



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - CAMPUS SOBRAL**

**CURSO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO**

**DISCIPLINA: CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DE ALGORITMOS**

**PROFESSOR: ANTÔNIO JOSEFRAN DE OLIVEIRA BASTOS**

**SELECT BFPRT: ESCOLHA DO K-ÉSIMO MAIOR ELEMENTO DE UMA LISTA EM  
TEMPO LINEAR**

**ALUNO: IZAIAS MACHADO PESSOA NETO**

**MATRÍCULA: 497372**

**SOBRAL**

**2023**

## 1 INTRODUÇÃO

Dado um vetor  $v$  qualquer com  $n$  números, deseja-se saber qual o  $i$ -ésimo maior valor desse vetor. Nesse sentido, com  $i = 1$ , a saída para esse problema seria o maior elemento do vetor e assim por diante. De modo que quando  $i = n$ , a saída deve ser o menor elemento de  $v$ <sup>1</sup>.

Para resolver esse problema, pode ser feita uma decrescente ordenação do vetor e procurado o  $i$ -ésimo maior valor na posição  $i - 1$  (com índice inicial sendo zero). Entretanto, os melhores algoritmos de ordenação tem complexidade  $O(n \log(n))$ , tornando impossível realizar a seleção desse problema por meio de ordenação em tempo linear (CORMEN *et al.*, 2001).

Para tanto, o algoritmo de seleção linear Select-BFPRT de Blum, Floyd, Pratt, Rivest e Tarjan (BLUM *et al.*, 1973) pode ser utilizado para escolher o  $i$ -ésimo maior valor de um vetor. Para tanto, esse algoritmo utiliza o Partition-BFPRT, que divide o vetor em sucessivos grupos de tamanho  $R$ , tira as medianas de cada um dos grupos e as posiciona no início do vetor. Feito isso, o Partition-BFPRT chama o Select-BFPRT para encontrar qual a mediana das medianas.

Tendo em vista a definição do problema, é necessário escolher um bom tamanho de partição  $R$  para o Partition-BFPRT, a fim de minimizar o tempo de execução do Select-BFPRT. Ao invés de realizar uma análise matemática complexa, os valores de  $R$  podem ser comparados experimentalmente, ao avaliar o comportamento do algoritmo Select-BFPRT para um série de instâncias aleatória.

Foram geradas uma série de instâncias aleatórias e para cada uma das instâncias foi executado o Select-BFPRT. Para cada uma das instâncias foi gerado um  $i$  aleatório, executado para  $R = (3, 5, 7, 9, 11)$  e os tempos de execução coletados. Por fim, foi feita a média e o desvio padrão das execuções para cada  $R$ .

---

<sup>1</sup> A definição do problema para o  $i$ -ésimo menor valor é feita em (CORMEN *et al.*, 2001), pág. 183

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo do trabalho busca reunir o conhecimento utilizado para a implementação dos algoritmos Partition (Seção 2.1), Partition-BFPRT (Seção 2.2) e Select-BFPRT (Seção 2.3). Além disso, é feita uma prova do limite superior para a complexidade temporal do Select-BFPRT (Seção 2.4).

### 2.1 Partition

O algoritmo Partition escolhe o último elemento do vetor como pivô e a partir disso, faz com que todos os elementos menores que o pivô fiquem a sua esquerda e os elementos maiores que ele a sua direita. Ao fim da execução do Partition, é garantido que o pivô está na mesma posição  $q$  que estaria caso o vetor estivesse ordenado. Com isso, sabe-se que o pivô é o  $k$ -ésimo maior elemento do vetor, onde  $k = r - q + 1$ .

### 2.2 Partition BFPRT

Com essa ideia, é possível criar um algoritmo Select que dado a  $i$ -ésima posição buscada, chama o Partition e consegue saber se o valor  $i$  procurado está a esquerda ou a direita do pivô. Com isso, esse algoritmo se chama recursivamente passando um novo  $i$  e o lado escolhido do vetor em que o  $i$ -ésimo maior elemento se encontra. Entretanto, note que se a escolha de pivôs for ruim, a complexidade do algoritmo deve mudar drasticamente. Por isso, ao invés de escolher sempre o último pivô como no Partition ou escolher um pivô aleatório, pode ser usado o algoritmo Partition-BFPRT, que tem complexidade temporal  $O(n)$ .

