38 OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA
ISFAHAN, IRAN, 2007

Problema 1 (Problema Teórico AZUL)**.** En física, siempre y cuando tengamos una relación igual, ambos lados de la ecuación deberían ser del mismo tipo i.e. deben tener la misma dimensión. Por ejemplo, no puedes tener una situación donde la cantidad en el lado derecho de la ecuación represente una longitud y la cantidad en el lado izquierdo represente un intervalo de tiempo. Usando este hecho, algunas veces se puede deducir la forma de un relación física sin resolver el problema analíticamente. Por ejemplo, si se nos pidió encontrar el tiempo que toma un objeto para caer de una altura h bajo la influencia de una aceleración gravitacional constante g, se podría argumentar que solo se necesita construir una cantidad representando un intervalo de tiempo, usando las cantidades g y h y la única forma posible de hacer eso es $T = a(h/g)^{1/2}$. Notar que esa solución incluye un coeficiente todavía indeterminado a, el cuál es adimensional y así no puede ser determinado usando este método. Ese coeficiente puede ser un número tal como 1, 1/2, $\sqrt{3}$, π, o cualquier otro número real. Este método de deducción de relaciones físicas es llamado *análisis dimensional*. En análisis dimensional los coeficientes adimensionales no son importantes y no necesitamos escribirlos. Afortunadamente en muchos problemas de física, esos coeficientes son de orden y la eliminación de ellos no cambia el orden de magnitud de las cantidades físicas. Por tanto, aplicando el análisis dimensional al problema de arriba, obtenemos $T = (h/g)^{1/2}$.

Generalmente, las dimensiones de una cantidad física son escritos en términos de las dimensiones de las cuatro cantidades fundamentales: M (masa), L (longitud), T (tiempo) y K (temperatura). La dimensión de una cantidad arbitraria x es denotada por $[x]$. Como un ejemplo, para expresar la dimensión de la velocidad v, energía cinética E_k y la capacidad de calor C_v, escribimos: $[v] = LT^{-1}$, $[E_k] = ML^2T^{-2}$, $[C_v] = ML^2T^{-2}K^{-1}$.

1. Constantes Fundamentales y Análisis Dimensional

1.1	Encontrar las dimensiones de las *constantes fundamentales*, i.e. la constante de Planck's h, la velocidad de la luz c, la constante universal de gravitación G y la constante de Boltzmann k_B en términos de las dimensiones de longitud, masa, tiempo y temperatura.	0.8

La ley de Stefan-Boltzmann establece que la potencia emisiva del cuerpo negro, el cual es la energía total radiada por unidad del área de superficie de un cuerpo negro en unidad de tiempo es igual a $\sigma\theta^4$ donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann's y θ es la temperatura absoluta del cuerpo negro.

1.2	Determinar las dimensiones de la constante de Stefan-Boltzmann's en términos de las dimensiones de longitud, masa, tiempo y temperatura.	0.5

La constante de Stefan-Boltzmann's no es una constante fundamental y se puede escribir en términos de las constantes fundamentales i.e. se puede escribir $\sigma = ah^\alpha c^\beta G^\gamma k_B^\delta$. En esta relación a es un parámetro adimensional de orden 1. Como se mencionó antes, el valor exacto de a no es importante desde nuestro punto de vista, asi que se puso igual a 1.

1.3	Encontrar α, β, γ y δ usando análisis dimensional	1.0

2. Física de los Agujeros Negros

En esta parte del problema, nos gustaría encontrar algunas propiedades de los agujeros negros usando análisis dimensional. De acuerdo con un teorema en física conocido como *el teorema no hair*, todas las características de los agujeros negros qu son considerados en este problema dependen solo de la masa de los agujeros negros. Una característica de un agujero negro es el área de su horizonte de eventos. En términos generales, el horizonte de eventos es la frontera del agujero negro. Dentro de esa frontera, la gravedad es muy fuerte que ni siquiera la luz puede salir de la región delimitada por la frontera.

