrar que $K_{i,0}$ puede ser escrito como:

$$(6) \quad K_{i,0} = \kappa Mga$$

y escribir el coeficiente κ en términos de θ y r .

- e) (2 puntos) Calcular, para 0.1° , el mínimo ángulo θ_0 , para el cual el movimiento irregular, una vez empezado, continuaría indefinidamente. Escribir la respuesta numérica.

Problema 2 (Agua Bajo una Capa de Hielo). Una capa de hielo es una hoja gruesa de hielo (unos cuantos km en grosor) descansando sobre el suelo bajo y extendiéndose horizontalmente a lo largo de decenas o cientos de kilómetros. En este problema consideraremos la fusión del hielo y el comportamiento del agua bajo una capa de hielo templada, es decir, una capa de hielo en el punto de fusión. Podemos asumir que bajo tales condiciones el hielo causa variaciones en la presión como un fluido viscoso, pero deforma en un modo quebradizo, principalmente por un movimiento vertical. Para fines de este problema se da la siguiente información.

1. Densidad del agua: $\rho_w = 1.000 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
 2. Densidad del hielo: $\rho_i = 0.917 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
 3. Calor específico del hielo: $c_i = 2.1 \cdot 10^3 \text{ J/(Kg } ^\circ\text{C)}$
 4. Calor específico latente del hielo: $L_i = 3.4 \cdot 10^5 \text{ J/Kg}$
 5. Densidad de la roca y magma: $\rho_r = 2.9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
 6. Calor específico de la roca y magma: $c_r = 700 \cdot 10^3 \text{ J/(Kg } ^\circ\text{C)}$
 7. Calor específico latente de la roca y magma: $L_r = 4.2 \cdot 10^5 \text{ J/Kg}$
 8. Promedio de calor exterior que fluye a través de la superficie terrestre: $J_Q = 0.06 \text{ W/m}^2$
 9. Punto de fusión del hielo: $T_0 = 0^\circ\text{C}$, constante
- a) (0.5 puntos) Considerar una capa de hielo gruesa en un lugar de calor promedio que fluye de el interior de la tierra. Usando los datos anteriores, calcular el grosor d de la capa de hielo derretido cada año.

- b) (3.5 puntos) Considerar ahora la superficie superior de una capa de hielo. Debajo de la tierra, la capa de hielo tiene un ángulo de inclinación α . La superficie superior de la capa se inclina por un ángulo β como se muestra en la Figura 2.1. El grosor vertical del hielo en $x = 0$ es h_0 . Por lo tanto las superficies inferior y superior de la capa de hielo pueden ser descritos por las ecuaciones

$$(7) \quad y_1 = x \tan \alpha, \quad y_2 = h_0 + x \tan \beta$$

Calcular una expresión para la presión p en el fondo de la capa de hielo como una función de la coordenada horizontal x .

Formular matemáticamente una condición entre β y α , así como el agua en una capa entre la capa de hielo y el suelo fluiría en ninguna dirección. Mostrar que la condición es de la forma $\tan \beta = s \tan \alpha$. Encontrar el coeficiente s y escribir el resultado en una forma simbólica.

La línea $y_1 = 0.8x$ en la Figura 2.2 muestra la superficie de la tierra debajo una capa de hielo. El grosor vertical h_0 en $x = 0$ es 2 km. Asumir que el agua en el fondo está en equilibrio. En una hoja de respuesta gráfica dibujar la línea y_1 y agregar una línea y_2 mostrando la superficie superior del hielo. Indicar sobre la figura cuál línea es cuál.