O Partition-BFPRT, divide um vetor  $A[p...r]$  em sucessivos grupos de tamanho um tamanho fixo  $R$  e os ordena de um por um. Após a ordenação, seleciona as medianas de cada um dos grupos e as posiciona no início do vetor. Com isso, é chamado o algoritmo Select-BFPRT para  $A[1...R]$ , com  $i = \lceil r/2 \rceil$ , para escolher a mediana das medianas.

### 2.3 Algoritmo Select BFPRT

A implementação realizada do Select-BFPRT (BLUM *et al.*, 1973) é apresentada na Listagem 2.3.1. O algoritmo tem como entrada um vetor, uma posição inicial  $p$ , posição final  $r$  e também um  $i$ , correspondente ao  $i$ -ésimo maior valor procurado. Inicialmente, como se

procura o  $i$ -ésimo maior valor do vetor, e esse algoritmo realiza isso de forma recursiva, o caso base é quando  $p = r$ , onde o vetor tem somente um elemento, por isso nessa situação o índice dessa única posição do vetor é retornada.

Nesse algoritmo,  $q$  é o índice do pivô que divide o vetor, obtido por meio da chamada do Partition-BFPRT. Ao rodar o partition, garante-se que pelo menos o pivô vai estar na mesma posição que estaria caso a lista de valores estivesse ordenada. Nesse sentido, a diferença  $k = r - q + 1$  entre o fim do vetor  $r$  e o índice do pivô  $q$  informa qual é a  $k$ -ésima maior posição que o valor do índice  $q$  ocupa. Caso  $k$  for igual ao  $i$  procurado,  $i$ -ésimo maior valor é o próprio pivô, por isso é retornado seu índice  $q$ .

Caso  $i > k$ , então o valor procurado é menor que o pivô. Com isso, pode ser feita a chamada recursiva do Select-BFPRT somente para o lado que é menor que o pivô. Entretanto, quando  $i > k$ , o  $i$ -ésimo maior valor do vetor  $A[p...r]$  é diferente do  $i$ -ésimo maior valor de  $A[p...q - 1]$ . Isso ocorre porque o valor  $i$  que está sendo procurado é o  $i$ -ésimo maior valor do vetor por completo, mas ao dividir o vetor em um novo  $A[p...q - 1]$ , agora o valor procurado não pode ser mais o  $i$ -ésimo maior valor do vetor, os  $k$  maiores valores que são compostos pelo pivô e os elementos a sua direita foram removidos do vetor. Nesse sentido, o valor de  $i$  para a nova chamada recursiva é  $i - k$ . Já caso  $i < k$ , então o valor procurado é maior que o pivô, por isso, pode ser feita uma chamada recursiva buscando o  $i$ -ésimo maior valor a direita do pivô, em  $A[q + 1...r]$ .

```

1 def select_bfpert(self, array, p, r, i):
2     n = r - p + 1
3
4     if p == r:
5         return p
6
7     q = self.partition_bfpert(array, p, r)
8     k = r - q + 1
9
10    if i == k:
11        return q
12
13    if i > k:
14        return self.select_bfpert(array, p, q - 1, i - k)
15
16    return self.select_bfpert(array, q + 1, r, i)

```

Listagem 2.3.1 – Algoritmo Select-BFPRT

Para exemplificar o fato do  $i$ -ésimo maior valor de  $A[p \dots r]$  ser diferente do  $i$ -ésimo maior valor de  $A[p \dots q - 1]$  quando  $i > k$ , ao buscar o quarto maior  $i = 4$  no vetor  $v = (1, 2, 3, 7, 9)$ , que tem pivô igual a 3 e o pivô é o terceiro maior valor do vetor  $k = 3$ , é feita a chamada recursiva para o lado esquerdo do pivô, porque o procurado é menor que o pivô. Na chamada recursiva se tem  $v' = (1, 2)$  e não seria possível procurar o quarto maior valor do vetor, porque porém retirados os outros  $k$  maiores elementos desse vetor. Então, na realidade, basta procurar o  $i - k$  maior valor do vetor  $v'$ , que seria  $i - k = 4 - 3 = 1$  o maior elemento do vetor.

