

Projet du module Outils de Programmation Mathématiques

Instructions à suivre :

- Remettre 3 fichiers sous format doc (WORD) : un fichier contenant la « Partie 1 », un autre contenant la « Partie 2 » et le troisième la « Partie 3 ». Les trois fichiers doivent avoir respectivement pour nom : « Partie 1 - nom prénom groupe », « Partie 2 - nom prénom groupe » et « Partie 3 - nom prénom groupe ».
- Mettre votre Nom, Prénom, matricule et groupe en haut de chaque document.
- Date limite de remise des trois fichiers est le dimanche 20 septembre 2020 à 23h59.
- Déposer les fichiers dans le campus virtuel de l'USTHB « espace du cours OPM dans la section 19 Septembre au 24 Septembre » :
<https://campusvirtuel.usthb.dz/course/view.php?id=432>
- Les étudiants n'ayant pas accès au campus virtuel de l'USTHB, peuvent envoyer les fichiers par mail à l'adresse « examenenligneinfo@gmail.com » avec pour objet « Projet OPM - nom prénom groupe ».

Partie 1 : Les fonctions primitives récursives

IMPORTANT : Répondre à ces questions en justifiant vos réponses

1. Donner la définition d'une fonction primitive récursive.
2. Une fonction récursive est une fonction primitive récursive (Vrai/Faux).
3. Une fonction primitive récursive est une fonction récursive (Vrai/Faux).
4. La fonction Zéro d'arité 1 est une fonction de base (Vrai/Faux).
5. Soient R_1 et R_2 deux relations binaires PRs. Montrer que la relation $R_1 \cup R_2$ (Avec \cup est le OU logique) est PR.
6. Soit R_1 une relation binaire PR. Montrer que la relation $\neg R_1$ (Avec \neg est la négation logique) est PR.
7. Soient x et y deux entiers naturels. Montrer que la relation $(x \neq y)$ est PR (\neq : est différent de).
8. Montrer que les fonctions $\text{Quot}(x,y)$ et $\text{Mod}(x,y)$ sont PRs en utilisant les deux règles vues en cours (Ne pas utiliser la méthode faisant appel à la relation $\text{Quot}(y+1, x) = \text{Quot}(y, x) + \text{Egalité}(x * (1 + \text{Quot}(y, x)), y + 1)$).
 - a) Donner la dérivation primitive récursive des fonction Quot et Mod .
 - b) Dédire que l'ensemble Multy des entiers naturels multiples de y est PR.
 - c) Dédire que la fonction $F(x,y) = (x \text{ div } y, x \text{ mod } y)$ est PR.
9. Montrer que la fonction $\text{Max}(x,y)$ maximum entre x et y est PR puis déduire que la fonction $F = \lambda x_1 x_2 \dots x_n. \text{maximum}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est PR .
10. Montrer que $F(x) = \sum_{i=0}^x i$ est PR.

Partie 2 : La machine de Turing

1. Donner la définition d'une machine de Turing.
2. De quoi est composée une machine de Turing ?

IMPORTANT : Répondre aux questions suivantes en donnant la démarche suivie

3. Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$ et $Pred$ la fonction permettant de calculer le prédécesseur.

- a) Donner la MT permettant de calculer la fonction suivante :

$$f(x, y) = Pred \circ Pred \circ PLUS(x, y)$$

- b) Dédurre la MT permettant de calculer la fonction $g(x, y) = Pred \circ f(x, y)$

4. Donner la MT permettant de calculer la fonction suivante :

$$f = xy. \lambda(x \bmod 2, y \bmod 2)$$

Telles que $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ et mod est la fonction reste de division.

5. Donner la MT permettant de calculer la fonction suivante :

$$F(x, y, z) = \begin{cases} (Pred(x), y, z \bmod 2) & \text{si } x \text{ est positif} \\ (x, y) & \text{sinon} \end{cases}$$

Tel que :

- $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$.
- Les entiers positifs sont représentés par les symboles suivants : « + | x+1 »
- Les entiers négatifs sont représentés par les symboles suivants : « - | x+1 »
- L'entier nul est représenté par les symboles suivants : « + | ou - | »

6. Donner la MT permettant de calculer la fonction suivante :

$$f = xy. \lambda(|x - y| + 1) \text{ Telles que } x \text{ et } y \in \mathbb{N}^2.$$

7. Soit à construire une machine de Turing pour le calcul des fonctions appliquées aux codes binaires des valeurs entières. Le blanc sera représenté par le symbole \$ au lieu du 0. Donner les étapes suivies pour construire la machine de Turing permettant de réaliser l'opération de décalage circulaire à gauche. Puis dérouler sur un exemple de votre choix.

Exemple :

Entrée du programme :

q0

\$	1	0	1	0	0	1	0	1	1	\$	\$
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----

Sortie du programme :

qf

\$	\$	0	1	0	0	1	0	1	1	1	\$
----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Partie 3 : Le langage Caml

IMPORTANT : Répondre à ces questions en donnant la démarche suivie (justifier vos réponses)

1. Ecrire une fonction qui vérifie si le $n^{\text{ième}}$ et le $n^{\text{ième}+1}$ caractères composent un chiffre compris entre 50 et 99.
2. Ecrire une fonction qui vérifie si une chaîne de caractères S1 est une sous chaîne de la chaîne de caractères S.
3. Etant donné deux listes d'entiers non nuls.
 - a) Ecrire une fonction permettant de construire une liste de triplets.
 - Le premier élément du triplet est la somme du premier élément de L1 et le premier élément de L2.
 - Le deuxième élément du triplet est le produit du premier élément de L1 et le premier élément de L2.
 - Le troisième élément du triplet est le premier élément de L1 puissance le premier élément de L2.

Exemple : Nom_fonction [1 ; 2 ; 3 ; 4] [4 ; 2 ; 7] ;; → [(5,4,1) ; (4,4,4) ; (10,21,2187) ; (4,0,1)]

- b) Donner un exemple de deux listes L1 et L2 et calculer *Nom_fonction L1 L2* ;;
4. Etant donné deux listes de chaînes de caractères triées par ordre décroissant (de z à a).
 - a) Ecrire une fonction qui fusionne les deux listes.

Exemple : : Nom_fonction ["lever" ; "dire" ; "cirer"] ["cuire" ; "cirer" ; "agir"] ;; → ["lever" ; "dire" ; "cuire" ; "cirer" ; "agir"]

- b) Donner un exemple de deux listes L1 et L2 et calculer *Nom_fonction L1 L2* ;;

Bon courage