43 Olimpiada Internacional de Física

Tartu, Estonia 2012

Instrucciones

- **Sus respuestas deben estar expresadas en términos de las cantidades que están resaltadas en el texto del problema**, y pueden contener también constantes fundamentales si es necesario. Así, si está escrito que "la altura de la caja es a y su ancho es b", entonces a puede usarse en la respuesta, pero b no (a menos que esté resaltada más adelante, vea a continuación). Aquellas cantidades que están resaltadas en el texto de una subpregunta pueden usarse solo para responder esa subpregunta; las cantidades que están resaltadas en el texto introductorio del Problema (o una Parte del Problema), i.e. fuera de la extensión de cualquier subpregunta, pueden usarse en todas las respuestas de ese Problema (o de esa Parte del Problema).
- **Debería usar tan poco texto como sea posible:** Intente explicar su solución principalmente con ecuaciones, símbolos, números y diagramas.

Problema 1:
Centrarse en bocetos (13 puntos)

Parte A. Balística (4.5 puntos)

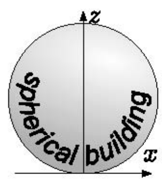
Una pelota, arrojada con una velocidad inicial v_0, se mueve en un campo gravitacional homogéneo en el plano $x-z$, donde el eje x es horizontal, y el eje z es vertical y antiparalelo a la aceleración de la caída libre g. Desprecie el arrastre del aire.

i. (0.8 pts) Ajustando el ángulo de lanzamiento para una pelota lanzada desde el origen con una velocidad inicial v_0 fija, se pueden golpear objetivos dentro de la región dada por

$$z \leq z_0 - kx^2$$

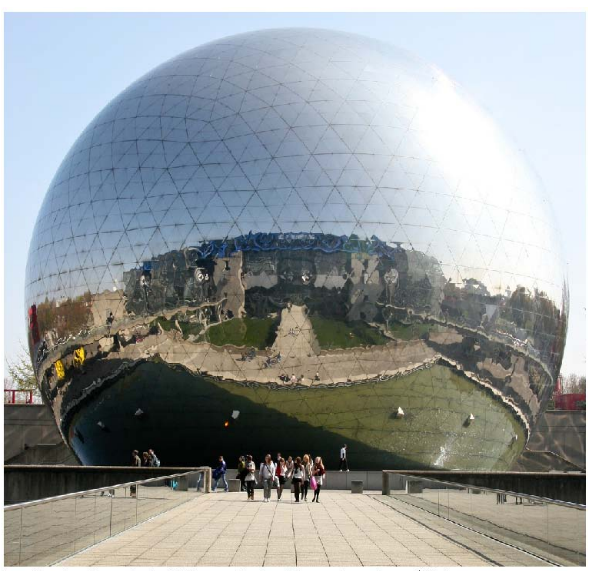
Puede usar este hecho sin probarlo. Encuentre las constantes z_0 y k.

ii. (1.2 pts) El punto de lanzamiento puede ser ahora libremente colocado a nivel del suelo $z = 0$, y el ángulo de lanzamiento puede ajustarse según se requiera. El objetivo es golpear el punto más alto de un edificio esférico de radio R (vea la figura) con la mínima velocidad inicial v_0.



Rebotar en el techo antes de alcanzar el blanco no está permitido. Bosqueje cualitativamente la forma de la trayectoria óptima de la pelota. Note que los puntos se otorgan sólo por el bosquejo.

iii. (2.5 pts) ¿Cuál es la mínima velocidad de lanzamiento v_{min} necesaria para golpear el punto más alto de un edificio esférico de radio R?



