

ملاحظة: لدينا $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(A|B)P(B)$

القسم - ليكن $\{A_i, i \in [1, n]\}$ بحيث لكل i لدينا $A_i \neq \emptyset$. نقول أن $\{A_i\}$ قسم إذا كان لدينا:

$$\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{و} \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = S$$

ملاحظة: لأي حدث B في فضاء العينة، لدينا $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)$

النسخة الموسعة من قاعدة بايز - ليكن $\{A_i, i \in [1, n]\}$ قسم من فضاء العينة. لدينا:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}$$

الاستقلال - يكون حدثين A و B مستقلين إذا وفقط إذا كان لدينا:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

المتحولات العشوائية

المتحول العشوائي - المتحول العشوائي، ويرمز له عادة بـ X ، هو دالة تربط كل عنصر في فضاء العينة إلى خط الأعداد الحقيقية.

دالة التوزيع التراكمي (CDF) - تعرف دالة التوزيع التراكمي F ، والتي تكون غير متناقصة بشكل رتيب وتحقق $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ ، كالتالي:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

ملاحظة: لدينا $P(a < X \leq B) = F(b) - F(a)$

دالة الكثافة الاحتمالية (PDF) - دالة الكثافة الاحتمالية f هي احتمال أن يأخذ X قيمة بين قيمتين متجاورتين من قيم المتحول العشوائي.

علاقات تتضمن دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمي - هذه بعض الخصائص التي من المهم معرفتها في الحالتين المتقطعة (D) والمستمرة (C).

الحالة	دالة التوزيع التراكمي F	دالة الكثافة الاحتمالية f	خصائص دالة الكثافة الاحتمالية
(D)	$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$	$f(x_j) = P(X = x_j)$	$0 \leq f(x_j) \leq 1$ و $\sum_j f(x_j) = 1$
(C)	$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$	$f(x) = \frac{dF}{dx}$	$f(x) \geq 0$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

مراجعة للاحتمالات والإحصاء

افشين عميدى و شروين عميدى

١٤ ربيع الثاني، ١٤٤١

تمت الترجمة بواسطة محمود أصلان. تمت المراجعة بواسطة فارس القنبيير.

مقدمة في الاحتمالات والتوافيق

فضاء العينة - يعرف فضاء العينة لتجربة ما بمجموعة كل النتائج الممكنة لهذه التجربة ويرمز لها بـ S .

الحدث - أي مجموعة جزئية E من فضاء العينة تعتبر حدثاً. أي، الحدث هو مجموعة من النتائج الممكنة للتجربة. إذا كانت نتيجة التجربة محتواة في E ، عندها نقول أن الحدث E وقع.

مسلمات الاحتمالات - لكل حدث E ، نرمز لإحتمال وقوعه بـ $P(E)$.

$$(1) \quad 0 \leq P(E) \leq 1 \quad (2) \quad P(S) = 1 \quad (3) \quad P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n P(E_i)$$

التباديل - التبديل هو عبارة عن عدد الاختيارات لـ r غرض من مجموعة مكونة من n غرض بترتيب محدد. عدد هكذا تراتيب يرمز له بـ $P(n, r)$ ، المعرف كالتالي:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

التوافيق - التوفيق هو عدد الاختيارات لـ r غرض من مجموعة مكونة من n غرض بدون إعطاء الترتيب أية أهمية. عدد هكذا توافيق يرمز له بـ $C(n, r)$ ، المعرف كالتالي:

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ملاحظة: لكل $0 \leq r \leq n$ ، يكون لدينا $P(n, r) \geq C(n, r)$

الاحتمال الشرطي

قاعدة بايز - إذا كانت لدينا الأحداث A و B بحيث $P(B) > 0$ ، يكون لدينا:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

□ **التباين** - تباين متحول عشوائي، والذي يرمز له عادةً بـ $\text{Var}(X)$ أو σ^2 ، هو مقياس لانتشار دالة توزيع هذا المتحول. يحسب بالشكل التالي:

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

□ **الكثافة الهامشية والتوزيع التراكمي** - من دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة f_{XY} ، لدينا:

الحالة	الكثافة الهامشية	الدالة التراكمية
(D)	$f_X(x_i) = \sum_j f_{XY}(x_i, y_j)$	$F_{XY}(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f_{XY}(x_i, y_j)$
(C)	$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy$	$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(x', y') dx' dy'$

□ **الاستقلال** - يقال عن متحولين عشوائيين X و Y أنهما مستقلين إذا كان لدينا:

$$\psi_{X+Y}(\omega) = \psi_X(\omega) \times \psi_Y(\omega)$$

□ **التغاير** - نعرف تغاير متحولين عشوائيين X و Y ، والذي نرمز له بـ σ_{XY}^2 أو بالرمز الأكثر شيوعاً $\text{Cov}(X, Y)$ ، كالتالي:

$$\text{Cov}(X, Y) \triangleq \sigma_{XY}^2 = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E[XY] - \mu_X \mu_Y$$

□ **الارتباط** - بأخذ σ_X, σ_Y كانحراف معياري لـ X و Y ، نعرف الارتباط بين المتحولات العشوائية X و Y ، والرمز بـ ρ_{XY} ، كالتالي:

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X \sigma_Y}$$

ملاحظة ١: لأي متحولات عشوائية X, Y ، لدينا $\rho_{XY} \in [-1, 1]$.

