40 OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA
MÉRIDA, MEXICO, 2009

Problema 1 (Problema Teórico No. 1Evolución del sistema Tierra-Luna)**.** Científicos pueden determinar la distancia Tierra-Luna con gran precisión. Ellos logran esto haciendo rebotar un rayo láser en espejos especiales depositados en la superficie de la Luna por astronautas en 1969, y miden el tiempo de viaje redondo de la luz(ver figura 1).

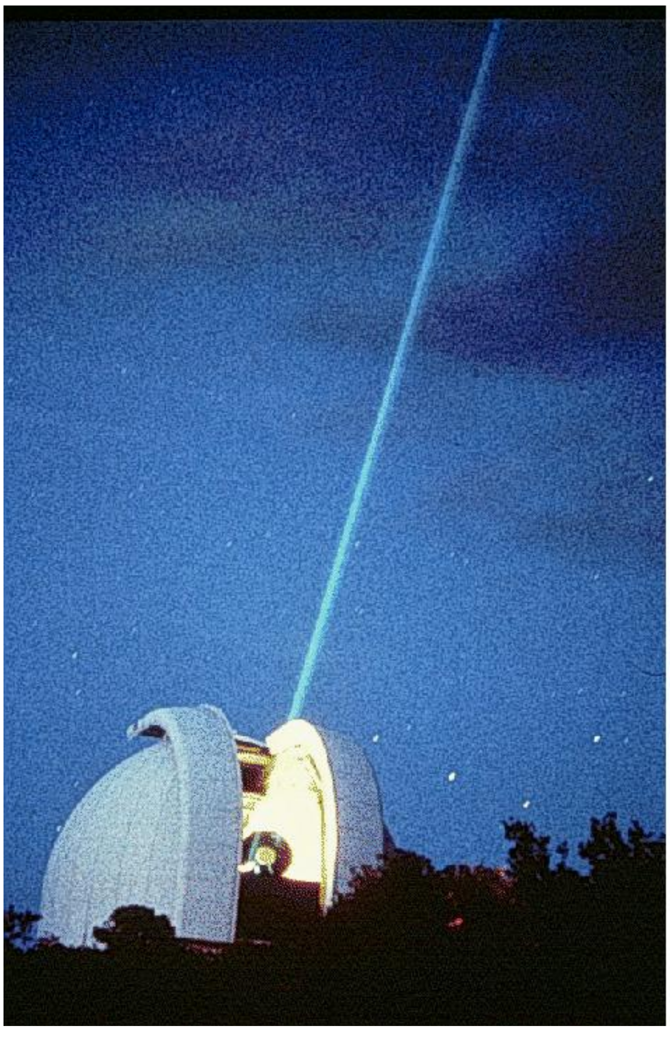


figura 1. Un rayo láser enviado de un observatorio se utiliza para medir con precisión la distancia entre la Tierra y la Luna.

Con estas observaciones, tenemos directamente de las medidas que la Luna se está alejando de la Tierra, esto es, la distancia Tierra-Luna aumenta con el tiempo. Esto sucede porque debido a los torques de mareas de la Tierra se transfieren al momento angular de la Luna, ver figura 2. En este problema tu debes obtener los parámetros básicos de este fenómeno.

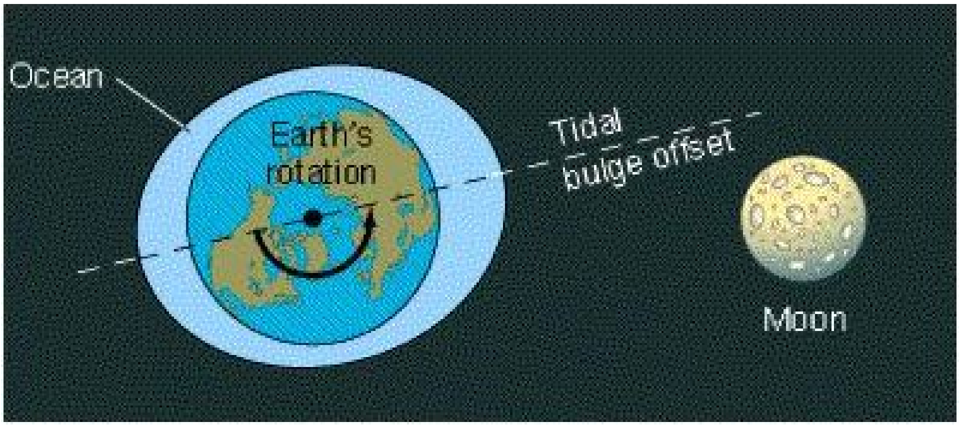


Figura 2. La gravedad de la luna produce deformaciones en las mareas o ”protuberancias” en la Tierra. Porque de la rotación de la Tierra, la línea que va a través de las protuberancias no está alineada con la línea entre la Tierra y la Luna. Éstas des-alineaciones producen un torque que transfieren momento angular de la rotación de la Tierra a la traslación de la Luna. El dibujo no está a escala.