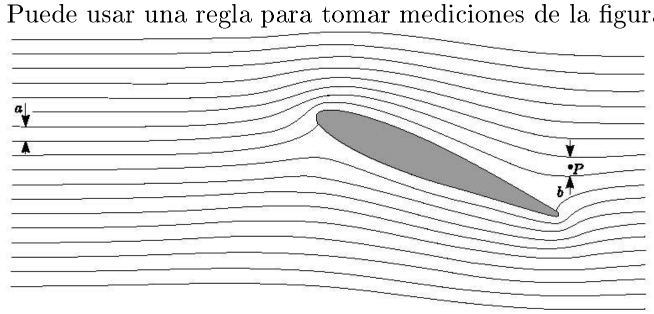
La Geode, Parc de la Villette, Paris. Photo: katchooo/flickr.com

Parte B. Flujo de aire en un ala (4 puntos)

Para esta parte del problema, la siguiente información puede ser útil. Para un líquido o gas en un tubo a lo largo de una línea de corriente, $p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const.}$, asumiendo que la velocidad v sea mucho menor que la velocidad del sonido. Aquí ρ es la densidad, h es la altura, g es la aceleración de la caída libre y p es la presión hidrostática. Las líneas de corriente están definidas como las trayectorias de las partículas de fluido (asumiendo que el patrón de flujo sea estacionario). Note que el término $\frac{1}{2}\rho v^2$ es llamado presión dinámica.

En la figura mostrada abajo, se representa un corte transversal de un ala de aeronave junto con las líneas de corriente del flujo de aire alrededor del ala, como se ve en el marco de referencia de ésta. Asuma que (a) el flujo de aire es puramente bidimensional (i.e. los vectores de velocidad del aire permanecen en el plano de la figura); (b) el patrón de las líneas de corriente es independiente de la velocidad de la aeronave; (c) no hay viento; (d) la presión dinámica es mucho menor que la presión atmosférica $p_0 = 1.0 \times 10^5\,\text{Pa}$.

Puede usar una regla para tomar mediciones de la figura.



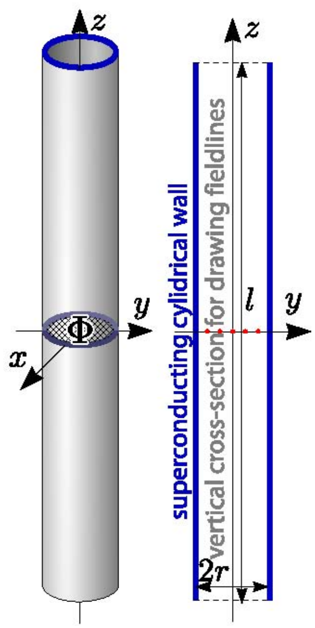
i. (0.8 pts) Si la velocidad de la aeronave respecto al suelo es $v_0 = 100\,\text{m/s}$, ¿cuál es la velocidad del aire , v_P, en el punto P (marcado en la figura) respecto al suelo?

ii. (1.2 pts) En el caso que haya una alta humedad relativa, conforme la velocidad respecto al suelo de la aeronave aumenta por encima de un valor crítico v_{crit}, una corriente de pequeñas gotas de agua se forma detrás del ala. Las gotas emergen de un cierto punto Q. Marque dicho punto Q en la figura de su hoja de respuestas. Explique cualitativamente (usando algunas fórmulas y con tampoco texto como sea posible) cómo determinó la posición de Q.

iii. (2.0 pts) Estime la velocidad crítica v_{crit} usando los siguientes datos: la humedad relativa del aire es $r = 90\,\%$, el calor específico del aire a presión constante es $c_p = 1.00 \times 10^3\,\text{J/kg K}$, la presión del vapor de agua saturado es: $p_{sa} = 2.31\,\text{kPa}$ a temperatura del aire sin perturbar $T_a = 293\,\text{K}$ y $p_{sa} = 2.46\,\text{kPa}$ a $T_a = 294\,\text{K}$. Dependiendo de sus aproximaciones, también podría necesitar el calor específico del aire a volumen constante $c_V = 0.717 \times 10^3\,\text{J/kg K}$. Note que la humedad relativa está definida como la razón entre la presión de vapor y la presión de vapor saturado a la temperatura dada. La presión de vapor saturado está definida como la presión del vapor a la que éste está en equilibrio con el líquido.

Parte C. Popotes magnéticos (4.5 puntos)

Considere un tubo cilíndrico hecho de un material superconductor. La longitud del tubo es l y su radio interno es r con $l \gg r$. El centro del tubo coincide con el origen, y su eje coincide con el eje z.

