Cheatsheet – Teórico
Teoria de Grafos e Computabilidade

Iyan Lucas Duarte Marques[1]

[1]Instituto de Ciências Exatas e Informática - Pontifícea Universidade Católica Minas Gerais (PUC-MG)

1. O que é o Grafos

Grafos é um arcabouço matemático utilizado na definição e/ou resolução dos problemas. Uma forma de abstração matemática para representação de problemas.

1.1. Conceitos

- **Grafos:** Coleção de vértices e arestas.
- **Vértices:**[1] Objeto simples que pode ter nomes e outros atributos.
- **Aresta:**[2] Conexão entre dois vértices.

A representação matemática de um grafo se dá pela seguinte forma:

Um grafo $G = (V, E)$ em que V é o conjunto de vértices e E o conjunto de arestas de forma que:

$$E = \{(u, v)|u, v \in V\} \tag{1}$$

[3] Para um grafo direcionado.

$$E = \{\{u, v\}|u, v \in V\} \tag{2}$$

[4] Para um grafo não-direcionado.

1.2. Grafo direcionado

[5] É um par $G = (V, E)$, em que V é um conjunto finito e E é uma relação binária em V. A representação das arestas em um grafo direcionado é a $\longrightarrow$ setinha.

1.3. Grafo não-direcionado

É um par $G = (V, E)$, em que o conjunto de arestas E consiste em pares de vértices não orientados, ou seja, a aresta (v_j, v_i)[6] e a (v_i, v_j) são a mesma aresta.

2. Terminologia

2.1. Dos Grafos

2.1.1. Grafos Simples

É um grafo que não possui loops ou arestas paralelas.

---

[1]É a bolinha do grafo

[2]É a linha que liga duas bolinhas

[3]Tradução: O conjunto de arestas E é igual à aresta de u a v, tal que u e v pertencem ao grupo de vértices (são vértices).

[4]Um grafo não direcionado usa chaves (como se fosse um dicionário/lista) enquanto um direcionado usa parênteses (como uma tupla).

[5]Outra nomenclatura: dirigido; orientado.

[6]Nota: a letra v é a representação de vértice e o símbolo $_i$ representa qual vértice.

2.1.2. Regularidade

Um grafo no qual todos os vértices possuem o mesmo grau, é chamado de grafo regular.

2.1.3. Nulicidade

Um grafo sem nenhuma aresta é chamado de grafo nulo. Todos os vértices em um grafo nulo são vértices isolados.

2.1.4. Rotulação

Um grafo $G = (V, A)$ é dito ser rotulado quando cada elemento[7] estiver associado a um rótulo [nome].

2.1.5. Valoração (Ponderado)

Um grafo $G = (V, A)$ é dito ser valorado quando uma aresta, um vértice ou ambos possuem uma ou mais funções associando-os a um conjunto numérico. Ou seja, cada elemento pode conter um peso (valor).

2.1.6. Completo

Um grafo $G = (V, A)$ é completo se para cada par de vértices existe uma arestas ligando os dois. Ou seja, todo mundo tem que estar ligado a todo mundo.
$\longrightarrow$ *Em um grafo completo, quaisquer dois vértices distintos são adjancentes* (K_n). $\longrightarrow$ *Seja* K_n *um grafo completo com* n *vértices. O número de arestas de um grafo completo é:*

$$|E| = \frac{(n-1) * n}{2} \tag{3}$$

8

2.1.7. Grafo conexo

Um grafo é conexo quando existe pelo menos um caminho entre todos os pares do vértices.

2.1.8. Bipartição

Um grafo é bipartido quando um conjunto V de vértices pode ser separado em 2 subconjuntos em que todas as arestas do grafo ligue um vértice v_1 a um v_2.

[7] Sendo elemento um grafo, aresta ou qualquer coisa presente no conjunto G

[8] $|E| \longrightarrow$ é o valor absoluto do número de arestas. $n \longrightarrow$ é o número de vértices.

Já um grafo pode ser dito bipartido completo quando cada vértice de v_1 é conexo a **todo** vértice de v_2. O número de arestas de um grafo bipartido completo em 2 subconjuntos n e m é:

$$|E| = n * m \tag{4}$$

2.1.9. Isomorfismo

Dois grafos são ditos isomorfos se existir uma correspondência:

- vértice pra vértice
- aresta pra aresta
- O mesmo vértice possui uma aresta que incide para o mesmo vértice
- mesmo número de componentes
- mesmos graus de vértices

2.1.10. Complementaridade

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples dirigido ou não-dirigido. O grafo complementar de G, denotado por $C(G)$ ou $\bar{G}$.
Os vértices de $C(G)$ são todos os vértices de G.
As arestas de $C(G)$ são exatamente as arestas que faltam em G. para formarmos um grafo completo

2.1.11. Subgrafo

Mesma coisa de substring

2.2. Dos Vértices

2.2.1. Vértices adjacentes

É quando dois vértices estão ligados (pontos finais) de uma $\longrightarrow$ *setinha*.