1. Conservación del Momento Angular

Sea L_1 el momento angular total presente del sistema Tierra-Luna. Ahora hacemos las siguientes suposiciones: i)L_1 es la suma de la rotación de la Tierra alrededor de sus ejes y la traslación de la Luna en su órbita alrededor de la Tierra. ii)La órbita de la Luna es circular y la Luna puede ser tomada como un punto. iii)Los ejes de rotación de la Tierra y los ejes de revolución de la Luna son paralelos. iv)Para simplificar los cálculos, tomar el movimiento alrededor del centro de la Tierra y no el centro de masa. A lo largo del problema, todos los momentos de inercia, torques y momentos angulares son definidos alrededor de los ejes de la Tierra. v)Ignorar la influencia del Sol.

1a	Escribimos abajo de la ecuación para el momento angular total actual del sistema Tierra-Luna. Poner esta ecuación en términos de I_E, el momento de inercia de la Tierra; ω_{E1}, la frecuencia angular actual de la rotación de la Tierra; I_{M1}, el momento de inercia actual de la luna con respecto a los ejes de la Tierra; y ω_{M1}, la frecuencia angular actual de la órbita de la Luna.	0.2

Este proceso de transferencia de momento angular terminará cuando el período de rotación de la Tierra y el período de revolución de la Luna alrededor de la Tierra tienen la misma duración. En este punto las Protuberancias de marea producidas por la Luna en la Tierra se alinearán con la línea entre la Luna y la Tierra y el torque desaparecerá.

1b	Escriba la ecuación para el momento angular final L_2 del sistema Tierra-Luna. Hacer las mismas suposiciones que en pregunta 1a. Poner esta ecuación en términos de I_E, el momento de inercia de la Tierra; ω_2, la frecuencia angular final de la rotación de la Tierra y la traslación de la Luna; y I_{M2}, el momento de inercia final de la Luna.	0.2

1c	Dejar de l Escribir la

2. Separación Final y Frecuencia Angular Final del Sistema Tierra-Luna.

Asumir que la ecuación gravitacional para una órbita circular(de la Luna alrededor de la Tierra) siempre es válido. La negligencia de la contribución de la rotación de la Tierra al momento angular final total.

2a	Escribir la ecuación gravitacional para la órbita circular de la Luna alrededor de la Tierra en el estado final, en términos de M_E, ω_2, G y la separación final D_2 entre la Tierra y la Luna. M_E es la masa de la Tierra y G es la constante gravitacional.	0.2

2b	Escribir la ecuación de la separación total D_2 entre la Tierra y la Luna en términos de los parámetros conocidos, L_1, el momento angular total del sistema, M_E y M_M, las masas de la Tierra y la Luna, respectivamente y G.	0.5

2c	Escribir la ecuación para la frecuencia angular final ω_2 del sistema Tierra-Luna en términos de parámetros conocidos L_1, M_E, M_M y G	0.5

Abajo se le pedirá, encontrar los valores numéricos de D_2 y ω_2, para eso necesitas saber el momento de inercia de la Tierra.

2d	Escribir la ecuación del momento de inercia de la Tierra I_E asumiendo que es una esfera con densidad interior ρ_i desde el centro hasta un radio r_i, y con densidad exterior ρ_o desde el radio r_i hasta la superficie con radio r_o (ver figura 3).	0.5

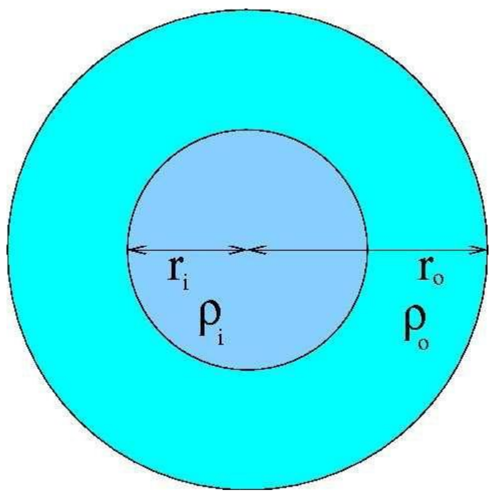


figura 3. La Tierra como una esfera con dos densidades, ρ_i y ρ_o.

Determinar los valores numéricos requeridos en este problema siempre con dos importantes dígitos.

2e	Evaluar el momento de inercia de la Tierra I_E, usando $\rho_i = 1.3\times10^4$ kg m^{-3}, $r_i = 3.5\times10^6$ m, $\rho_o = 4.0 \times 10^3$ kg m^{-3}, y $\rho_o = 6.4 \times 10^6$ m.	0.2

Las masas de la Tierra y Luna son $M_E = 6.0 \times 10^{24}$ kg y $M_M = 7.3 \times 10^{22}$ kg, respectivamente. La presente separación entre la Tierra y la Luna es $D_1 = 3.8 \times 10^8$ m. La presente frecuencia angular de la rotación de la Tierra es $\omega_{E1} = 7.3 \times 10^{-5}\text{s}^{-1}$. La frecuencia angular de la traslación de la Luna alrededor de la Tierra es $\omega_{M1} = 2.7 \times 10^{-6}\text{s}^{-1}$, y la constante gravitacional es $G = 6.7 \times 10^{-11}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$.

