

Sottoinsiemi di Pompeiu di \mathbb{R}

Isabella Bosia

In questo documento, $\Sigma(\mathbf{A})$ è l'insieme delle traslazioni e delle riflessioni σ di \mathbf{A} . $\mathbf{A} + t$ indicherà l'insieme \mathbf{A} traslato di t .

Definizione. $\mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}$ è di Pompeiu se data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che $\int_{\sigma(\mathbf{A})} f(x)dx = k \in \mathbb{R}$ non dipende da $\sigma \in \Sigma$ si ha che f è costante.

Sia \mathbf{A} un insieme di misura infinita, sia $\sigma(\mathbf{A})$ una sua traslazione di t tale che $\mu(\mathbf{A} \cap \sigma(\mathbf{A})) = 0$ (dove μ è la misura di Lebesgue) e sia $\mathbf{B} = \mathbf{A} \cup \sigma(\mathbf{A})$.

Teorema 1. \mathbf{B} è di Pompeiu $\iff \mathbf{A}$ è di Pompeiu.

Dimostrazione. Dimostriamo prima che \mathbf{B} è di Pompeiu $\implies \mathbf{A}$ è di Pompeiu.

Supponiamo che \mathbf{A} non sia di Pompeiu. Allora $\exists g$ non costante tale che $\int_{\sigma(\mathbf{A})} g(x)dx = k$ non dipende da σ .

Poiché \mathbf{A} e $\mathbf{A} + t$ sono quasi disgiunti, abbiamo che

$$\int_{\mathbf{B}} g(x)dx = \int_{\mathbf{A}} g(x)dx + \int_{\mathbf{A}+t} g(x)dx = 2k \quad (1)$$

Quindi $\exists g$ non costante con integrale costante sulle traslazioni di \mathbf{B} , il che contraddice il fatto che \mathbf{B} è di Pompeiu.

Si noti che questa implicazione non è limitata al caso in cui \mathbf{A} sia di misura infinita.

Vediamo ora l'implicazione inversa, cioè \mathbf{A} è di Pompeiu $\implies \mathbf{B}$ è di Pompeiu.

Poiché \mathbf{A} è di Pompeiu abbiamo

$$F(t) = \int_{\mathbf{A}} f(x+t) dx = k \quad \forall t, \quad (2)$$

quindi

$$\int_{\mathbf{B}} f(x) dx = \int_{\mathbf{A}} f(x) dx + \int_{\mathbf{A}+t} f(x) dx = F(0) + F(t) = 2k.$$

Prendiamo una g continua per cui valga

$$\int_{\mathbf{B}+t} g(x) dx = q \quad \forall t. \quad (3)$$

Se g non è costante, allora $\exists t'$ tale che $\int_{\mathbf{A}+t'} f(x) dx = q' \neq \frac{q}{2}$.

Sia $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + t'$. Allora poiché la somma è costante,

$$\int_{\mathbf{A}'+t} g(x) dx = q - q'.$$

Senza perdita di generalità, assumiamo $q = 0$.

$$\int_{\mathbf{A}'} g(x) dx + \int_{\mathbf{A}'+t} g(x) dx = 0$$

per cui

$$G(0) + G(t) = 0 \quad \text{con } G(t) = \int_{\mathbf{A}'} g(x+t) dx.$$

$$\int_{\mathbf{B}} g(x) dx = q \text{ (costante)} \implies G(0+y) + G(t+y) = 0 \quad \forall y$$

dunque G è periodica di periodo $2t$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{B}+y} g(x) dx &= \int_{\mathbf{A}'+y} g(x) dx + \int_{\mathbf{A}'+t+y} g(x) dx = \\ &= \int_{\mathbf{A}'} g(x+y) + g(x+t+y) dx = 0 \quad \forall y \end{aligned} \quad (4)$$

Per la (4) abbiamo che $g(x) + g(x+t)$ è periodica.

Se $g(x) = k$, allora $g(x+t) = g(x) - k$, perciò $g(x+t) + g(x+t+t) = k$, dunque anche g è periodica.

Per concludere la dimostrazione, l'unica funzione periodica con integrale convergente su un insieme di misura infinita e su tutte le sue traslazioni è la costante nulla, il che contraddice la (3). \square

Ecco alcuni esempi di applicazioni del teorema.

