

**35 OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA**  
**POHANG, SOUTH KOREA, 2004**

**Problema 1** (Resistencia “Ping-Pong”). Un condensador consiste de dos placas circulares paralelas, ambas con radio  $R$  separadas por una distancia  $d$ , donde  $d \ll R$ , como se muestra en la Fig. 1.1(a). La placa superior está conectada a una fuente de voltaje constante a una potencia  $V$  mientras que la placa inferior está conectada a tierra. Entonces un disco delgado y pequeño de masa  $m$  con radio  $r (\ll R, d)$  y espesor  $t (\ll r)$  es puesto en el centro de la placa inferior, como se muestra en la Fig. 1.1(b).

Asumir que el espacio entre las placas está en el vacío con la constante dieléctrica  $\epsilon_0$ ; las placas y los discos están hechos de conductores perfectos; y todos los efectos de borde electrostáticos pueden ser omitidos. LA inductancia de todo el circuito y los efectos relativistas pueden ser con toda seguridad ignorados. El efecto de la carga imagen también puede ser ignorado.

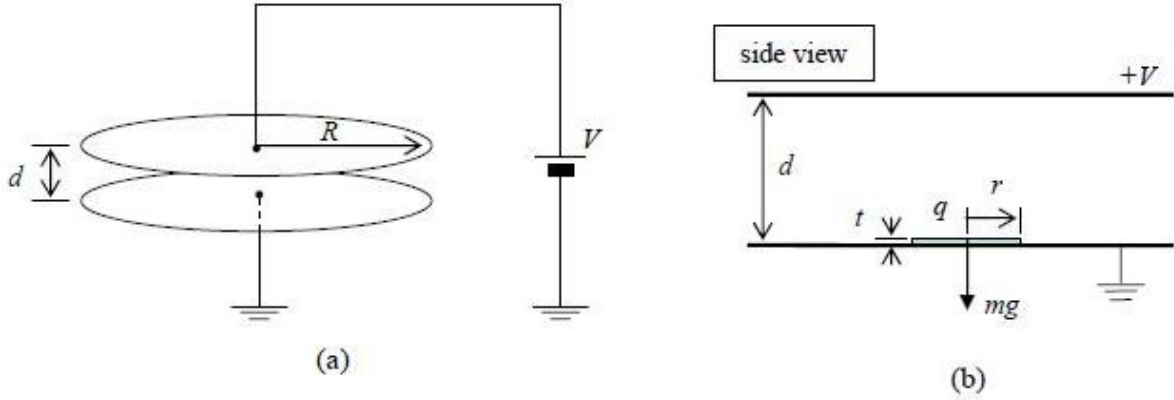


Figura 1.1 Dibujos esquemáticos de (a) un condensador de placas paralelas conectadas a una fuerza constante de voltaje y (b) una vista lateral de las placas paralelas con un pequeño disco insertado dentro del condensador. (Ver el texto para detalles.)

- [1.2 puntos] Calcular la fuerza electrostática  $F_p$  entre las placas separadas por  $d$  antes de insertar el disco en medio como se muestra en la Fig. 1.1(a).
- [0.8 puntos] Cuando el disco es puesto en la placa inferior, una carga  $q$  en el disco de la Fig. 1.1(b) esta relacionada al voltaje  $V$  por  $q = \chi V$ . Encontrar  $\chi$  en términos de  $r$ ,  $d$ , y  $\epsilon_0$ .
- [0.5 puntos] Las placas paralelas que se encuentran perpendicular a un campo gravitacional uniforme  $g$ . Para levantar el disco en reposo inicialmente, tenemos que aumentar el voltaje aplicado más allá de un voltaje "crítico"  $V_{th}$ . Obtener  $V_{th}$  en términos de  $m$ ,  $g$ ,  $d$ , y  $\chi$ .
- [2.3 puntos] Cuando  $V > V_{th}$ , el disco hace un movimiento hacia arriba y hacia abajo entre las placas. (Asumir que el disco se mueve solo verticalmente sin ninguna oscilación.) Las colisiones entre el disco y las placas son inelásticas con el coeficiente de restitución  $\eta \equiv (v_{despues}/v_{antes})$ , donde  $v_{despues}$  y  $v_{antes}$  son las velocidades del disco justo antes y después de la colisión, respectivamente. Las placas están fijas en posición estacionaria. La velocidad del disco justo después de la colisión en la placa inferior se aproxima a una “velocidad de estado estacionario”  $v_s$ , el cuál depende de  $V$  como sigue:

$$v_s = \sqrt{\alpha V^2 + \beta} \quad (1.1)$$

Obtener los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  en términos de  $m$ ,  $g$ ,  $\chi$ ,  $d$ , y  $\eta$ . Asumir que toda la superficie del disco toca la placa uniformemente y simultáneamente, de modo que el intercambio de carga completa ocurre instantáneamente en cada colisión.