2f	Evaluar el valor numérico del momento angular total del sistema, L_1.	0.2

2g	Mostrar la separación total D_2 en metros y en unidades de la presente separación D_1.	0.3

2h	Mostrar la frecuencia angular final ω_2 en s^{-1}, más bien como la duración final de los días en unidades de los días actuales.	0.3

Verificar que asumir la negligencia de la contribución de la rotación de la Tierra al momento angular total final es justificado por mostrar la relación del momento angular total de la Tierra a la de la Luna. Esta debe ser una cantidad pequeña.

2i	Mostrar la relación del momento angular total de la Tierra al de la Luna.	0.2

3. ¿ Cuál es el alejamiento de la Luna por año?

Ahora, encontrará cuánto se está alejando la Luna de la Tierra cada año. Para eso, necesitará saber la ecuación del torque actuando sobre la Luna en la actualidad. Asumir que las mareas protuberadas pueden ser aproximadas por dos puntos masa, cada masa m, localizado en la superficie de la Tierra, ver figura 4. Sea θ el ángulo entre la línea que pasa a través de las protuberancias y la línea que une el centro de la Tierra y la Luna.

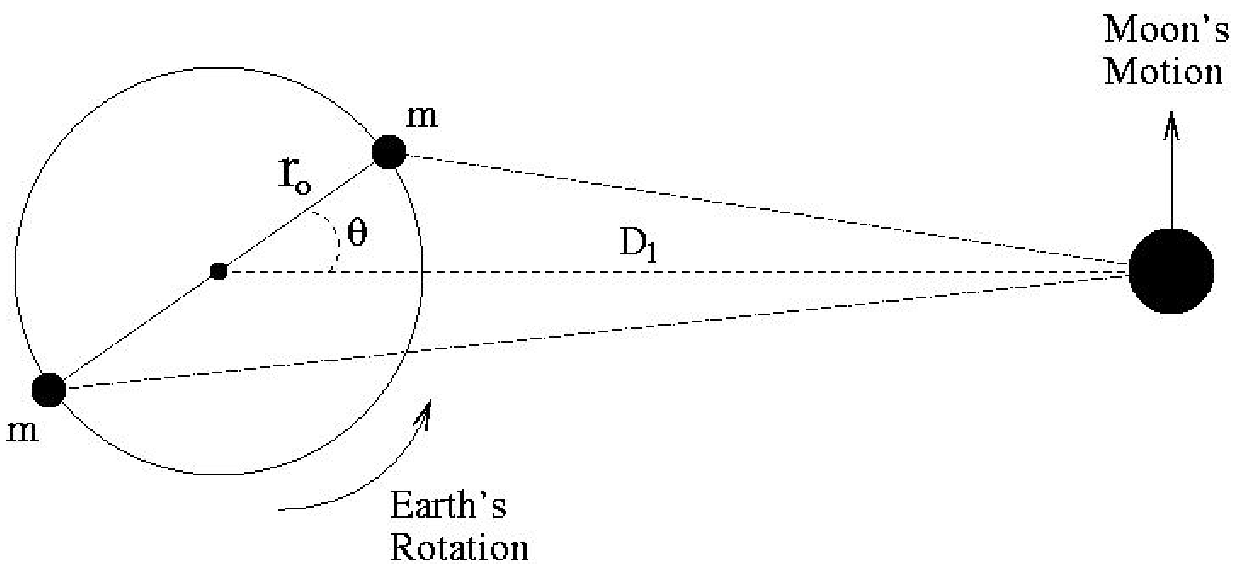


figura 4. Diagrama esquemático para estimar el torque producido en la Luna por las protuberancias en la Tierra. El dibujo no está a escala.

3a	Encontrar F_c, la magnitud de la fuerza producida en la Luna por el punto masa más cercano	0.4

3b	Encontrar F_j, la magnitud de la fuerza producida en la Luna por el punto masa más lejano	0.4

Ahora puedes evaluar el torque producido por los puntos masa.

3c	Encontrar la magnitud τ_c del torque producido por los puntos masa cercanos.	0.4

3d	Encontrar la magnitud τ_j del torque producido por los puntos masa lejanos.	0.4

3e	Encontrar la magnitud del torque total τ producido por las dos masas. Como $r_o << D_1$ debería aproximarse a su expresión más baja de orden importante en r_o/D_1. Puede usar que $(1+x)^a = 1 + ax$, si $x << 1$.	1.0

3f	Calcular el valor numérico del torque total τ teniendo en cuenta que $\theta = 3^o$ y que $m = 3.6 \times 10^{16}$ kg (notar que esta masa es de orden 10^{-8} veces la masa de la Tierra).	0.5

Como el torque es la velocidad de cambio del momento angular con tiempo, mostrar que incrementa en la distancia Tierra-Luna actualmente, por año. Para este paso, expresar el momento angular de la Luna solo en términos de M_M, M_E, D_1 y G.

3g	Encontrar el incremento en la distancia Tierra-Luna actualmente, por año.	1.0

Finalmente, estime cuánto incrementa la longitud de los días actualmente cada año.

