Sottoinsiemi di Pompeiu di $\mathbb{R}$

Isabella Bosia

In questo documento, $\Sigma(\mathbf{A})$ è l'insieme delle traslazioni e delle riflessioni σ di $\mathbf{A}$. $\mathbf{A}+t$ indicherà l'insieme $\mathbf{A}$ traslato di t.

Definizione. $\mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}$ è di Pompeiu se data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tale che $\int\limits_{\sigma(\mathbf{A})} f(x)\mathrm{d}x = k \in \mathbb{R}$ non dipende da $\sigma \in \Sigma$ si ha che f è costante.

Sia $\mathbf{A}$ un insieme di misura infinita, sia $\sigma(\mathbf{A})$ una sua traslazione di t tale che $\mu(\mathbf{A} \cap \sigma(\mathbf{A})) = 0$ (dove μ è la misura di Lebesgue) e sia $\mathbf{B} = \mathbf{A} \cup \sigma(\mathbf{A})$.

Teorema 1. *$\mathbf{B}$ è di Pompeiu $\iff$ $\mathbf{A}$ è di Pompeiu.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima che $\mathbf{B}$ è di Pompeiu $\implies$ $\mathbf{A}$ è di Pompeiu.

Supponiamo che $\mathbf{A}$ non sia di Pompeiu. Allora $\exists g$ non costante tale che $\int\limits_{\sigma(\mathbf{A})} g(x)\mathrm{d}x = k$ non dipende da σ.

Poiché $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}+t$ sono quasi disgiunti, abbiamo che

$$\int\limits_{\mathbf{B}} g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbf{A}} g(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{\mathbf{A}+t} g(x)\mathrm{d}x = 2k \tag{1}$$

Quindi $\exists g$ non costante con integrale costante sulle traslazioni di $\mathbf{B}$, il che contraddice il fatto che $\mathbf{B}$ è di Pompeiu.

Si noti che questa implicazione non è limitata al caso in cui $\mathbf{A}$ sia di misura infinita.

Vediamo ora l'implicazione inversa, cioè $\mathbf{A}$ è di Pompeiu $\implies$ $\mathbf{B}$ è di Pompeiu.

Poiché **A** è di Pompeiu abbiamo

$$F(t) = \int_{\mathbf{A}} f(x+t)\mathrm{d}x = k \quad \forall t, \tag{2}$$

quindi

$$\int_{\mathbf{B}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{A}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{A}+t} f(x)\mathrm{d}x = F(0) + F(t) = 2k.$$

Prendiamo una g continua per cui valga

$$\int_{\mathbf{B}+t} g(x)\mathrm{d}x = q \quad \forall t. \tag{3}$$

Se g non è costante, allora $\exists t'$ tale che $\int_{\mathbf{A}+t'} f(x)\mathrm{d}x = q' \neq \frac{q}{2}$.

Sia $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + t'$. Allora poiché la somma è costante,

$$\int_{\mathbf{A}'+t} g(x)\mathrm{d}x = q - q'.$$

Senza perdita di generalità, assumiamo $q = 0$.

$$\int_{\mathbf{A}'} g(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{A}'+t} g(x)\mathrm{d}x = 0$$

per cui

$$G(0) + G(t) = 0 \qquad \text{con } G(t) = \int_{\mathbf{A}'} g(x+t)\mathrm{d}x.$$

$$\int_{\mathbf{B}} g(x)\mathrm{d}x = q \text{ (costante)} \implies G(0+y) + G(t+y) = 0 \quad \forall y$$

dunque G è periodica di periodo $2t$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{B}+y} g(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{A}'+y} g(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{A}'+t+y} g(x)\mathrm{d}x = \\ \int_{\mathbf{A}'} g(x+y) + g(x+t+y)\mathrm{d}x = 0 \quad \forall y \end{aligned} \tag{4}$$

Per la (4) abbiamo che $g(x) + g(x+t)$ è periodica.

Se $g(x) = k$, allora $g(x+t) = g(x) - k$, perciò $g(x+t) + g(x+t+t) = k$, dunque anche g è periodica.

Per concludere la dimostrazione, l'unica funzione periodica con integrale convergente su un insieme di misura infinita e su tutte le sue traslazioni è la costante nulla, il che contraddice la (3). $\square$

Ecco alcuni esempi di applicazioni del teorema.