- (e) [2.2 puntos] Después de alcanzar el estado estacionario, el tiempo promedio de corriente  $I$  a través de las placas del condensador pueden ser aproximadas por  $I = \gamma V^2$  cuando  $qV \gg mgd$ . Expresar el coeficiente  $\gamma$  en términos de  $m$ ,  $\chi$ ,  $d$ , y  $\eta$ .
- (f) [3 puntos] Cuando el voltaje aplicado  $V$  disminuye (muy lentamente), existe un voltaje crítico  $V_c$ , por debajo del cuál la carga dejara de fluir. Encontrar  $V_c$  y la corriente correspondiente  $I_c$  en términos de  $m$ ,  $g$ ,  $\chi$ ,  $d$ , y  $\eta$ . Mediante la comparación de  $V_c$  con el  $V_{th}$  de elevación hasta el umbral””” discutido en (c), hacer un bosquejo de características  $I - V$  cuando  $V$  esta aumentando y disminuyendo en el rango de  $V = 0$  a  $3V_{th}$ .

**Problema 2** (Globo Elevándose). Un globo de goma lleno de gas helio se eleva hacia el cielo, donde la presión y la temperatura disminuyen con la altura. En las siguientes preguntas, asumir que la forma del globo permanece esférico independientemente de la carga útil, omitir el volumen de la carga útil. También asumir que la temperatura del gas helio dentro del globo es siempre la misma que la del aire del ambiente, y tratar todos los gases como gases ideales. La constante universal del gas es  $R = 8.31 \text{ J/mol K}$  y la masa molar del helio y del aire es  $M_H = 4.00 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$  y  $M_A = 28.9 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ , respectivamente. La aceleración gravitacional es  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .

#### PARTE A

- (a) [1.5 puntos] Como la presión del aire ambiente es  $P$  y la temperatura es  $T$ . La presión dentro del globo es mas alto que la de afuera debido a la tensión de la superficie del globo. El globo contiene  $n$  moles de gas helio y la presión del interior es  $P + \Delta P$ . Encontrar la fuerza hidráulica  $F_B$  que actúa sobre el globo como una función de  $P$  y  $\Delta P$ .
- (b) [2 puntos] En un día de verano en particular en Korea, la temperatura del aire  $T$  en la altura  $z$  del nivel del mar se encontró que era  $T(z) = T_0(1 - z/z_0)$  en el rango de  $0 < z < 15 \text{ km}$  con  $z_0 = 49 \text{ km}$  y  $T_0 = 303 \text{ K}$ . La presión y densidad en el nivel del mar donde  $P_0 = 1.0 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$  y  $\rho_0 = 1.16 \text{ kg/m}^3$ , respectivamente. Para este rango de altura, la presión toma la forma
- (1) 
$$P(z) = P_0(1 - z/z_0)^\eta$$

Expresar  $\eta$  en términos de  $z_0$ ,  $\rho_0$ ,  $P_0$ , y  $g$  y encontrar sus valores numéricos a dos dígitos. Tratar la aceleración gravitacional como una constante, independiente de la altura.

#### PARTE B

Cuando un globo de goma de forma esférica con un radio estirado  $r_0$  es inflado a la esfera de radio  $r (\geq r_0)$ , la superficie del globo contiene energía elástica extra debido a el estiramiento. En una teoría simplista, la energía elástica en una temperatura constante  $T$  puede ser expresada por

$$(2) \quad U = 4\pi r_0^2 \kappa RT (2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3)$$

donde  $\lambda \equiv r/r_0$  ( $\geq 1$ ) es la razón medida-inflación y  $\kappa$  es una constante en unidades de  $\text{mol/m}^2$ .

- (c) [2 puntos] Expresar  $\Delta P$  en términos de los parámetros dados en la ecuación (2) y bosquejar  $\Delta P$  como una función de  $\lambda = r/r_0$ .
- (d) [1.5 puntos] La constante  $\kappa$  puede ser determinada de la cantidad de gas necesitado para inflar el globo. En  $T_0 = 303 \text{ K}$  y  $P_0 = 1.0 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ , un globo estirado ( $\lambda = 1$ ) contiene  $n_0 = 12.5$  moles de helio. Se necesitan  $n = 3.6$ ,  $n_0 = 45$  moles en total para inflar el globo para  $\lambda = 1.5$  en el mismo  $T_0$  y  $P_0$ . Expresar el parámetro del globo  $a$ , definido como  $a = \kappa/\kappa_0$ , en términos de  $n$ ,  $n_0$  y  $\lambda$ , donde  $\kappa \equiv \frac{r_0 P_0}{4RT_0}$ . Evaluar  $a$  a dos dígitos.