3h	Encontrar el decrecimiento de ω_{M1} por año y cuánto aumenta la longitud de los días actualmente cada año.	1.0

4. ¿ Dónde está la energía que se va?

En contraste al momento angular, que es conservado, la energía total(rotacional con gravitacional) del sistema no. Vamos a ver esto en esta última sección.

4a	Escribir una ecuación de para la energía total(rotacional con gravitacional) del sistema Tierra-Luna actualmente, E. Poner esta ecuación en términos de I_E, ω_{E1}, M_M, M_E y G.	0.4

4b	Escribir una ecuación para el cambio en E, ΔE, como una función de los cambios en D_1 y en ω_{E1}. Evaluar los valores numéricos ΔE para un año, usando los valores de cambio en D_1 y en ω_{E1} encontrado en preguntas 3g y 3h.	0.4

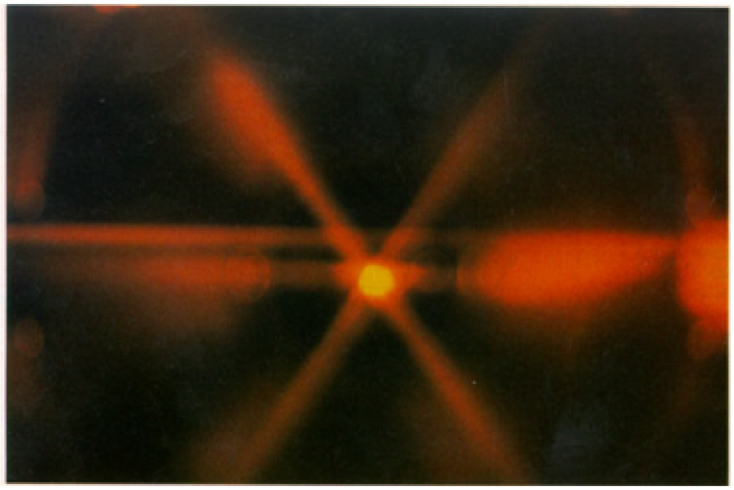
Verificar que esta pérdida de energía es consistente con una estimación para la energía disipada como calor en las mareas producidas por la Luna en la Tierra. Asumir que las mareas subiendo, en el promedio de 0.5 m, una capa de agua $h = 0{,}5$ m de profundidad que cubre la superficie de la Tierra (para simplificar asumir que todas las superficies de la Tierra son cubiertas con agua). Esto ocurre dos veces al día. Supongamos, además, que el 10 de esta energía gravitatoria se disipa en forma de calor debido a la viscosidad cuando el agua desciende. Tome la densidad del agua $\rho_{agua} = 10^3$ kg m^{-3}, y la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra $g = 9.8$ m s^{-2}.

4c	¿ Cuál es la masa de esta capa superficial del agua?	0.2

4d	Calcular ¿ cuánta energía es disipada en un año? ¿ Cómo es esta comparación con la pérdida de energía por año por el sistema Tierra-Luna actualmente?	0.3

Problema 2 (Problema Teórico No. 2Láser doppler de enfriamiento y melaza óptica). El propósito de éste problema es desarrollar una simple teoría para entender el llamado “ Láser de enfriamiento” y los fenómenos de “ Melaza óptica”. Esto se refiere al enfriamiento de un rayo de átomos neutros, generalmente alcalina, por

rayos láser de propagación con la misma frecuencia. Esto es parte del Premio Nobel de Física otorgado a S. Chu, P. Phillips y C. Cohen-Tannoudji en 1997.



La imagen de arriba muestra átomos de sodio (el punto brillante en el centro) atrapados en el intersección de tres pares ortogonales de rayos láser opuestos. La región de captura es llama "melaza óptica", porque la fuerza óptica disipada se asemeja al arrastre viscoso sobre un cuerpo en movimiento a través de la melaza. En este problema analizará el fenómeno básico de la interacción entre una incidencia de fotones en un átomo y la base del mecanismo de disipación en una dimensión.

PARTE I: FUNDAMENTOS DEL LÁSER DE ENFRIAMIENTO

Considerar un átomo de masa m moviéndose en la dirección $+x$ con velocidad v. Para simplificar, debemos considerar el problema de una dimensión, es decir, debemos ignorar las direcciones y y z (ver figura 1). El átomo tiene dos niveles de energía interna. La energía del estado más bajo es considerado cero y la energía del estado agitado es $\hbar\omega_0$, donde $\hbar = h/2\pi$. El átomo se encuentra inicialmente en el estado más bajo. Un rayo láser con frecuencia ω_I en el laboratorio está dirigida en la dirección $-x$ e incide sobre el átomo. La mecánica cuántica del láser está compuesta de un número largo de fotones, cada uno con energía $\hbar\omega_L$ e impulso $-\hbar q$. Un fotón puede ser absorbido por el átomo y después emitido espontáneamente;esta emisión puede ocurrir con igual probabilidad a lo largo de las direcciones $+x$ y $-x$. Como el átomo se mueve a velocidades no relativas,$v/c << 1$(con c la velocidad de la luz)mantienen términos de primer orden solo en esta cantidad. Considerar también $\hbar q/mv << 1$, es decir, que el impulso de un átomo es mucho mayor que el impulso de un solo fotón. Escribiendo tus respuestas, mantener sólo las correcciones lineales en cualquiera de las cantidades anteriores.