2.2.2. Graus de vértices

O grau de cada vértice é representado pela terminologia $d(v)$. A forma que se calcula o grau depende do tipo do grafo:

- **Grafo não-direcionado:** o grau $d(v)$ é o numero de arestas ($\longrightarrow$ *setinhas*) que incidem em v
- **Grafo direcionado:** o grau $d(v)$ é dividido entre grau de entrada $d^+(v)$ e grau de saída $d^-(v)$. O numero de arestas ($\longrightarrow$ *setinhas*) que incidem em v é o grau de entrada. Os que saem são o grau de saida

A soma dos graus de todos os vértices de um grafo G é duas vezes o número de arestas de G, e portanto é par.

$$\Sigma_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e \tag{5}$$

ATENÇÃO: Um loop conta duas vezes pro grau do vértice.

2.2.3. Incidência

Quando um vértice v é o vértice final (quando o vértice não aponta pra ninguém, só recebe a $\longrightarrow$ *setinhas*) de alguma aresta $e = uv$[9], é dito que u é incidente [ou incide] em v.

2.2.4. Vértice isolado

Um vértice com nenhuma aresta incidente é chamado de vértice isolado

2.2.5. Pendência

Um vértice com grau 1 é chamado de vértice pendente

2.3. Das Arestas

2.3.1. Loop

É quando tem uma aresta que vai pro mesmo vértice, tipo uma máquina de estado finito. A aresta (v_i, v_i)

2.3.2. Arestas Paralelas

Quando um vértice manda duas $\longrightarrow$ *setinhas* para outro vértice.

2.3.3. Adjacência

Duas arestas **não paralelas** são adjacentes se elas incidem a um vértice comum, ou seja, se duas arestas que não saem do mesmo vértice apontam a $\longrightarrow$ *setinha* pra um mesmo vértice.

2.4. Das Operações

2.4.1. Caminhada *(walk)*

- Uma caminhada num grafo $G = (V, E)$ é uma sequência finita e não nula W[10]
- A caminhada precisa alternar entre vértices e arestas, tal que, para $1 \leq i \leq k$, as extremidades da aresta e_i são $v_(i - 1)$ e v_i.[11]
- Nós definimos que W é a caminhada de v_0 [a orígem] para v_k [o término]

2.4.2. Trilha *(Trail)*

- Uma trilha é uma caminhada em $G = (V, E)$ se as arestas de W são distintas
- Não se pode repetir aresta

[9] Nota: as letras estão em minúsculo porque estão representando uma aresta e uma vértice, diferente da letra maiúscula que representa o grafo e o conjunto de aretas.

[10] Ex.: $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_k v_k$

[11] Ou seja, na caminhada, não se pode andar de um vértice para outro se eles não estão ligados.

2.4.3. Trajeto *(path)*

- Um trajeto é uma trilha em $G = (V, E)$ se os vértices de W são distintos
- Não se pode repetir aresta, nem vértices

2.4.4. Ciclo *(cycle)*

- Um ciclo é um trajeto fechado, onde a orígem e o término são a mesma aresta
- Não se pode repetir aresta, nem vértices

2.4.5. União

Seja $G_1 = (V_1, A_1)$ e $G_2 = (V_2, A_2)$ dois grafos, o grafo $G = G_1 \cup G_2$ representa a união de dois grafos. Isso significa que ambos os conjuntos de vértices e arestas são unidos, **mas** não se cria novas arestas para se conectarem. Podem ser aplicadas a qualquer número finito de grafos e são operações associativas e comutativas.

2.4.6. Soma

Seja $G_1 = (V_1, A_1)$ e $G_2 = (V_2, A_2)$ dois grafos, o grafo $G = G_1 + G_2$ representa a soma de dois grafos. Isso significa que ambos os conjuntos de vértices são somados, **e se cria** novas arestas para conectarem cada vértice de cada subconjunto. Podem ser aplicadas a qualquer número finito de grafos e são operações associativas e comutativas.

2.4.7. Remoção

- ***Remoção de aresta:*** Se E é uma aresta de um grafo G, denota-se $G-$ e o grafo obtido de G pela remoção da aresta e. Se E é um conjunto de arestas em G, denota-se $G - E$ ao grafo obtido pela remoção das arestas em E.
- ***Remoção de vértice:*** Se v é um vértice de um grafo G denota-se por $G - v$ o grafo obtido de G pela remoção do vértice v conjuntamente com as arestas incidentes a v. Denota-se $G - S$ ao grafo obtido pela remoção dos vértices em S, sendo S um conjunto qualquer de vértices de G
- ***Contração de aresta:*** Denota-se por G/e o grafo obtido pela contração da aresta e. Quando se remove a aresta $e = (v, w)$ de G, se une os vértices resultantes de forma que as $\longrightarrow$ *setinhas* dos dois antigos vértices apontem para o novo.