Esempio 1. $(a, +\infty)$ è di Pompeiu per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Per ipotesi, abbiamo

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_{a+t}^\infty f(x)dx$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ e dunque $\int_a^{a+t} f(x)dx = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

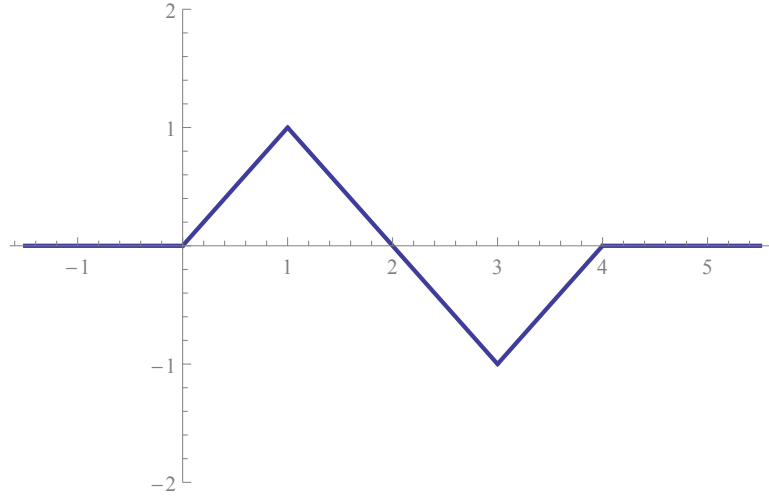
Poiché f è continua, se è positiva in un certo punto x_0 è positiva in tutto un intervallo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, quindi l'integrale su quell'intervallo non è 0. Dunque deve essere identicamente nulla su tutto \mathbb{R} . \square

Esempio 2. Insiemi come $X = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (a + 2kb, b + 2kb)$ non sono di Pompeiu.

Dimostrazione. Ovviamente esiste una traslazione σ tramite cui due copie di X ricoprono quasi tutto \mathbb{R} . Un semplice controesempio è:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \in (0, 1] \\ -x + 2 & x \in (1, 3] \\ x - 4 & x \in (3, 4] \\ 0 & x > 4 \end{cases}$$

con $a = 0, b = 1$ e $k = 1$, per cui l'integrale è uguale a 0 indipendentemente dalla traslazione σ .



□

Esempio 3. Insiemi come $Y = X \cap (a, \infty)$ sono di Pompeiu.

Dimostrazione. Esiste una traslazione σ tramite cui due copie di Y formano una semiretta, per cui la tesi segue dall'esempio 1. □

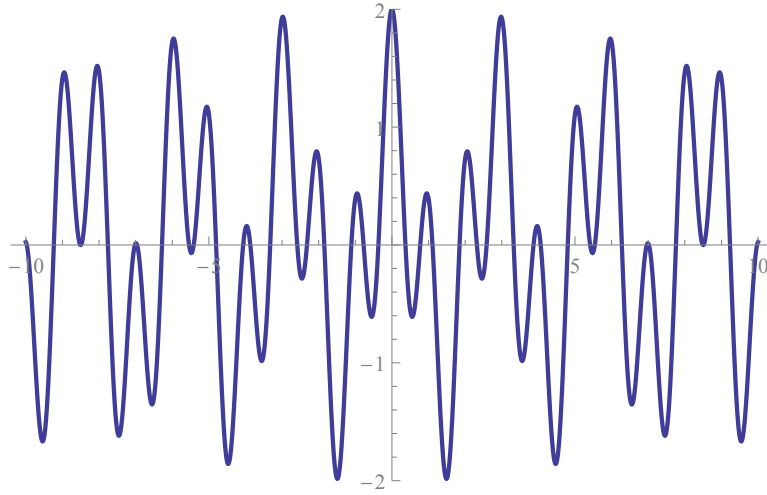
Esempio 4. Se $a > 0$ allora $X = (-\infty, a) \cup (2a, 3a)$ è di Pompeiu.

Dimostrazione. Poiché la lunghezza dell'intervallo $(a, 2a)$ è la stessa dell'intervallo $(2a, 3a)$, possiamo dividere X in due sottoinsiemi che sono l'uno la copia dell'altro, ed essi sono di Pompeiu come mostrato nell'esempio 3. Il discorso si può estendere anche a insiemi come $(-\infty, a) \cup_{n < m} (2na, (2n+1)a)$ per $m \in \mathbb{N}$. □

Alcune osservazioni non correlate al teorema 1 ma al problema in generale.