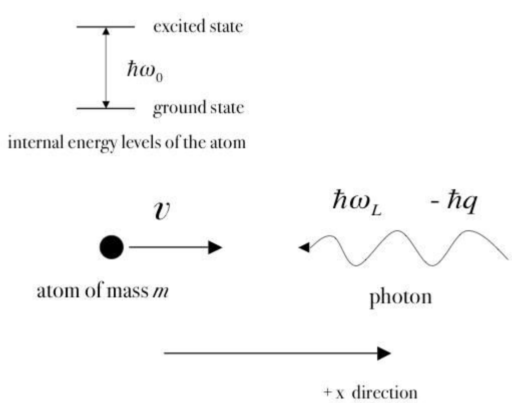


Fig.1 Dibujo de un átomo de masa m con velocidad v en la dirección $+x$, colisionando con un fotón con energía $\hbar\omega_L$ e impulso $-\hbar q$. El átomo tiene dos estados internos con estados diferentes $\hbar\omega_0$.

Asumir que la frecuencia del láser ω_L, se ajusta tal que, como se ve por el átomo en movimiento, es en resonancia con la transición interna del átomo. Responde las siguientes preguntas:

1. Absorción

1a	Escribir la condición de resonancia para la absorción de un fotón	0.2

1b	Escribir el impulso p_{at} del átomo después de la absorción, como visto en el laboratorio.	0.2

1c	Escribir la energía total ε_{at} del átomo después de la absorción, como visto en el laboratorio	0.2

2. Emisiones espontáneas de un fotón en la dirección -x.

En algún momento después de la absorción del fotón incidente, el átomo puede emitir un fotón en la dirección $-x$.

2a	Escribir la energía del fotón emitido, ε_{ph}, después del proceso de emisión en la dirección $-x$, como visto en el laboratorio.	0.2

2b	Escribir el impulso del fotón emitido p_{ph}, depués del proceso de emisión en la dirección $-x$, como visto en el laboratorio	0.2

2c	Escribir el impulso del átomo p_{at}, depués del proceso de emisión en la dirección $-x$, como visto en el laboratorio	0.2

2d	Escribir la energía total del átomo ε_{at}, depués del proceso de emisión en la dirección $-x$, como visto en el laboratorio	0.2

3. Emisión espontánea de un fotón en la dirección +x.

En algún momento después de la absorción del fotón incidente, el átomo puede emitir un fotón en la dirección $+x$.

3a	Escribir la energía del fotón emitido, ε_{ph}, después del proceso de emisión en la dirección $+x$, como visto en el laboratorio.	0.2

3b	Escribir el impulso del fotón emitido p_{ph}, después del proceso de emisión en la dirección $+x$, como visto en el laboratorio.	0.2

3c	Escribir el impulso del átomo p_{at}, después del proceso de emisión en la dirección $+x$, como visto en el laboratorio.	0.2

3d	Escribir la energía total del átomo ε_{at}, después del proceso de emisión en la dirección $+x$, como visto en el laboratorio.	0.2

4. Emisión promedio después de la absorción.

La emisión espontánea de un fotón en la dirección $-x$ o $+x$ ocurren con la misma probabilidad. Teniendo en cuenta esto, responder las siguientes preguntas.

4a	Escribir la energía promedio del fotón emitido, ε_{ph}, después del proceso de emisión.	0.2

4b	Escribir el impulso promedio del fotón emitido p_{ph}, después del proceso de emisión.	0.2

4c	Escribir la energía total promedio del átomo ε_{at}, después del proceso de emisión.	0.2

4d	Escribir el impulso promedio del átomo p_{at}, después del proceso de emisión.	0.2

5. Transferencia de energía e impulso.

Asumir un proceso completo de absorción-emisión de un-fotón, descrito como arriba, existe un promedio neto de impulso y energía transferida entre el láser de radiación y el átomo.

5a	Escribir el cambio de energía promedio $\Delta\varepsilon$ del átomo después del proceso completo de absorción-emisión de un-fotón.	0.2

5b	Escribir el cambio de impulso promedio Δp del átomo después del proceso completo de absorción-emisión de un-fotón.	0.2

6. Transferencia de energía e impulso por un rayo láser a lo largo de la dirección +x

Considerar ahora que el rayo láser de frecuencia ω_L' es incidente en el átomo a lo largo de la dirección $+x$, mientras el átomo se mueve también en la dirección $+x$ con velocidad v. Asumir una condición de resonancia entre la transición interna del átomo y el rayo láser, como visto por el átomo, responde las siguientes preguntas:

6a	Escribir el cambio de energía promedio $\Delta\varepsilon$ del átomo después del proceso completo de absorción-emisión de un-fotón.	0.3

6b	Escribir el cambio de impulso promedio Δp del átomo después del proceso completo de absorción-emisión de un-fotón.	0.3

