6 Olimpiada Asiática de Física

Pekanbaru, Indonesia 2005

Problema 1: Oscilaciones

1A. Cilindro y resorte con pistón masivo (5.0 puntos)

Considere $n = 2\,\mathrm{mol}$ de gas helio ideal a presión P_0, volumen V_0 y temperatura $T_0 = 300\,\mathrm{K}$ colocados en un contenedor cilíndrico vertical (vea la Figura 1.1). Un pistón móvil horizontal sin fricción de masa $m = 10\,\mathrm{kg}$ (asuma que $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$) y sección transversal $A = 500\,\mathrm{cm^2}$ comprime al gas dejando a la sección superior del contenedor al vacío. Hay un resorte unido al pistón y a la pared superior del contenedor. Ignore cualquier fuga de gas a través de su superficie de contacto, y desprecie las capacidades caloríficas del contenedor, el pistón y el resorte. Inicialmente el sistema está en equilibrio y el resorte está sin estirar. Desprecie la masa del resorte.

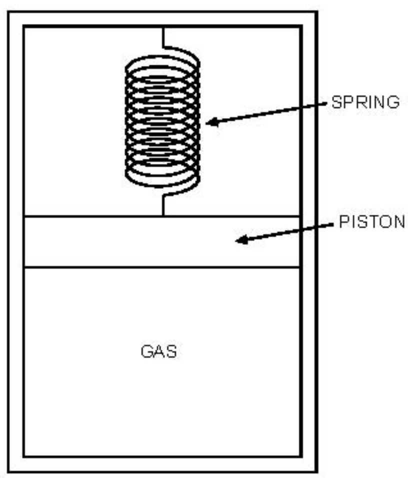

Figura 1.1:

a) Calcule la frecuencia f de las pequeñas oscilaciones del pistón, cuando es desplazado ligeramente de su posición de equilibrio. **(2.0 puntos)**

b) El pistón luego es empujado hacia abajo hasta que el volumen del gas se reduce a la mitad, y luego es soltado con velocidad cero. Calcule el valor (o los valores) del volumen del gas cuando la velocidad del pistón es $\sqrt{\frac{4gV_0}{5A}}$. **(3.0 puntos)**

Sea la constante del resorte $k = mgA/V_0$. Todos los procesos en el gas son adiabáticos. La constante de los gases es $R = 8.314\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$. Para el gas monoatómico (el helio) use la constante de Laplace $\gamma = 5/3$.

1B. El columpio paramétrico (5.0 puntos)

Un niño construye el movimiento de un columpio parándose y agachándose. La trayectoria seguida por el centro de masa del niño es ilustrada en la Figura 1.2. Sea r_{u} la distancia radial desde el pivoto del columpio al centro de masa del niño cuando está parado, mienteas que r_{d} sea la distancia del pivoto al centro de masa del niño cuando está agachado. Sea el cociente de r_{d} a r_{u} igual a $2^{1/10} = 1.072$, o sea que el niño mueve su centro de masa por aproximadamente un $7\,\%$ comparado con la distancia radial promedio al pivote del columpio.

Para mantener simple el análisis, se asume que el columpio no tiene masa, que la amplitud del columpio es lo suficientemente pequeña y que la masa del niño reside en su centro de masa. También se asume que las transiciones de agacharse a pararse (las transiciones de A a B y de E a F) son rápidas comparadas al ciclo del columpio y pueden tomarse como instantáneas. Del mismo modo se asume que las transiciones para agacharse (las transiciones de C a D y de G a H) también pueden considerarse instantáneas.