Utilizando o mesmo  $v$  para procurar  $i = 2$ , é feita uma chamada recursiva para o lado direito do vetor, porque o valor procurado é maior que o pivô. Como  $i < k$ , o pivô utilizado na primeira chamada é o terceiro maior elemento do vetor  $k = 3$ , os outros  $k - 1$  maiores elementos do vetor estão na seleção  $A[q + 1 \dots r]$ , pois são maiores que o pivô. Ao contrário do que acontece no caso anterior, os  $k - 1$  maiores elementos não foram removidos, não havendo a necessidade de alterar o  $i$ . Logo, o segundo maior valor para  $v' = (7, 9)$  é também o segundo maior valor para  $v$ .

## 2.4 Complexidade do Select BFPRT

Considerando que a quantidade de valores  $n$  na lista é divisível por  $R = 5$ , desejamos encontrar um limite superior para a complexidade do algoritmo Select-BFPRT<sup>1</sup>. Para a ordenação de um grupo, como  $R$  é fixo, é gasto uma complexidade constante, logo para ordenar e mover as medinas para o início do vetor é gasto  $O(n)$ . Ao chamar o Partition-BFPRT é feita também uma chamada para Select-BFRT, que gasta  $T(n/5)$ , pois existem  $\lceil n/5 \rceil$  grupos.

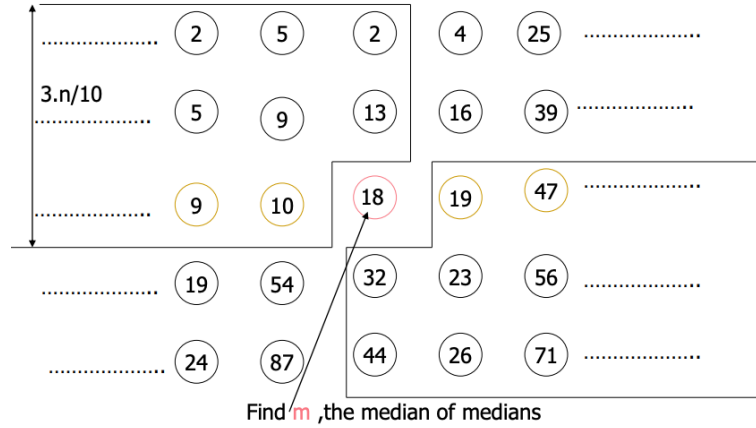
Considerando um  $K = 5$ , após realizar a média das medianas, no mínimo três elementos dos grupos em que cuja mediana é menor que o pivô são maiores que o pivô. Conforme destacano na ilustração da Figura 1, no mínimo 30% dos valores serão menores que o pivô. Nesse sentido, os outros 70% do vetor podem ser maiores que o pivô. Por isso, para a chamada recursiva, no pior caso, temos  $T(7/10 \cdot n)$ .

$$\begin{aligned} T(n) &\leq T\left(\frac{n}{5}\right) + O(n) + T\left(7 \cdot \frac{n}{10}\right) = \\ &= T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(7 \cdot \frac{n}{10}\right) + O(n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Desejamos encontrar um limite superior para a complexidade do Select-BFRT, para tanto, assumimos a hipótese que o algoritmo é limitado superiormente por uma função linear

<sup>1</sup> Ideia de prova retirada de (CORMEN *et al.*, 2001), pág. 189

Figura 1 – Ilustração do melhor caso na divisão usando Partition-BFPRT



Fonte: retirado de (LABER, 2020)

$T(n) \leq c \cdot n$ . A Equação 2.2 descreve um outro limite superior, por meio do qual vamos encontrar um valor para a constante  $c$ . Entretanto, a constante  $a$  que limita a parte linear é diferente de  $c$ .