ملاحظة ٢: إذا كان X و Y مستقلين، فإن $\rho_{XY} = 0$.

□ **التوزيعات الأساسية** - فيما يلي التوزيعات الأساسية لأخذها بالاعتبار:

□ **الانحراف المعياري** - الانحراف المعياري لمتحول عشوائي، والذي يرمز له عادةً بـ σ ، هو مقياس لانتشار دالة توزيع هذا المتحول بما يتوافق مع وحدات قياس المتحول العشوائي. يحسب بالشكل التالي:

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

□ **التوقع وعزوم التوزيع** - فيما يلي المصطلحات المستخدمة للتعبير عن القيمة المتوقعة $E[X]$ ، الصيغة العامة للقيمة المتوقعة $E[g(X)]$ ، العزم رقم k $E[X^k]$ ودالة السمة $\psi(\omega)$ للحالات المتقطعة والمستمرة:

الحالة	$E[X]$	$E[g(X)]$	$E[X^k]$	$\psi(\omega)$
(D)	$\sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$	$\sum_{i=1}^n g(x_i) f(x_i)$	$\sum_{i=1}^n x_i^k f(x_i)$	$\sum_{i=1}^n f(x_i) e^{i\omega x_i}$
(C)	$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$	$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$

□ **تحويل المتحولات العشوائية** - لتكن المتحولات العشوائية X و Y مرتبطة من خلال دالة ما. باعتبار f_X و f_Y دالتا التوزيع لـ X و Y على التوالي، يكون لدينا:

$$f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

□ **قاعدة لايبنتز (Leibniz) للتكامل** - لتكن g دالة لـ x وربما لـ c ، ولتكن a و b حدود قد تعتمد على c . يكون لدينا:

$$\frac{\partial}{\partial c} \left(\int_a^b g(x) dx \right) = \frac{\partial b}{\partial c} g(b) - \frac{\partial a}{\partial c} g(a) + \int_a^b \frac{\partial g}{\partial c}(x) dx$$

□ **متراجحة تشيبيشيف (Chebyshev)** - ليكن X متحولاً عشوائياً قيمته المتوقعة تساوي μ . إذا كان لدينا $k, \sigma > 0$ ، سنحصل على المتراجحة التالية:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

المتغيرات العشوائية الموزعة اشتراكياً

□ **الكثافة الشرطية** - الكثافة الشرطية لـ X بالنسبة لـ Y ، والتي يرمز لها عادةً بـ $f_{X|Y}$ ، تعرف بالشكل التالي:

$$f_{X|Y}(x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

$$\bar{X} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

التوزيع	PDF	$\psi(\omega)$	$E[X]$	$\text{Var}(X)$
(D)	$X \sim \mathcal{B}(n, p)$ Binomial	$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ $x \in \llbracket 0, n \rrbracket$	$(pe^{i\omega} + q)^n$	npq
	$X \sim \text{Poisson}(\mu)$ Poisson	$P(X = x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$ $x \in \mathbb{N}$	$e^{\mu(e^{i\omega} - 1)}$	μ
(C)	$X \sim \mathcal{U}(a, b)$ Uniform	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in [a, b]$	$\frac{e^{i\omega b} - e^{i\omega a}}{(b-a)i\omega}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
	$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ Gaussian	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $x \in \mathbb{R}$	$e^{i\omega\mu - \frac{1}{2}\omega^2\sigma^2}$	σ^2
	$X \sim \text{Exp}(\lambda)$ Exponential	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $x \in \mathbb{R}_+$	$\frac{1}{1 - \frac{i\omega}{\lambda}}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

تقدير المُدخَل (Parameter)

□ **العينة العشوائية** - العينة العشوائية هي مجموعة من n متحول عشوائي X_1, \dots, X_n والتي تكون مستقلة وموزعة تطابقاً مع X .

□ **المُقدَّر** - المُقدَّر هو دالة للبيانات المستخدمة ويستخدم لاستنباط قيمة مُدخل غير معلوم ضمن نموذج إحصائي.

□ **الانحياز** - انحياز مُقدَّر $\hat{\theta}$ هو الفرق بين القيمة المتوقعة لتوزيع $\hat{\theta}$ والقيمة الحقيقية، كالتالي:

$$\text{Bias}(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$$

ملاحظة: يقال عن مُقدَّر أنه غير منحاز عندما يكون لدينا $E[\hat{\theta}] = \theta$.

□ **متوسط العينة** - يستخدم متوسط عينة عشوائية لتقدير المتوسط الحقيقي μ لتوزيع ما، عادةً ما يرمز له بـ \bar{X} ويعرف كالتالي:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

ملاحظة: متوسط العينة غير منحاز، أي $E[\bar{X}] = \mu$.

□ **تباين العينة** - يستخدم تباين عينة عشوائية لتقدير التباين الحقيقي σ^2 لتوزيع ما، والذي يرمز له عادةً بـ s^2 أو $\hat{\sigma}^2$ ويعرّف بالشكل التالي:

$$s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

ملاحظة: تباين العينة غير منحاز، أي $E[s^2] = \sigma^2$.

□ **مبرهنة النهاية المركزية** - ليكن لدينا عينة عشوائية X_1, \dots, X_n والتي تتبع لتوزيع معطى له متوسط μ وتباين σ^2 ، فيكون: