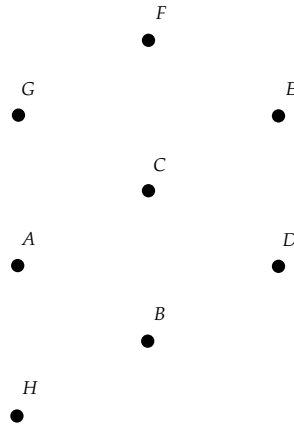


Triangoli in un piano colorato

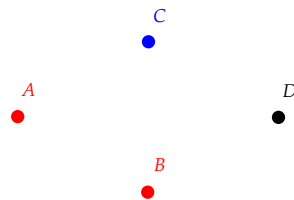
Isabella Bosia

Teorema 1. *Su un piano colorato di rosso e blu esiste un triangolo equilatero con i vertici dello stesso colore.*

Dimostrazione. Supponiamo che la tesi sia falsa e prendiamo una tassellazione triangolare del piano. Si considerino i seguenti punti A, B, C, D, E, F, G e H .

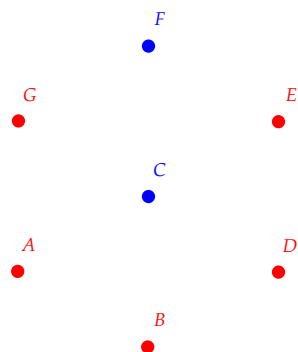


Consideriamo i punti A, B e C : se fossero dello stesso colore sarebbe assurdo. Allora, siano A e B rossi e C blu e consideriamo il punto D .

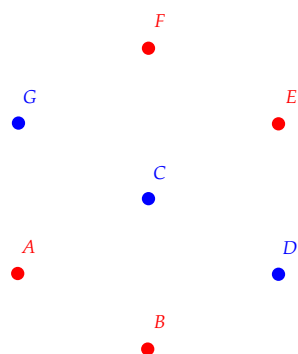


Abbiamo i casi D rosso e D blu.

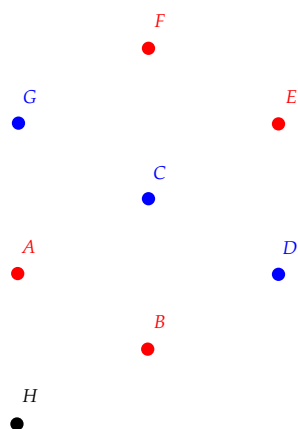
Nel caso D sia rosso, allora F deve essere blu, altrimenti ADF sarebbe un triangolo equilatero con i vertici dello stesso colore, dunque assurdo. Ma se F è blu, allora E e G devono essere rossi per evitare CEF e CFG . Quindi il controesempio è il triangolo BEG .



Nel caso D sia blu, allora E deve essere rosso per evitare CDE . Allora E deve essere rosso per CDE , dunque G deve essere blu per BEG , e dunque F deve essere rosso per CFG .



Allora H deve essere blu per ABH e rosso per DGH , assurdo.

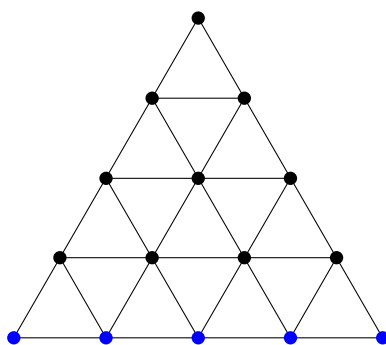


□

Chiamiamo questa figura molto caratteristica “esagono con cappello”, figura che se è colorata con 2 colori ha la proprietà di contenere un triangolo equilatero con i vertici dello stesso colore.

Teorema 2. *Su un piano colorato con 3 colori esiste un triangolo equilatero con i vertici dello stesso colore.*

Dimostrazione. Per il teorema di Van der Waerden, per ogni partizione finita di \mathbb{N} esiste un sottoinsieme che contiene progressioni aritmetiche di lunghezza arbitraria. Perciò possiamo trovare 5 punti allineati dello stesso colore.



Nessuno dei punti sopra quei 5 può essere blu, perché formerebbe un triangolo equilatero con due dei punti della base. Ma il triangolo dei punti neri contiene un esagono con cappello, che per il teorema 1 non può essere colorato con 2 colori senza triangoli equilateri. \square

Chiaramente possiamo generalizzarlo a qualsiasi n finito, basta trovare una figura che non può essere riempita con $n - 1$ colori senza contenere triangoli equilateri con i vertici dello stesso colore, poi la si chiude in un triangolo e lo si allunga di una riga.