PARTE II: DISIPACIÓN Y EL FUNDAMENTO DE MELAZA ÓPTICA

Naturalmente, sin embargo impone una incertidumbre inherente en procesos cuánticos. Por lo tanto, el hecho que el átomo puede emitir espontáneamente un fotón en un tiempo $finito$ después de la absorción, da como resultado que la condición de resonancia no tiene que ser obedecido exactamente como en la discusión de arriba. Eso es, la frecuencia de un rayo láser ω_L y ω_L' puede tener varios valores y el proceso de absorción-emisión pueden todavía ocurrir. Estos podrían pasar con diferentes (cuánticas) probabilidades y, como es de esperar, la probabilidad máxima se alcanza en la condición de resonancia exacta. En promedio, el tiempo transcurrido entre un proceso único de absorción y emisión es llamado el tiempo de vida del nivel de energía agitada del átomo y se denota por Γ^{-1}.

Considerar una colección N de átomos en reposo en el marco de referencia del laboratorio, y un rayo láser de frecuencia ω_L incidente sobre ellos. Los átomos absorben y emiten continuamente tal que existen, en promedio, N_{exc} átomos en el estado agitado(y por lo tanto, $N - N_{exc}$ átomos en el estado fundamental). Un cálculo de la mecánica cuántica produce el siguiente resultado:

$$N_{exc} = N \frac{\Omega_R^2}{(\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}$$

donde ω_0 es frecuencia de resonancia de la transición atómica y Ω_R es llamada frecuencia Rabi; Ω_R^2 es proporcional a la *intensidad* de un rayo láser. Como mencionamos arriba, puede ver que ese número es diferente de cero incluso si la frecuencia de resonancia ω_0 es diferente de la frecuencia del rayo láser ω_L. Una forma alternativa de expresar el resultado previo es que el número del proceso de absorción-emisión por unidad de tiempo es $N_{exc}\Gamma$.

Considerar la situación física representado en la Figura 2, en el cuál dos rayos láser de propagación con el mismo pero frecuencia arbitraria ω_L son incidentes en un gas de N átomos que se mueven en la dirección $+x$ con velocidad v.

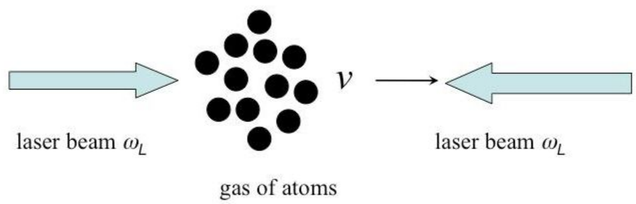


Figura 2. Dos rayos láser de propagación con la misma pero frecuencia arbitraria ω_L son incidentes en un gas de N átomos que se mueven en la dirección $+x$ con velocidad v.

7. Fuerza sobre los rayos atómicos por los láser.

7a	Con la in formación encontrada hasta el momento, encontrar la fuerza que el láser ejerce sobre el rayo atómico. Debes asumir que $mv >> \hbar q$.	1.5

8. Límite de velocidad baja.

Asumir ahora que la velocidad de los átomos es lo suficientemente pequeño, tal que puedes expandir la fuerza sobre el primer orden en v.

8a	Encontrar una expresión para la fuerza encontrada en la pregunta (7a), en ese límite.	1.5

Usando este resultado, puedes encontrar las condiciones para acelerar, desacelerar, o no efectúan sobre los átomos por la radiación láser.

8b	Escribir la condición al obtener una fuerza positiva(acelerando los átomos).	0.25

8c	Escribir la condición al obtener una fuerza cero.	0.25

8d	Escribir la condición al obtener una fuerza negativa(desacelerando los átomos).	0.25

8e	Considerar ahora que los átomos tienen movimiento con una velocidad $-v$(en la dirección $-x$). Escribir la condición al obtener una fuerza de des-aceleración sobre los átomos.	0.25

9. Melazas ópticas

En el caso de la fuerza negativa, se obtiene una fuerza de fricción disipativas. Asumir que inicialmente, en $t = 0$, el gas de átomos tiene velocidad v_0.

9a	En el límite de baja velocidad, encontrar de los átomos después de que el rayo láser ha estado en un tiempo τ	1.5

9b	Asumir ahora que el gas de átomos está en equilibrio térmico en una temperatura T_0. Encontrar la temperatura después de que el rayo láser ha estado en un tiempo τ T	0.5

Ese modelo no le permite ir a temperaturas bajas arbitrariamente.

Problema 3 (Problema Teórico No. 3¿ Por qué las estrellas son muy grandes?). Las estrellas son esferas de gas caliente. La mayoría de ellos brilla porque son fusión de hidrógeno dentro de helio en sus partes centrales. En este problema usamos conceptos de ambos mecanismos, clásico y cuántico, así como de electrostática y termodinámica, para entender por qué las estrellas tienen que ser suficientemente grandes para lograr este proceso de fusión y también obtener lo que sería la masa y el radio de la estrella más pequeña que puede fusionar hidrógeno.