Nos gustaría encontrar una relación entre la masa de un agujero negro m y el área de su horizonte de eventos A. Esa área depende de la masa del agujero negro, la velocidad de la luz y la constante universal de gravitación. Como en 1.3 debemos escribir $A = G^{\alpha}c^{\beta}m^{\gamma}$.

2.1	Usar análisis dimensional para encontrar α, β y γ.	0.8

Del resultado de 2.1, es claro que el área del horizonte de eventos de un agujero negro incrementa con su masa. Desde el punto de vista clásico, nada sale de un agujero negro y por lo tanto en todos los procesos físicos del área del horizonte de eventos puede aumentar sólo. En analogía con la segunda ley de termodinámica, Bekenstein propuso asignar entropía S a un agujero negro, proporcional al área de su horizonte de eventos i.e. $S = \eta A$. Esta conjetura ha sido hecha más plausible usando otros argumentos.

2.2	Usar la definición de termodinámica de entropía $dS = dQ/\theta$ para encontrar las dimensiones de entropía. dQ es el intercambio de calor y θ es la temperatura absoluta del sistema.	0.2

2.3	Como en 1.3, expresar la constante dimensionada η como una función de las constantes fundamentales h, c, G y k_B.	1.1

***No** use análisis dimensional para el resto del problema, pero puedes usar los resultados que has obtenido en las secciones anteriores.*

3. La radiación de Hawking

Con un enfoque semi-mecánica cuántica, Hawking argumento lo contrario al punto de vista clásico, los agujeros negros emiten radiación similar a la radiación de un cuerpo negro a una temperatura el cual es llamado la *temperatura de Hawking*

3.1	Usar $E = mc^2$, el cual da la energía del agujero negro en términos de su masa y las leyes de termodinámica para expresar la temperatura de Hawking θ_H de un agujero negro en términos de su masa y de la constante fundamental. Asumir que el agujero negro no trabaja en su entorno.	0.8

3.2	La masa de un agujero negro aislado cambiaría debido a la radiación de Hawking Usar la ley de Stefan-Boltzmann's para encontrar la dependencia de esta razón de cambio sobre la temperatura de Hawking θ_H del agujero negro y expresarlo en términos de la masa del agujero negro y de las constantes fundamentales.	0.7

3.3	Encontrar el tiempo $t*$ que toma un agujero negro aislado de masa m para evaporarse completamente i.e. para perder toda su masa.	1.1

Desde el punto de vista de la termodinámica, los agujeros negros presentan ciertas conductas exóticas. Por ejemplo la capacidad de calor de un agujero negro es negativa.

3.4	Encontrar la capacidad de calor de un agujero negro de masa m.	0.6

4. Agujeros Negros y la Radiación Cósmica de Fondo

Considerar un agujero negro expuesto a la radiación cósmica de fondo. La radiación cósmica de fondo es una radiación de cuerpo negro con una temperatura θ_H, el cual llena el universo entero. Un objeto con área total A recibirá una energía igual a $\sigma\theta_B^4 \times A$ por unidad de tiempo. Un agujero negro, por lo tanto, pierde energía a lo largo de la radiación de Hawking y gana energía de la radiación cósmica de fondo.

4.1	Encontrar la razón de cambio de la masa de un agujero negro en términos de la masa de un agujero negro, la temperatura de la radiación cósmica de fondo y de las constantes fundamentales.	0.8

4.2	En una cierta masa $m*$, esa razón de cambio desaparecería. Encontrar $m*$ y expresarlo en términos de θ_B y de las constantes fundamentales.	0.4

4.3	Usa tus respuestas para 4.2 para sustituir θ_B en tu respuesta de la parte 4.1 y expresar la razón de cambio de la masa de un agujero negro en términos de m, $m*$ y las constantes fundamentales.	0.2

4.4	Encontrar la temperatura de Hawking de un agujero negro en equilibrio térmico con radiación cósmica de fondo.	0.4

4.5	¿ Está estable o inestable el equilibrio? ¿ por qué? (Expresa tus respuestas matemáticamente)	0.6

Problema 2 (Problema Teórico Naranja)**.** En este problema nos ocupamos de un modelo simplificado de los acelerómetros diseñados para activar las bolsas de aire de seguridad de los automóviles durante una colisión. Queremos construir un sistema electromecánico de tal manera que cuando la aceleración supera un cierto límite, uno de los parámetros eléctricos del sistema tales como el voltaje en un cierto punto del circuito excederá un umbral y la bolsa de aire se activará como resultado.