$$\begin{aligned}
 T(n) &\leq \frac{n}{5} \cdot c + \frac{7n}{10} \cdot c + an \\
 &= \frac{n}{5} \cdot c + \frac{7n}{10} \cdot c + an \\
 &= \frac{9}{10}cn + an
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dado o limite superior de  $T(n)$ , que depende de  $c$  e  $a$  e também que  $T(n) \leq nc$ , pode-se definir  $c$  em função de  $a$ , o que é feito na Equação 2.3. Nessa equação é encontrado que  $c$  deve ser no mínimo dez vezes maior que  $a$  ( $c \geq 10a$ ).

$$nc = \frac{9}{10}cn + an \rightarrow c \geq 10a \tag{2.3}$$

Substituindo com  $a = 1$ , então  $c = 10$ , isso faz com que  $T(n) \leq 9n + n = 10n$ . Portanto, a complexidade do algoritmo Select-BFPRT é  $O(n)$ , pois é limitada por uma função linear.

■

### 3 METODOLOGIA

Para comparar experimentalmente diferentes valores de  $K$  para tamanho das partições, foi elaborado um programa<sup>1</sup> que monta diversas instâncias de tamanho  $n$  e salva seus tempos de execução. Foram escolhidos os valores  $R = (3, 5, 7, 9, 11)$  e para cada instância gerada é executado o algoritmo Select-BFPRT, a fim de comparar o comportamento do algoritmo com diferentes valores de  $K$  para uma mesma instância.

Cada instância é composta inicialmente por um vetor  $v$  com  $n$  valores. O vetor  $v$  é montado preenchendo sequencialmente o vetor com valores de 0 até  $n - 1$  e após isso os valores do vetor são permutados aleatoriamente. Além do vetor, o algoritmo Select-BFPRT também recebe um  $i$  para encontrar o  $i$ -ésimo maior elemento do vetor  $v$ , esse  $i$  é gerado aleatoriamente, podendo ser entre 1 e  $n$ .

O algoritmo tem dois comportamentos, gerar uma quantidade de instâncias aleatórias de tamanho  $n$  e escrever os resultados em um arquivo *csv*, ou também digitar uma instância de um tamanho qualquer. Caso seja escolhido gerar várias instâncias aleatórias, é possível se aproveitar dos múltiplos núcleos do processador e executar mais de um processo simultaneamente. Por isso, quando se escolhe gerar várias instâncias é perguntado ao usuário a quantidade de processos simultâneos que devem ser instanciados.

Após as execuções dos experimentos, os arquivos *csv* podem ser processados calculando para cada uma das variações o tempo médio das execuções e desvio padrão desse tempo. Com isso, é possível fazer um comparativo que visa embasar a decisão de utilizar um tamanho específico de partição.

---

<sup>1</sup> O código está disponível em [https://github.com/izaiasmachado/cana/tree/main/select\\_bfpert](https://github.com/izaiasmachado/cana/tree/main/select_bfpert)

## 4 RESULTADOS

A Tabela 1 apresenta o resultado da execução de 60000 instâncias, com tamanho de instância igual a  $n = 10000$ . Os resultados mostram que os tamanhos de partição 9 e 11 tem os tempos de execução muito baixos se comparado com os demais tamanhos de partição. Além disso, na Tabela 1, o destaque vai para o tamanho de partição igual a 11, pois obteve também o menor desvio padrão.

Espera-se com essa interpretação que os valores com menor desvio padrão se comportem com tempos médios mais uniformes. Dito isso, com o tamanho de partição 5 apesar de ter um tempo de execução maior que 7, 9 e 11, por ter um maior desvio padrão podem ser encontrados casos com tempo de execução bem menores que as demais partições, o mesmo ocorre para o maior tempo de execução, em que os demais tamanhos de partição (exceto o de 3) podem ter vantagem.

Tabela 1 – Resultado primeiro experimento

Tamanho de Partição ( $R$ )	Tempo Médio de Execução ( $s$ )	Desvio Padrão
3	0,342414	0,015230
5	0,247043	0,009250
7	0,229492	0,008116
9	0,224176	0,007463
11	0,222447	0,007307

Fonte: elaborado pelo autor (2023).

