TUGAS KELOMPOK ALJABAR LINIER

Nama Kelompok 5 : 1. Fahri Adidan
2. Rifqi Amirullah
3. Oktavian Aji T.A
4. Supahmi Awaludin

1. Diberikan vector berikut :

$\bar{u}$ = (8, -2, 3) dan $\bar{v}$ = (-6, 1, 4)

a) $4\bar{v} - 3\bar{u}$
b) $\bar{u} \cdot \bar{v}$
c) $\bar{u} \times \bar{v}$

Jawab :

a) $4\bar{v} - 3\bar{u}$

= 4(-6, 1, 4) − 3(8, -2, 3)

= (-24, 4, 16) − (24, -6, 9)

= (-24 – 24, 4 + 6, 16 – 9)

= (0, 10, 7)

b) $\bar{u} \cdot \bar{v}$

$\bar{u} \cdot \bar{v}$ = $u_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot u_2 + u_3 \cdot u_3$

= 8 · (-6) + (-2) · 1 + 3 · 4

= -48 − 2 + 12

= -38

c) $\bar{u} \times \bar{v}$

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & 3 \\ -6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (-2 \cdot 4 - 3 \cdot 1) , - (8 \cdot 4 - 3 \cdot (-6)) , (8 \cdot 1 - (-2) \cdot (-6))$

$= (-8 - 3) , - (32 + 18) , (8 - 12)$

$= (-11, -50, -4)$

2. Selesaikan permasalahan berikut :

a. Carilah persamaan parametrik L yang melalui titik P (5, -7, 8) dan sejajar dengan vektor yang berawal di P dan berakhir di Q (2, 1, 9).
b. Dimanakah garis tersebut memotong bidang x y?

Jawab :

a) $\overline{PQ} = (2 - 5, 1 + 7, 9 - 8)$

$= (-3, 8, 1)$ titik P (5, -7, 8)

$(x, y, z) = (5, -7, 8) + k(-3, 8, 1)$

$x = 5 - 3k$

$y = -7 + 8k$

$z = 8 + 1k$

b)

$z = 8 + 1k$
$0 = 8 + 1k$
$-8 = 1k$
$\frac{-8}{1} = k$

$-8 = k$

$x = 5 - 3k$
$= 5 - 3(-8)$
$= 5 + 24$
$= 29$

y = -7 + 8k

= -7 + 8 (-8)

= -7 - 64

= -71

3. Diberikan Matriks

A = $\begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & -1 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ C = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

a) Tunjukan bahwa $(B + C)^2 = B^2 + C^2$
b) Tentukan A^{-1} dan C^{-1}

Jawab :

a) $(B + C)^2 = B^2 + C^2$

$B + C$ = $\begin{bmatrix} -4 + 2 & 2 + 3 \\ 6 + 6 & 5 + 4 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$

$(B + C)^2$ = $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 5 \cdot 19 & 2 \cdot 5 + 5 \cdot 9 \\ 12 \cdot 2 + 9 \cdot 19 & 12 \cdot 5 + 9 \cdot 9 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 4 + 95 & 10 + 45 \\ 24 + 171 & 60 + 81 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 99 & 55 \\ 195 & 141 \end{bmatrix}$

$B^2 = B \times B$ = $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -4 \cdot (-4) + 2 \cdot 6 & -4 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \\ 6 \cdot (-4) + 5 \cdot 6 & 6 \cdot 2 + 5 \cdot 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 + 12 & -8 + 10 \\ -24 + 30 & 12 + 25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28 & 2 \\ 6 & 37 \end{bmatrix}$$

$$C^2 = C \times C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 6 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \\ 6 \cdot 2 + 4 \cdot 6 & 6 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 + 18 & 6 + 12 \\ 12 + 24 & 18 + 16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 18 \\ 36 & 34 \end{bmatrix}$$

$$B^2 + C^2 = \begin{bmatrix} 28 & 2 \\ 6 & 37 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22 & 18 \\ 36 & 34 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28 + 22 & 2 + 18 \\ 6 + 36 & 37 + 34 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 50 & 20 \\ 42 & 71 \end{bmatrix}$$