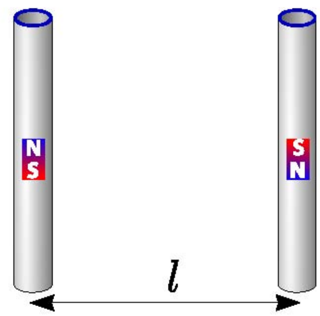


Hay un flujo magnético Φ a través de la sección transversal del tubo $z = 0$, $x^2 + y^2 < r^2$. Un superconductor es un material que expele cualquier campo magnético (el campo es cero dentro del material).

i. (0.8 pts) Esboce cinco líneas de campo magnético, que pasen por las posiciones de los cinco puntos rojos marcados en la sección transversal axial del tubo en la figura anterior.

ii. (1.2 pts) Encuentre la fuerza de tensión T a lo largo del eje z a la mitad del tubo (i.e. la fuerza con la que las mitades $z > 0$ y $z < 0$ interactúan entre sí).

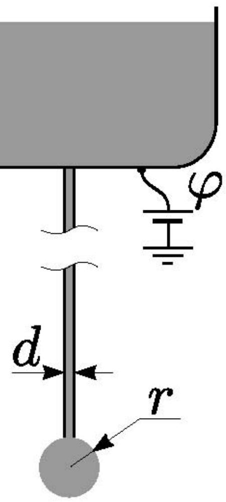
iii. (2.5 pts) Considere otro tubo, idéntico y paralelo al primero.



El segundo tubo tiene el mismo campo magnético pero en dirección opuesta, y su centro está en $y = l$, $x = z = 0$ (de tal modo que los tubos forman los lados opuestos de un cuadrado). Determine la fuerza de la interacción magnética F entre ambos tubos.

Problema 2:
Generador de Kelvin (8 puntos)

Los siguientes hecho sobre la tensión superficial podrían resultar útiles para este problema. Para las moléculas de un líquido, las posiciones en la interfaz líquido-aire son menos favorables comparadas con las posiciones en el interior del líquido. Esta interfaz es descrita por la llamada energía superficial $U = \sigma S$, donde S es el área superficial de la interfaz y σ es el coeficiente de tensión superficial del líquido. Más aún, dos fragmentos de la superficie líquida se jalan entre sí con fuerza $F = \sigma l$, donde l es la longitud de la línea recta que separa a dichos fragmentos.



Un largo tubo metálico con diámetro interno d está apuntando directamente hacia abajo. El agua está goteando lentamente desde la boquilla en el extremo interior (vea la figura anterior). El agua puede considerarse como conductora eléctrica; su tensión superficial es σ y su densidad es ρ. Una gotita de radio r cuelga debajo de la boquilla. El radio crece lentamente en el tiempo hasta que la gota se separa de la boquilla debido a la aceleración de la caída libre g. Siempre asuma que $d \ll r$.

Parte A. Un tubo (4 puntos)

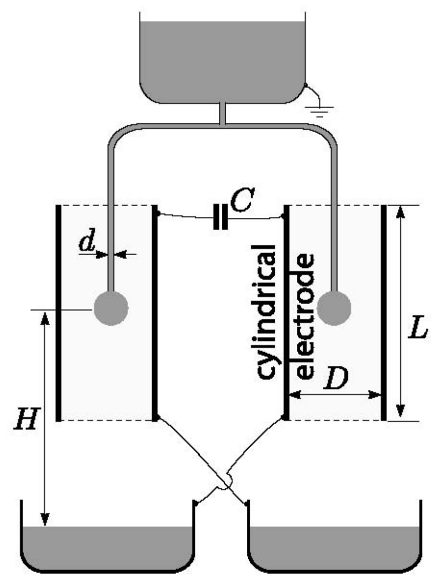
i. (1.2 pts) Encuentre el radio $r_{\max}$ de la gota justo antes de que se separa de la boquilla.

ii. (1.2 pts) Respecto de los lejanos alrededores, el potencial electrostático del tubo es φ. Encuentre la carga Q de la gota cuando su radio es r.

iii. (1.6 pts) Considere la situación en la que r se mantiene constante y φ aumenta lentamente. La gotita se vuelve inestable y se rompe si la presión hidrostática dentro de ella se vuelve menor que la presión atmosférica. Encuentre el potencial crítico $\varphi_{\max}$ xon el cual eso ocurrirá.