Esempio 1. $(a, +\infty)$ è di Pompeiu per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Per ipotesi, abbiamo

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_{a+t}^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ e dunque $\int_a^{a+t} f(x)\mathrm{d}x = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

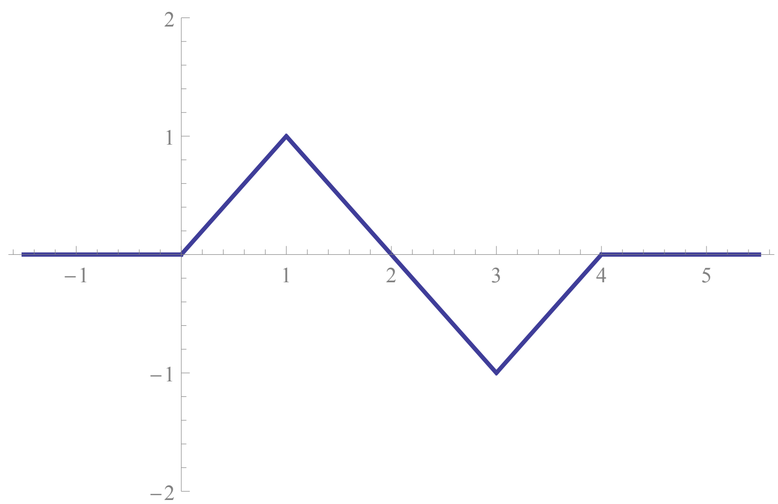
Poiché f è continua, se è positiva in un certo punto x_0 è positiva in tutto un intervallo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, quindi l'integrale su quell'intervallo non è 0. Dunque deve essere identicamente nulla su tutto $\mathbb{R}$. $\square$

Esempio 2. Insiemi come $\mathbf{X} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (a + 2kb, b + 2kb)$ non sono di Pompeiu.

Dimostrazione. Ovviamente esiste una traslazione σ tramite cui due copie di $\mathbf{X}$ ricoprono quasi tutto $\mathbb{R}$. Un semplice controesempio è:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \in (0,1] \\ -x+2 & x \in (1,3] \\ x-4 & x \in (3,4] \\ 0 & x > 4 \end{cases}$$

con $a = 0$, $b = 1$ e $k = 1$, per cui l'integrale è uguale a 0 indipendentemente dalla traslazione σ.



$\square$

Esempio 3. Insiemi come $\mathbf{Y} = \mathbf{X} \cap (a, \infty)$ sono di Pompeiu.

Dimostrazione. Esiste una traslazione σ tramite cui due copie di $\mathbf{Y}$ formano una semiretta, per cui la tesi segue dall'esempio 1. $\square$

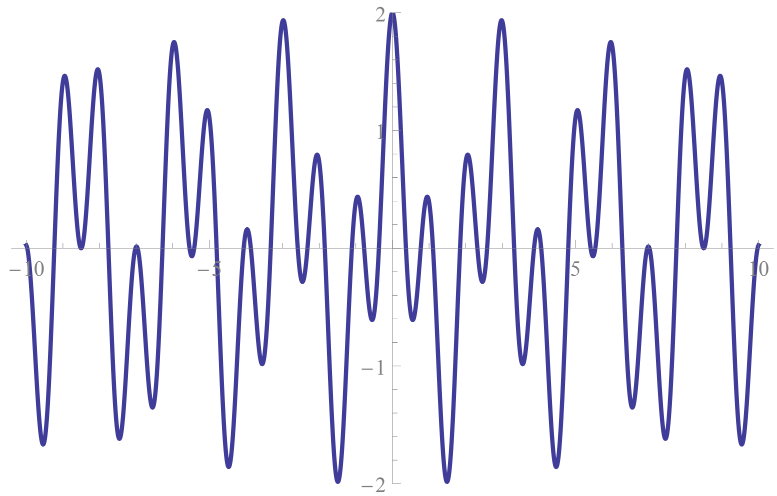
Esempio 4. Se $a > 0$ allora $\mathbf{X} = (-\infty, a) \cup (2a, 3a)$ è di Pompeiu.

Dimostrazione. Poiché la lunghezza dell'intervallo $(a, 2a)$ è la stessa dell'intervallo $(2a, 3a)$, possiamo dividere $\mathbf{X}$ in due sottoinsiemi che sono l'uno la copia dell'altro, ed essi sono di Pompeiu come mostrato nell'esempio 3. Il discorso si può estendere anche a insiemi come $(-\infty, a) \bigcup_{n<m} (2na, (2n+1)a)$ per $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Alcune osservazioni non correlate al teorema 1 ma al problema in generale.