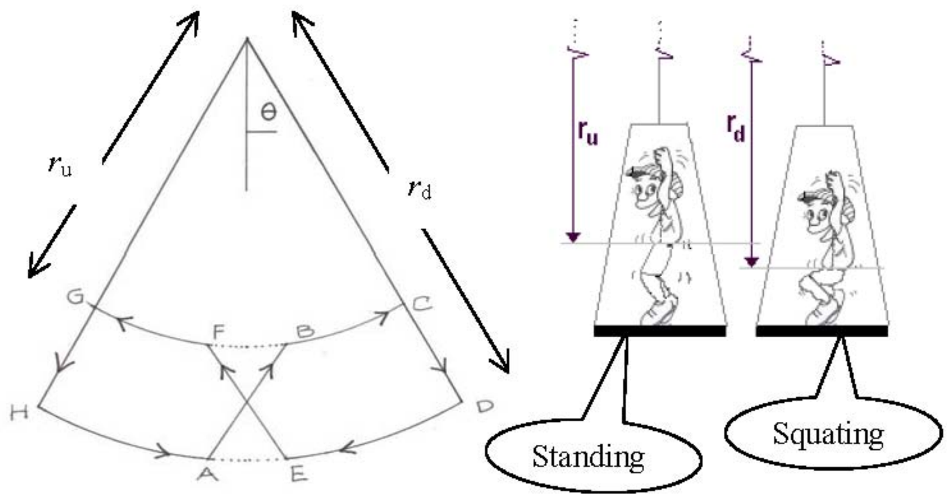

Figura 1.2:

¿Cuántos ciclos de esta maniobra le toma al niño aumentar la amplitud (o la velocidad angular) del columpio por un factor de dos? **(5.0 puntos)**

Problema 2: Enfoque magnético

Existen muchos dispositivos que utilizan finos rayos de partículas cargadas. Por ejemplo, los tubos de rayos catódicos usados en los osciloscopios, receptores de televisores o microscopios electrónicos. En estos dispositivos el rayo de partículas es enfocado y desviado en una manera similar a un rayo de luz en un instrumento óptico.

Los rayos de partículas pueden ser enfocados por campos eléctricos o por campos magnéticos. En los problemas 2A y 2B vamos a ver cómo el rayo puede ser enfocado por un campo magnético.

2A. Solenoide de enfoque magnético (4.0 puntos)

La Figura 2.1 muestra una pistola de electrones situada dentro (casi en medio) de un solenoide largo. Los electrones que emergen desde el hoyo en el ánodo tienen una pequeña componente transversal de velocidad. El electrón seguirá una trayectoria helicoidal. Después de una vuelta completa, el electrón regresará al eje que conecta al hoyo con el punto F. Ajustando correctamente el campo magnético B dentro del solenoide, todos los electrones convergerán al mismo punto F después de una vuelta completa. Use los siguientes datos:

- La diferencia de voltajes que acelera a los electrones, $V = 10\,\mathrm{kV}$
- La distancia entre el ánodo y el punto de enfoque F, $L = 0.50\,\mathrm{m}$
- La masa del electrón, $m = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
- La carga del electrón, $e = 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$
- Trate al problema de manera no relativista.

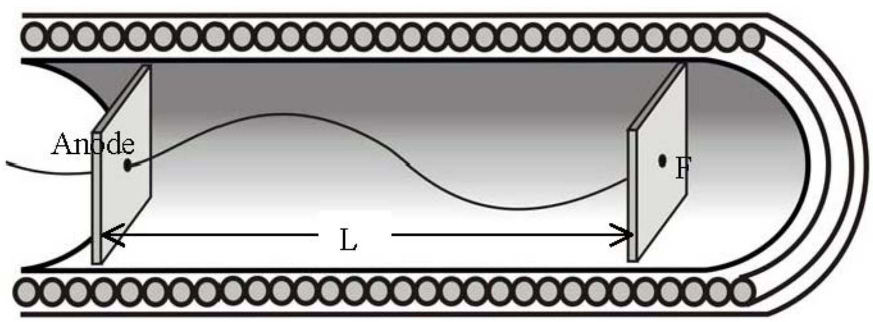

Figura 2.1:

a) Calcule B tal que el electrón regrese al eje en el punto F después de una vuelta completa. **(3.0 puntos)**

b) Encuentre la corriente en el solenoide si éste tiene 500 vueltas por metro. **(1.0 puntos)**

2B. Enfoque magnético (Campo marginal) (6.0 puntos)