#### PARTE C

Un globo es preparado como en (d) en el nivel del mar (inflado para  $\lambda = 1.5$  con  $n = 3.6 n_0 = 45$  moles de gas helio en  $T_0 = 303 \text{ K}$  y  $P_0 = 1 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ ). La masa total incluyendo gas, del globo mismo y otras cargas es  $M_T = 1.12 \text{ kg}$ . Ahora elevamos el globo desde el nivel del mar.

- (e) [3 puntos] Suponer que finalmente el globo se detiene en la altura  $z_f$  donde la fuerza de flotación equilibra el peso total. Encontrar  $z_f$  y la razón de inflación  $\lambda_f$  a esa altura. Dar las respuestas a dos dígitos. Asumir que no hay efecto de la deriva y no hay fugas de gas durante el vuelo hacia arriba.

**Problema 3** (Microscopio de Sonda Atómica). Microscopios de sonda atómica (APMs) son herramientas poderosas en el campo de la nano-ciencia. El movimiento de un puente en APM puede ser detectado por un foto-detector monitoreando el rayo láser reflejado, como se muestra en la figura 3.1. El puente puede moverse solo en dirección vertical y su desplazamiento  $z$  como una función de tiempo  $t$  puede ser descrito por la ecuación

$$(3) \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz = F$$

donde  $m$  es la masa del puente,  $k = m\omega_0^2$  es el resorte constante del puente,  $b$  es un pequeño coeficiente aislante satisfaciendo  $\omega_0 \gg (b/m) > 0$ , y finalmente  $F$  es una fuerza exterior manejando el tubo piezoeléctrico.

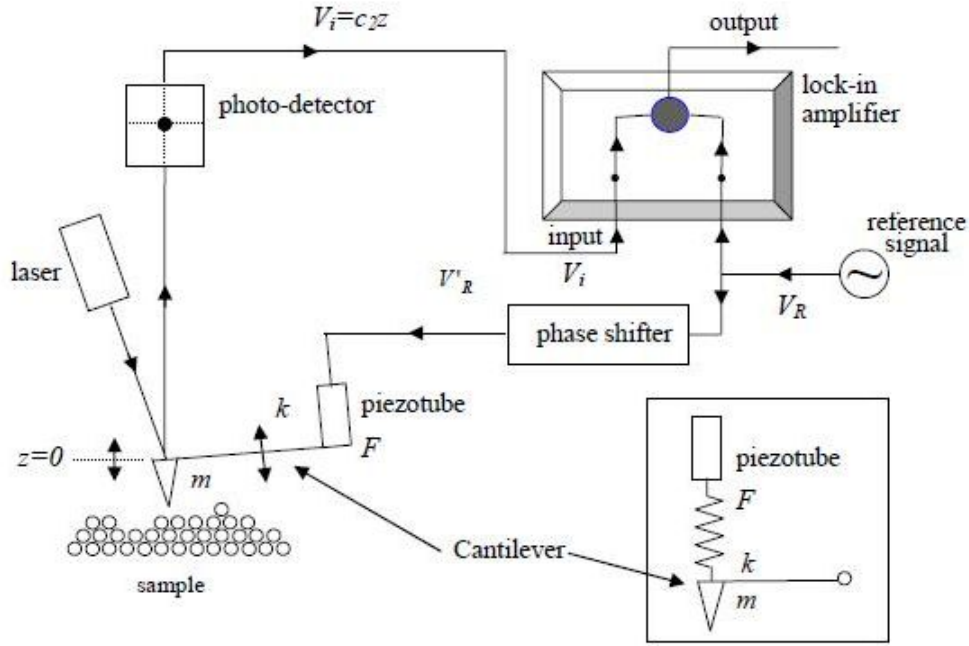


Figura 3.1 Un diagrama esquemático para un microscopio de sonda escaneando (SPM). El recuadro en la esquina inferior derecha representa un modelo mecánico simplificado para describir el acoplamiento del piezotubo con el puente.