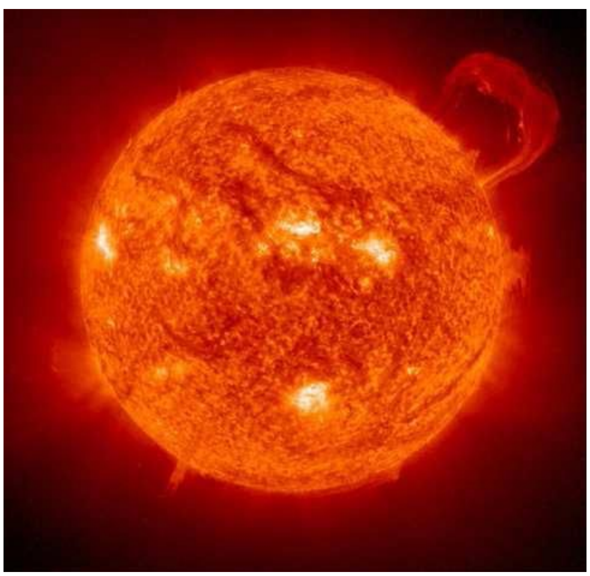


Figura 1. Nuestro Sol, como la mayoría de estrellas, brilla como resultado de una fusión termonuclear de hidrógeno dentro de helio en sus partes centrales.

CONSTANTES ÚTILES
Constante Gravitacional $= G = 6.7 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1}s^2
Constante Boltzmann's $= k = 1.4 \times 10^{-23}$ JK^{-1}
Constante Planck's $= h = 6.6 \times 10^{-34}$ m^{2}kg s^{-1}
Masa del Protón $= m_p = 1.7 \times 10^{-27}$ kg
Masa del Electrón $= m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
Unidad de Carga Eléctrica $= q = 1.6 \times 10^{-19}$ C
Constante Eléctrica (permitividad de vacío) $= \varepsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12}$ C^2 N^{-1} m^{-2}
Radio el Sol $= R_S = 7.0 \times 10^8$ m
Masa del Sol $= M_S = 2.0 \times 10^{30}$ kg

5. Una estimación clásica de la temperatura en el centro de las estrellas.

Asumir que el gas que forman las estrellas es hidrógeno puro ionizado(electrones y protones en igual cantidad), y que se comporta como un gas ideal. Desde el punto de vista clásico, al fusionar dos protones, ellos necesitan para obtener lo más cerca 10^{-15} m para la fuerza nuclear fuerte de rango corto, el cuál es atractivo, para convertirse dominante. Sin embargo, para que juntos tengan que superar primero la acción repulsiva de la fuerza Coulomb. Asumir clásica-mente que los dos protones (toman como fuente puntual) son movidos en un camino anti paralelo, cada uno con velocidad v_{rms}, la velocidad raíz-cuadrada-media (rms) de los protones en una colisión frontal unidimensional.

1a	¿ Qué tiene que ser la temperatura del gas T_c,para que la distancia de la aproximación más cercana de los protones, d_c, sea igual a 10^{-15} m? Dar este y todos los valores en este problema hasta dos cifras importantes.	1.5

6. Conclusión de que la estimación de la temperatura anterior es incorrecta.

Para comprobar si la temperatura estimada previa es razonable, necesita una forma de estimación independiente de la temperatura central de la estrella. La estructura de las estrellas es muy complicada, pero podemos ganar entendimientos significantes haciendo algunas suposiciones. Estrellas están en equilibrio, esto es, no se expanden o contraen porque la fuerza interior de gravedad está balanceado por la fuerza exterior de presión (ver Figura 2). Para un bloque de gas la ecuación de equilibrio hidrostático en una distancia determinada r del centro de la estrella, está dado por

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{GM_r \rho_r}{r^2},$$

donde P es la presión del gas, G es la constante gravitacional, M_r la masa de la estrella dentro de una esfera de radio r, y ρ_r es la densidad del gas en el bloque.

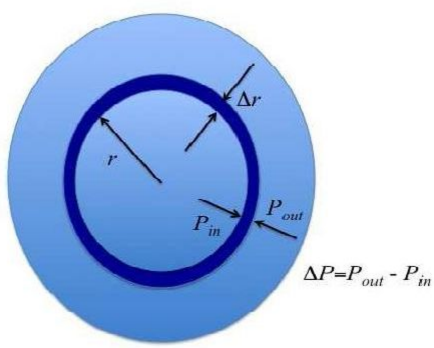


Figura 2. Las estrellas están en equilibrio hidróstatico, con la diferencia de presión balanceando la gravedad.

Una estimación del orden de magnitud de la temperatura central de la estrella puede ser obtenida con valores del parámetro en el centro y en la superficie de la estrella, haciendo las siguientes aproximaciones:

$$\Delta P = P_o - P_c,$$

donde P_c y P_o son las presiones del centro y la superficie de la estrella, respectivamente. Como $P_c >> P_o$, podemos asumir que

$\Delta P = -P_o$.

Dentro de la misma aproximación, podemos escribir

$\Delta r = R$,

donde R es el radio total de la estrella, y

$M_r = M_R = M$,

con M la masa total de la estrella.
La densidad puede ser aproximada por sus valores en el centro,

$\rho_r = \rho_c$.