Dos polos de magnetos posicionados en planos horizontales están separados por cierta distancia tal que el campo magnético entre ellos es B en la dirección vertical (vea la Figura 2.2). Las caras de los polos son rectángulos con longitud l y ancho w. Considere el campo marginal cerca de las orillas de los polos (el campo marginal es el campo asociado a los efectos de borde). Suponga que la extensión del campo marginal es b (vea la Figura 2.3). El campo marginal tiene dos componentes, $B_x\hat{\imath}$ y $B_z\hat{k}$. Por simplicidad asuma que $B_x = B\frac{|z|}{b}$ donde $z = 0$ es el plano medio de la brecha, explícitamente:

- Cuando la partícula entra al campo marginal, $B_x = +B\frac{z}{b}$.
- Cuando la partícula entra al campo marginal después de viajar a través del magneto, $B_x = -B\frac{|z|}{b}$.

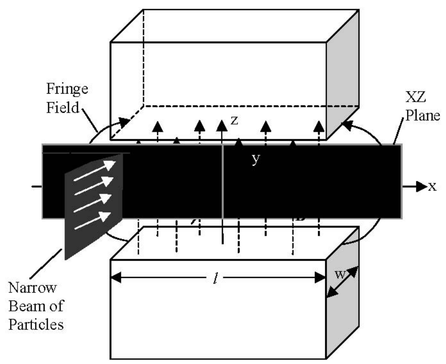

Figura 2.2: Visión de conjunto (note que θ es muy pequeña).

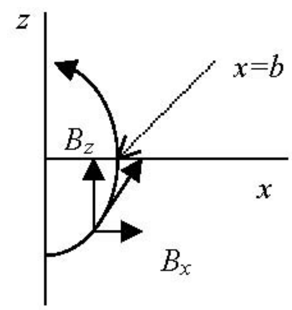

Figura 2.3: Campo marginal.

Un angosto rayo paralelo de partículas, cada una con masa m y carga q entra al imán (cerca del centro) con una alta velocidad v paralela al plano horizontal. El tamaño vertical del rayo es comparable con la distancia entre los polos magnéticos. Un cierto rayo entra al magneto con un ángulo θ respecto a la línea central del magneto y sale de él con un ángulo $-\theta$ (vea la Figura 2.4, y asuma que θ es muy pequeño). Asuma que el ángulo θ con el que la partícula entra al campo marginal es el mismo ángulo θ con el que entra al campo uniforme.

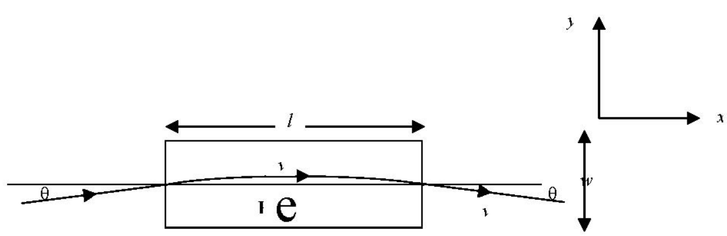

Figura 2.4: Vista desde arriba.

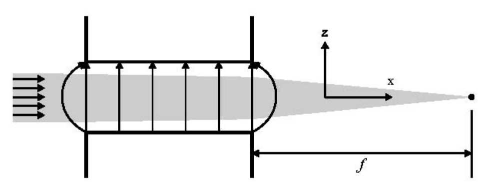

Figura 2.5: Vista lateral.