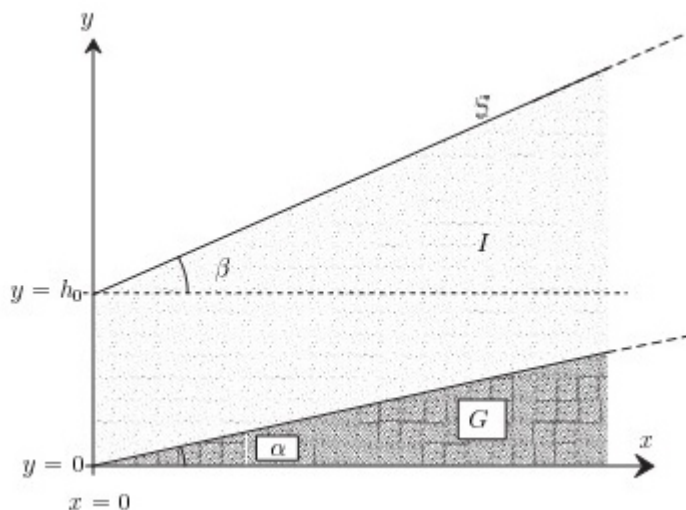


Figura 2.1: Sección transversal de una capa de hielo con una superficie plana reposando en un suelo plano inclinado. S : superficie, G : suelo, I : capa de hielo.

- c) Dentro de una hoja de hielo grande en un suelo horizontal y originalmente de grosor constante $D = 2.0$ km, un cuerpo de agua cónico de altura $H = 1.0$ km y radio $r = 1.0$ km se formó repentinamente por la fusión del hielo (Figura 2.3). Asumir que el hielo restante se ajusta a esto solamente por un movimiento vertical.

Mostrar analíticamente en una hoja de respuestas en blanco y pictóricamente en una hoja de respuestas gráfica, la forma de la superficie de la capa de hielo después de que el cono de agua se haya formado y llegado a un equilibrio hidrostático.

- d) (5 puntos) En su anual expedición un grupo internacional de científicos exploraron una capa de hielo templada en la antártica. La zona es normalmente una amplia meseta, pero esta vez encontraron una cráter de depresión profundo, formando hacia arriba un cono con profundidad h de 100 m y radio r de 500 m (Figura 2.4). El grosor del hielo en la zona es 2000 m.

Después de una discusión los científicos concluyeron que lo más probable es que existió una erupción volcánica de poca importancia debajo la capa de hielo. Una cantidad pequeña de magma (roca fundida) entrometido en el fondo de la capa de hielo, solidificado y enfriado, fusionando un cierto volumen de hielo. Los científicos intentaron como sigue para estimar el volumen de la intrusión y obtener una idea de como se transforma el agua derretida.

Asumir que el hielo solamente se mueve verticalmente. También asumir que el magma estuvo completamente derretido y empezó en 1200°C . Para simplicidad, asumir que la intrusión tenía la forma de un cono con una base circular verticalmente debajo de la depresión cónica en la superficie. El tiempo para el aumento del magma fue relativamente corto al tiempo para el intercambio de calor en el proceso. El flujo de calor se supone que ha sido principalmente vertical, tal que el volumen del hielo derretido en cualquier momento es limitado por una superficie cónica centrado por encima del centro de la intrusión de magma.

Dadas esas suposiciones el derretimiento del hielo toma lugar en dos pasos. En primero el agua no está en equilibrio de presión en la superficie del magma y por tanto fluye lejos. El agua fluyendo lejos puede ser asumido para tener una temperatura de 0°C . Subsecuentemente equilibrio hidrostático es alcanzado y la intrusión de agua acumulado arriba en lugar de fluir a lo lejos.