Puede asumir que la presión es la de un gas ideal.

2a	Encontrar una ecuación para la temperatura en el centro de la estrella,y solo en términos del radio y masa de la estrella y constantes físicas. T_c.	0.5

Podemos usar ahora la siguiente predicción de ese modelo como un criterio para su validez:

2b	Usando la ecuación encontrada en (2a) escribir la razón esperada M/R para una estrella solo en términos de constantes físicas y T_c.	0.5

2c	Usar los valores de T_c obtenidas en la sección (1a) y encontrar los valores numéricos de la razón esperada M/R para una estrella.	0.5

2d	Ahora calcular la razón $M(Sun)/R(Sun)$ y verificar que ese valor es mucho menor que el que se encuentra en (2c).	0.5

7. Una estimación de la mecánica cuántica de la temperatura en el centro de las estrellas.

La discrepancia larga encontrada en (2d) indica que la estimación clásica para T_c obtenida en (1a) no es correcta. La solución para esa discrepancia se encuentra cuando consideramos efectos de mecánica cuántica, que nos dice que el comportamiento de los protones es en forma de ondas y que un solo protón se unta en una talla del orden de λ_p, la longitud de onda de de Broglie. Eso implica que si d_c, la distancia de la mejor aproximación de los protones es del orden de λ_p, los protones en un sentido de mecánica cuántica coinciden y pueden fusionarse.

3a	Asumir que $d_c = \dfrac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ es la condición que permite la fusión, para un protón con velocidad v_{rms}, encontrar una ecuación para T_c en términos de constantes físicas.	1.0

3b	Evaluar numéricamente los valores de T_c obtenidos en (3a).	0.5

3c	Usar los valores de T_c obtenidos en (3b) para encontrar los valores numéricos de la razón esperada M/R para una estrella, usando la fórmula obtenida en (2b). Verificar que ese valor es muy similar a la razón observada $M(Sun)/R(Sun)$.	0.5

En realidad, estrellas en el llamado *sucesión principal*(hidrógeno fusionado) aproximadamente siguen esta razón para un rango largo de masas.

8. La razón masa/radio de las estrellas.

El previo acuerdo sugiere que la estimación de la mecánica cuántica para estimar la temperatura en el centro del Sol es correcto.

4a	Usar el resultado previo para demostrar que para cualquier estrella de hidrógeno fusionado, la razón de masa M y radio R es el mismo y depende solo en constantes físicas. Encontrar la ecuación para la razón M/R para estrellas de hidrógeno fusionado.	0.5

9. La masa y radio de una estrella pequeña.

El resultado encontrado en (4a) sugiere que podría ser estrellas de cualquier masa, siempre y cuando tal relación se cumple, sin embargo, esto no es cierto.
El gas normal interior de una estrella de hidrógeno fusionado se sabe que se comporta aproximadamente como un gas ideal. Esto es que d_e, la separación típica entre electrones es en promedio mas grande que λ_e, su longitud de onda típica de Broglie. Si más cerca, los electrones estarían en un llamado estado degenerado y las estrellas se comportarían diferente. Notar la distinción entre la forma que tratamos a los protones y electrones dentro de la estrella. Para protones, su onda de Broglie deben traslaparse cercanamente como chocan en orden para fusionar, mientras para electrones su onda de Broglie no debe traslaparse en orden para permanecer como un gas ideal.

La densidad en las estrellas incrementa con el decrecimiento del radio. Sin embargo para este orden de magnitud estimado asumir que son de densidad uniforme. Además puede usar que $m_p >> m_e$.

5a	Encontrar una ecuación para n_e, la densidad media del número de electrones dentro la estrella.	0.5

5b	Encontrar una ecuación para d_e, la separación típica entre electrones dentro la estrella.	0.5

5c	Usar la condición $d_e \geq \frac{\lambda_e}{2^{1/2}}$ para escribir una ecuación para el radio posible de una estrella normal mas pequeña. Tomar la temperatura en el centro de la estrella como es típico para todo el interior estelar.	1.5

5d	Encontrar los valores numéricos del radio posible de la estrella normal más pequeña, ambos en metros y en unidades del radio solar.	0.5

5e	Encontrar los valores numéricos de la masa posible de la estrella normal más pequeña, ambos en kg y en unidades de masa solar.	0.5

10. Fusión del núcleo de helio en estrellas viejas.

Cuando las estrellas envejecen tendrán fusionado la mayor del hidrógeno en sus núcleos dentro de helio (He), así son forzados a empezar a fusionar helio en elementos pesados en orden para seguir brillando. Un núcleo de helio tiene dos protones y dos neutrones, así tiene el doble de carga y aproximadamente cuatro veces la masa de un protón. Hemos visto antes que $d_e \geq \frac{\lambda_e}{2^{1/2}}$ es la condición para que los protones se fusionen.

6a	Establecer la condición de equivalencia para el núcleo de helio y encontrar $v_{mrs}(He)$, los términos de velocidad del núcleo de helio y $T(He)$, l temperatura necesaria para la fusión del helio.	0.5