Esempio 5. Esiste una funzione non periodica con integrale indipendente da traslazioni su un compatto:

$$f(x) = \cos(2\pi x) + \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi x\right) \qquad \mathbf{K} = [0,1] \cup \left[\sqrt{2}, \sqrt{2}+1\right]$$



Dimostrazione. L'integrale è costante perché

$$\int_{\mathbf{K}+t} \cos(2\pi x) + \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi x\right) \mathrm{d}x = \tag{5}$$

$$\underbrace{\int_{\mathbf{K}} \cos(2\pi(x+t))\,\mathrm{d}x}_{0} + \int_{\mathbf{K}} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi(x+t)\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi x\right)\Bigg|_0^1 + \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi x\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+1}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi(1+t)\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi t\right) + \right.$$

$$\left. + \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\left(\sqrt{2}+1+t\right)\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\left(\sqrt{2}+t\right)\right)\right]$$

Il primo seno diventa $\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi t\right)$, il terzo $-\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi t\right)$ e il quarto $-\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi t\right)$ per cui l'integrale nella (5) è uguale a 0.

Naturalmente la funzione non è periodica perché il periodo di $\cos(2\pi x)$ è 1 mentre quello di $\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi x\right)$ è $2\sqrt{2}$, il che risulta in qualche modo controintuitivo. □

Gli strumenti dell'analisi di Fourier risultano poco applicabili, in quanto servono condizioni molto forti sull'insieme in esame perché ne consegua la convergenza $L^1(\mathbb{R})$ della funzione.

Esempio 6. Il fatto che $\mu(\mathbf{X}) = \infty$ e che $\int\limits_{\mathbf{X}+t} f(x)\mathrm{d}x = k \quad \forall t \in \mathbb{R}$ non è condizione sufficiente perché $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Sia $b_0 = -1$, $a_n = b_{n-1} + 1$ e $b_n = a_n + \frac{1}{n}$. Ora consideriamo gli insiemi $\mathbf{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, $\mathbf{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-b_n, -a_n)$ e $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$. Nonostante la misura di $\mathbf{C}$ sia infinita, l'unione finita di traslati di $\mathbf{C}$ non ricopre mai tutto $\mathbb{R}$.

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{|x|} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ha integrale convergente su $\mathbf{C}$ e su tutte le sue traslazioni ma naturalmente non su $\mathbb{R}$. □

Lemma 1. *Se* $\exists \mathbf{X}$ *di Pompeiu tale che* $\mathbf{X} \subseteq (a, b)$ *con* $b \geq a \geq 0$*, allora* $\exists \mathbf{X}'$ *similitudine di* $\mathbf{X}$ *tale che* $\mathbf{X}'$ *è di Pompeiu e* $\mathbf{X}' \subseteq \left(a, \frac{b}{2}\right)$*.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathbf{X}'$ non sia di Pompeiu, allora $\exists f$ non costante tale che $\int\limits_{\mathbf{X}'} f(x)\mathrm{d}x$ è indipendente da traslazioni di $\mathbf{X}'$. Visto che $\mathbf{X}'$ è simile a $\mathbf{X}$, sia r il rapporto tra le distanze di $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$. Allora $\mathbf{X}$ non è di Pompeiu perché $\int\limits_{\mathbf{X}} f(rx)\mathrm{d}x$ è invariante per traslazioni di $\mathbf{X}$. □

Teorema 2. *Non esistono insiemi di Pompeiu limitati.*

Dimostrazione. Supponiamo che esistano insiemi di Pompeiu limitati. Allora sia $\mathcal{M}$ l'insieme degli insiemi misurabili di $[0, 1]$ che contengono un intervallo di lunghezza maggiore o uguale a $\frac{1}{4}$.

Definiamo la relazione r così: $XrY \iff \exists \sigma$ isometria tale che $\mu(X \Delta \sigma(Y)) = 0$ (dove Δ è la differenza simmetrica). Chiaramente r è una relazione di equivalenza.

Allora in $\mathcal{M}/r$ prendo $[\mathbf{P}]$ tale che $\mathbf{P}$ è di Pompeiu ed $\exists \sigma$ isometria tale che $\sigma(\mathbf{P}) \subseteq \left[0, \frac{1}{4}\right]$.

Ora sia $\mathcal{F}([\mathbf{P}])$ il filtro di tutte le classi che contengono $[\mathbf{P}]$.

Consideriamo l'insieme $\mathbf{X} = \left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right]$. Se $\mathbf{X} \in \mathcal{F}([\mathbf{P}])$, allora $\mathbf{X}^c \notin \mathcal{F}([\mathbf{P}])$. Ma se $\mathbf{X} \in \mathcal{F}([\mathbf{P}])$ allora esiste un sottoinsieme $\mathbf{Y}$ di $\mathbf{X}$ che contiene $[\mathbf{P}]$. Visto che $\mathbf{P}$ può essere traslato in un intervallo di lunghezza $\frac{1}{4}$, allora anche $[\mathbf{X}^c]$ contiene $[\mathbf{P}]$, il che è assurdo. $\square$