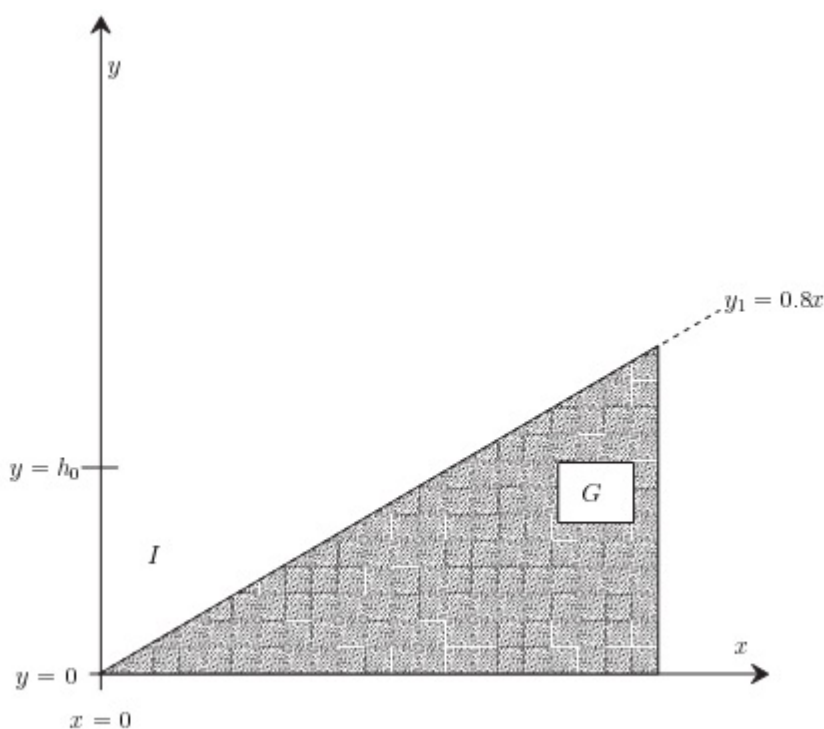


Figura 2.2: Sección transversal de una capa de hielo templada en un suelo inclinado con agua en el fondo en equilibrio. *G*: suelo, *I*: capa de hielo.

Cuando el equilibrio térmico a sido alcanzado, determinar las siguientes cantidades.

- La altura H de la cima del cono de agua formado bajo la capa de hielo, relativo al fondo original de la capa de hielo.
- La altura h_1 de la intrusión.
- La masa total m_{tot} del agua producido y la masa m' de agua que fluye a lo lejos.

Hacer en una hoja de respuesta gráfica, a escala, las formas de la intrusión de la roca y del cuerpo de agua restante. Usar el sistema coordenado sugerico en la Figura 2.4.

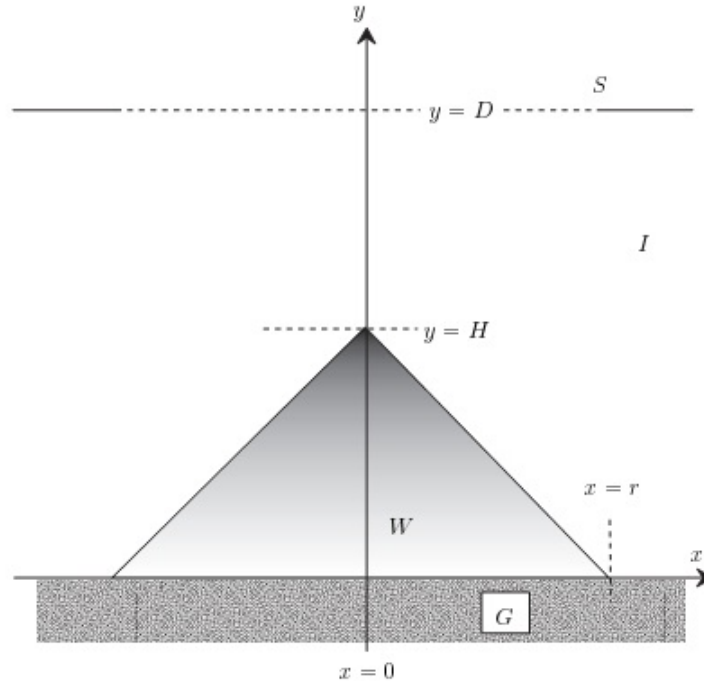


Figura 2.3: Una sección vertical a través de medio plano de un cono de agua dentro de una capa de hielo. S : superficie, W : agua, G : suelo, I : capa de hielo.