Já na Tabela 2, foram feitas 12000 instâncias, cada uma com  $n = 100000$ . Esse tamanho maior de instâncias permite compreender melhor o comportamento do algoritmo. Como a complexidade encontrada na Seção 2.4 deste trabalho é um limite superior, não se pode simplesmente comparar valores entre as duas tabelas de resultado. Apesar disso, o comportamento dos tempos de execução das instâncias de tamanho 9 e 11 são similares ao que foi encontrado no primeiro experimento.

Mesmo que o comportamento dos tempos de execução tenha sido similar, o desvio padrão cresceu muito com na Tabela 2 se comparada com a Tabela 1. Isso pode ser explicado porque a quantidade de grupos cresce na ordem de 10 do primeiro experimento para o segundo. Isto é, há muitos casos com bons tempos de execução, mas da mesma forma, existem muitos casos com tempos ruins de execução. Dito isso, com tamanho de instâncias  $n = 100000$  o destaque vai para um tamanho de partição maior  $R = 11$ , pois teve um tempo de execução e o menor desvio padrão.



Tabela 2 – Resultado segundo experimento

Tamanho de Partição ( $R$ )	Tempo Médio de Execução ( $s$ )	Desvio Padrão
3	5,093321	12,740226
5	3,700169	16,541186
7	3,265799	12,181696
9	3,162925	12,181599
11	3,330611	17,046008

Fonte: elaborado pelo autor (2023).

## 5 CONCLUSÕES

Os resultados dos experimentos, por utilizarem um tamanho fixo de instância não permitiu que fosse encontrado experimentalmente um caso médio para a complexidade temporal desse algoritmo, visto que seria necessário variar também o tamanho da instância. Mas nesse caso, foi possível observar um tempo de execução médio para os algoritmos dado um tamanho de entrada  $n$  e também um tamanho de partição  $R$ .

Nesse contexto, observou-se que para as instâncias com tamanho  $n = 10000$ , ordenar grupos de tamanho  $R = 11$  pode ser mais vantajoso para encontrar um tempo médio de execução mais consistente. Ao utilizar valores com tempo igualmente baixo, mas desvio padrão maior, espera-se que o tempo de execução seja mais distante dos tempos médios, podendo haver tempos bons e também tempos ruins. Caso seja uma vantagem para uma aplicação o fato de ter tempos bons de execução esporadicamente, pode ser utilizado um  $R = 7$  (para instâncias de tamanho  $n = 10000$ ).

Outrossim, no segundo experimento foi utilizado um tamanho de instância  $n = 100000$ , em o tamanho de partição  $R = 9$  obteve o menor desvio padrão e também menor tempo médio de execução. Caso a aplicação possa se beneficiar de tempos bons esporadicamente, pode se utilizado  $K = 11$ , que tem o maior desvio padrão e tempo médio de execução não diferente do obtido para  $R = 9$ .

Em resumo, a escolha tamanho de partição  $R$  deve ser baseada nas características específicas do problema e nos recursos disponíveis. O limite superior obtido na Seção 2.4 pode ser útil para realizar uma implementação do Select-BFPRT a fim de atender uma aplicação específica. Já as análises e resultados dispostos no Capítulo 4 devem ser considerados ao escolher um tamanho de partição. Além disso, o código desenvolvido no Capítulo 3 pode ser utilizado para experimentar em um ambiente próprio e o código modificado para avaliar como os diferentes tamanhos de partição se comportam para uma entrada com outras características.

## REFERÊNCIAS

BLUM, M.; FLOYD, R. W.; PRATT, V. R.; RIVEST, R. L.; TARJAN, R. E. *et al.* Time bounds for selection. **J. Comput. Syst. Sci.**, v. 7, n. 4, p. 448–461, 1973. Disponível em: <http://people.csail.mit.edu/rivest/pubs/BFPRT73.pdf>.

CORMEN, T.; LEISERSON, C.; RIVEST, R.; STEIN, C. **Introduction To Algorithms**. MIT Press, 2001. (Mit Electrical Engineering and Computer Science). ISBN 9780262032933. Disponível em: [https://books.google.com.br/books?id=NLngYyWFl\\_YC](https://books.google.com.br/books?id=NLngYyWFl_YC).

LABER, E. S. **Mediana em Tempo Linear**. 2020. Disponível em: <https://www-di.inf.puc-rio.br/~laber/median-lineartime.pdf>.