Nota: Ignorar la gravedad en este problema.

1 Considerar un condensador de placas paralelas como en la Figura 1. El área de cada placa en el condensador es A y la distancia entre las dos placas es d. La distancia entre las dos placas es mucho mas pequeño que las dimensiones de las placas. Una de esas placas está en contacto con una pared a través de un resorte con una constante de resorte k, y la otra placa es fijada. Cuando la distancia entre las placas es d el resorte no está comprimido ni estirado, en otras palabras, no se ejerce fuerza sobre el resorte en este estado. Asumir que la permitividad del aire entre las placas es el vacío libre ε_0. La capacitancia correspondiente a la distancia entre las placas del condensador es $C_0 = \varepsilon_0 A/d$. Ponemos cargas $+Q$ y $-Q$ sobre las placas y dejamos que el sistema alcance el equilibrio mecánico.

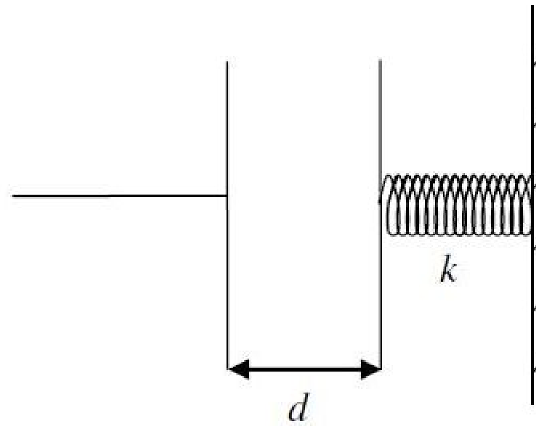

Figura 1

1.1	Calcular la fuerza eléctrica F_E, ejercida por las placas entre sí.	0.8

1.2	Sea x un desplazamiento de las placas conectadas al resorte. Encontrar X.	0.6

1.3	En este estado,¿ Qué es la diferencia potencial eléctrica V entre entre las placas del condensador en términos de Q, A, d y k?	0.4

1.4	Sea C la capacitancia del condensador, definido como la razón de carga para de diferencia potencial. Encontrar C/C_0 como una función de Q, A, d y k	0.3

1.5	¿ Qué es la energía total U, almacenado en el sistema en términos de Q, A, d y k?	0.6

Figura 2 muestra una masa M el cual está unido a una placa conductora con masa despreciable y también a dos resortes teniendo idénticas constantes de resorte k. La placa conductora puede moverse hacia atrás y hacia adelante en el espacio entre las dos placas conductoras fijas. Todas esas placas son similares y tienen el mismo área A. Así esas tres placas forman dos condensadores. Como se muestra en Figura 2, las placas fija están conectadas a los voltajes V y $-V$, y la placa intermedia está conectada a través de un interruptor dos-estados al suelo. El cable conectado a la placa movible no perturba el movimiento de las placas y las tres placas siempre permanecerán paralelas. Cuando todo el complejo no está siendo acelerada, la distancia de cada placa fija a la placa movible es d el cual es mucho más pequeña que las dimensiones de las placas. El grosor de la placa movible puede ser ignorada.