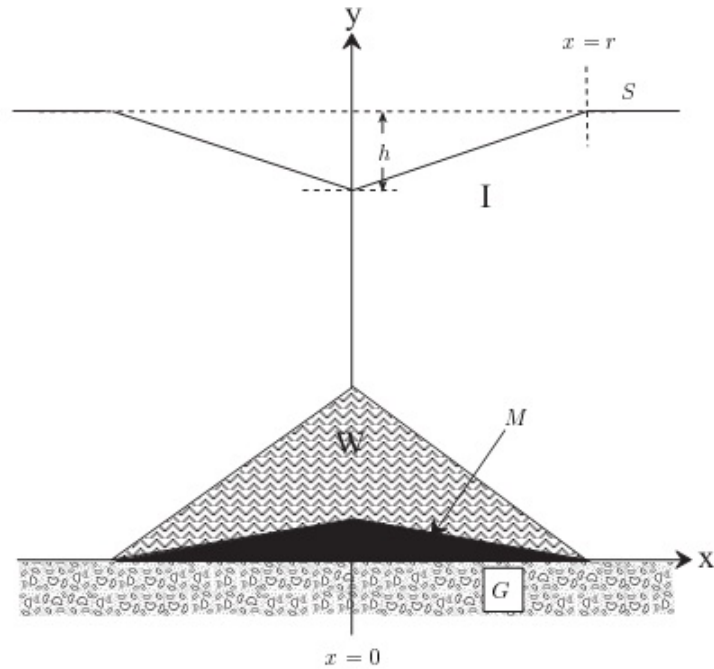


Figura 2.4: Una sección transversal vertical y central de una depresión cónica en una capa de hielo templada. S : superficie, G : suelo, I : capa de hielo, M : roca/intrusión de magma, W : agua. Notar que la figura NO está a escala

Problema 3 (*¿Mas Rápido que la Luz?*). En este problema analizamos e interpretamos medidas hechas en 1994 sobre la emisión de ondas de radio de una fuente compuesta dentro de nuestra galaxia.

El receptor se sintoniza a una amplia banda de ondas de radio de longitudes de onda de varios centímetros. La Figura 3.1 muestra una serie de imágenes grabadas en diferentes momentos. Los contornos indican la intensidad de la radiación constante en la misma forma como contornos de altitud en un mapa geográfico. En la figura los dos máximos se interpretan como muestra dos objetos que se mueven lejos de un centro común se muestra por cruces en las imágenes. (el centro, el cual se supone que se fija en el espacio, es también un emisor de radiación fuerte, pero principalmente en otras longitudes de onda). Las mediciones realizadas en las diversas fechas se realizaron a la misma hora del día.

La escala de la figura está dada por un segmento de línea mostrando un arco segundo(as). ($1 \text{ as} = 1/3600$ de un grado). La distancia al cuerpo celestial en el centro de la figura, indicado por cruces, está estimado a ser $R = 12.5 \text{ kpc}$. Un kiloparsec (kpc) es igual a $3.09 \cdot 10^{19} \text{ m}$. La velocidad de la luz es $c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Los errores en los cálculos no son requeridos en la solución.

- a) (2 puntos) Denotamos la posiciones angulares de los dos emisores de radio expulsados, relativos al centro común, por $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$, donde los subíndices 1 y 2 se refieren a la mano izquierda y derecha, respectivamente y t es el tiempo de observación. Las velocidades angulares como visto desde la Tierra, son ω_1 y ω_2 . Las aparentes velocidades lineales transversales correspondientes a las dos fuentes son denotados por $v'_{1,\perp}$ y $v'_{2,\perp}$.

Utilizando la Figura 3.1, hacer una gráfica para encontrar los valores numéricos de ω_1 y ω_2 en mili-arco-segundos por día(mas/d). También determinar los valores numéricos de $v'_{1,\perp}$ y $v'_{2,\perp}$, y escribir todas tus respuestas. (Puede ser sorprendido por algunos de los resultados.)

- b) (3 puntos) Con el fin de resolver el rompecabezas que surge en la parte (a), considerar una fuente de luz moviéndose con una velocidad \vec{v} en un ángulo ϕ ($0 \leq \phi \leq \pi$) hacia la dirección distante del observador O(Figura 3.2). La velocidad puede ser escrita como $v = \beta c$, donde c es la velocidad de la luz. La distancia a la fuente, como medido por el observador, es R . La velocidad angular de la fuente, como visto desde el observador, es ω , y la aparente velocidad lineal perpendicular a la línea de vista es v'_{\perp} .

