

عمليات المصفوفات

□ ضرب المتجهات - توجد طريقتين لضرب متجه بمتجه :

• ضرب داخلي : (inner product) ل $x, y \in \mathbb{R}^n$ نستنتج :

$$x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}$$

• ضرب خارجي : (outer product) ل $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ نستنتج :

$$xy^T = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_m \\ \vdots & & \vdots \\ x_n y_1 & \cdots & x_n y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

□ مصفوفة - متجه : ضرب المصفوفة $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ والمتجه $x \in \mathbb{R}^m$ ينتجه متجه من الشكل $x \in \mathbb{R}^n$ حيث :

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{r,1}^T x \\ \vdots \\ a_{r,m}^T x \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m a_{c,i} x_i \in \mathbb{R}^n$$

حيث $a_{r,i}^T$ يعتبر متجه الصفوف و $a_{c,j}$ يعتبر متجه الأعمدة ل A كذلك x_i يرمز لعناصر x .

□ ضرب مصفوفة ومصفوفة - ضرب المصفوفة $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ينتجه عنه المصفوفة $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ حيث أن :

$$AB = \begin{pmatrix} a_{r,1}^T b_{c,1} & \cdots & a_{r,1}^T b_{c,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r,m}^T b_{c,1} & \cdots & a_{r,m}^T b_{c,p} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m a_{c,i} b_{r,i}^T \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

حيث $a_{r,i}^T$ و $b_{r,i}^T$ يعتبر متجه الصفوف $a_{c,j}$ و $b_{c,j}$ متجه الأعمدة ل A و B على التوالي.

□ المنقول (Transpose) - منقول المصفوفة $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ يرمز له ب A^T حيث الصفوف يتم تبديلها مع الأعمدة :

$$\forall i, j, \quad A_{i,j}^T = A_{j,i}$$

ملاحظة: لأي مصفوفتين A و B ، نستنتج $(AB)^T = B^T A^T$.

□ المعكوس (Inverse) - معكوس أي مصفوفة A قابلة للعكس (Invertible) يرمز له ب A^{-1} ويعتبر المعكوس المصفوفة الوحيدة التي لديها الخاصية التالية :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

ملاحظة: ليس جميع المصفوفات يمكن إيجاد معكوس لها. كذلك لأي مصفوفتين A و B نستنتج $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

□ أثر المصفوفة (Trace) - أثر أي مصفوفة مربعة A يرمز له ب $tr(A)$ يعتبر مجموع العناصر التي في القطر:

ملخص الجبر الخطي و التفاضل و التكامل

افشين عميدى و شروين عميدى

١٤ ربيع الثاني، ١٤٤١

تمت الترجمة بواسطة زيد اليافعي. تمت المراجعة بواسطة أمجد الخطابي و مازن مليباري.

الرموز العامة

□ متجه (vector) - نرمز ل $x \in \mathbb{R}^n$ متجه يحتوي على n مدخلات، حيث $x_i \in \mathbb{R}$ يعتبر المدخل رقم i .

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

□ مصفوفة (Matrix) - نرمز ل $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ مصفوفة تحتوي على m صفوف و n أعمدة، حيث $A_{i,j}$ يرمز للمدخل في الصف i و العمود j .

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

ملاحظة: المتجه x المعروف مسبقا يمكن اعتباره مصفوفة من الشكل $n \times 1$ والذي يسمى ب مصفوفة من عمود واحد.

□ مصفوفة الوحدة (Identity) - مصفوفة الوحدة $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ تعتبر مصفوفة مربعة تحتوي على المدخل ١ في قطر المصفوفة و ٠ في بقية المدخلات:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ملاحظة: جميع المصفوفات من الشكل $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ فإن $A \times I = I \times A = A$.

□ مصفوفة قطرية (diagonal) - المصفوفة القطرية هي مصفوفة من الشكل

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

ملاحظة: نرمز كذلك ل D ب $diag(d_1, \dots, d_n)$.

□ **الارتباط الخطي (Linear Dependence)** - مجموعة المتجهات تعتبر تابعة خطياً إذا وفقط إذا كل متجه يمكن كتابته بشكل خطي بإستخدام مجموعة من المتجهات الأخرى.
ملاحظة: إذا لم يتحقق هذا الشرط فإنها تسمى مستقلة خطياً.

□ **رتبة المصفوفة (Rank)** - رتبة المصفوفة A يرمز له ب $\text{rank}(A)$ وهو يصف حجم الفضاء المتجهي الذي نتج من أعمدة المصفوفة. يمكن وصفه كذلك بأقصى عدد من أعمدة المصفوفة A التي تمتلك خاصية أنها مستقلة خطياً.

□ **مصفوفة شبه معرفة موجبة (Positive semi-definite)** - المصفوفة $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ تعتبر مصفوفة شبه معرفة موجبة (PSD) ويرمز لها بالرمز $A \succeq 0$ إذا:

$$A = A^T \quad \text{و} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x^T A x \geq 0$$

ملاحظة: المصفوفة A تعتبر مصفوفة معرفة موجبة إذا $A \succ 0$ وهي تعتبر مصفوفة (PSD) والتي تستوفي الشرط: لكل متجه غير الصفر x حيث $x^T A x > 0$.