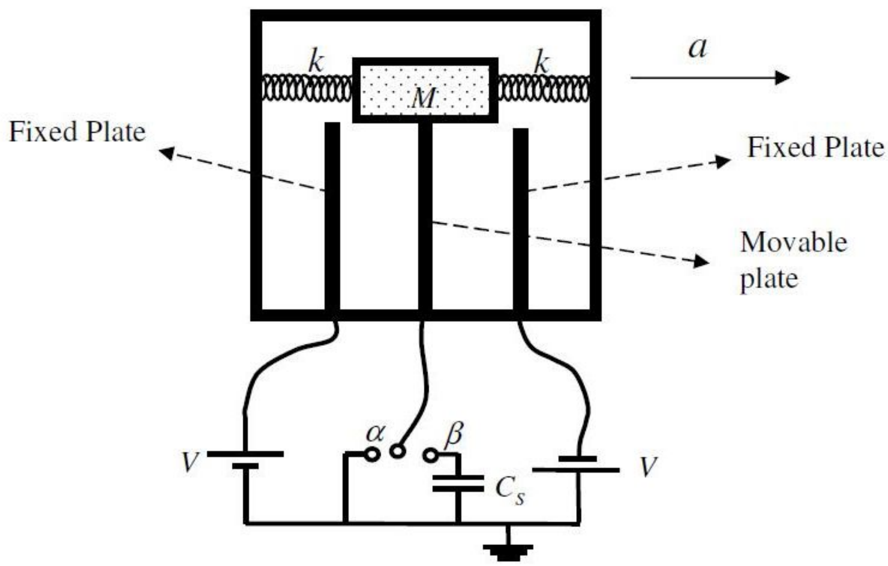

Figura 2

El interruptor puede estar en cualquiera de los dos estados α y β. Asumir que todo el condensador está siendo acelerado a lo largo con el automóvil y la aceleración es constante. Asumir que durante esa aceleración constante, el resorte no oscila y todos los componentes de todo el condensador están en sus posiciones de equilibrio, i.e. ellos no se mueven con respecto entre sí y por tanto con respecto al automóvil.
Debido a la aceleración , la placa movible sería desplazada una cierta cantidad x del intermedio entre las dos placas fijas.

2 Considerar el caso donde el interruptor está en el estado α i.e. la placa movible está conectada al suelo a través de un cable, entonces

2.1	Encontrar la carga sobre cada condensador como una función de x.	0.4

2.2	Encontrar la fuerza eléctrica neto sobre la placa movible F_E, como una función de x.	0.4

2.3	Asumir $d >> x$ y términos de orden x^2 pueden ser ignorados en comparación con los términos de orden d^2. Simplificar la respuesta a la parte anterior.	0.2

2.4	Escribir la fuerza total sobre la placa movible(la suma de las fuerzas eléctrica y del resorte) como $-k_{ff}x$ y dar la forma de k_{eff}.	0.7

2.5	Expresar la constante de aceleración a como una función de x.	0.4

3 Asumimos ahora que el interruptor está en el estado β i.e. la placa movible está conectada al suelo a través del condensador, la capacitancia el cuál es C_s(No existe carga inicial sobre el condensador). Si la placa movible es desplazada por una cantidad x, de la posición central,

3.1	Encontrar la diferencia del potencial eléctrico V_s a través del condensador C_s como una función de x.	1.5

3.2	De nuevo asumir que $d >> x$ y términos de orden x^2 pueden ser ignorados en comparación con los términos de orden d^2. Simplificar la respuesta a la parte anterior.	0.2

4 Nos gustaría ajustar los parámetros en este problema tal que la bolsa de aire no será activada con el frenado normal sino que se abre lo suficientemente rápido durante una colisión para prevenir que la cabeza del conductor colisione con el parabrisas o el volante. Como has visto en parte 2, la fuerza ejercida sobre la placa movible por los resortes y y las cargas eléctricas pueden ser representados como la de un resorte con una constante de resorte efectiva k_{eff}. El complejo condensador completo es similar al sistema *masa y resorte* de masa M y constante de resorte k_{eff} bajo la influencia de una constante de aceleración a, el cual en este problema es la aceleración del automóvil.

*Nota:*En esta parte del problema, la suposición que la masa y el resorte están en equilibrio bajo una constante de aceleración y por lo tanto son fijadas con relación al automóvil, ya no se cumple.

Ignorar la fricción y considerar los siguientes valores numéricos para los parámetros del problema:
$d = 1.0$ cm,
$A = 2.5 \times 10^{-2}$ m^2,
$k = 4.2 \times 10^3$ N/m,
$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ C^2/Nm^2,
$V = 12$ V,
$M = 0.15$ kg.