El rayo será enfocado debido al campo marginal. Calcule la longitud focal aproximada, si definimos a la longitud focal f como se ilustra en la Figura 2.5 (asuma que $b \ll l$ y asuma que la componente z de la desviación en el campo magnético uniforme B es muy pequeña). **(6.0 puntos)**

Problema 3: Desviación de la luz por un espejo móvil

La reflexión de la luz en un espejo que se mueve relativísticamente no es teóricamente nueva. Einstein discutió la posibilidad o elaboró el proceso usando la transformación de Lorentz para obtener la fórmula de la reflexión debida al espejo que se mueve con velocidad v. Esta fórmula, sin embargo, pudo haberse obtenido usando un método relativamente más simple. Considere el proceso de reflexión mostrado en la Figura 3.1, donde un espejo plano M se mueve con velocidad $\vec{v} = v\hat{e}_x$ (donde $\hat{e}_x$ es el vector unitario en la dirección x) observada desde el marco de referencia del laboratorio F. El espejo forma un ángulo ϕ con respecto a la velocidad (note que $\phi \leq 90°$, vea la Figura 3.1). El plano del espejo tiene $\hat{n}$ como su normal. El rayo de luz tiene un ángulo de incidencia α y un ángulo de reflexión β, que son los ángulos entre $\hat{n}$ y el rayo incidente 1 y entre el rayo reflejado $1'$, respectivamente, en el marco de referencia del laboratorio F. Puede demostrarse que

$$\sin\alpha - \sin\beta = \frac{v}{c}\sin\phi\sin(\alpha+\beta) \tag{1}$$

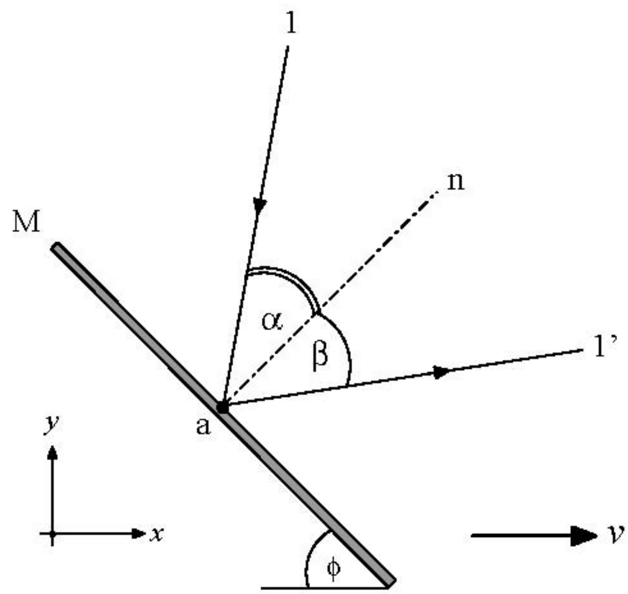

Figura 3.1: Reflexión de la luz en un espejo moviéndose relativísticamente.

3A. El espejo de Einstein (2.5 puntos)

Aproximadamente hace un siglo, Einstein obtuvo la ley de reflexión de una onda electromagnética en un espejo que se mueve con velocidad constante $\vec{v} = -v\hat{e}_x$ (vea la Figura 3.2). Aplicando la transformación de Lorentz al resultado obtenido en el marco inercial del espejo, Einstein encontró que:

$$\cos\beta = \frac{\left(1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)\cos\alpha - 2\frac{v}{c}}{1 - 2\frac{v}{c}\cos\alpha + \left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{2}$$

¡Deduzca esta fórmula usando la Ecuación (1) sin usar la transformación de Lorentz! **(2.5 puntos)**

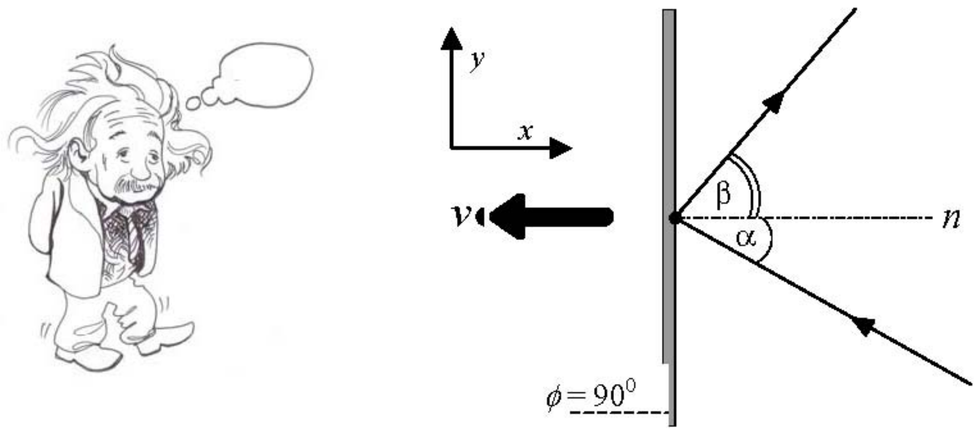

Figura 3.2: El espejo de Einstein moviéndose a la derecha con velocidad v.