Parte B. Dos tubos (4 puntos)

Un aparato llamado "Generador de Kelvin" consiste en dos tubos, ambos idénticos al descrito en la Parte A, conectados a través de una unión en T, vea la figura. Los extremos de ambos tubos están en los centros de dos electrodos cilíndricos (con altura L y diámetro D, con $L \gg D \gg r$). Para ambos tubos, el ritmo de goteo es n gotitas por unidad de tiempo. Las gotas caen desde una altura H en recipientes conductores debajo de las boquillas, conectados en cruz a los electrodos como se muestra en el diagrama. Los electrodos están conectados por un capacitor con capacitancia C. No hay carga neta en el sistema de recipientes y electrodos. Note que el contenedor de agua de hasta arriba está conectado a tierra como se muestra. La primera gota en caer tendrá una carga microscópica que causará un desequilibrio entre los dos lados y una pequeña separación de carga a lo largo del capacitor.



i. (1.2 pts) Exprese el valor absoluto de la carga Q_0 de las gotas mientras se separan de los tubos, y en el instante en el que la carga del capacitor es q. Exprese Q_0 en términos de $r_{\max}$ (de la Parte A-i) y desprecie el efecto descrito en la Parte-iii.

ii. (1.5 pts) Encuentre la dependencia de q con el tiempo t aproximándola como una función continua $q(t)$ y asumiendo que $q(0) = q_0$.

iii. (1.3 pts) El funcionamiento del generador puede ser obstaculizado por el efecto mostrado en la Parte A-iii. Además, un límite $U_{\max}$ al potencial alcanzable entre los electrodos es impuesto por el empuje electrostático entre la gotita y el recipiente debajo de ella. Encuentre $U_{\max}$.

Problema 3:
Formación de protoestrellas (9 puntos)

Modelemos la formación de estrellas como se muestra a continuación. Una nube esférica de gas interestelar disperso, inicialmente en reposo, comienza a colapsar debido a su propia gravedad. El radio inicial de la bola es r_0 y su masa es m. La temperatura de los alrededores (mucho más dispersos que el gas) y la temperatura inicial del gas es uniformemente T_0. El gas puede asumirse como ideal. La masa molar promedio del gas es μ y su índice adiabático es $\gamma > \frac{4}{3}$. Asuma que $\frac{Gm\mu}{r_0} \gg RT_0$, donde R es la constante de los gases ideales y G es la constante gravitacional.

i. (0.8 pts) Durante la mayor parte del colapso, el gas es tan transparente que cualquier calor generado es inmediatamente radiado, i.e. la bola está en equilbiro termodinámico con sus alrededores. ¿Cuál es el número de veces n por el cual la presión aumenta cuando el radio se reduce a la mitad $r_1 = 0.5r_0$ Asuma que la densidad del gas permanece uniforme.

ii. (1 pt) Estime el tiempo t_2 necesario para que el radio se reduzca de r_0 a $r_2 = 0.95r_0$. Desprecie el cambio en el campo gravitacional en la posición de una partícula de gas que cae.

iii. (2.5 pts) Asumiendo que la presión se mantiene despreciable, encuentre el tiempo $t_{r\to 0}$ necesario para que la bola colapse de r_0 a un radio mucho menor, usando las leyes de Kepler.

iv. (1.7 pts) A algún radio $r_3 \ll r_0$ el gas se vuelve lo suficientemente denso para opacar la radiación de calor. Calcule la cantidad de calor Q radiada durante el colapso desde el radio r_0 hasta r_3.

v. (1 pt) Para radios menores a r_3 puede despreciarse la pérdida de calor debida a la radiación. Determine cómo la temperatura T de la bola depende de su radio para $r < r_3$.

vi. (2 pts) Eventualmente no podrá despreciarse el efecto de la presión en la dinámica del gas y el colapso se detendrá en $r = r_4$ (con $r_4 \ll r_3$). Sin embargo, la pérdida por radiación aún puede ser despreciada y la temperatura todavía no es lo suficientemente alta para desatar una fusión nuclear. La presión de tal protoestrella ya no es uniforme, pero aún pueden realizarse estimaciones aproximadas con prefactores numéricos inexactos. *Estime* el radio final r_4 y la temperatura respectiva T_4.