#### PARTE A

- [1.5 puntos] Cuando  $F = F_0 \sin \omega t$ ,  $z(t)$  satisfaciendo la ecuación (1) puede ser escrita como  $z(t) = A \sin(\omega t - \phi)$ , donde  $A > 0$  y  $0 \leq \phi \leq \pi$ . Encontrar la expresión de la amplitud  $A$  y  $\tan \phi$  en términos de  $F_0$ ,  $m$ ,  $\omega$ ,  $\omega_0$  y  $b$ . Obtener  $A$  y la fase  $\phi$  en la frecuencia de resonancia  $\omega = \omega_0$ .
- [1 punto] Un amplificador lock-in se muestra en la Figura 3.1 multiplica una señal de entrada por la señal de referencia lock-in,  $V_R = V_{R0} \sin \omega t$ , y entonces solamente pasa la componente dc (corriente directa) de la señal multiplicada. Asumir que la señal de entrada está dado por  $V_i = V_{i0} \sin(\omega_i t - \phi_i)$ . Aquí  $V_{R0}$ ,  $V_{i0}$ ,  $\omega_i$ , y  $\phi_i$  son todas constantes positivas dadas. Encontrar la condición sobre  $\omega (> 0)$  para una señal de salida no nula. ¿Qué es la expresión para la magnitud de la *señal de salida dc* no nula en esa frecuencia?
- [1.5 puntos] Pasando a través de la fase de cambio, el voltaje de referencia lock-in  $V_R = V_{R0} \sin \omega t$  cambia a  $V'_R = V_{R0} \sin(\omega t + \pi/2)$ .  $V'_R$ , aplicado al tubo piezoeléctrico, maneja el puente con una fuerza  $F = c_1 V'_R$ . Entonces el foto-detector convierte el desplazamiento del puente,  $z$ , en un voltaje  $V_i = c_2 z$ . Aquí  $c_1$  y  $c_2$  son constantes. Encontrar la expresión para la magnitud de la *señal de salida dc* en  $\omega = \omega_0$ .
- [2 puntos] El cambio pequeño  $\Delta m$  de la masa del puente cambia la frecuencia de resonancia por  $\Delta \omega_0$ . Como un resultado, la fase  $\phi$  en la frecuencia de resonancia original  $\omega_0$  cambia por  $\Delta \phi$ . Encontrar el cambio de masa  $\delta m$  correspondiente al cambio de fase  $\Delta \phi = \pi/1800$ , el cual es una resolución típica

en las medidas de fase. Los parámetros físicos del puente están dados por  $m = 1.0 \times 10^{-12}$  kg,  $k = 1.0$  N/m, y  $(b/m) = 1.0 \times 10^3$  s $^{-1}$ . Usar las aproximaciones  $(1+x)^a \approx 1+ax$  y  $\tan(\pi/2+x) \approx -1/x$  cuando  $|x| \ll 1$ .

### PARTE B

A partir de ahora vamos a considerar la situación de que algunas fuerzas, además de la fuerza motriz discutido en la Parte A, actúa sobre el puente, debido a la muestra, tal como se muestra en la Figura 3.1.

- (e) [1.5 puntos] Asumiendo que la fuerza adicional  $f(h)$  depende solo de la distancia  $h$  entre el puente y la superficie de muestra, se puede encontrar una nueva posición de equilibrio  $h_0$ . Cerca de  $h = h_0$ , podemos escribir  $f(h) \approx f(h_0) + c_3(h - h_0)$ , donde  $c_3$  es una constante en  $h$ . Encontrar la nueva frecuencia de resonancia  $\omega'_0$  en términos de  $\omega_0$ ,  $m$  y  $c_3$ .
- (f) [2.5 puntos] Durante la exploración de la superficie por el movimiento de la muestra horizontalmente, la punta del puente cargado con  $Q = 6e$  encuentra un electrón de carga  $q = e$  atrapado(localizado en el espacio) en alguna distancia debajo de la superficie. Durante la exploración alrededor del electrón, el máximo cambio de la frecuencia de resonancia  $\Delta\omega (= \omega'_0 - \omega_0)$  es observado para ser mucho mas pequeño que  $\omega_0$ . Expresar la distancia  $d_0$  del puente para atrapar electrones en el cambio maximo en términos de  $m$ ,  $q$ ,  $Q$ ,  $\omega_0$ ,  $\Delta\omega_0$ , y la constante de Coulumb  $k_e$ . Evaluar  $d_0$  en nm(1 nm =  $1 \times 10^{-9}$  m) para  $\Delta\omega_0 = 20$  s $^{-1}$ .

Los parámetros físicos del puente son  $m = 1.0 \times 10^{-12}$  kg y  $k = 1.0$  N/m. Ignorar cualquier efecto de polarización en ambas puntas del puente y la superficie. Notar que  $k_e = 1/4\pi\epsilon_0 = 9.0 \times 10^9$  Nm $^2$ /C $^2$  y  $e = -1.6 \times 10^{-19}$  C.