3B. Corrimiento de frecuencia (2.0 puntos)

En la misma situación que en 3A, si la luz incidente es un rayo monocromático que alcanza a M con frecuencia f, encuentre la nueva frecuencia f' después de que es reflejado desde la superficie del espejo en movimiento. Si $\alpha = 30°$ y $v = 0.6c$ en la Figura 3.2, encuentre el corrimiento de frecuencia Δf en porcentaje de f.

(2.0 puntos)

3C. Ecuación del espejo móvil (5.5 puntos)

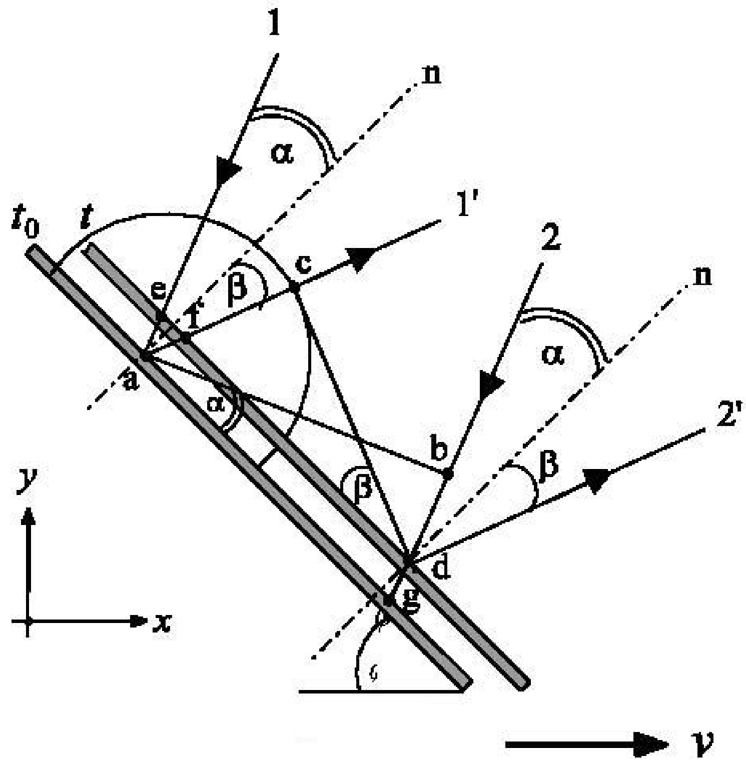

Figura 3.3:

La Figura 3.3 muestra las posiciones del espejo a los tiempos t y t_0. Ya que el observador se mueve a la izquierda, el espejo se mueve relativamente a la derecha. El rayo de luz 1 cae en el punto a en t_0 y es reflejado como el rayo 1'. El rayo de luz 2 cae en el punto d al tiempo t y es reflejado como el rayo 2'. Por ende $\overline{\mathrm{ab}}$ es el frente de onda de la luz entrante al tiempo t_0. Los átomos en el punto son distribuidos por el frente de onda incidente $\overline{\mathrm{ab}}$ y empiezan a radiar una ondícula. La perturbación debida al frente de onda $\overline{\mathrm{ab}}$ se detiene al tiempo t cuando el frente de onda golpea el punto d. El semicírculo en la figura representa al frente de onda de la ondícula al tiempo t.

Refiriéndose a la Figura 3.3 para la propagación de las ondas de luz o usando otros métodos, deduzca la Ecuación (1). **(5.5 puntos)**