4.1	Usando estos datos, encontrar la razón de la fuerza eléctrica calculado en la sección 2.3 a la fuerza de los resortes y mostrar que podemos ignorar la fuerza eléctrica comparada a las fuerzas de los resortes.	0.6

Aunque no se calculó la fuerza eléctrica para el caso cuando el interruptor está en estado β, se puede mostrar que en esta situación, bastante similar, la fuerza eléctrica es pequeña y puede ser ignorada.

4.2	Si el automóvil mientras viajaba a una velocidad constante, de repente frena con una constante de aceleración a,¿ qué es el desplazamiento máximo de la placa movible? Da tus respuestas en parámetros.	0.6

Asumir que el interruptor está en estado β y el sistema está designado tal que cuando el voltaje eléctrico a través del condensador alcanza $V_s = 0.15$ V, la bolsa de aire es activada. Nos gustaría que la bolsa de aire no sea activada durante un freno normal cuando la aceleración del automóvil es menos que la aceleración de la gravedad $g = 9.8\ m/s^2$, sino ser activado en otro caso.

4.3	¿ Cuánto debería ser C_s para este propósito?.	0.6

Nos gustaría saber si la bolsa de aire sería activada rápidamente como para prevenir que la cabeza del conductor golpee el parabrisas o el volante. Asumir que como resultado de la colisión, el automóvil experimenta una des-aceleración igual a g, pero la cabeza del conductor se mantiene en movimiento a una velocidad constante.

4.4	Estimando la distancia entre la cabeza del conductor y el volante, encontrar el tiempo t_1 que tarda antes de que la cabeza del conductor golpee el volante.	0.8

4.5	Encontrar en tiempo t_2 antes de que la bolsa de aire sea activada y compararla a t_1. ¿ La bolsa de aire se activa en tiempo? Asumir que la bolsa de aire se activa instantáneamente.	0.9

Problema 3 (Problema Teórico Rosa). Dos estrellas rotando alrededor de su centro de masa forman un sistema estelar binario. Casi la mitad de las estrellas en nuestra galaxia son sistemas estelares binarios. No es fácil darse cuenta de la naturaleza binaria de la mayoría de estos sistemas estelares desde la Tierra, como la distancia entre las dos estrellas es mas pequeña que su distancia de nosotros y así las estrellas no pueden ser resueltas con telescopio. Por tanto, tenemos que usar o fotometría o espectometría para observar las variaciones en la intensidad o el espectro de una estrella particular para averiguar si se trata de un sistema binario o no.

Fotometría de Estrellas Binarias

Si estamos exactamente en el plano de movimiento de las dos estrellas, entonces una estrella se oculta (pasar por delante de) la otra estrella en ciertos momentos y la intensidad de todo el sistema puede variar con el tiempo, desde nuestro punto de observación. Estos sistemas binarios son llamados binarios eclípticos.

1 Asumir que las dos estrellas están en movimiento sobre órbitas circulares alrededor de su centro centro de masa común con una velocidad angular constante ω y estamos exactamente sobre el plano de movimiento del sistema binario. También asumir que las temperaturas de las superficies de las estrellas son T_1 y T_2 ($T_1 > T_2$) y los radios correspondientes son R_1 y R_2 ($R_1 > R_2$), respectivamente. La intensidad total de luz, medido en la Tierra, está trazado en la Figura 1 como una función del tiempo. Las mediciones cuidadosas indican que la intensidad de la luz incidente de las estrellas correspondientes a los mínimos son 90 y 63 por ciento de la intensidad máxima I_0, recibido de ambas estrellas($I_0 = 4.8 \times 10^{-9}$ W/m^2). El eje vertical en la Figura 1 muestra la razón I/I_0 y el eje horizontal está marcado en días.