□ **القيم الذاتية (eigenvalue)، المتجه الذاتي (eigenvector)** - إذا كان لدينا مصفوفة $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، القيمة λ تعتبر قيمة ذاتية للمصفوفة A إذا وجد متجه $\{0\}$ يسمى متجه ذاتي حيث أن:

$$Az = \lambda z$$

□ **النظرية الطيفية (spectral theorem)** - نفرض $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ إذا كانت المصفوفة A متماثلة فإن A تعتبر مصفوفة قطرية بإستخدام مصفوفة متعامدة (orthogonal) $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ويرمز لها بالرمز $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ حيث أن:

$$\exists \Lambda \text{ قطرية, } A = U \Lambda U^T$$

□ **مجزئ القيمة المفردة (singular value decomposition)** - لأي مصفوفة A من الشكل $n \times m$ ، تفكيك القيمة المفردة (SVD) يعتبر طريقة تحليل تضمن وجود $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ، مصفوفة قطرية $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ حيث أن:

$$A = U \Sigma V^T$$

حساب المصفوفات

□ **المشتقة في فضاءات عالية (gradient)** - افترض $f: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ تعتبر دالة و $f: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ تعتبر مصفوفة. المشتقة العليا ل f بالنسبة ل A يعتبر مصفوفة $n \times m$ يرمز له $\nabla_A f(A)$ حيث أن:

$$\left(\nabla_A f(A) \right)_{i,j} = \frac{\partial f(A)}{\partial A_{i,j}}$$

ملاحظة: المشتقة العليا معرفة فقط إذا كانت الدالة f لديها مدى ضمن الأعداد الحقيقية.

□ **هيشيان (Hessian)** - افترض $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ تعتبر دالة و $x \in \mathbb{R}^n$ يعتبر متجه. الهيشيان ل f بالنسبة ل x تعتبر مصفوفة متماثلة من الشكل $n \times n$ يرمز لها بالرمز $\nabla_x^2 f(x)$ حيث أن:

$$\left(\nabla_x^2 f(x) \right)_{i,j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{i,i}$$

ملاحظة: لأي مصفوفتين A و B لدينا $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$ و $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

□ **المحدد (Determinant)** - المحدد لأي مصفوفة مربعة من الشكل $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ يرمز له ب $|A|$ أو $\det(A)$ يعرفه بإستخدام $A_{i,j}$ والذي يعتبر المصفوفة A مع حذف الصف i والعمود j كالتالي:

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} A_{i,j} |A_{\setminus i, \setminus j}|$$

ملاحظة: A يكون لديه معكوز إذا وفقط إذا $|A| \neq 0$. كذلك $|AB| = |A||B|$ و $|A^T| = |A|$.

خواص المصفوفات

□ **التفكيك المتماثل (Symmetric Decomposition)** - المصفوفة A يمكن التعبير عنها بإستخدام جزئين متماثل (Symmetric) وغير متماثل (Antisymmetric) كالتالي:

$$A = \underbrace{\frac{A + A^T}{2}}_{\text{متماثل}} + \underbrace{\frac{A - A^T}{2}}_{\text{غير متماثل}}$$

□ **المعيار (Norm)** - المعيار يعتبر دالة $N: V \rightarrow [0, +\infty]$ حيث V يعتبر فضاء متجه (Vector Space)، حيث أن لكل $x, y \in V$ لدينا:

$$N(x + y) \leq N(x) + N(y).$$

$$\text{لأي عدد } a \text{ فإن } N(ax) = |a|N(x)$$

$$N(x) = 0 \implies x = 0.$$

لأي $x \in V$ المعايير الأكثر إستخداماً ملخصة في الجدول التالي:

المعيار	الرمز	التعريف	مثال للإستخدام
L^1 Manhattan,	$\ x\ _1$	$\sum_{i=1}^n x_i $	LASSO regularization
L^2 Euclidean,	$\ x\ _2$	$\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$	Ridge regularization
L^p -norm, p	$\ x\ _p$	$\left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$	Hölder inequality
L^∞ Infinity,	$\ x\ _\infty$	$\max_i x_i $	Uniform convergence

ملاحظة : الهيشيان معرفة فقط إذا كانت الدالة f لديها مدى ضمن الأعداد الحقيقية.

□ الحساب في مشتقة الفضاءات العالية - لأي مصفوفات A, B, C فإن الخواص التالية مهمة :

$$\nabla_{A \text{tr}(AB)} = B^T$$

$$\nabla_{A^T} f(A) = (\nabla_A f(A))^T$$

$$\nabla_{A \text{tr}(ABA^T C)} = CAB + C^T AB^T$$

$$\nabla_A |A| = |A| (A^{-1})^T$$