Encontrar ω y v'_{\perp} en términos de β , R y ϕ .

- c) (1 punto) Asumir que los dos objetos expulsados, descritos en la introducción y en la parte (a), están moviéndose en direcciones opuestas con igual velocidad $v = \beta c$. Entonces el resultado de la parte (b) hace posible calcular β y ϕ de las velocidades angulares ω_1 y ω_2 y la distancia R . Aquí ϕ es el ángulo definido en la parte (b), para el objeto a mano izquierda, correspondiente al subíndice 1 en la parte (a).

Calcular fórmulas para β y ϕ en términos de las cantidades conocidas y determinar sus valores numéricos de los datos de la parte (a).

- d) (2 puntos) En la situación de un cuerpo de la parte (b), encontrar la condición para la velocidad perpendicular aparente v'_{\perp} sea mas grande que la velocidad de la luz c .

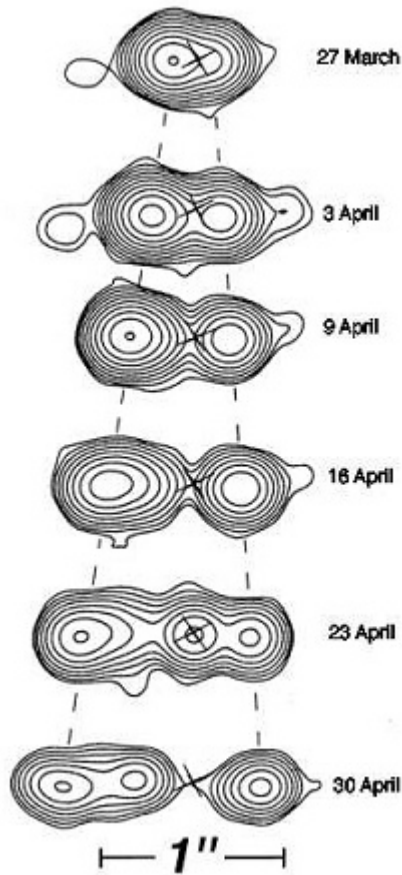


Figura 3.1: Emisión de radio de una fuente en nuestra galaxia.



Figura 3.2: El observador está en O y la posición original de la fuente de luz está en A . El vector velocidad es \vec{v}

Escribir la condición en la forma $\beta > f(\phi)$ y proporcionar una expresión analítica para la función f .

Dibujar en una hoja de respuestas gráfica la región física relevante del plano- (β, ϕ) . Mostrar sombreando en cuál parte de esta región la condición $v'_\perp > c$ se cumple.

- e) (1 punto) Todavía en la situación de un cuerpo de la parte (b), encontrar una expresión para el valor máximo $(v'_\perp)_{max}$ de la velocidad perpendicular aparente v'_\perp para un β dado. Notar que esta velocidad aumenta sin límite cuando $\beta \rightarrow 1$.
- f) (1 punto) La estimación para R dado en la introducción no es muy confiable. Los científicos tienen por lo tanto especulaciones empezadas sobre un mejor y mas directo método para determinar R . Una idea para esto es como sigue. Asumir que podemos identificar y medir las longitudes de onda de cambio Doppler de radiación λ_1 y λ_2 de los dos objetos expulsados, correspondiente a la misma longitud de onda original conocida λ_0 en el marco de reposo de los objetos.

Comenzando de las ecuaciones para el cambio Doppler relativístico, $\lambda = \lambda_0(1 - \beta \cos \phi)(1 - \beta^2)^{-1/2}$ y asumiendo, como antes, que ambos objetos tienen la misma velocidad v , mostrar que el desconocido

$\beta - v/c$ puede ser expresado en términos de λ_0 , λ_1 y λ_2 como

$$(8) \quad \beta - \sqrt{1 - \frac{\alpha \lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}$$

Escribir el valor numérico del coeficiente α . Puede notar que esto significa que la medida de longitud de onda sugerida en la práctica proporciona una nueva estimación de la distancia.