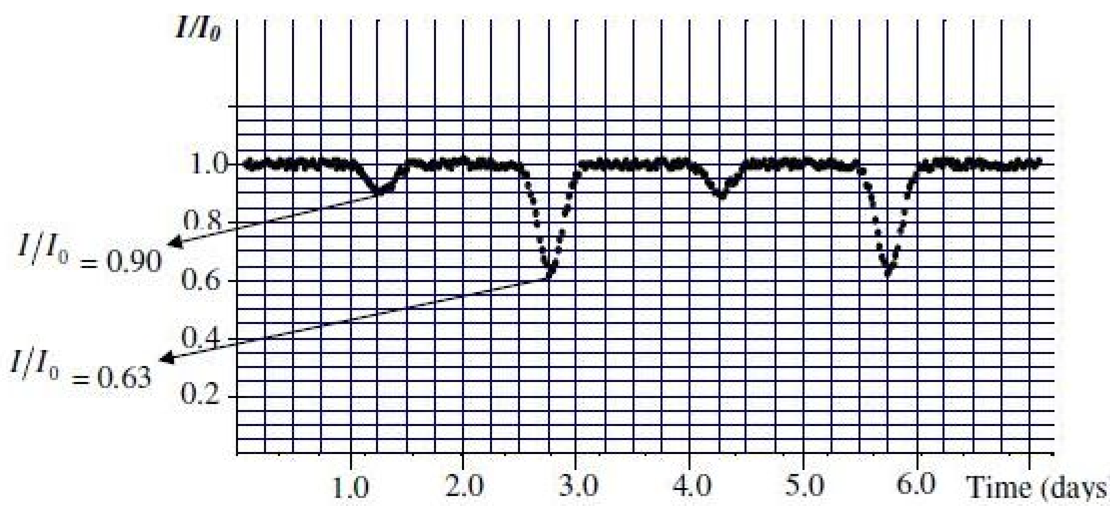

Figura 1. La intensidad relativa recibida del sistema estelar binario como una función del tiempo. El eje vertical está escalado por $I_0 = 4.8 \times 10^{-9}$ W/m^2. El tiempo está dado en días.

1.1	Encontrar el período del movimiento orbital. Dar las respuestas en **segundos** hasta dos dígitos significativos. ¿ Qué es la frecuencia angular del sistema en **rad/sec** ?	0.8

Para una buena aproximación, la radiación recibida de una estrella es una radiación de un cuerpo negro uniforme de un disco plano con un radio igual al radio de la estrella. Por lo tanto, la energía recibida de las estrellas es proporcional a AT^4 donde A es el área del disco y T es la temperatura de la superficie de la estrella.

1.2	Usar el diagrama en la Figura 1 para encontrar las razones T_1/T_2 y R_1/R_2	1.6

Espectrometría de Sistemas Binarios

Es esta sección, vamos a calcular las propiedades astronómicas de una estrella binaria usando datos de espectrometría experimental de sistemas binarios.

Los átomos absorben o emiten radiación en sus longitudes de onda con ciertas características. Seguidamente, el espectro observado de una estrella contiene *líneas de absorción* debido a los átomos en la atmósfera de la estrella. El sodio tiene un espectro característico línea amarilla (línea D_1) con una longitud de onda $5895.9\widehat{A}$ ($10\widehat{A} = 1$ mn). Examinamos el espectro de absorción de sodio atómico en esa longitud de onda para el sistema binario de la sección anterior. El espectro de luz que recibimos de las estrellas binarias es el efecto Doppler, porque las estrellas están moviéndose con respecto a nosotros. Cada estrella tiene velocidad distinta. En consecuencia, la longitud de onda de absorción para cada estrella sería desplazada por una cantidad diferente. Mediciones de longitud de onda de alta precisión son requeridos para observar el efecto Doppler como la velocidad de la estrella es menor que la velocidad de la luz. La velocidad del centro de masa del sistema binario considerado en este problema es mucho menor que las velocidades orbitales de las estrellas. Por lo tanto todos los efectos Doppler pueden ser atribuidos a la velocidad orbital de las estrellas. La Tabla 1 muestra los espectros medidos de una estrella en el sistema binario observado.