Esempio 5. Esiste una funzione non periodica con integrale indipendente da traslazioni su un compatto:

$$f(x) = \cos(2\pi x) + \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi x\right) \quad \mathbf{K} = [0, 1] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1]$$



Dimostrazione. L'integrale è costante perché

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbf{K}+t} \cos(2\pi x) + \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi x\right) dx = \tag{5} \\
 & \underbrace{\int_{\mathbf{K}} \cos(2\pi(x+t)) dx}_0 + \int_{\mathbf{K}} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi(x+t)\right) dx = \\
 & = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi x\right) \Big|_0^1 + \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi x\right) \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1} \right] = \\
 & = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi(1+t)\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi t\right) + \right. \\
 & \left. + \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi(\sqrt{2}+1+t)\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi(\sqrt{2}+t)\right) \right]
 \end{aligned}$$

Il primo seno diventa $\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi t\right)$, il terzo $-\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi t\right)$ e il quarto $-\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi t\right)$ per cui l'integrale nella (5) è uguale a 0.

Naturalmente la funzione non è periodica perché il periodo di $\cos(2\pi x)$ è 1 mentre quello di $\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi x\right)$ è $2\sqrt{2}$, il che risulta in qualche modo controintuitivo. \square

Gli strumenti dell'analisi di Fourier risultano poco applicabili, in quanto servono condizioni molto forti sull'insieme in esame perché ne consegua la convergenza $L^1(\mathbb{R})$ della funzione.

Esempio 6. Il fatto che $\mu(\mathbf{X}) = \infty$ e che $\int_{\mathbf{X}+t} f(x)dx = k \quad \forall t \in \mathbb{R}$ non è condizione sufficiente perché $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Sia $b_0 = -1$, $a_n = b_{n-1} + 1$ e $b_n = a_n + \frac{1}{n}$. Ora consideriamo gli insiemi $\mathbf{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$, $\mathbf{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-b_n, -a_n)$ e $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$. Nonostante la misura di \mathbf{C} sia infinita, l'unione finita di traslati di \mathbf{C} non ricopre mai tutto \mathbb{R} .

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{|x|} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ha integrale convergente su \mathbf{C} e su tutte le sue traslazioni ma naturalmente non su \mathbb{R} . \square

Lemma 1. Se $\exists \mathbf{X}$ di Pompeiu tale che $\mathbf{X} \subseteq (a, b)$ con $b \geq a \geq 0$, allora $\exists \mathbf{X}'$ similitudine di \mathbf{X} tale che \mathbf{X}' è di Pompeiu e $\mathbf{X}' \subseteq \left(a, \frac{b}{2}\right)$.

Dimostrazione. Supponiamo che \mathbf{X}' non sia di Pompeiu, allora $\exists f$ non costante tale che $\int_{\mathbf{X}'} f(x)dx$ è indipendente da traslazioni di \mathbf{X}' . Visto che \mathbf{X}' è simile a \mathbf{X} , sia r il rapporto tra le distanze di \mathbf{X} e \mathbf{X}' . Allora \mathbf{X} non è di Pompeiu perché $\int_{\mathbf{X}} f(rx)dx$ è invariante per traslazioni di \mathbf{X} . \square

Teorema 2. Non esistono insiemi di Pompeiu limitati.

Dimostrazione. Supponiamo che esistano insiemi di Pompeiu limitati. Allora sia \mathcal{M} l'insieme degli insiemi misurabili di $[0, 1]$ che contengono un intervallo di lunghezza maggiore o uguale a $\frac{1}{4}$.

Definiamo la relazione r così: $XrY \iff \exists \sigma$ isometria tale che $\mu(X \Delta \sigma(Y)) = 0$ (dove Δ è la differenza simmetrica). Chiaramente r è una relazione di equivalenza.

Allora in \mathcal{M}/r prendo $[\mathbf{P}]$ tale che \mathbf{P} è di Pompeiu ed $\exists \sigma$ isometria tale che $\sigma(\mathbf{P}) \subseteq \left[0, \frac{1}{4}\right]$.

Ora sia $\mathcal{F}([\mathbf{P}])$ il filtro di tutte le classi che contengono $[\mathbf{P}]$.

Consideriamo l'insieme $\mathbf{X} = \left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right]$. Se $\mathbf{X} \in \mathcal{F}([\mathbf{P}])$, allora $\mathbf{X}^c \notin \mathcal{F}([\mathbf{P}])$. Ma se $\mathbf{X} \in \mathcal{F}([\mathbf{P}])$ allora esiste un sottoinsieme \mathbf{Y} di \mathbf{X} che contiene $[\mathbf{P}]$. Visto che \mathbf{P} può essere traslato in un intervallo di lunghezza $\frac{1}{4}$, allora anche $[\mathbf{X}^c]$ contiene $[\mathbf{P}]$, il che è assurdo. \square