Handbook de Somatórios

Iyan Lucas Duarte Marques

3 de setembro de 2020

1 Siglas e abreviações

- S_n somatório (ou soma) até o número natural n
- a_i ou b_i é o termo correspondente ao índice i na posição descrita, usado dessa forma para simbolizar um número/constante genérica

- As seguintes notações significam a mesma coisa:

$$\sum_{0}^{n} i == \sum_{0 \leq i \leq n} \tag{1}$$

2 Fórmulas e propriedades

2.1 Distributividade

Permite mover constantes para dentro ou para fora de um somatório:

$$\sum_{i \in I} (c * a_i) = c * \sum_{i \in I} a_i \tag{2}$$

2.2 Associatividade

Permite quebrar um somatório em duas partes ou combinar dois Somatórios em um:

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i \tag{3}$$

2.3 Comutatividade

Permite colocar os termos em qualquer ordem:

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{p(i) \in I} a_{p(i)} \tag{4}$$

2.4 Progressão Aritmética (PA)

A Progressão Aritmética (P.A.) é uma sequência de números onde a diferença entre dois termos consecutivos é sempre a mesma. Essa diferença constante é chamada de razão da P.A..

Sendo assim, a partir do segundo elemento da sequência, os números que surgem são resultantes da soma da constante com o valor do elemento anterior.

2.4.1 Termo Geral

$a_n = a_1 + (n - 1) * r$

a_n : termo que queremos calcular

a_1: primeiro termo da P.A.

n: posição do termo que queremos descobrir

r: razão

2.4.2 Soma de uma PA

- Equação "normal":

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) * n}{2} \tag{5}$$

S_n: soma dos n primeiros termos da P.A.

a_1: primeiro termo da P.A.

a_n: ocupa a enésima posição na sequência

n: posição do termo

- somatório:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} [a + b * i] \tag{6}$$

S_n: soma dos n primeiros termos da P.A.

a: termo inicial

b: razão

i: posição do índice

n: limite do índice

- Equação baseada no somatório:

$$S_n = \frac{(2a + bn)(n + 1)}{2} \tag{7}$$

A legenda é a mesma do somatório.

2.5 Conjuntos Numéricos (P1)

Combina Somatórios de índice diferentes. No caso se os conjuntos A e B são dois conjuntos quaisquer de inteiros:

$$\sum_{i \in A} a_i + \sum_{i \in B} a_i = \sum_{i \in A \cap B} a_i + \sum_{i \in A \cup B} a_i \tag{8}$$

Se $A = 1, 2, 3$ e $B = 3, 5, 7$, então, $A \cup B = 1, 2, 3, 4, 5, 7$ e $A \cap B = 3$

Observe que a união garante todos os elementos e a interseção, os repetidos.

2.6 Pertubação (P2)

Dada uma soma genérica qualquer $S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i$ podemos reescrever $S_{n+1=a_0+a_1+a_2+...+a_{n+1}}$ de duas formas:

1. Forma:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \tag{9}$$

2. Forma

$$S_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1} \tag{10}$$

Na prática, para perturbar o somatório, resolvemos a seguinte igualdade abaixo:

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a_{i+1} \tag{11}$$

(A junção das duas equações acima). Isso, frequentemente, resulta na equação fechada para S_n.

2.7 $i * x^i$

Quando um somatório tiver o índice i multiplicado por uma constante elevada ao índice, teremos esta fórmula:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i * x^i = (n-1) * x^{n+1} + x \tag{12}$$

2.8 somatório de 1

$$\sum_{0 \leq i \leq n} 1 \tag{13}$$

O somatório de 1 é sempre $(n+1)$

2.9 a_i

Seja um somatório:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a * x^i \tag{14}$$

Para descobrir a constante multiplicada (a), faz-se a seguinte fórmula:

$$a_i = a * x^i \tag{15}$$

2.10 Somas Múltiplas

Outra forma de representação é utilizando dois Somatórios, por exemplo:

$$\sum_{1 \leq i,j \leq 3} a_i b_j = (\sum_{1 \leq i \leq 3} a_i)(\sum_{1 \leq j \leq 3} b_j) \tag{16}$$

2.11 Somatório de i

$$\sum_{0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{17}$$

3 Prova por Indução

1. Passo (passo base): Provar que a fórmula é verdadeira para o primeiro valor (na equação, substitua n pelo primeiro valor).

2. Passo (Indução propriamente dita): Supondo que $n > 0$ e que a fórmula é verdadeira quando trocamos n por (n-1).

$$S_n = S_{n-1} + a_n \tag{18}$$