Tabla 1: Espectro de absorción del sistema estelar binario para la línea de Sodio D_1

t/días	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4
$\lambda_1(\widehat{A})$	5897.5	5897.7	5897.2	5896.2	5895.1	5894.3	5894.1	5894.6
$\lambda_2(\widehat{A})$	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.3	5898.7	5899.0	5898.1

t/días	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8
$\lambda_1(\widehat{A})$	5895.6	5896.7	5897.3	5897.7	5897.2	5896.2	5895.0	5894.3
$\lambda_2(\widehat{A})$	5896.4	5894.5	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.4	5898.7

(*Nota:* No hay necesidad de hacer una gráfica de los datos en esta tabla)

2Usando Tabla 1,

2.1	Sea v_1 y v_2 las velocidades orbitales de cada estrella. Encontrar v_1 y v_2. La velocidad de la luz $c = 3.0 \times 10^8$ m/s. Ignorar todos los efectos relativistas.	1.8

2.2	Encontrar la razón de masa de las estrellas (m_1/m_2)	0.7

2.3	Sea r_1y r_2 las distancias de cada estrella de su centro de masa. Encontrar r_1 y r_2.	0.8

2.4	Sea r la distancia entre las estrellas. Encontrar r.	0.2

3La fuerza gravitacional es la única fuerza actuando entre las estrellas.

3.1	Encontrar la masa de cada estrella hasta un dígito significativo. La constante gravitacional universal $G = 6.7 \times 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}.	1.2

Características Generales de las Estrellas

4 La mayoría de las estrellas generan energía a través del mismo mecanismo. Porque de esto, hay una relación empírica entre su masa M y su luminosidad L, el cual es la energía radiante total de la estrella. Esta relación se puede escribir en la forma $L/L_{Sol} = (M/M_{Sol})^{alpha}$. Por lo tanto, $M_{Sol} = 2.0 \times 10^{30}$ kg es la masa solar y $L_{Sol} = 3.9 \times 10^{26}$ W es la luminosidad solar. Esta relación se muestra en un diagrama log-log en la Figura 2.

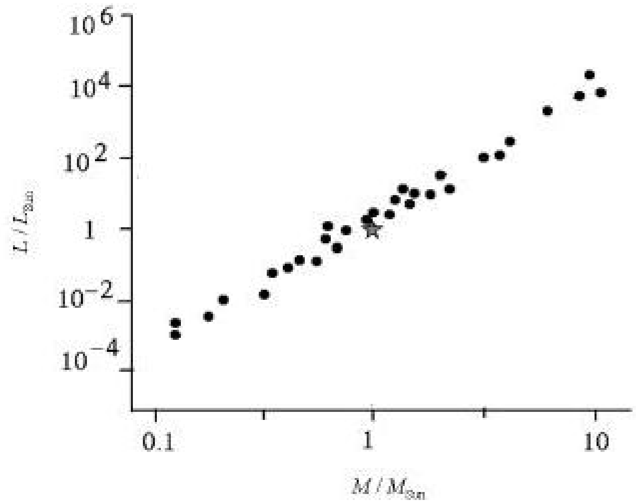

Figura 2. La luminosidad de una estrella contra su masa varía como una ley de energía. El diagrama es log-log. El símbolo estrella representa al Sol con una masa de 2.0×10^{30} kg y luminosidad de 3.9×10^{26} W.

4.1	Encontrar α hasta un dígito significante.	0.6

4.2	Sea L_1 y L_2 la luminosidad de las estrellas en un sistema binario estudiado en la sección anterior. Encontrar L_1 y L_2.	0.6

4.3	¿ Qué es la distancia d, del sistema de estrellas a nosotros en años luz? Para encontrar la distancia puedes usar el diagrama de la Figura 1. Un año luz es la distancia que la luz recorre en un año.	0.9

4.4	¿ Qué es la distancia angular máxima θ entre las estrellas desde nuestro punto de observación?.	0.4

4.5	¿ Cuál es el menor tamaño de la abertura para un telescopio óptico D que puede resolver estas dos estrellas?.	0.4