Kesimpulan $(B + C)^2 \neq B^2 + C^2$

b) $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

Det = ad − bc
= $2 \cdot 4 - 3 \cdot 6$
= $8 - 18$
= -10

$$C^{-1} = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Det = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 5 & | & 2 & -6 \\ -1 & 3 & 7 & | & -1 & 3 \\ 4 & 8 & -1 & | & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Det(A) = $(2 \cdot 3 \cdot (-1) + (-6) \cdot 7 \cdot 4 + 5 \cdot (-1) \cdot 8) - (5 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 \cdot 8 + (-6) \cdot (-1) \cdot (-1))$

= $(-6 + (-168) + (-40)) - (60 + 112 + (-6))$
= $-214 - 166$
= -380

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}$$

= $3 \cdot (-1) - 7 \cdot 8$
= $-3 - 56$
= -59

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}$$

= $-6 \cdot (-1) - 5 \cdot 8$
= $6 - 40$
= -34

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

= $-1 \cdot (-1) - 7 \cdot 4$
= $1 - 28$
= -27

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

= $2 \cdot (-1) - 5 \cdot 4$
= $-2 - 20$
= -22

$$M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

= $-1 \cdot 8 - 3 \cdot 4$
= $-8 - 12$
= -20

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

= $2 \cdot 8 - (-6) \cdot 4$
= $16 - 24$
= 40

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$= \quad -6 \cdot 7 - 5 \cdot 3$

$= \quad -42 - 15$

$= \quad -57$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$$

$= \quad 2 \cdot 7 - 5 \cdot (-1)$

$= \quad 14 + 5$

$= \quad 19$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$= \quad 2 \cdot 3 - (-6) \cdot (-1)$

$= \quad 6 - 6$

$= \quad 0$

$$\begin{bmatrix} -59 & -27 & -20 \\ -34 & -22 & 40 \\ -57 & 19 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -59 & 27 & -20 \\ 34 & -22 & -40 \\ -57 & -19 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj (A)} = \begin{bmatrix} -59 & 34 & -57 \\ 27 & -22 & -19 \\ -20 & -40 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times \text{Adj(A)}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-380} \begin{bmatrix} -59 & 34 & -57 \\ 27 & -22 & -19 \\ -20 & -40 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{59}{380} & -\frac{17}{190} & \frac{3}{20} \\ -\frac{27}{380} & \frac{11}{190} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{19} & \frac{2}{19} & 0 \end{bmatrix}$$

4. Tentukanlah penyelesaian sistem persamaan linier berikut dengan bantuan invers matriks.

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y + 3z &= 1 \\ 3x + 5z &= 0 \end{aligned}$$

Jawab :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1} \cdot B$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & | & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & | & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Det (A) = $(1 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 0) - (2 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 5)$

= $(20 + 9 + 0) - (24 + 0 + 10)$

= $29 - 34$

= -5

$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$

= $4 \cdot 5 - 3 \cdot 0$
= $20 - 0$
= 20

$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$

= $1 \cdot 5 - 2 \cdot 0$
= $5 - 0$
= 5

$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$

= $2 \cdot 5 - 3 \cdot 3$
= $10 - 9$
= 1

$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$

= $1 \cdot 5 - 2 \cdot 3$
= $5 - 6$
= -1

$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$

= $2 \cdot 0 - 4 \cdot 3$
= $0 - 12$
= -12

$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$

= $1 \cdot 0 - 1 \cdot 3$
= $0 - 3$
= -3

$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot 3 - 2 \cdot 4$

$= 3 - 8$

$= -5$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2$

$= 3 - 4$

$= -1$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot 4 - 1 \cdot 2$

$= 4 - 2$

$= 2$

$$\begin{bmatrix} 20 & 1 & -12 \\ 5 & -1 & -3 \\ -5 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 20 & -1 & -12 \\ -5 & -1 & 3 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj (A)} = \begin{bmatrix} 20 & -5 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -12 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times \text{Adj(A)}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 20 & -5 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -12 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4\cdot 9 & + & 1\cdot 1 & + & 1\cdot 0 \\ \frac{1}{5}\cdot 9 & + & \frac{1}{5}\cdot 1 & + & -\frac{1}{5}\cdot 0 \\ \frac{12}{5}\cdot 9 & + & -\frac{3}{5}\cdot 1 & + & -\frac{2}{5}\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -36 & + & 1 & + & 0 \\ \frac{9}{5} & + & \frac{1}{5} & + & 0 \\ \frac{108}{5} & + & -\frac{3}{5} & + & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -35 \\ 2 \\ 21 \end{bmatrix}$$

= X = -35 $\quad Y$ = 2 $\quad Z$ = 21